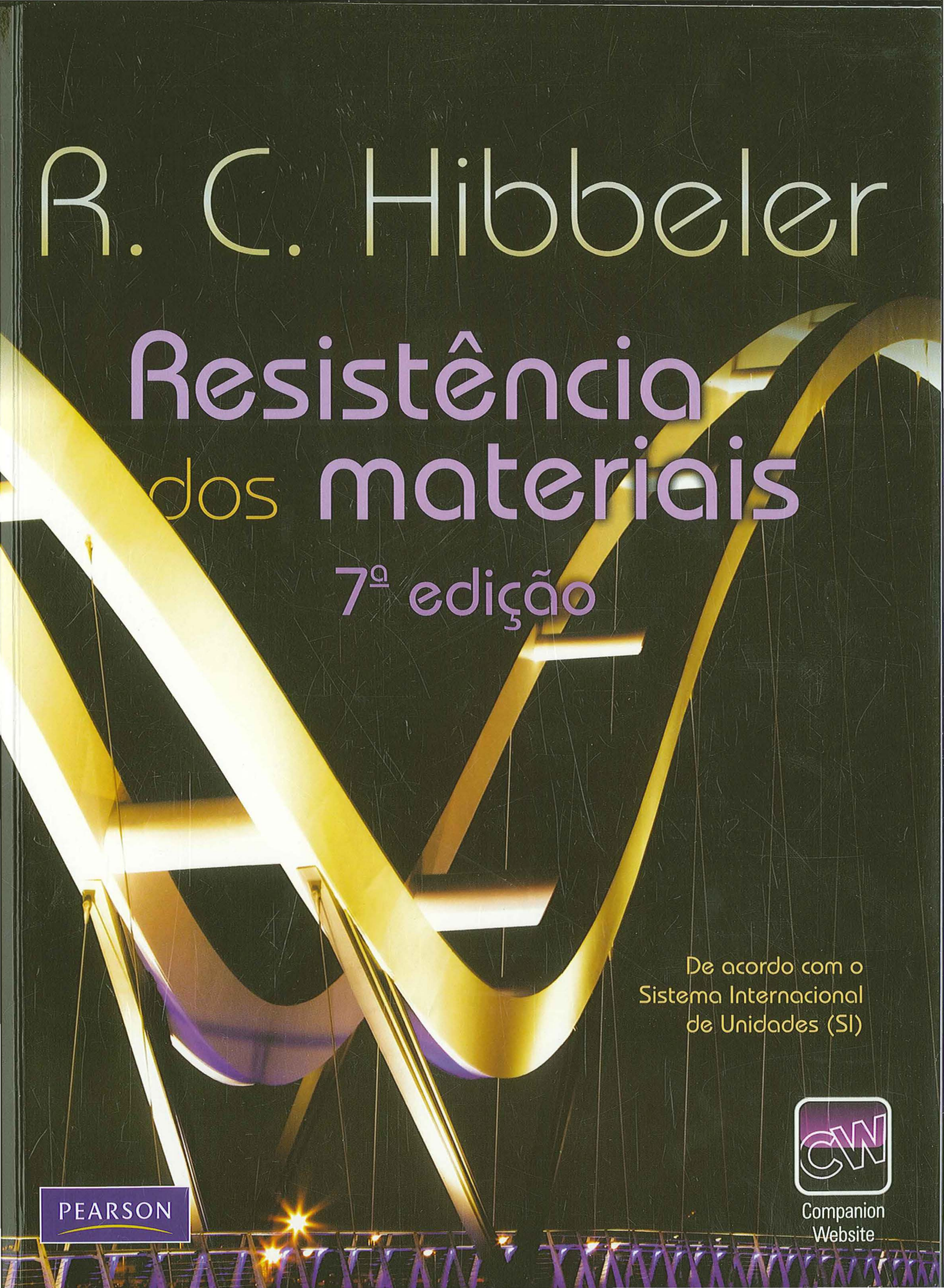


R. C. Hibbeler

Resistência dos materiais

7ª edição

De acordo com o Sistema Internacional de Unidades (SI)

PEARSON

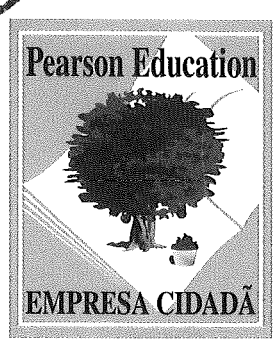
Companion Website

PEARSON

Resistência dos materiais

7ª edição

Longman • Makron Books • Prentice Hall • Addison Wesley
PEARSON
CORTESIA
UNIVERSITÁRIO
VENDA PROIBIDA
(11) 2178-8665



Longman • Makron Books • Prentice Hall • Addison Wesley
PEARSON
CORTESIA
UNIVERSITÁRIO
VENDA PROIBIDA
(11) 2178-8665

R. C. Hibbeler

Resistência dos materiais

7ª edição

Conversão para SI

S. C. Fan
Nanyang Technological University

Tradução
Arlete Simille Marques
Engenheira Química – Universidade Federal do Paraná

Revisão técnica
Sebastião Simões da Cunha Jr.
Instituto de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Itajubá

CÓPIA NÃO AUTORIZADA É CRIME
ABDR
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
RESPEITE O DIREITO AUTORAL
EDITORA AFILIADA

PEARSON
São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

© 2010 Pearson Education do Brasil
© 2008 Pearson Education South Asia Pte Ltd.
Título original: Mechanics of materials, seventh edition
Tradução autorizada a partir da edição de Cingapura, adaptada da edição original em inglês Mechanics of materials, 7th edition, de Russell Hibbeler, publicada pela Pearson Education, Inc., sob o selo Prentice Hall.
Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Supervisor de produção editorial: Marcelo Françozo
Editora: Gabriela Trevisan
Preparação: Renata Gonçalves e Sonia Midori
Revisão: Regiane Miyashiro
Capa: Alexandre Mieda
Editoração eletrônica: ERJ Composição Editorial

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Hibbeler, Russell Charles
Resistência dos materiais / Russell Charles Hibbeler ;
tradução Arlete Simille Marques ;
revisão técnica Sebastião Simões da Cunha Jr. —
7. ed. — São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2010.

Título original: Mechanics of materials.
ISBN 978-85-7605-373-6

1. Estruturas — Análise (Engenharia)
2. Resistência dos materiais I. Título.

09-10017 CDD-620.112

Índice para catálogo sistemático:
1. Resistência dos materiais : Engenharia 620.112

2009
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil Ltda.,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Tel.: (11) 2178-8686 Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

Ao estudante

Com a esperança de que esta obra estimule o
interesse pela resistência dos materiais
e proporcione um guia aceitável para o entendimento da matéria.

Sumário

1. Tensão 1

1.1 Introdução 1

1.2 Equilíbrio de um corpo deformável 1

1.3 Tensão 14

1.4 Tensão normal média em uma barra com carga axial 15

1.5 Tensão de cisalhamento média 20

1.6 Tensão admissível 32

1.7 Projeto de acoplamentos simples 33

2. Deformação 47

2.1 Deformação 47

2.2 Conceito de deformação 47

3. Propriedades mecânicas dos materiais 57

3.1 O ensaio de tração e compressão 57

3.2 O diagrama tensão–deformação 58

3.3 Comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis 60

3.4 Lei de Hooke 63

3.5 Energia de deformação 64

3.6 Coeficiente de Poisson 73

3.7 O diagrama tensão–deformação de cisalhamento 74

*3.8 Falha de materiais devida à fluência e à fadiga 76

4. Carga axial 85

4.1 Princípio de Saint-Venant 85

4.2 Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial 86

4.3 Princípio da superposição 95

4.4 Elemento com carga axial estaticamente indeterminado 96

4.5 Método de análise de força para elementos carregados axialmente 100

4.6 Tensão térmica 106

4.7 Concentrações de tensão 111

*4.8 Deformação axial inelástica 114

*4.9 Tensão residual 116

5. Torção 125

5.1 Deformação por torção de um eixo circular 125

5.2 A fórmula da torção 126

5.3 Transmissão de potência 132

5.4 Ângulo de torção 139

5.5 Elementos estaticamente indeterminados carregados com torque 150

*5.6 Eixos maciços não circulares 155

*5.7 Tubos de parede fina com seções transversais fechadas 157

5.8 Concentração de tensão 165

*5.9 Torção inelástica 167

*5.10 Tensão residual 172

6. Flexão 181

6.1 Diagramas de força cortante e momento fletor 181

6.2 Método gráfico para construir diagramas de força cortante e momento fletor 188

6.3 Deformação por flexão de um elemento reto 201

6.4 A fórmula da flexão 203

6.5 Flexão assimétrica 216

*6.6 Vigas compostas 224

*6.7 Vigas de concreto armado 229

*6.8 Vigas curvas 231

6.9 Concentrações de tensão 236

*6.10 Flexão inelástica 244

6.11 Tensão residual 251

7. Cisalhamento transversal 262

7.1 Cisalhamento em elementos retos 262

7.2 A fórmula do cisalhamento 263

7.3 Tensões de cisalhamento em vigas 264

7.4 Fluxo de cisalhamento em estruturas compostas por vários elementos 276

7.5 Fluxo de cisalhamento em elementos de paredes finas 285

*7.6 Centro de cisalhamento para seções transversais abertas 289

8. Cargas combinadas 300

8.1 Vasos de pressão de paredes finas 300

8.2 Estado de tensão causado por cargas combinadas 304

9. Transformação de tensão 321

9.1 Transformação de tensão no plano 321

9.2 Equações gerais de transformação de tensão no plano 324

9.3 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima no plano 327

9.4 Círculo de Mohr — tensão no plano 338

9.5 Tensão em eixos provocada por carga axial e torção 345

9.6 Variações de tensão ao longo de uma viga prismática 346

9.7 Tensão de cisalhamento máxima absoluta 351

10. Transformação da deformação 361

10.1 Deformação plana 361

10.2 Equações gerais de transformação no plano de deformação 362

*10.3 Círculo de Mohr — plano de deformação 367

*10.4 Deformação por cisalhamento máxima absoluta 373

10.5 Rosetas de deformação 376

10.6 Relações entre o material e suas propriedades 379

*10.7 Teorias de falhas 387

11. Projeto de vigas e eixos 401

11.1 Base para o projeto de vigas 401

11.2 Projeto de viga prismática 401

*11.3 Vigas totalmente solicitadas 411

*11.4 Projeto de eixos 413

12. Deflexão em vigas e eixos 421

12.1 A linha elástica 421

12.2 Inclinação e deslocamento por integração 423

*12.3 Funções de descontinuidade 435

*12.4 Inclinação e deslocamento pelo método dos momentos de área 442

12.5 Método da superposição 452

12.6 Vigas e eixos estaticamente indeterminados 457

12.7 Vigas e eixos estaticamente indeterminados — método da integração 458

*12.8 Vigas e eixos estaticamente indeterminados — método dos momentos de área 461

12.9 Vigas e eixos estaticamente indeterminados — método da superposição 466

13. Flambagem de colunas 477

13.1 Carga crítica 477

13.2 Coluna ideal com apoios de pinos 478

13.3 Colunas com vários tipos de apoio 483

*13.4 A fórmula da secante 492

*13.5 Flambagem inelástica 497

*13.6 Projeto de colunas para cargas concêntricas 502

*13.7 Projeto de colunas para cargas excêntricas 510

14. Métodos de energia 519

14.1 Trabalho externo e energia de deformação 519

14.2 Energia de deformação elástica para vários tipos de carga 522

14.3 Conservação de energia 531

14.4 Carga de impacto 535

*14.5 Princípio do trabalho virtual 543

*14.6 Método das forças virtuais aplicado a treliças 545

*14.7 Método das forças virtuais aplicado a vigas 551

*14.8 Teorema de Castigliano 558

*14.9 Teorema de Castigliano aplicado a treliças 558

*14.10 Teorema de Castigliano aplicado a vigas 561

Apêndices

A Propriedades geométricas de uma área 568

A.1 Centroide de uma área 568

A.2 Momento de inércia de uma área..... 570

A.3 Produto de inércia para uma área 572

A.4 Momentos de inércia para uma área em torno de eixos inclinados..... 574

A.5 Círculo de Mohr para momentos de inércia..... 576

B Propriedades geométricas de perfis estruturais 582

C Inclinações e deflexões de vigas 586

D Revisão de fundamentos de engenharia 588

Soluções parciais e respostas 599

Índice remissivo 628

Prefácio

O objetivo deste livro é oferecer ao estudante uma apresentação clara e minuciosa da teoria e da aplicação dos princípios fundamentais da resistência dos materiais. O entendimento é baseado na explanação do comportamento físico dos materiais sob carga e na subsequente modelagem desse comportamento para desenvolver a teoria. A ênfase recai sobre a importância de satisfazer os requisitos de equilíbrio, compatibilidade de deformação e comportamento do material.

Elementos novos e aprimorados

- **Material de revisão.** Foram acrescentadas novas seções de revisão no final de cada capítulo para atender às solicitações dos estudantes. Essas novas seções foram planejadas para ajudá-los a relembrar e estudar conceitos fundamentais dos capítulos.
- **Ilustrações.** Com base no impressionante retorno positivo em relação às ilustrações inseridas na edição anterior, aprimoramos 100 ilustrações adicionais como parte do programa de arte fotorrealista.
- **Problemas.** Nesta sétima edição, os problemas foram revisados, porém o equilíbrio entre aplicações fáceis, médias e difíceis foi mantido. Cada página do livro passou por uma revisão detalhada executada por três pessoas, além do autor, para verificar a precisão.

Conteúdo

O livro está organizado em 14 capítulos. O Capítulo 1 começa com uma revisão dos conceitos importantes da estática, seguida por uma definição formal de tensão normal e de cisalhamento e por uma discussão da tensão normal em eixos com cargas axiais e da tensão de cisalhamento média provocada por cisalhamento direto.

No Capítulo 2 são definidas as deformações normal e por cisalhamento, e no Capítulo 3 discutimos algumas das propriedades mecânicas importantes dos materiais. Tratamentos separados para carga axial, torção e flexão são apresentados nos capítulos 4, 5 e 6, respectivamente. Em cada um deles são considerados o comportamento linear elástico e o comportamento plástico do material. Além disso, também estão incluídos tópicos relacionados com concentrações de tensões e tensão residual. Cisalhamento transversal é abordado no Capítulo 7, juntamente com uma discussão de tubos de parede fina, fluxo de cisalhamento e centro de cisalhamento. O Capítulo 8 inclui uma discussão de vasos de pressão de parede fina e apresenta uma revisão parcial do material abrangido nos capítulos anteriores, como o estado de tensão que resulta de cargas combinadas. No Capítulo 9 são apresentados os conceitos de transformação de estados multiaxiais de tensão. De modo semelhante, o Capítulo 10 discute os métodos de transformação de deformação, incluindo a aplicação de várias teorias de falha. O Capítulo 11 apresenta um meio para fazer um resumo e uma revisão adicionais de material anterior, ao abordar aplicações de projetos de vigas e eixos. O Capítulo 12 examina vários métodos para calcular deflexões de vigas e eixos, além de incluir uma discussão sobre a determinação das reações desses elementos estruturais, se forem estaticamente indeterminados. O Capítulo 13 dá uma discussão de flambagem de colunas e, por fim, no Capítulo 14, são considerados o problema do impacto e a aplicação de vários métodos de energia para calcular deflexões.

As seções deste livro que contêm material mais avançado são indicadas por um asterisco sobrescrito (*). Se o tempo disponível permitir, alguns desses tópicos poderão ser incluídos no curso. Além do mais, este material oferece uma referência adequada para os princípios básicos, quando forem estudados em outros cursos, e pode ser usado como base para projetos especiais.

Método alternativo de abordagem. Alguns professores preferem abordar transformações de tensão e deformação *primeiro,* antes de discutir aplicações específicas de carga axial, torção, flexão e cisalhamento. Um método possível seria discutir primeiro a tensão e sua transformação, capítulos 1 e 9, seguidas por deformação e sua transformação, Capítulo 2 e a primeira parte do Capítulo 10. A discussão e os problemas nesses últimos capítulos foram estruturados de modo a possibilitar essa abordagem. Além disso, os conjuntos de problemas foram subdivididos de modo que esse material possa ser estudado sem conhecimento prévio dos capítulos envolvidos. Então, os capítulos 3 a 8 podem ser estudados sem perda de continuidade.

Elementos distintivos

Organização e abordagem. O conteúdo de cada capítulo é organizado em seções bem definidas que contêm uma explanação de tópicos específicos, problemas ilustrativos resolvidos e um conjunto de problemas como exercícios para o estudante. Os tópicos em cada seção estão reunidos em subgrupos específicos definidos por títulos. A finalidade é apresentar um método estruturado para introduzir cada nova definição ou conceito e tornar o livro conveniente para referência e revisão posteriores.

Sumário do capítulo. Na primeira página de cada capítulo são apresentados os "Objetivos do capítulo", que dão uma visão geral do material que será estudado.

Procedimentos para análise. Encontrado após várias seções do livro, esse recurso exclusivo oferece ao leitor um método lógico e ordenado para seguir quando aplicar a teoria. Os problemas dados como exemplo que vêm em seguida são resolvidos segundo o método descrito, de modo a esclarecer sua aplicação numérica. Entretanto, é preciso entender que, uma vez dominados os princípios e adquiridas a confiança e a capacidade de julgamento suficientes, o estudante poderá desenvolver seus próprios procedimentos para resolver problemas.

Pontos importantes. Esse recurso proporciona uma revisão ou resumo dos conceitos mais importantes apresentados em uma seção e destaca os pontos mais significativos que devem ser levados em conta na aplicação da teoria para resolver problemas.

Problemas como exemplos. Todos os problemas dados como exemplo são apresentados de um modo conciso e em estilo fácil de entender.

Problemas para o estudante resolver. Vários problemas neste livro descrevem situações reais encontradas na prática da engenharia. Esperamos que esse realismo estimule o interesse do estudante pela matéria e propicie-lhe um meio para desenvolver sua capacidade de, partindo da descrição física do problema, reduzi-lo a um modelo ou a uma representação simbólica aos quais possa aplicar os princípios aprendidos. Há, no livro, um equilíbrio aproximado entre problemas que usam unidades SI ou FPS. Além disso, tentamos organizar os conjuntos de problemas e ordená-los segundo o grau crescente de dificuldade. As respostas para todos os problemas, exceto o quarto de cada série são apresentadas na parte final deste livro. Um asterisco sobrescrito(*) colocado antes do número de um problema indica que sua resposta não foi apresentada. As respostas são dadas com precisão de três algarismos significativos, ainda que os dados para as propriedades dos materiais possam não ter tal grau de precisão. Embora pareça uma prática pouco recomendável, foi adotada simplesmente por consistência e para permitir ao estudante melhor oportunidade de verificar a validade de sua solução. Um quadrado preto (ícone quadrado) é usado para identificar problemas que requerem análise numérica ou uma aplicação de computador.

Apêndices. Os apêndices do livro oferecem uma fonte de revisão e listas de dados em forma de tabelas. O Apêndice A dá informações sobre o centroide e o momento de inércia de uma área. Os apêndices B e C apresentam tabelas com dados para formas estruturais e a deflexão e inclinações para vários tipos de vigas e eixos. O Apêndice D contém problemas típicos, acompanhados de soluções parciais, que são comumente usados em exames. Esses problemas também podem ser usados para revisão e prática na preparação para os exames.

Verificação tripla da precisão. A sétima edição foi submetida à nossa rigorosa revisão, denominada *triple accuracy checking* (verificação tripla de precisão). Além da revisão feita pelo autor de toda a arte gráfica e também de todas as páginas, o texto foi verificado por:

- Scott Hendricks, Virginia Polytechnic University
- Karim Nohra, University of South Florida
- Kurt Norlin, Laurel Technical Services

Recursos para os professores

- **Manual de soluções (em inglês).** Manual de soluções preparado pelo autor; também verificado pelo programa *triple accuracy checking*.
- **Recursos de apresentação.** Toda a arte gráfica do texto está disponível em slides em PowerPoint e formato JPEG. Esses arquivos estão disponíveis no endereço www.prenhall.com/hibbeler_br. Se você precisar de um login e uma senha para esse site, favor entrar em contato com seu representante local da Pearson Education.

Agradecimentos

Ao longo dos anos, este texto foi moldado pelas sugestões e comentários de muitos de meus colegas professores. Seu encorajamento e boa vontade de fazer críticas construtivas são muito apreciados e espero que aceitem este reconhecimento anônimo. Gostaria de acrescentar uma nota de agradecimento aos revisores das várias edições anteriores.

B. Aalami, *San Francisco State University*

R. Alvarez, *Hofstra University*

S. Biggers, *Clemson University*

R. Case, *Florida Atlantic University*

R. Cook, *University of Wisconsin—Madison*

J. Easley, *University of Kansas*

I. Elishakoff, *Florida Atlantic University*

A. Gilat, *Ohio State University*

J. Hashemi, *Texas Tech University*

H. Huntley, *University of Michigan—Dearborn*

J. Kayser, *Lafayette College*

P. Kwon, *Michigan State University*

W. Liddel, *Auburn University at Montgomery*

J. Ligon, *Michigan Technological University*

C. Lissenden, *Penn State University*

D. Liu, *Michigan State University*

A. Marcus, *University of Rhode Island*

G. May, *University of New Mexico*

D. Oglesby, *University of Missouri—Rolla*

A. Pelegri, *Rutgers—The State University of New Jersey*

D. Quesnel, *University of Rochester*

M. P. Rossow, *Southern Illinois University—Edwardsville*

S. Schiff, *Clemson University*

C. Sulzbach, *Colorado School of Mines*

C. Tsai, *Florida Atlantic University*

K. Walsh, *Arizona State University*

T.W.Wu, *The University of Kentucky*

Gostaria de agradecer também a todos os meus alunos que usaram as edições anteriores e ofereceram comentários para melhorar seu conteúdo.

Por fim, gostaria de agradecer à assistência de minha esposa, Cornelie (Conny), durante o tempo decorrido para preparar o manuscrito para publicação.

Gostaria muito de receber quaisquer comentários que vocês queiram fazer ou sugestões que queriam dar referentes ao conteúdo desta edição.

Russell Charles Hibbeler
hibbeler@bellsouth.net

1 Tensão

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, faremos uma revisão dos princípios importantes da estática e mostraremos como eles são usados para determinar as cargas resultantes internas em um corpo. Depois, apresentaremos os conceitos de tensão normal e tensão de cisalhamento e aplicações específicas da análise e do projeto de elementos sujeitos a carga axial ou a cisalhamento direto.

1.1 Introdução

A **resistência dos materiais** é um ramo da mecânica que estuda as relações entre as cargas *externas* aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças *internas* que agem no interior do corpo. Esse assunto também envolve o cálculo das *deformações* do corpo e proporciona o estudo de sua *estabilidade* quando sujeito a forças externas.

No projeto de qualquer estrutura ou máquina, *em primeiro lugar*, é necessário usar os princípios da estática para determinar as forças que agem sobre os vários elementos, bem como no seu interior. O tamanho dos elementos, sua deflexão e estabilidade dependem não só das cargas internas, mas também do tipo de material de que são feitos. Por consequência, a determinação precisa e a compreensão fundamental do *comportamento do material* serão de vital importância para o desenvolvimento das equações necessárias usadas na resistência dos materiais. Tenha sempre em mente que muitas fórmulas e regras de projeto definidas em códigos de engenharia e utilizadas na prática são baseadas nos fundamentos da resistência dos materiais, e, por essa razão, é muito importante entender os princípios dessa matéria.

Desenvolvimento histórico. A origem da resistência dos materiais (ou mecânica dos materiais) remonta ao início do século XVII, quando Galileu realizou experimentos para estudar os efeitos de cargas sobre hastes e vigas feitas de diferentes materiais. Entretanto, para a compreensão adequada desses efeitos, foi necessário fazer descrições experimentais precisas das propriedades mecânicas dos vários materiais. Os métodos utilizados passaram por uma notável melhoria no início do século XVIII. Nessa época, foram desenvolvidos estudos experimentais e teóricos sobre o assunto, principalmente na França, por cientistas extraordinários, como Saint-Venant, Poisson, Lamé e Navier. Como esses estudos se baseavam em aplicações da mecânica de corpos materiais, foram denominados "resistência dos materiais". Nos dias atuais, contudo, em geral são denominados "mecânica de corpos deformáveis" ou, simplesmente, "mecânica dos materiais" ou, como é mais comum, "resistência dos materiais".

Com o passar dos anos, depois de muitos dos problemas fundamentais da mecânica dos materiais terem sido resolvidos, tornou-se necessário usar técnicas avançadas da matemática e da computação para resolver problemas mais complexos. Como resultado, esse assunto se expandiu para outras áreas da mecânica avançada, como a *teoria da elasticidade* e a *teoria da plasticidade*. A pesquisa nessas áreas é contínua, não apenas para atender à necessidade de resolver problemas avançados de engenharia, mas também para justificar a maior utilização e as limitações a que está sujeita a teoria fundamental da mecânica dos materiais.

1.2 Equilíbrio de um corpo deformável

Haja vista o importante papel desempenhado pela estática no desenvolvimento e na aplicação da resistência dos materiais, também é muito importante que seus fundamentos sejam bem compreendidos. Por essa razão, revisaremos alguns dos princípios essenciais da estática que serão usados neste livro.

Cargas externas. Um corpo pode ser submetido a vários tipos de cargas externas; todavia, qualquer uma delas pode ser classificada como uma força de superfície ou uma força de corpo (Figura 1.1).

Forças de superfície. Como o nome sugere, ***forças de superfície*** são causadas pelo contato direto de um corpo

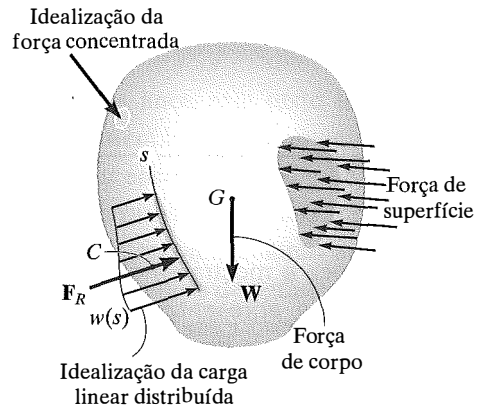


Figura 1.1

com a superfície de outro. Em todos os casos, essas forças estão distribuídas pela *área* de contato entre os corpos. Se essa área for pequena em comparação com a área da superfície total do corpo, então a força de superfície pode ser *idealizada* como uma única ***força concentrada,*** aplicada a um *ponto* do corpo. Por exemplo, a força do solo sobre as rodas de uma bicicleta pode ser considerada uma força concentrada quando estudamos a carga que age sobre a bicicleta. Se a carga de superfície for aplicada ao longo de uma área estreita, ela pode ser *idealizada* como uma ***carga distribuída linear***, $w(s)$. Neste caso, a carga é medida como se tivesse uma intensidade de força/comprimento ao longo da área, e é representada graficamente por uma série de setas ao longo da linha s. ***A força resultante $\mathbf{F}_R$ de $w(s)$ é equivalente à área sob a curva da carga distribuída, e essa resultante age no centroide C ou centro geométrico dessa área.*** A carga ao longo do comprimento de uma viga é um exemplo típico de aplicação frequente dessa idealização.

Força de corpo. A ***força de corpo*** é desenvolvida quando um corpo exerce uma força sobre outro, sem contato físico direto entre eles. Citamos como exemplo os efeitos causados pela gravitação da Terra ou seu campo eletromagnético. Embora as forças de corpo afetem cada uma das partículas que compõem o corpo, elas normalmente são representadas por uma única força concentrada que age sobre ele. No caso da gravidade, essa força é denominada ***peso*** do corpo e age no centro de gravidade deste.

Reações do apoio. As forças de superfície que se desenvolvem nos apoios ou pontos de contato entre corpos são denominadas ***reações***. Para problemas bidimensionais, isto é, corpos sujeitos a sistemas de forças coplanares, os apoios mais comuns são mostrados na Tabela 1.1. Observe cuidadosamente o símbolo usado para representar cada apoio e o tipo de reações que cada um exerce sobre o elemento de contato. Em geral, sempre podemos determinar o tipo de reação do apoio imaginando que o elemento a ele acoplado está sendo transladado ou está girando em uma determinada direção. ***Se o apoio impedir a translação em uma determinada direção, então uma força deve ser desenvolvida no elemento naquela direção. Da mesma forma, se o apoio impedir a rotação, um momento deve ser exercido no elemento.*** Por exemplo, um apoio de rolete só pode impedir translação na direção do contato, perpendicular ou normal à superfície. Por consequência, o rolete exerce uma força normal $\mathbf{F}$ sobre o elemento no ponto de contato. Como o elemento pode girar livremente ao redor do rolete, não é possível desenvolver um momento sobre ele.

Equações de equilíbrio. O equilíbrio de um corpo exige um ***equilíbrio de forças***, para impedir a translação ou um movimento acelerado do corpo ao longo de uma trajetória reta ou curva, e um ***equilíbrio de momentos***, para impedir que o corpo gire. Essas condições podem ser expressas matematicamente pelas duas equações vetoriais

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nessas fórmulas, $\Sigma \mathbf{F}$ representa a soma de todas as forças que agem sobre o corpo, e $\Sigma \mathbf{M}_O$ é a soma dos momentos de todas as forças em torno de qualquer ponto O dentro ou fora do corpo. Se estipularmos um sistema de coordenadas x, y, z com origem no ponto O, os vetores força e momento podem ser resolvidos em componentes ao longo dos eixos coordenados, e as duas equações apresentadas podem ser escritas como seis equações em forma escalar, ou seja,

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x &= 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

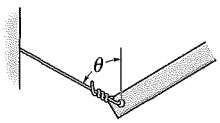
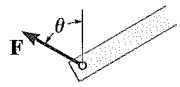
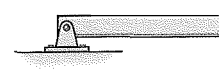
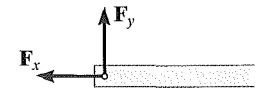
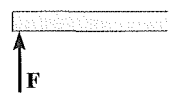
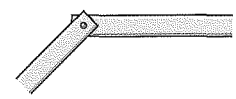
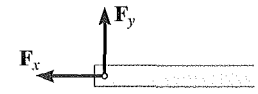
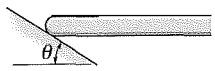
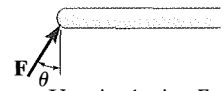
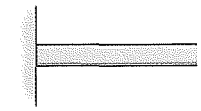
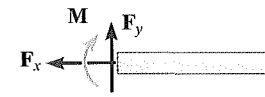
Na prática da engenharia, muitas vezes a carga sobre um corpo pode ser representada como um sistema de *forças coplanares*. Se for esse o caso, e se as forças encontrarem-se no plano x–y, então as condições de equilíbrio do corpo podem ser especificadas por apenas três equações de equilíbrio escalares, isto é,

$$\begin{aligned} \Sigma Fx &= 0 \\ \Sigma Fy &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Neste caso, se o ponto O for a origem das coordenadas, então os momentos estarão sempre dirigidos ao longo do *eixo z*, perpendicular ao plano que contém as forças.

A aplicação correta das equações de equilíbrio exige a especificação completa de todas as forças co-

TABELA 1.1

Tipo de acoplamento	Reação	Tipo de acoplamento	Reação
			
Cabo	Uma incógnita: F	Pino externo	Duas incógnitas: F_x, F_y
			
Rolete	Uma incógnita: F	Pino interno	Duas incógnitas F_x, F_y
			
Apoio liso	Uma incógnita: F	Apoio fixo	Três incógnitas: F_x, F_y, M

nhecidas ou desconhecidas que agem *sobre* o corpo. ***A melhor maneira de levar em conta essas forças é desenhar o diagrama de corpo livre do corpo.*** Certamente, se o diagrama de corpo livre for desenhado de maneira correta, os efeitos de todas as forças e momentos binários aplicados poderão ser levados em conta quando as equações de equilíbrio forem escritas.

Cargas resultantes internas. Uma das mais importantes aplicações da estática na análise de problemas de resistência dos materiais é poder determinar a força e o momento resultantes que agem no interior de um corpo e que são necessários para manter a integridade do corpo quando submetido a cargas externas. Como exemplo, considere o corpo mostrado na Figura 1.2a, mantido em equilíbrio pelas quatro forças externas.* Para obtenção das cargas internas que agem sobre uma região específica no interior de um corpo, é necessário usar o método das seções. O método exige que seja feita uma seção ou "corte" imaginário passando pela região onde as cargas internas deverão ser determinadas. Então, as duas partes do corpo são separadas e o diagrama de corpo livre de uma das partes é desenhado (Figura 1.2b). Podemos ver que há, na verdade, uma distribuição de força interna agindo sobre a área "exposta" da seção. Essas forças representam os efeitos do material que está na parte superior do corpo agindo no material adjacente na parte inferior.

* O peso do corpo não é mostrado, já que admitimos que é bem pequeno e, portanto, desprezível em comparação com as outras cargas.

Embora a distribuição exata da carga interna seja *desconhecida*, podemos usar as equações de equilíbrio para relacionar as forças externas sobre o corpo com a *força e o momento* resultantes da distribuição, $\mathbf{F}_R$ e $\mathbf{M}_{RO}$, *em qualquer ponto específico O* na área secionada (Figura 1.2c). Observe que $\mathbf{F}_R$ age no ponto O, embora seu valor calculado *não* dependa da localização desse ponto. Por outro lado, $\mathbf{M}_{RO}$ depende dessa localização, pois os braços do momento devem se estender de O até a linha de ação de cada força externa no diagrama de corpo livre. Mais adiante, mostraremos que, na maioria das vezes, o ponto O escolhido coincide com o *centroide* da área secionada e, portanto, sempre escolheremos essa localização para O, a menos que digamos o contrário. Além disso, se um elemento for longo e delgado, como no caso de uma haste ou viga, a seção considerada será, de modo geral, *perpendicular* ao eixo longitudinal do elemento. Esta seção é denominada ***seção transversal***.

Três dimensões. Mais adiante, mostraremos como relacionar as cargas resultantes, $\mathbf{F}_R$ e $\mathbf{M}_{RO}$, com a *distribuição de forças* na área secionada e, desse modo, desenvolver equações que possam ser usadas para análise e projeto. Todavia, para isso devemos considerar as componentes de $\mathbf{F}_R$ e $\mathbf{M}_{RO}$, que agem normal ou perpendicularmente à área secionada e no interior do plano da área (Figura 1.2d). Há quatro tipos diferentes de cargas resultantes que podem ser definidos:

Força normal, N. Essa força age perpendicularmente à área e se desenvolve sempre que as cargas externas tendem a empurrar ou puxar os dois segmentos do corpo.

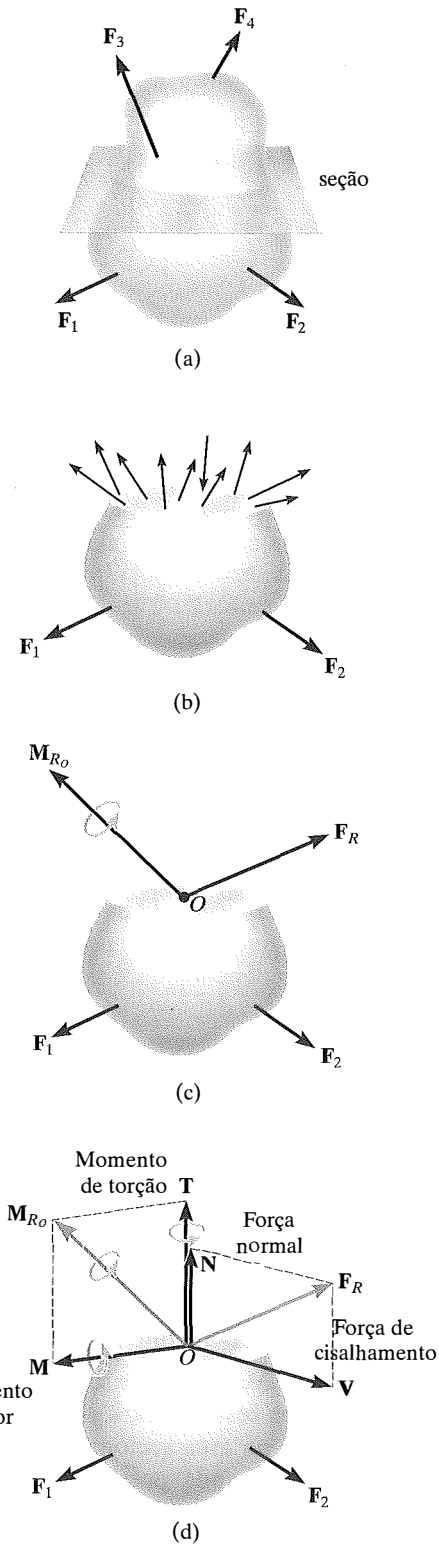


Figura 1.2

Força de cisalhamento, V. A força de cisalhamento encontra-se no plano da área e é desenvolvida quando as cargas externas tendem a provocar o deslizamento de um dos segmentos do corpo sobre o outro.

Momento de torção ou torque, T. Esse efeito é desenvolvido quando as cargas externas tendem a torcer um segmento do corpo com relação ao outro.

Momento fletor, M. O momento fletor é causado pelas cargas externas que tendem a fletir o corpo em torno de um eixo que se encontra no plano da área.

Observe que, neste livro, a representação gráfica de um momento ou torque é apresentada em três dimensões, como um vetor acompanhado pelo símbolo gráfico de uma seta curvada. Pela *regra da mão direita,* o polegar dá à seta o sentido do vetor e os dedos, ou curvatura da seta, indicam a tendência da rotação (torção ou flexão). Usando um sistema de coordenadas x, y, z, cada uma das cargas descritas pode ser determinada diretamente pelas seis equações de equilíbrio aplicadas a qualquer segmento do corpo.

Cargas coplanares. Se o corpo for submetido a um *sistema de forças coplanares* (Figura 1.3a), então haverá na seção apenas componentes da força normal, força de cisalhamento e momento fletor (Figura 1.3b). Se usarmos os eixos coordenados x, y, z com origem no ponto O, como mostrado no segmento à esquerda, então a solução direta para **N** pode ser obtida aplicando-se $\Sigma F_x = 0$, e **V** pode ser obtida diretamente de $\Sigma F_y = 0$. Por fim, o momento fletor $\mathbf{M}_O$ pode ser determinado diretamente pela soma dos momentos em torno do ponto O (o *eixo z*), $\Sigma \mathrm{M}_O = 0$ de modo a eliminar os momentos causados pelas forças desconhecidas **N** e **V**.

Os seguintes exemplos ilustram esse procedimento numericamente e também servem como revisão de alguns dos princípios importantes da estática.

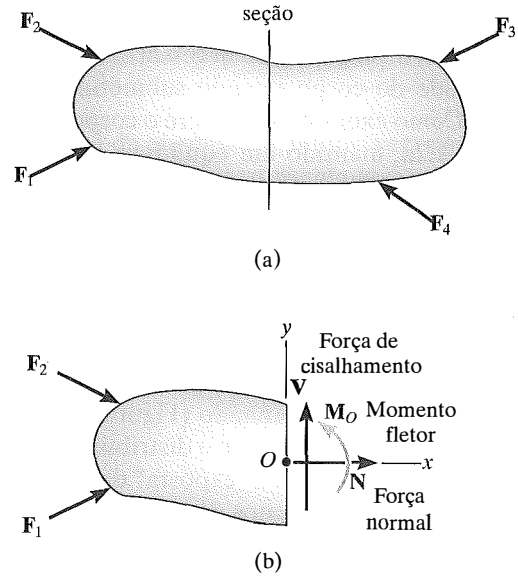


Figura 1.3

PONTOS IMPORTANTES

- *Resistência dos materiais* é um estudo da relação entre as cargas externas que agem sobre um corpo e a intensidade das cargas internas no interior do corpo.
- Forças externas podem ser aplicadas a um corpo como *cargas de superfície distribuídas ou concentradas* ou como *forças de corpo* que agem em todo o volume do corpo.
- Cargas distribuídas lineares produzem uma *força resultante* cujo *valor* é igual à *área* sob o diagrama de carga e cuja *localização* passa pelo *centroide* dessa área.
- Um apoio produz uma *força* em uma determinada direção sobre o elemento a ele acoplado se ele *impedir* a *translação* do elemento naquela direção e produz um *momento* sobre o elemento se ele *impedir a rotação.*
- As equações de equilíbrio $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0}$ devem ser satisfeitas de modo a impedir, respectivamente, a translação com movimento acelerado e a rotação de um corpo.
- Ao aplicarmos as equações de equilíbrio, é importante desenhar o diagrama de corpo livre antes, de modo a considerar todos os termos presentes nas equações.
- O método das seções é usado para determinar as cargas resultantes internas que agem sobre a superfície do corpo secionado. Em geral, essas resultantes consistem em uma força normal, uma força de cisalhamento, um momento de torção e um momento fletor.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O método das seções é usado para determinar as cargas resultantes *internas* em um ponto localizado sobre a seção de um corpo. Para obter essas resultantes, a aplicação do método das seções deve obedecer às etapas descritas a seguir.

Reação dos apoios

- Em primeiro lugar, decida qual segmento do corpo deverá ser considerado. Se esse segmento tiver um apoio ou um acoplamento com outro corpo, será necessário determinar as reações que agem no segmento do corpo escolhido *antes* de secioná-lo. Desenhe o diagrama de corpo livre para o *corpo inteiro* e aplique as equações de equilíbrio necessárias para obter essas reações.

Diagrama de corpo livre

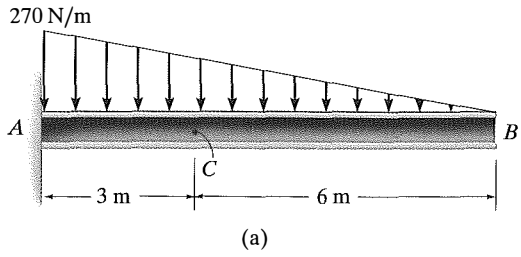
- Mantenha todas as cargas distribuídas externas, momentos, torques e forças que agem sobre o corpo em suas *localizações exatas* e, então, trace uma seção imaginária que passe pelo corpo no ponto onde as cargas resultantes internas devem ser determinadas.
- Normalmente, se o corpo representar um elemento de uma estrutura ou dispositivo mecânico, a seção será *perpendicular* ao eixo longitudinal do elemento.
- Desenhe um diagrama de corpo livre de um dos segmentos "cortados" e indique as resultantes desconhecidas **N**, **V**, **M** e **T** na seção. Essas resultantes geralmente são localizadas no ponto que representa o centro geométrico ou *centroide* da área secionada.
- Se o elemento estiver sujeito a um sistema de forças *coplanares*, somente **N**, **V** e **M** agem no centroide.
- Defina os eixos coordenados x, y, z com origem no centroide e mostre as componentes resultantes que agem ao longo dos eixos.

Equações de equilíbrio

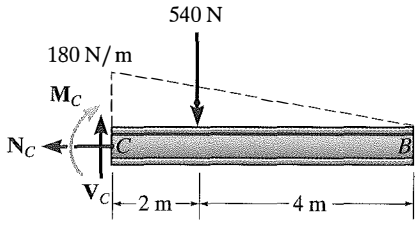
- Os momentos gerados na seção em torno de cada um dos eixos coordenados onde as resultantes agem devem ser somados. Isso elimina as forças desconhecidas **N** e **V** e permite uma solução direta para **M** (e **T**).
- Se a solução das equações de equilíbrio produzir um valor negativo para uma resultante, o *sentido direcional* admitido para a resultante será *oposto* ao mostrado no diagrama de corpo livre.

EXEMPLO 1.1

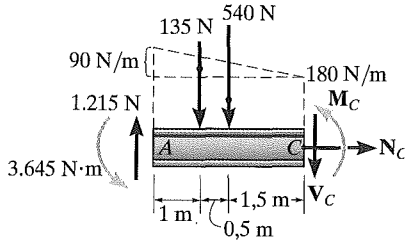
Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em C da viga mostrada na Figura 1.4a.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.4

SOLUÇÃO

Reações dos apoios. Este problema pode ser resolvido da maneira mais direta considerando o segmento CB da viga, já que, assim, as reações dos apoios em A não têm de ser calculadas.

Diagrama de corpo livre. Passar uma seção imaginária pela perpendicular ao eixo longitudinal da viga resulta no diagrama de corpo livre do segmento CB mostrado na Figura 1.4b. É importante manter a carga distribuída exatamente onde ela se encontra no segmento até que a seção tenha sido feita. Somente *depois* disso é que essa carga será substituída por uma única força resultante. Observe que a intensidade da carga distribuída em C é determinada por proporção, isto é, pela Figura 1.4a, $w/6\text{ m} = (270\text{ N/m})/9\text{ m}$, $w = 180\text{ N/m}$. O valor da resultante da carga distribuída é igual à área sob a curva de carga (triângulo) e age no centroide dessa área. Assim, $F = 1/2\,(180\text{ N/m})(6\text{ m}) = 540\text{ N}$, que age a $1/3(6\text{ m}) = 2\text{ m}$ de C, como mostra a Figura 1.4b.

Equações de equilíbrio. Aplicando as equações de equilíbrio, temos:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -N_C = 0$$

$$N_C = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad V_C - 540\text{ N} = 0$$

$$V_C = 540\text{ N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_C = 0; \qquad -M_C - 540\text{ N}\,(2\text{ m}) = 0$$

$$M_C = -1.080\text{ N·m} \qquad \textit{Resposta}$$

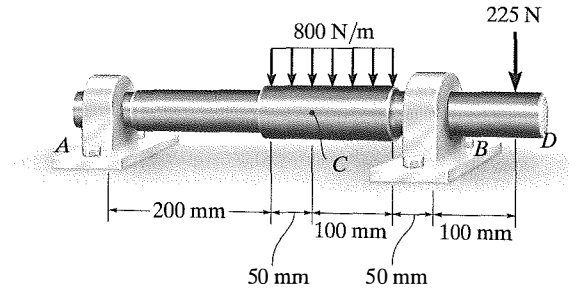
OBSERVAÇÃO: O sinal negativo indica que $\mathbf{M}_C$ age na direção oposta à mostrada no diagrama de corpo livre. Tente resolver esse problema usando o segmento AC, obtendo, em primeiro lugar, as reações do apoio em A, que são dadas na Figura 1.4c.

EXEMPLO 1.2

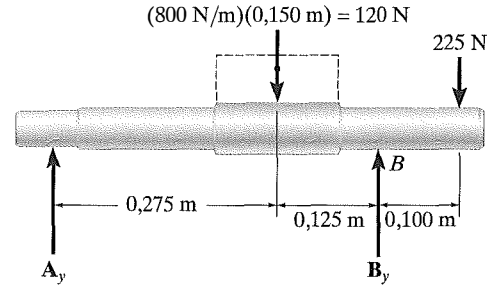
Determine as cargas resultantes internas que agem na seção transversal em C do eixo de máquina mostrado na Figura 1.5a. O eixo está apoiado em mancais em A e B, que exercem somente forças verticais no eixo.

SOLUÇÃO

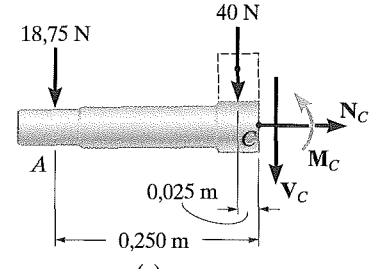
Resolveremos esse problema usando o segmento AC do eixo.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.5

Reações dos apoios. A Figura 1.5b mostra um diagrama de corpo livre do eixo inteiro. Visto que apenas o segmento *AC* deverá ser considerado, somente a reação em *A* terá de ser determinada. Por quê?

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \; -A_y(0{,}400\,\text{m}) + 120\,\text{N}(0{,}125\,\text{m}) - 225\,\text{N}(0{,}100\,\text{m}) = 0$$

$$A_y = -18{,}75\,\text{N}$$

O sinal negativo para A_y indica que $\mathbf{A}_y$ age no *sentido contrário* ao mostrado no diagrama de corpo livre.

Diagrama de corpo livre. Se passarmos uma seção imaginária perpendicular à linha de centro do eixo em *C*, obteremos o diagrama de corpo livre do segmento *AC* mostrado na Figura 1.5c.

Equações de equilíbrio.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad N_C = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -18{,}75\,\text{N} - 40\,\text{N} - V_C = 0$$

$$V_C = -58{,}8\,\text{N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \; M_C + 40\,\text{N}(0{,}025\,\text{m}) + 18{,}75\,\text{N}(0{,}250\,\text{m}) = 0$$

$$M_C = -5{,}69\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Os sinais negativos para V_C e M_C indicam que elas agem em direções opostas às mostradas no diagrama de corpo livre. Como exercício, calcule a reação em *B* e tente obter os mesmos resultados usando o segmento *CBD* do eixo.

EXEMPLO 1.3

O guindaste na Figura 1.6a é composto pela viga *AB* e roldanas acopladas, além do cabo e do motor. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em *C* se o motor estiver levantando a carga *W* de 2.000 N (≈ 200 kg) com velocidade constante. Despreze o peso das roldanas e da viga.

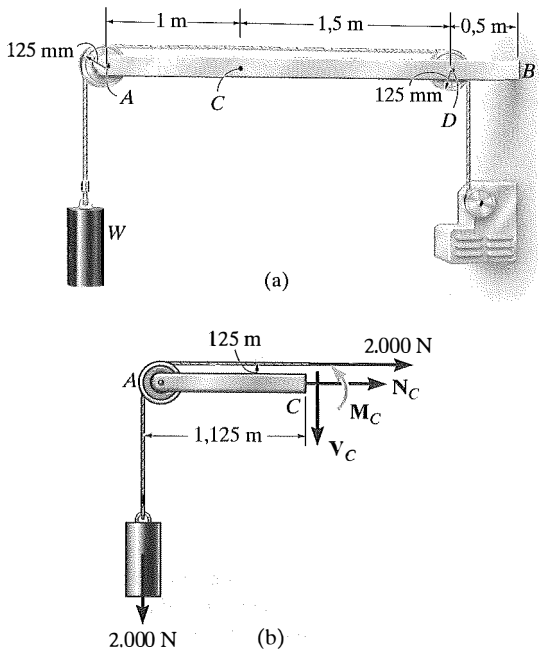


Figura 1.6

SOLUÇÃO

O modo mais direto de resolver este problema é seccionar o cabo e a viga em *C* e, então, considerar todo o segmento esquerdo.

Diagrama de corpo livre. Veja Figura 1.6b.

Equações de equilíbrio.

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 2.000\,\text{N} + N_C = 0$$

$$N_C = -2.000\,\text{N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -2.000\,\text{N} - V_C = 0$$

$$V_C = -2.000\,\text{N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$$

$$2.000\,\text{N}(1{,}125\,\text{m}) - 2.000\,\text{N}(0{,}125\,\text{m}) + M_C = 0$$

$$M_C = -2.000\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Como exercício, tente obter esses mesmos resultados considerando apenas o segmento de viga *AC*, isto é, retire a roldana em A da viga e mostre as componentes da força de 2.000 N da roldana que agem sobre o segmento *AC* da viga.

EXEMPLO 1.4

Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em *G* da viga de madeira mostrada na Figura 1.7a. Considere que as articulações em *A*, *B*, *C*, *D* e *E* estejam acopladas por pinos.

SOLUÇÃO

Reações dos apoios. Neste problema, consideraremos o segmento *AG* para análises. A Figura 1.7b mostra um diagrama de corpo livre da estrutura *inteira*. Verifique as reações calculadas em *E* e *C*. Observe, particularmente, que *BC* é um *elemento de duas forças*, pois somente duas forças agem sobre ele. Por essa razão, a reação em *C* deve ser horizontal, como mostrado.

Uma vez que *BA* e *BD* também são elementos de duas forças, o diagrama de corpo livre da articulação *B* é mostrado na Figura 1.7c. Novamente, verifique os valores das forças calculadas $\mathbf{F}_{BA}$ e $\mathbf{F}_{BD}$.

Diagrama de corpo livre. Usando o resultado obtido para $\mathbf{F}_{BA}$, a seção esquerda da viga é mostrada na Figura 1.7d.

Equações de equilíbrio. Aplicando as equações de equilíbrio ao segmento *AG*, temos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 7.750\,\text{N}(\tfrac{4}{5}) + N_G = 0$$

$$N_G = -6.200\,\text{N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -1.500\,\text{N} + 7.750\,\text{N}(\tfrac{3}{5}) - V_G = 0$$

$$V_G = 3.150\,\text{N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0;$$

$$M_G - (7.750\,\text{N})(\tfrac{3}{5})(1\,\text{m}) + (1.500\,\text{N})(1\,\text{m}) = 0$$

$$M_G = 3.150\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Como exercício, obtenha esses mesmos resultados usando o segmento *GE*.

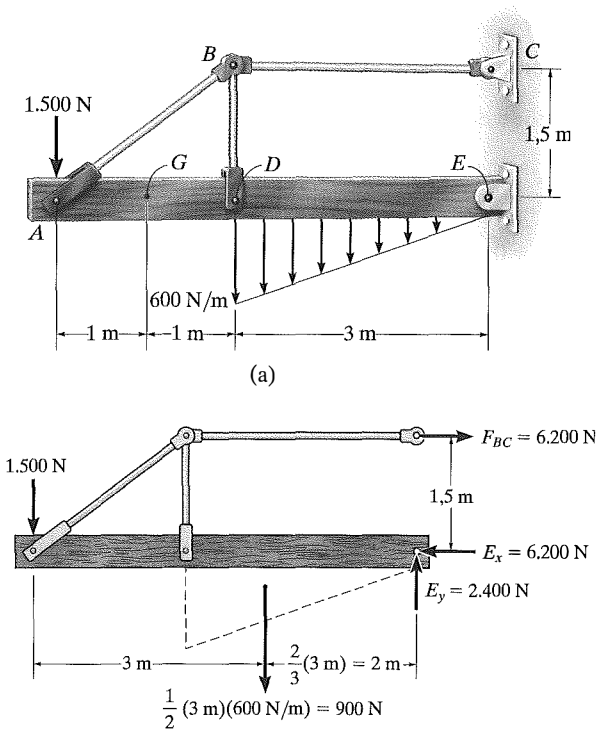


Figura 1.7

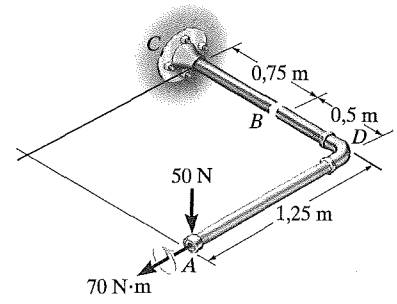
EXEMPLO 1.5

Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em *B* do cano mostrado na Figura 1.8a. A massa do cano é 2 kg/m, e ele está sujeito a uma força vertical de 50 N e a um momento de 70 N·m em sua extremidade *A*. O tubo está preso a uma parede em *C*.

SOLUÇÃO

O problema pode ser resolvido considerando o segmento *AB*, que *não* envolve as reações do apoio em *C*.

Diagrama de corpo livre. Os eixos *x*, *y*, *z* são definidos em *B*, e o diagrama de corpo livre do segmento *AB* é mostrado na Figura 1.8b. Consideramos que as componentes da força resultante e do momento na seção agem nas direções positivas das coordenadas e passam pelo *centroide* da área da seção transversal em *B*. O peso de cada segmento do tubo é calculado da seguinte maneira:



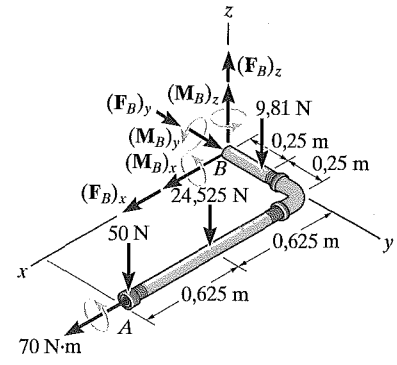


Figura 1.8

$$W_{BD} = (2 \text{ kg/m})(0{,}5 \text{ m})(9{,}81 \text{ N/kg}) = 9{,}81 \text{ N}$$

$$W_{AD} = (2 \text{ kg/m})(1{,}25 \text{ m})(9{,}81 \text{ N/kg}) = 24{,}525 \text{ N}$$

Essas forças agem no centro de gravidade de cada segmento.

Equações de equilíbrio. Aplicando as seis equações escalares de equilíbrio, temos*

$\Sigma F_x = 0;$ $(F_B)_x = 0$ *Resposta*

$\Sigma F_y = 0;$ $(F_B)_y = 0$ *Resposta*

$\Sigma F_z = 0;$ $(F_B)_z - 9{,}81 \text{ N} - 24{,}525 \text{ N} - 50 \text{ N} = 0$

$(F_B)_z = 84{,}3 \text{ N}$ *Resposta*

$\Sigma (M_B)_x = 0; (M_B)_x + 70 \text{ N·m} - 50 \text{ N}(0{,}5 \text{ m}) - 24{,}525 \text{ N}(0{,}5 \text{ m}) - 9{,}81 \text{ N}(0{,}25 \text{ m}) = 0$

$(M_B)_x = -30{,}3 \text{ N·m}$ *Resposta*

$\Sigma (M_B)_y = 0; (M_B)_y + 24{,}525 \text{ N}(0{,}625 \text{ m}) + 50 \text{ N}(1{,}25 \text{ m}) = 0$

$(M_B)_y = -77{,}8 \text{ N·m}$ *Resposta*

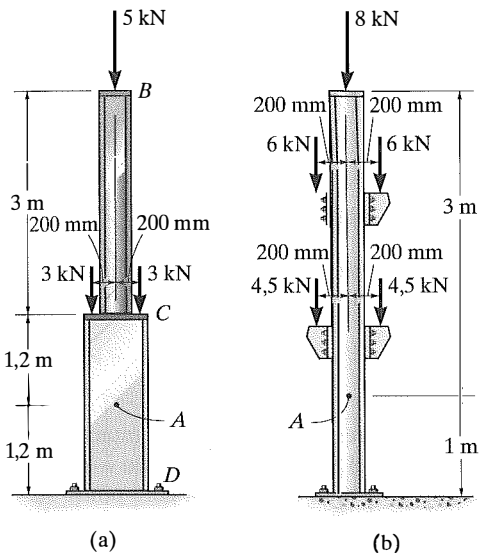
$\Sigma (M_B)_z = 0;$ $(M_B)_z = 0$ *Resposta*

* O *valor* de cada momento em torno de um eixo é igual ao valor de cada força vezes a distância perpendicular entre o eixo e a linha de ação da força. A *direção* de cada momento é determinada pela regra da mão direita, com os momentos positivos (polegar) dirigidos ao longo dos eixos de coordenadas positivos.

OBSERVAÇÃO: O que os sinais negativos para $(M_B)_x$ e $(M_B)_y$ indicam? Observe que a força normal $N_B = (F_B)_y = 0$, ao passo que a força de cisalhamento é $V_B = \sqrt{(0)^2 + (84{,}3)^2} = 84{,}3$ N. Além disso, o momento de torção é $T_B = (M_B)_y = 77{,}8$ N·m e o momento fletor é $M_B = \sqrt{(30{,}3)^2 + (0)} = 30{,}3$ N·m.

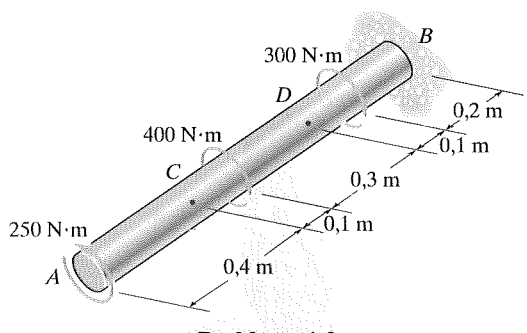
PROBLEMAS

1.1. Determine a força normal interna resultante que age na seção transversal no ponto A em cada coluna. Em (a), o segmento BC tem massa de 300 kg/m e o segmento CD tem massa de 400 kg/m. Em (b), a coluna tem uma massa de 200 kg/m.



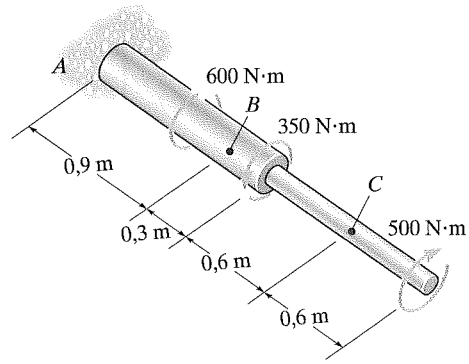
Problema 1.1

1.2. Determine o torque resultante interno que age sobre as seções transversais nos pontos C e D do eixo. O eixo está preso em B.



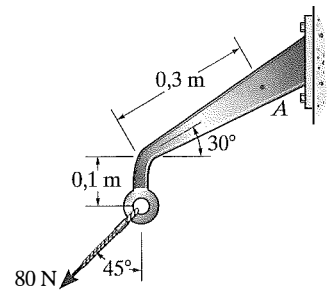
Problema 1.2

1.3. Determine o torque resultante interno que age nas seções transversais nos pontos B e C.



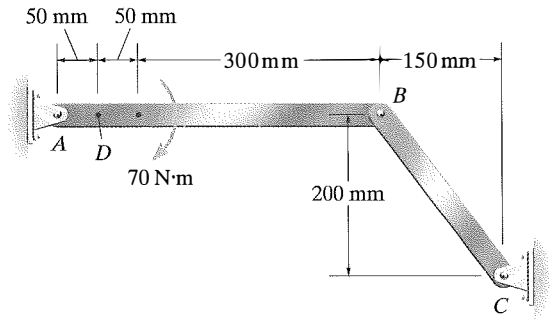
Problema 1.3

*__1.4.__ O dispositivo mostrado na figura sustenta uma força de 80 N. Determine as cargas internas resultantes que agem sobre a seção no ponto A.



Problema 1.4

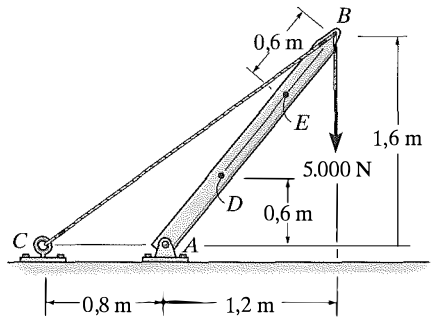
1.5. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal no ponto D do elemento AB.



Problema 1.5

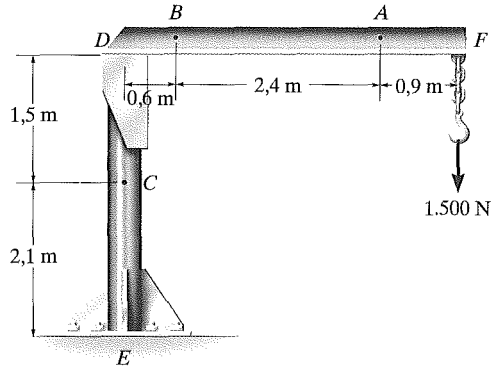
1.6. A viga AB é suportada por um pino em A e por um cabo BC. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal no ponto D.

1.7. Resolva o Problema 1.6 para as cargas internas resultantes que agem no ponto E.



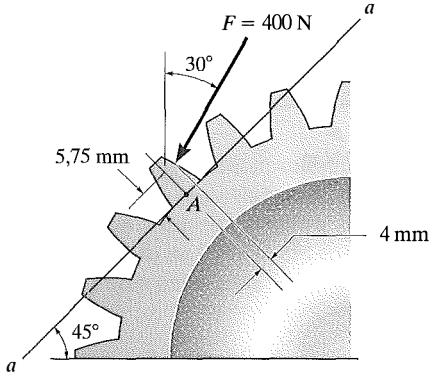
Problemas 1.6/7

*__1.8.__ A lança *DF* do guindaste giratório e a coluna *DE* têm peso uniforme de 750 N/m. Se o guincho e a carga pesam 1.500 N, determine as cargas internas resultantes nas seções transversais que passam nos pontos *A*, *B* e *C*.



Problema 1.8

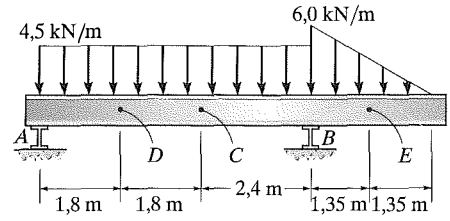
1.9. A força $F = 400$ N age no dente da engrenagem. Determine as cargas internas resultantes na raiz do dente, isto é, no centroide da seção *a–a* (ponto *A*).



Problema 1.9

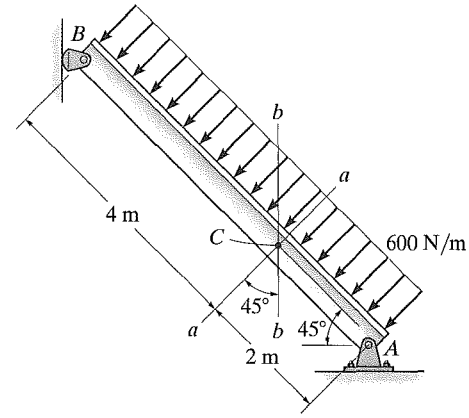
1.10. A viga suporta a carga distribuída mostrada. Determine as cargas internas resultantes na seção transversal que passa pelo ponto *C*. Considere que as reações nos apoios *A* e *B* sejam verticais.

1.11. A viga suporta a carga distribuída mostrada. Determine as cargas internas resultantes nas seções transversais que passam pelos pontos *D* e *E*. Considere que as reações nos apoios *A* e *B* sejam verticais.



Problemas 1.10/11

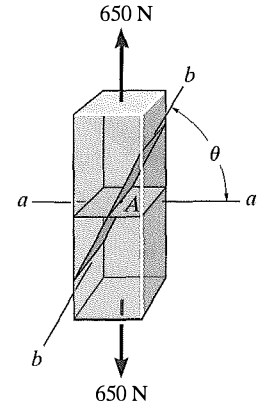
*__1.12.__ Determine as cargas internas resultantes que agem sobre: (a) seção *a–a* e (b) seção *b–b*. Cada seção está localizada no centroide, ponto *C*.



Problema 1.12

1.13. Determine a resultante das forças internas normal e de cisalhamento no elemento em: (a) seção *a–a* e (b) seção *b–b*, sendo que cada uma delas passa pelo ponto *A*. Considere $\theta = 60°$. A carga de 650 N é aplicada ao longo do eixo do centroide do elemento.

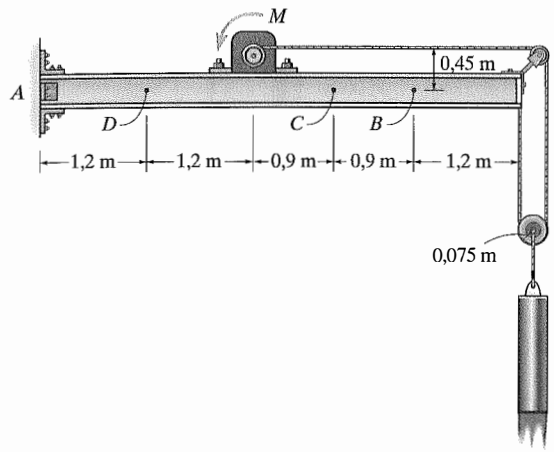
1.14. Determine a resultante das forças internas normal e de cisalhamento no elemento na seção *b–b*, cada uma em função de θ. Represente esses resultados em gráficos para $0° \leq \theta \leq 90°$. A carga de 650 N é aplicada ao longo do eixo do centroide do elemento.



Problemas 1.13/14

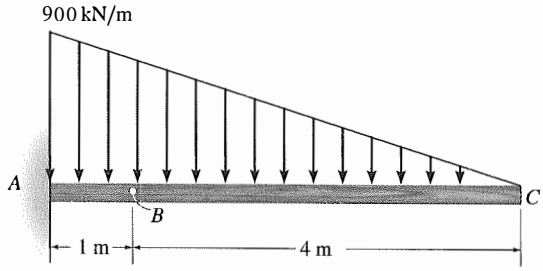
1.15. A carga de 4.000 N está sendo levantada a uma velocidade constante pelo motor *M*, que pesa 450 N. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto *B* na viga. A viga pesa 600 N/m e está fixada à parede em *A*.

***1.16.** Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelos pontos *C* e *D* da viga no Problema 1.15.



Problemas 1.15/16

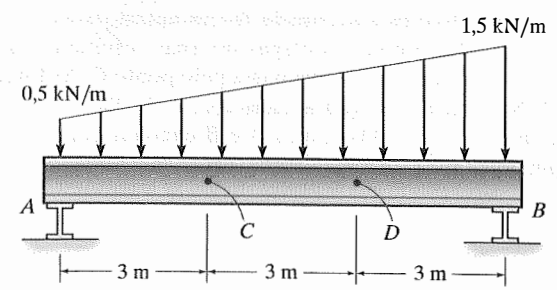
1.17. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto *B*.



Problema 1.17

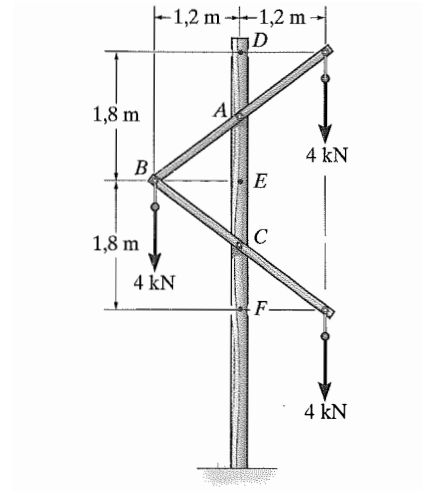
1.18. A viga suporta a carga distribuída mostrada. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto *C*. Considere que as reações nos apoios *A* e *B* sejam verticais.

1.19. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto *D* no Problema 1.18.



Problemas 1.18/19

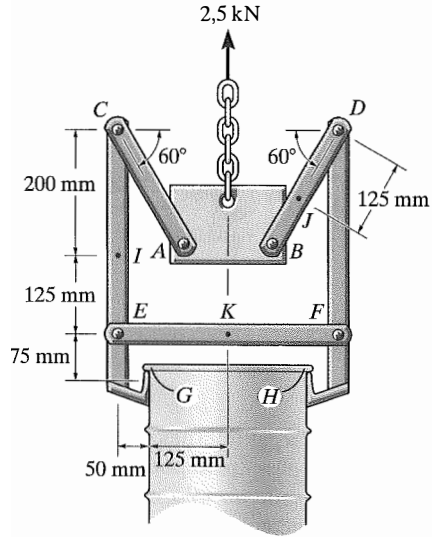
***1.20.** A estrutura do poste de energia elétrica suporta os três cabos, e cada um deles exerce uma força de 4 kN nas escoras. Se as escoras estiverem acopladas por pinos em *A*, *B* e *C*, determine as cargas internas resultantes nas seções transversais que passam pelos pontos *D*, *E* e *F*.



Problema 1.20

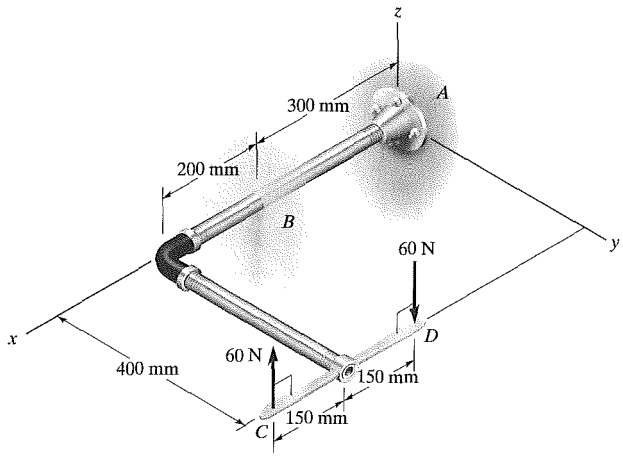
1.21. O guindaste de tambores suspende o tambor de 2,5 kN. O pino de ligação está conectado à chapa em *A* e *B*. A ação de aperto sobre a borda do tambor é tal que somente forças horizontais e verticais são exercidas sobre o tambor em *G* e *H*. Determine as cargas internas resultantes na seção transversal que passa pelo ponto *I*.

1.22. Determine as cargas internas resultantes nas seções transversais que passam pelos pontos *K* e *J* no guindaste de tambores no Problema 1.21.



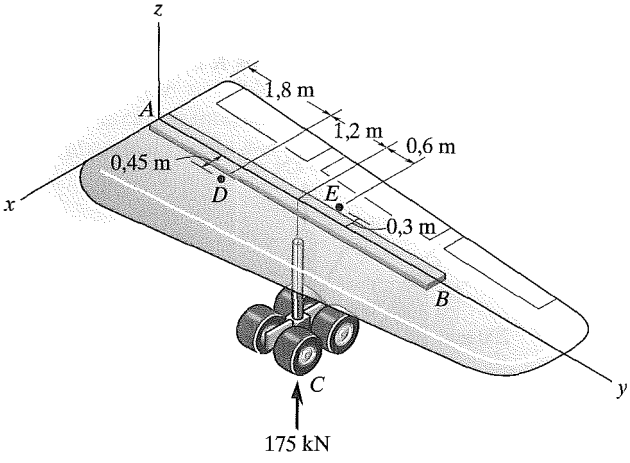
Problemas 1.21/22

1.23. O cano tem massa de 12 kg/m. Se ele estiver fixado à parede em *A*, determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal em *B*. Despreze o peso da chave *CD*.



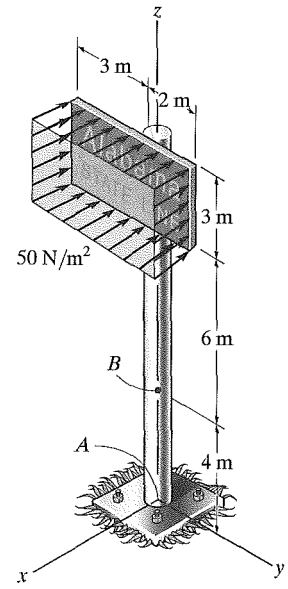
Problema 1.23

*__1.24.__ A viga mestra AB suporta a carga na asa do avião. As cargas consideradas são a reação da roda de 175 kN em C, o peso de 6 kN do combustível no tanque da asa, com centro de gravidade em D, e o peso de 2 kN da asa, com centro de gravidade em E. Se a viga estiver fixada à fuselagem em A, determine as cargas internas resultantes na viga nesse ponto. Considere que a asa não transfere nenhuma carga à fuselagem, exceto pela viga.



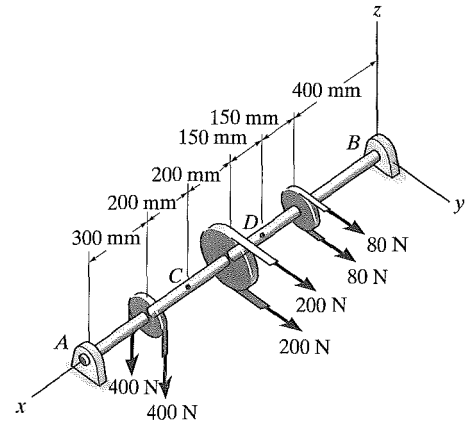
Problema 1.24

__1.25.__ Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto B do poste de sinalização. O poste está fixado ao solo, e uma pressão uniforme de 50 N/m² age perpendicularmente à parte frontal da placa de sinalização.



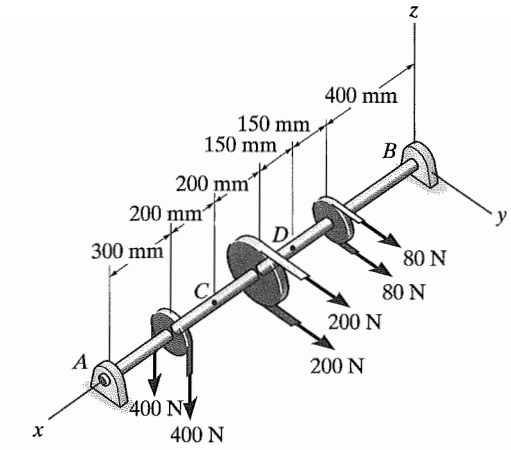
Problema 1.25

__1.26.__ O eixo está apoiado em suas extremidades por dois mancais A e B e está sujeito às forças aplicadas às polias nele fixadas. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto D. As forças de 400 N agem na direção $-z$ e as forças de 200 N e 80 N agem na direção $+y$. Os suportes A e B exercem somente as componentes y e z da força sobre o eixo.



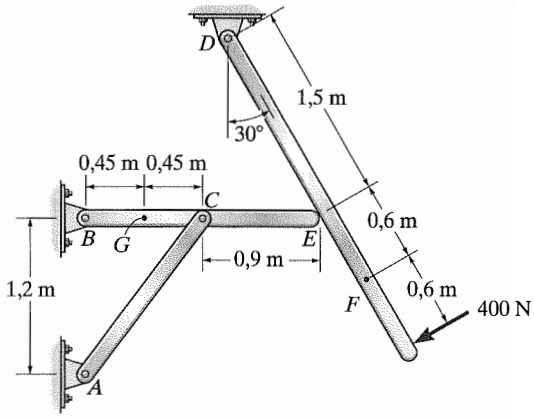
Problema 1.26

__1.27.__ O eixo está apoiado em suas extremidades por dois mancais, A e B, e está sujeito às forças aplicadas às polias nele fixadas. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto C. As forças de 400 N agem na direção $-z$ e as forças de 200 N e 80 N agem na direção $+y$. Os apoios A e B exercem somente as componentes y e z da força sobre o eixo.



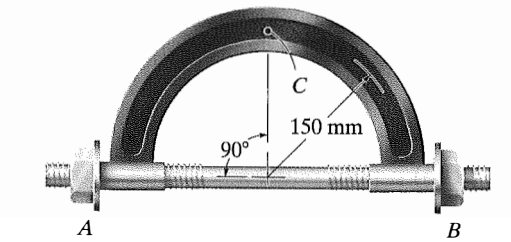
Problema 1.27

***1.28.** Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal da estrutura nos pontos F e G. O contato em E é liso.



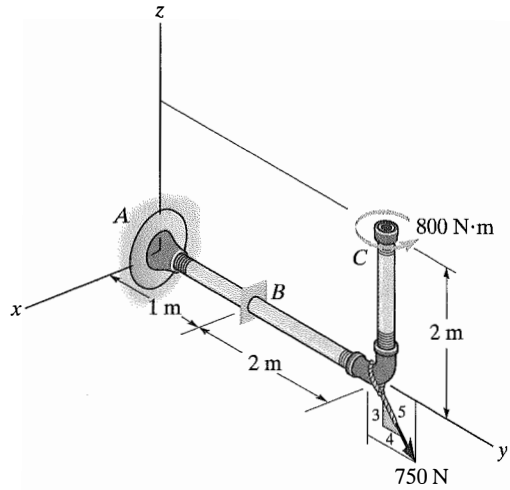
Problema 1.28

1.29. A haste do parafuso está sujeita a uma tensão de 400 N. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal no ponto C.



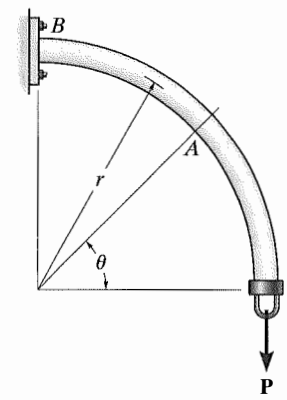
Problema 1.29

1.30. O cano tem massa de 12 kg/m e está preso à parede em A. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa por B.



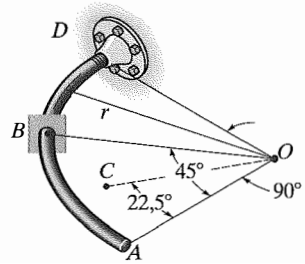
Problema 1.30

1.31. A haste curvada tem raio r e está presa à parede em B. Determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto A, o qual está localizado a um ângulo θ em relação à horizontal.



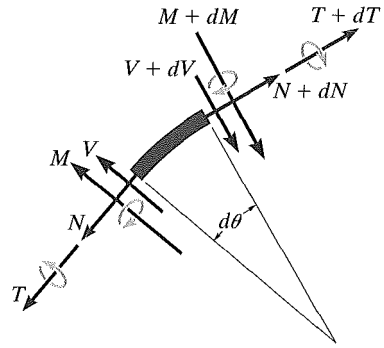
Problema 1.31

***1.32.** A haste curvada AD de raio r tem peso por comprimento w. Se ela estiver no plano horizontal, determine as cargas internas resultantes que agem na seção transversal que passa pelo ponto B. *Dica*: A distância entre o centroide C do segmento AB e o ponto O é $CO = 0{,}9745\,r$.



Problema 1.32.

1.33. Um elemento diferencial tomado de uma barra curvada é mostrado na figura. Mostre que $dN/d\theta = V$, $dV/d\theta = -N$, $dM/d\theta = -T$ e $dT/d\theta = M$.



Problema 1.33

1.3 Tensão

Na Seção 1.2 dissemos que a força e o momento que agem em um ponto específico da área secionada de um corpo (Figura 1.9) representam os efeitos resultantes da *distribuição de forças* que agem sobre a área secionada (Figura 1.10a). Obter essa *distribuição* da carga interna é de suma importância na resistência dos materiais. Para resolver esse problema, é necessário estabelecer o conceito de tensão.

Considere que a área secionada está subdividida em pequenas áreas, como ΔA sombreada em tom mais escuro na Figura 1.10a. À medida que reduzimos ΔA a um tamanho cada vez menor, temos de adotar duas premissas em relação às propriedades do material. Consideraremos que o material é ***contínuo***, isto é, possui continuidade ou distribuição uniforme de matéria sem vazios, em vez de ser composto por um número finito de moléculas ou átomos distintos. Além disso, o material deve ser ***coeso***, o que significa que todas as suas porções estão muito bem interligadas, sem trincas ou separações. Uma força típica finita $\Delta\mathbf{F}$, porém muito pequena, agindo sobre a área ΔA a ela associada, é mostrada na Figura 1.10a. Essa força, como todas as outras, terá uma direção única, mas, em nossa discussão, nós a substituiremos por suas *três componentes*, a saber, $\Delta\mathbf{F}_x$, $\Delta\mathbf{F}_y$ e $\Delta\mathbf{F}_z$, tangentes e normais à área, respectivamente. À medida que a área ΔA tende a zero, o mesmo ocorre com a força $\Delta\mathbf{F}$ e suas componentes; porém, em geral, o quociente entre a força e a área tenderá a um limite finito. Esse quociente é denominado *tensão* e, como já observamos, descreve a *intensidade da força interna* sobre um *plano específico* (área) que passa por um ponto.

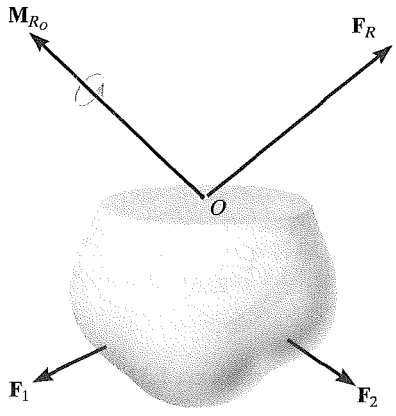


Figura 1.9

Tensão normal. A *intensidade* da força, ou força por unidade de área, que age perpendicularmente à ΔA, é definida como ***tensão normal***, σ (sigma). Visto que $\Delta\mathbf{F}_z$ é normal à área, então

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \tag{1.4}$$

Se a força normal ou tensão tracionar o elemento de área ΔA, como mostra a Figura 1.10a, ela será denominada *tensão de tração*, ao passo que, se comprimir o elemento ΔA, ela será denominada *tensão de compressão*.

Tensão de cisalhamento. A intensidade da força, ou força por unidade de área, que age tangente a ΔA, é denominada ***tensão de cisalhamento***, τ (tau). Aqui estão as componentes da tensão de cisalhamento:

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \qquad \tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \tag{1.5}$$

Observe que a notação do índice z em σ_z é usada para indicar a *direção* da reta normal dirigida para fora, que especifica a orientação da área ΔA (Figura 1.11). São usados dois índices para as componentes da tensão de cisalhamento, τ_{zx} e τ_{zy}. O eixo z especifica a orientação da área e x e y referem-se às retas que indicam a direção das tensões de cisalhamento.

Estado geral de tensão. Se o corpo for ainda mais secionado por planos paralelos ao *plano x–z* (Figura 1.10b) e pelo plano *y–z* (Figura 1.10c), então podemos "cortar" um elemento cúbico de volume de material que representa o ***estado de tensão*** que age em torno do ponto escolhido no corpo (Figura 1.12). Assim, esse estado de tensão é caracterizado por três componentes que agem em cada face do elemento. Essas componentes da tensão descrevem o estado de tensão no ponto somente para o elemento orientado ao longo dos eixos x, y, z. Se o corpo fosse secionado em um cubo que tivesse alguma outra orientação,

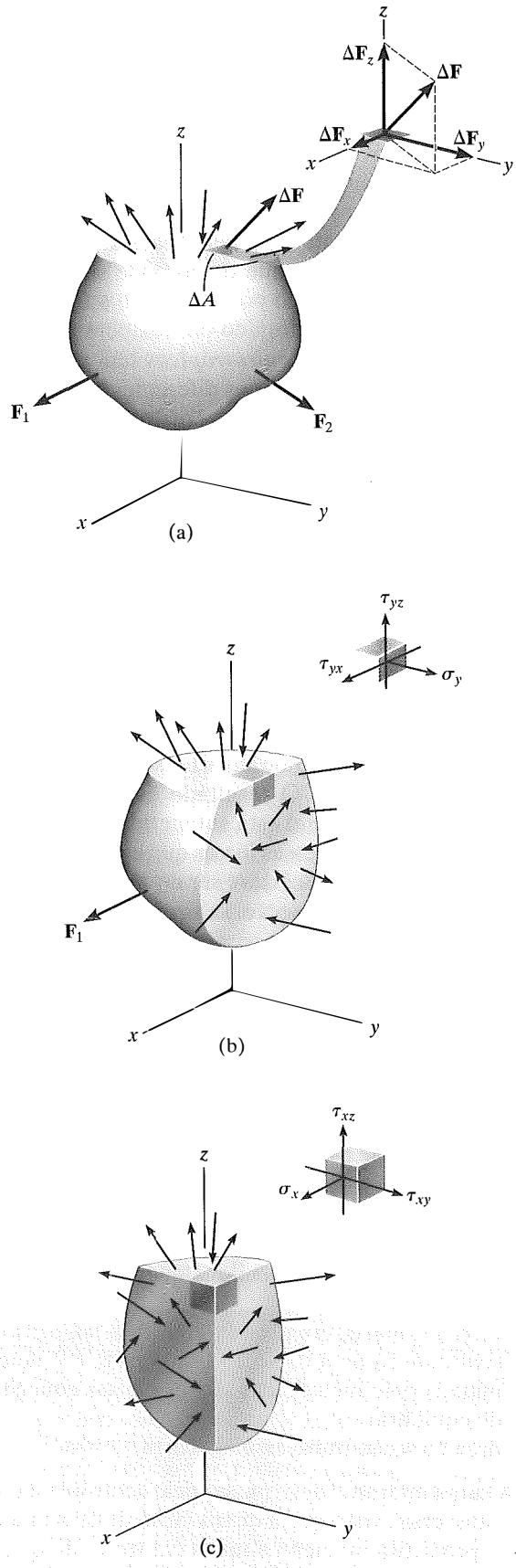


Figura 1.10

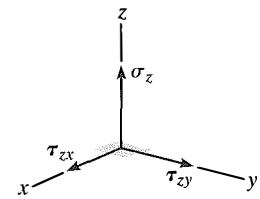


Figura 1.11

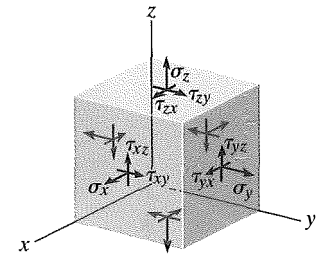


Figura 1.12

então o estado de tensão seria definido por um conjunto diferente de componentes de tensão.

Unidades. No Sistema Internacional de Unidades de Medidas, ou Sistema SI, os valores da tensão normal e da tensão de cisalhamento são especificadas nas unidades básicas de newtons por metro quadrado (N/m^2). Essa unidade, denominada 1 pascal (1 Pa = 1 N/m^2), é muito pequena, e, em trabalhos de engenharia, são usados prefixos como quilo (10^3), simbolizado por k, mega (10^6), simbolizado por M, ou giga (10^9), simbolizado por G, para representar valores de tensão maiores, mais realistas.*

1.4 Tensão normal média em uma barra com carga axial

Frequentemente, elementos estruturais ou mecânicos são compridos e delgados. Além disso, estão sujeitos a cargas axiais que normalmente são aplicadas às extremidades do elemento. Pendurais, parafusos e elementos de treliças são exemplos típicos. Nesta seção, determinaremos a distribuição de tensão média que age na seção transversal de uma barra com carga axial, como aquela cuja forma geral é mostrada na Figura 1.13a. Esta seção define a ***área da seção transversal*** da barra e, como todas as outras seções transversais são iguais, a barra é denominada ***prismática***. Se desprezarmos o peso da barra e da seção conforme é indicado, então, para o equilíbrio do segmento inferior (Figura 1.13b), a força resultante interna que age na área da seção transversal deve ter valor igual, direção oposta e ser colinear à força externa que age na parte inferior da barra.

Premissas. Antes de determinarmos a distribuição da tensão média que age sobre a área da seção transversal da barra, é necessário adotar duas premissas simplificadoras em relação à descrição do material e à aplicação específica da carga.

* Às vezes, a tensão é expressa em unidades de N/mm^2, em que 1 mm = 10^{-3} m. Todavia, o SI não permite prefixos no denominador de uma fração, portanto é melhor usar a unidade equivalente 1 N/mm^2 = 1 MN/m^2 = 1 MPa.

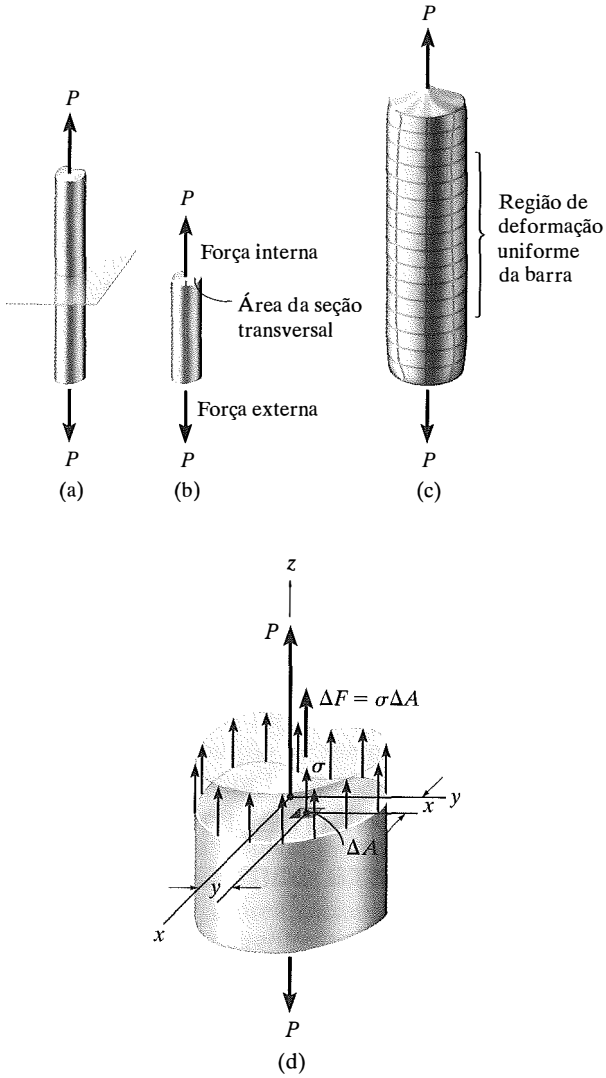


Figura 1.13

1. É necessário que a barra permaneça reta antes e depois da aplicação da carga; além disso, a seção transversal deve permanecer achatada ou plana durante a deformação, isto é, durante o tempo em que ocorrer a mudança no volume e na forma da barra. Se isso acontecer, as linhas horizontais e verticais da grade aplicada à barra se *deformarão uniformemente* quando a barra for submetida à carga (Figura 1.13c). Não consideraremos aqui as regiões da barra próximas às suas extremidades, onde a aplicação das cargas externas pode provocar *distorções localizadas*. Em vez disso, focalizaremos somente a distribuição de tensão no interior da seção média da barra.
2. Para que *a barra sofra deformação uniforme* é necessário que **P** seja aplicada ao longo do *eixo do centroide* da seção transversal e que o material seja homogêneo e isotrópico. ***Materiais homogêneos*** têm as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume e ***materiais isotrópicos*** têm as mesmas propriedades em todas as direções. Muitos materiais de engenharia podem ser considerados homogêneos e isotrópicos por aproximação, como fazemos neste livro. O aço, por exemplo, contém milhares de cristais orientados aleatoriamente em cada milímetro cúbico de seu volume, e, visto que a maioria dos problemas que envolvem esse material tem um tamanho físico muito maior do que um único cristal, a premissa adotada em relação à composição desse material é bem realista. Entretanto, devemos mencionar que o aço pode ser transformado em anisotrópico por laminação a frio (isto é, se for laminado ou forjado em temperaturas subcríticas). ***Materiais anisotrópicos*** têm propriedades diferentes em direções diferentes e, ainda que seja esse o caso, se a anisotropia for orientada ao longo do eixo da barra, então a barra também se deformará uniformemente quando sujeita a uma carga axial. Por exemplo, a madeira, por causa de seus grãos ou fibras, é um material de engenharia homogêneo e anisotrópico e, como possui uma orientação padronizada de suas fibras, ela se presta perfeitamente à análise que faremos a seguir.

Distribuição da tensão normal média. Contanto que a barra esteja submetida a uma deformação uniforme e constante como já observamos, essa deformação é o resultado de uma tensão normal *constante* σ, Figura 1.13d. O resultado é que cada área ΔA na seção transversal está submetida a uma força $\Delta F = \sigma \Delta A$, e a *soma* dessas forças que agem em toda a área da seção transversal deve ser equivalente à força resultante interna **P** na seção. Se fizermos $\Delta A \rightarrow dA$ e, portanto, $\Delta F \rightarrow dF$, então, reconhecendo que σ é *constante*, tem-se

$$+\uparrow F_{Rz} = \Sigma F_z; \qquad \int dF = \int_A \sigma \, dA$$

$$P = \sigma A$$

$$\boxed{\sigma = \frac{P}{A}} \qquad (1.6)$$

onde

σ = tensão normal média em qualquer ponto na área da seção transversal

P = força normal interna resultante, que é aplicada no *centroide* da área da seção transversal. P é determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio

A = área da seção transversal da barra

A carga interna P deve passar pelo centróide da seção transversal, visto que a distribuição de tensão uniforme produzirá momentos nulos em torno de quaisquer eixos x e y que passem por esse ponto (Figura 1.13d). Quando isso ocorre,

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad 0 = \int_A y\,dF = \int_A y\sigma\,dA = \sigma \int_A y\,dA$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad 0 = -\int_A x\,dF = -\int_A x\sigma\,dA = -\sigma \int_A x\,dA$$

Essas equações são, de fato, verdadeiras, uma vez que, pela definição de centroide, $\int y\,dA = 0$ e $\int x\,dA = 0$. (Veja o Apêndice A.)

Equilíbrio. Deve ser evidente que existe somente uma tensão normal em qualquer elemento de volume de material localizado em cada ponto na seção transversal de uma barra com carga axial. Se considerarmos o equilíbrio vertical do elemento (Figura 1.14), então, aplicando a equação do equilíbrio de forças:

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) = 0$$
$$\sigma = \sigma'$$

Em outras palavras, as duas componentes da tensão normal no elemento devem ter valores iguais, mas direções opostas, o que é denominado *tensão uniaxial.*

A análise anterior aplica-se a elementos sujeitos a tensão ou compressão, como mostra a Figura 1.15. Por interpretação gráfica, a ***amplitude*** da força resultante interna **P** é ***equivalente*** ao ***volume*** sob o diagrama de tensão; isto é, $P = \sigma A$ (volume = altura × base). Além disso, como consequência do equilíbrio de momentos, ***essa resultante passa pelo centroide desse volume.***

Embora essa análise tenha sido desenvolvida para barras *prismáticas*, essa premissa pode ser adaptada um pouco para incluir barras que tenham uma *leve conicidade.* Por exemplo, usando a análise mais exata da teoria da elasticidade, podemos demonstrar que, no caso de uma barra cônica de seção retangular cujo ângulo entre dois lados adjacentes seja 15°, a tensão normal média calculada por $\sigma = P/A$, é somente 2,2% *menor* que seu valor determinado pela teoria da elasticidade.

Tensão normal média máxima. Em nossa análise, a força interna P e a área da seção transversal

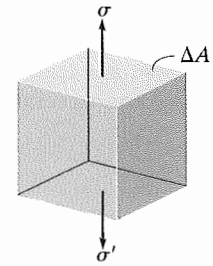


Figura 1.14

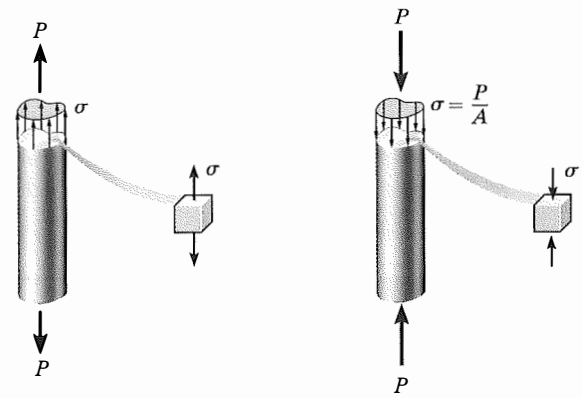


Figura 1.15

A eram *constantes* ao longo do eixo longitudinal da barra e, como resultado, a tensão normal $\sigma = P/A$ também é *constante* em todo o comprimento da barra. Entretanto, ocasionalmente, a barra pode estar sujeita a *várias* cargas externas ao longo de seu eixo ou pode ocorrer uma mudança em sua área da seção transversal. O resultado é que a tensão normal no interior da barra poderia ser diferente de uma seção para outra e, se quisermos determinar a tensão normal média *máxima*, torna-se importante determinar o lugar onde a razão P/A é um *máximo*. Para isso, é necessário determinar a força interna P em várias seções ao longo da barra. Neste caso, pode ser útil mostrar essa variação por meio de um ***diagrama de força axial ou normal.*** Especificamente, esse diagrama é uma representação gráfica da força normal P em relação à posição x ao longo do comprimento da barra. Como convenção de sinais, P será positiva se causar tração no elemento e negativa se causar compressão. Uma vez conhecida a carga interna em toda a barra, então a razão P/A máxima pode ser identificada.

PONTOS IMPORTANTES

- Quando um corpo que está submetido a uma carga externa é secionado, há uma distribuição de forças que age sobre a área secionada e que mantém cada segmento do corpo em equilíbrio. A intensidade dessa força interna em um ponto no corpo é denominada *tensão*.
- Tensão é o valor limite da força por unidade de área quando a área tende a zero. Por essa definição, o material no ponto é considerado contínuo e coeso.
- O valor das componentes da tensão depende do tipo de carga que age sobre o corpo e da orientação do elemento no ponto.
- Quando uma barra prismática é feita de material homogêneo e isotrópico e é submetida a uma força axial que age no centroide da área da seção transversal, então o material no interior da barra é submetido *somente à tensão normal.* Admite-se que essa tensão é uniforme ou *média* na área da seção transversal.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A equação $\sigma = P/A$ dá a tensão normal *média* na área da seção transversal de um elemento quando a seção é submetida a uma força normal resultante interna **P**. Para elementos com carga axial, a aplicação dessa equação exige as etapas descritas a seguir.

Carga interna

- Secione o elemento *perpendicularmente* a seu eixo longitudinal no ponto onde a tensão normal deve ser determinada e use o diagrama de corpo livre e as equações de equilíbrio de forças necessárias para obter a força axial interna **P** na seção.

Tensão normal média

- Determine a área da seção transversal do elemento na seção analisada e calcule a tensão normal média $\sigma = P/A$.
- Sugerimos que a ação de σ seja mostrada sobre um pequeno elemento de volume do material localizado em um ponto na seção onde a tensão é calculada. Para isso, em primeiro lugar, desenhe σ na face do elemento coincidente com a área secionada A. Aqui, σ age na *mesma direção* que a força interna **P**, uma vez que todas as tensões normais na seção transversal agem nessa direção para desenvolverem essa resultante. A tensão normal σ que age na face oposta do elemento pode ser desenhada em sua direção adequada.

EXEMPLO 1.6

A barra na Figura 1.16a tem largura constante de 35 mm e espessura de 10 mm. Determine a tensão normal média máxima na barra quando ela é submetida à carga mostrada.

SOLUÇÃO

Carga interna. Por inspeção, as forças internas axiais nas regiões *AB*, *BC* e *CD* são todas constantes, mas têm valores diferentes. Essas cargas são determinadas usando o método das seções na Figura 1.16b; o diagrama de força normal que representa esses resultados graficamente é mostrado na Figura 1.16c. Por inspeção, a maior carga está na região *BC*, onde $P_{BC} = 30$ kN. Visto que a área da seção transversal da barra é *constante*, a maior tensão normal média também ocorre dentro dessa região.

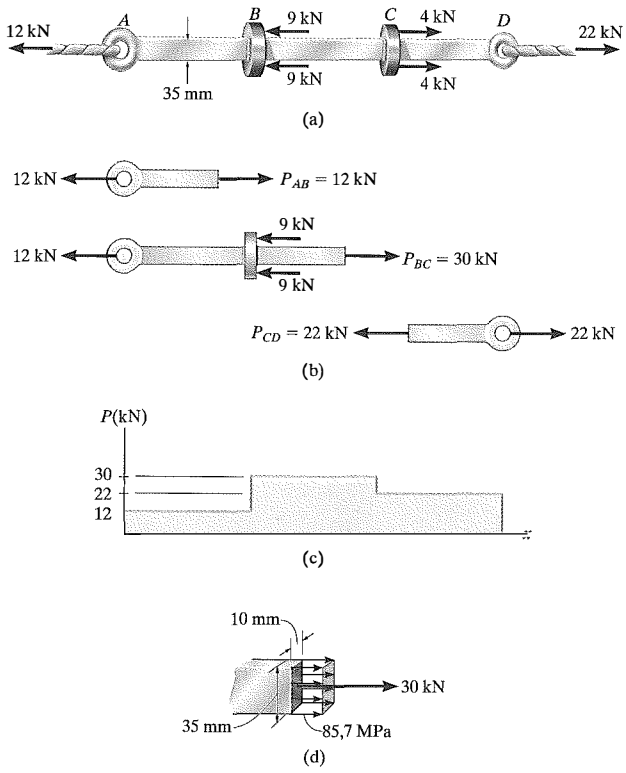


Figura 1.16

Tensão normal média. Aplicando a Equação 1.6, temos

$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30(10^3)\text{N}}{(0{,}035\text{ m})(0{,}010\text{ m})} = 85{,}7\text{ MPa}$$

Resposta

OBSERVAÇÃO: A distribuição de tensão que age sobre uma seção transversal arbitrária da barra dentro da região *BC* é mostrada na Figura 1.16d. Graficamente, o *volume* (ou "bloco") representado por essa distribuição é equivalente à carga de 30 kN; isto é, 30 kN = (85,7 MPa)(35 mm)(10 mm).

EXEMPLO 1.7

A luminária de 80 kg é sustentada por duas hastes, *AB* e *BC*, como mostra a Figura 1.17a. Se *AB* tiver diâmetro de 10 mm e *BC* tiver diâmetro de 8 mm, determine a tensão normal média em cada haste.

SOLUÇÃO

Carga interna Em primeiro lugar, devemos determinar a força axial em cada haste. A Figura 1.17b mostra um diagrama de corpo livre da luminária. Aplicando as equações de equilíbrio de forças, obtemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{BC}\left(\tfrac{4}{5}\right) - F_{BA}\cos 60° = 0$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; F_{BC}\left(\tfrac{3}{5}\right) + F_{BA}\,\text{sen}\,60° - 784{,}8\text{ N} = 0$$

$$F_{BC} = 395{,}2\text{ N}, \quad F_{BA} = 632{,}4\text{ N}$$

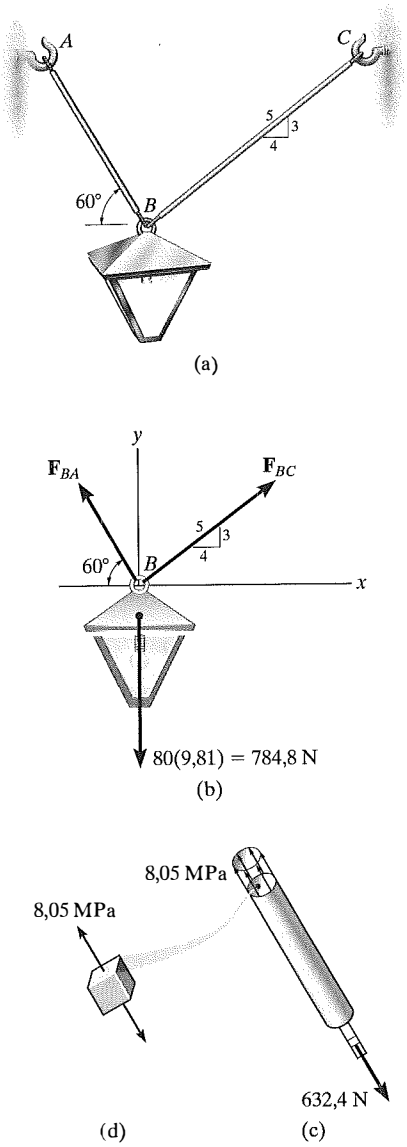


Figura 1.17

Pela terceira lei de Newton, a qual diz que a cada ação corresponde uma reação igual em sentido contrário, essas forças submetem as hastes à tensão em todo o seu comprimento.

Tensão normal média. Aplicando a Equação 1.6, temos

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395{,}2\text{ N}}{\pi(0{,}004\text{ m})^2} = 7{,}86\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632{,}4\text{ N}}{\pi(0{,}005\text{ m})^2} = 8{,}05\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: A distribuição de tensão normal média que age sobre uma seção transversal da haste AB é mostrada na Figura 1.17c, e, em um ponto nessa seção transversal, um elemento de material sofre tensão, como mostra a Figura 1.17d.

EXEMPLO 1.8

A peça fundida mostrada na Figura 1.18a é feita de aço, cujo peso específico é $\gamma_{aço} = 80\text{ kN/m}^3$. Determine a tensão de compressão média que age nos pontos A e B.

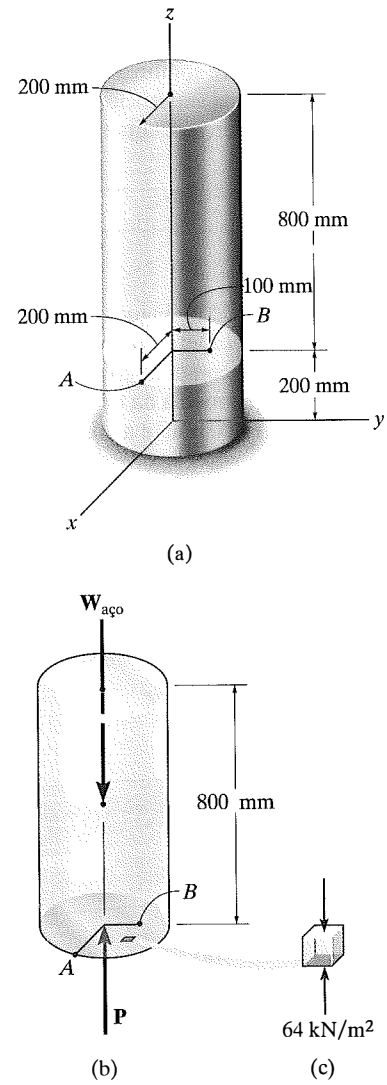


Figura 1.18

SOLUÇÃO

Carga interna. A Figura 1.18b mostra um diagrama de corpo livre do segmento superior da peça fundida onde a seção passa pelos pontos A e B. O peso desse segmento é determinado por $W_{aço} = \gamma_{aço} V_{aço}$. Assim, a força axial interna P na seção é $\overset{+}{\uparrow}\Sigma F_z = 0$;

$$P - W_{aço} = 0$$

$$P - (80\text{ kN/m}^3)(0{,}8\text{ m})\pi(0{,}2\text{ m})^2 = 0$$

$$P = 8{,}042\text{ kN}$$

Tensão de compressão média. A área da seção transversal na seção é $A = \pi(0{,}2\text{ m})^2$, portanto a tensão de compressão média torna-se

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8{,}042\ \text{kN}}{\pi(0{,}2\ \text{m})^2}$$
$$= 64{,}0\ \text{kN/m}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: A tensão mostrada no elemento de volume de material na Figura 1.18c é representativa das condições no ponto A ou no ponto B. Observe que essa tensão age *para cima* na parte inferior ou face sombreada do elemento, já que essa face faz parte da área da superfície inferior da seção cortada e, nessa superfície, a força resultante interna **P** está empurrando para cima.

EXEMPLO 1.9

O elemento AC mostrado na Figura 1.19a está submetido a uma força vertical de 3 kN. Determine a posição x dessa força de modo que a tensão de compressão média no apoio liso C seja igual à tensão de tração média na barra AB. A área da seção transversal da barra é 400 mm² e a área em C é 650 mm².

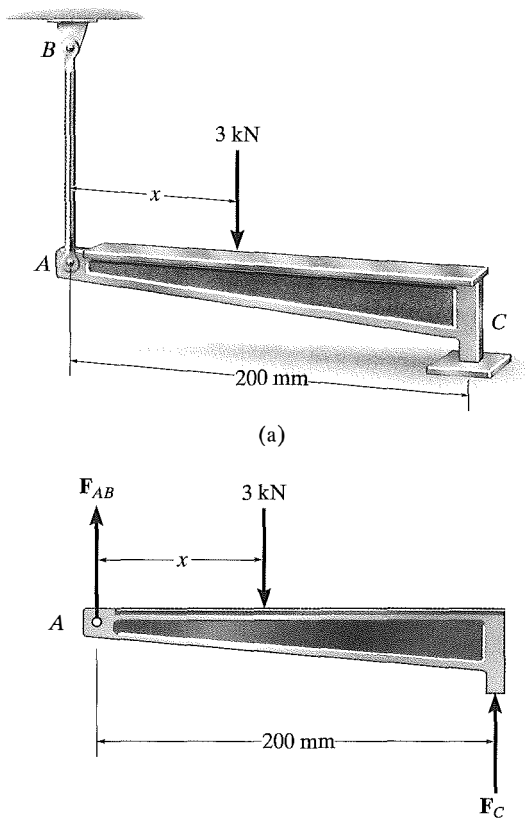


Figura 1.19

SOLUÇÃO

Carga interna. As forças em A e C podem ser relacionadas considerando-se o diagrama de corpo livre para o elemento AC (Figura 1.19b). Há três incógnitas, a saber, F_{AB}, F_C e x. Para resolver este problema, trabalharemos em unidades newtons e milímetros.

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_{AB} + F_C - 3.000\ \text{N} = 0 \tag{1}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad -3.000\ \text{N}(x) + F_C(200\ \text{mm}) = 0 \tag{2}$$

Tensão normal média. Podemos escrever uma terceira equação necessária, a qual exige que a tensão de tração na barra AB e a tensão de compressão em C sejam equivalentes, isto é,

$$\sigma = \frac{F_{AB}}{400\ \text{mm}^2} = \frac{F_C}{650\ \text{mm}^2}$$
$$F_C = 1{,}625 F_{AB}$$

Substituindo essa expressão na Equação 1, resolvendo para F_{AB} e, então, resolvendo para F_C, obtemos

$$F_{AB} = 1.143\ \text{N}$$
$$F_C = 1.857\ \text{N}$$

A posição da carga aplicada é determinada pela Equação 2,

$$x = 124\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: $0 < x < 200$ mm, como exigido.

1.5 Tensão de cisalhamento média

A tensão de cisalhamento foi definida na Seção 1.3 como a componente da tensão que age *no plano* da área secionada. Para mostrar como essa tensão pode desenvolver-se, consideraremos o efeito da aplicação de uma força **F** à barra na Figura 1.20a. Se considerarmos apoios rígidos e **F** suficientemente grande, o material da barra irá deformar-se e falhar ao longo dos planos identificados por AB e CD. Um diagrama de corpo livre do segmento central não apoiado da barra (Figura 1.20b) indica que a força de cisalhamento $V = F/2$ deve ser aplicada a cada seção para manter o segmento em equilíbrio. A ***tensão de cisalhamento média*** distribuída sobre cada área secionada que desenvolve essa força de cisalhamento é definida por

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{V}{A} \tag{1.7}$$

Nessa expressão,

$\tau_{\text{méd}}$ = tensão de cisalhamento média na seção, que consideramos ser a *mesma* em cada ponto localizado na seção
V = força de cisalhamento interna resultante na seção determinada pelas equações de equilíbrio
A = área na seção

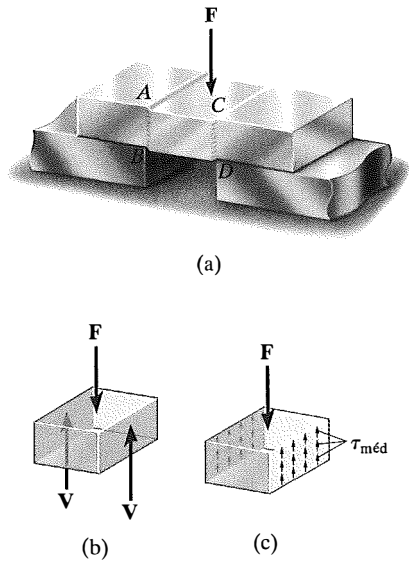


Figura 1.20

A ação da distribuição da tensão de cisalhamento média sobre as seções é mostrada na Figura 1.20c. Observe que $\tau_{méd}$ está na *mesma direção* de **V**, uma vez que a tensão de cisalhamento deve criar forças associadas e que todas elas contribuem para a força resultante interna **V** na seção analisada.

O caso de carregamento discutido na Figura 1.20 é um exemplo de ***cisalhamento simples ou direto***, visto que o cisalhamento é causado pela *ação direta* da carga aplicada **F**. Esse tipo de cisalhamento ocorre frequentemente em vários tipos de acoplamentos simples que utilizam parafusos, pinos, material de solda etc. Todavia, em todos esses casos, a aplicação da Equação 1.7 é *apenas uma aproximação*. Uma investigação mais exata da distribuição da tensão de cisalhamento na seção crítica revela, muitas vezes, que ocorrem tensões de cisalhamento no material muito maiores do que as previstas por essa equação. Embora isso possa acontecer, a aplicação da Equação 1.7 é, de modo geral, aceitável para muitos problemas de engenharia envolvendo projeto e análise. Por exemplo, as normas de engenharia permitem sua utilização para o cálculo das dimensões de elementos de fixação como parafusos e para obtenção da resistência de fixação de juntas sujeitas a cargas de cisalhamento. A propósito, dois tipos de cisalhamento que ocorrem frequentemente na prática merecem tratamento separado.

Cisalhamento simples. As juntas de aço e madeira mostradas nas Figuras 1.21a e 1.21c, respectivamente, são exemplos de ***acoplamentos de cisalhamento simples*** normalmente denominados *juntas sobrepostas*. Nesse caso, consideraremos que os elementos são finos e que a porca na Figura 1.21a não está muito apertada, o que nos permite desprezar o atrito entre os elementos. Se fizermos um corte entre os elementos, obteremos os diagramas

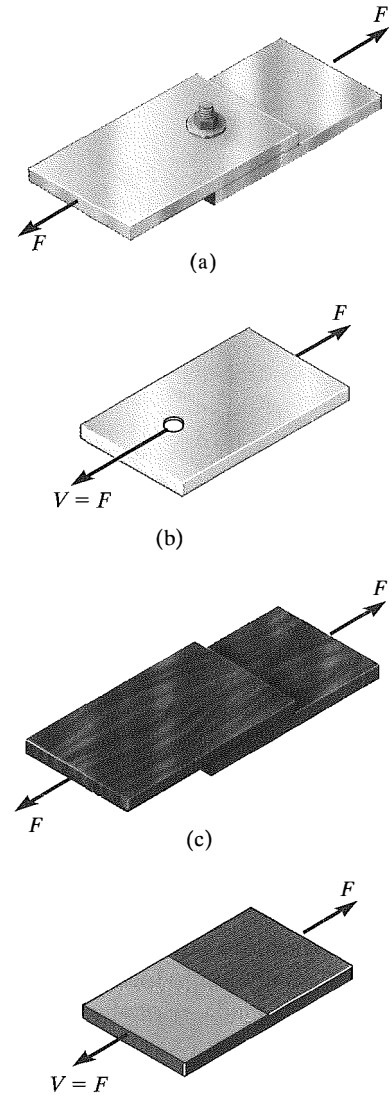


Figura 1.21

de corpo livre mostrados nas Figuras 1.21b e 1.21d. Sendo os elementos finos, podemos desprezar o momento criado pela força *F*. Por consequência, para equilíbrio, a área da seção transversal do parafuso na Figura 1.21b e a superfície de fixação entre os elementos na Figura 1.21d estão sujeitas *somente* a *uma única força de cisalhamento simples* $V = F$. Essa força é usada na Equação 1.7 para determinar a tensão de cisalhamento média que age na seção mais clara da Figura 1.21d.

Cisalhamento duplo. Quando a junta é construída como mostra a Figura 1.22a ou 1.22c, duas superfícies de cisalhamento devem ser consideradas. Esses tipos de acoplamentos são normalmente denominados *juntas de dupla superposição*. Se fizermos um corte entre cada um dos elementos, os diagramas de corpo livre do elemento central serão como os mostrados nas

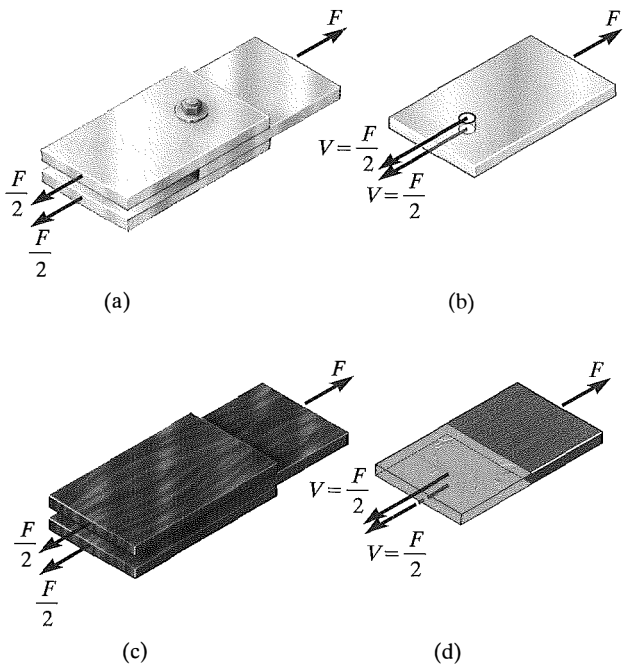


Figura 1.22

Figuras 1.22b e 1.22d. Temos aqui uma condição de **cisalhamento duplo**. Por consequência, $V = F/2$ age sobre *cada* área secionada, e esse cisalhamento deve ser considerado quando aplicarmos $\tau_{méd} = V/A$.

Equilíbrio. Considere um elemento de volume de material tomado em um ponto localizado na superfície de qualquer área secionada na qual age uma tensão de cisalhamento média (Figura 1.23a). Se considerarmos o equilíbrio de forças na direção y, então

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \underbrace{\tau_{zy}(\Delta x\, \Delta y)}_{\text{força (tensão área)}} - \tau'_{zy}\, \Delta x\, \Delta y = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy}$$

De modo semelhante, o equilíbrio de forças na direção z dá como resultado $\tau_{yz} = \tau'_{yz}$. Por fim, considerando os momentos em torno do eixo x,

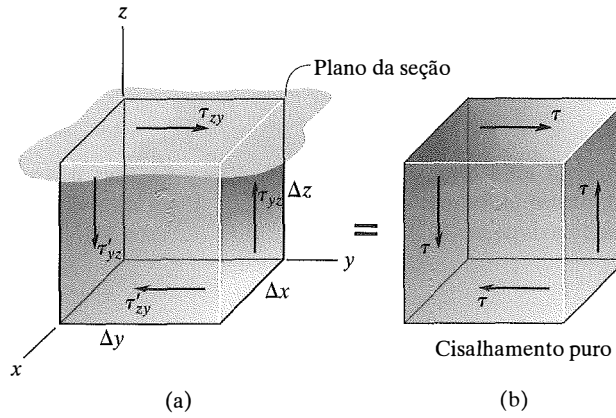


Figura 1.23

$$\Sigma M_x = 0; \qquad \underbrace{-\tau_{zy}(\Delta x\, \Delta y)}_{\text{força (tensão área)}}\ \underbrace{\Delta z}_{\text{braço}} + \underbrace{\tau_{yz}(\Delta x\, \Delta z)}_{\text{força (tensão área)}}\ \underbrace{\Delta y}_{\text{distância}} = 0 \quad \text{(momento)}$$

de modo que

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} = \tau'_{yz} = \tau_{yz} = \tau$$

Em outras palavras, o equilíbrio de forças e momentos exige que a tensão de cisalhamento que age sobre a face superior do elemento seja acompanhada por tensões de cisalhamento que agem sobre as três outras faces (Figura 1.23b). Nesse caso, ***todas as quatro tensões de cisalhamento devem ter valores iguais e serem direcionadas no mesmo sentido ou em sentido oposto uma das outras nas bordas opostas do elemento.*** Isso é denominado *propriedade complementar do cisalhamento* e, sob as condições mostradas na Figura 1.23, o material está submetido a *cisalhamento puro*.

Embora aqui tenhamos considerado um caso de cisalhamento simples provocado pela ação *direta* de uma carga, em capítulos posteriores mostraremos que a tensão de cisalhamento também pode surgir *indiretamente* devido à ação de outros tipos de carga.

PONTOS IMPORTANTES

- Se duas peças *finas* ou *pequenas* forem interconectadas, as cargas aplicadas podem provocar o cisalhamento do material com flexão desprezível. Caso isso ocorra, é adequado, em geral, que a análise do projeto considere que uma *tensão de cisalhamento média* age sobre a área da seção transversal.
- Elementos de fixação como pregos e parafusos frequentemente estão sujeitos a cargas de cisalhamento. A intensidade de uma força de cisalhamento sobre o elemento de fixação é maior ao longo de um plano que passa pelas superfícies interconectadas. O desenho adequado de um diagrama de corpo livre de um segmento do elemento de fixação nos permitirá obter a intensidade e a direção dessa força.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A equação $\tau_{méd} = V/A$ é utilizada para calcular somente a *tensão de cisalhamento média* no material, e sua aplicação deve obedecer às etapas descritas a seguir.

Cisalhamento interno

- Secione o elemento no ponto onde a tensão de cisalhamento média deve ser determinada.
- Faça o diagrama de corpo livre adequado e calcule a força de cisalhamento interna **V** que age na seção que é necessária para manter a peça em equilíbrio.

Tensão de cisalhamento média

- Determine a área secionada A e calcule a tensão de cisalhamento média $\tau_{méd} = V/A$.
- Sugerimos que $\tau_{méd}$ seja mostrada sobre um pequeno elemento de volume do material localizado em um ponto da seção onde a tensão é determinada. Para tanto, em primeiro lugar, represente $\tau_{méd}$ na face do elemento coincidente com a área secionada A. Essa tensão de cisalhamento age na mesma direção de **V**. Então, as tensões de cisalhamento que agem sobre os três planos adjacentes podem ser desenhadas em suas direções adequadas, conforme o esquema mostrado na Figura 1.23.

EXEMPLO 1.10

A barra mostrada na Figura 1.24a tem área de seção transversal quadrada com 40 mm de profundidade e largura. Se uma força axial de 800 N for aplicada ao longo do eixo que passa pelo centroide da área da seção transversal da barra, determine a tensão normal média e a tensão de cisalhamento média que agem no material ao longo do (a) plano de seção *a–a* e do (b) plano de seção *b–b*.

SOLUÇÃO

Parte (a)

Carga interna. A barra é secionada (Figura 1.24b), e a carga interna resultante consiste somente em uma força axial para a qual $P = 800$ N.

Tensão média. A tensão normal média é determinada pela Equação 1.6.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{800\text{ N}}{(0{,}04\text{ m})(0{,}04\text{ m})} = 500\text{ kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

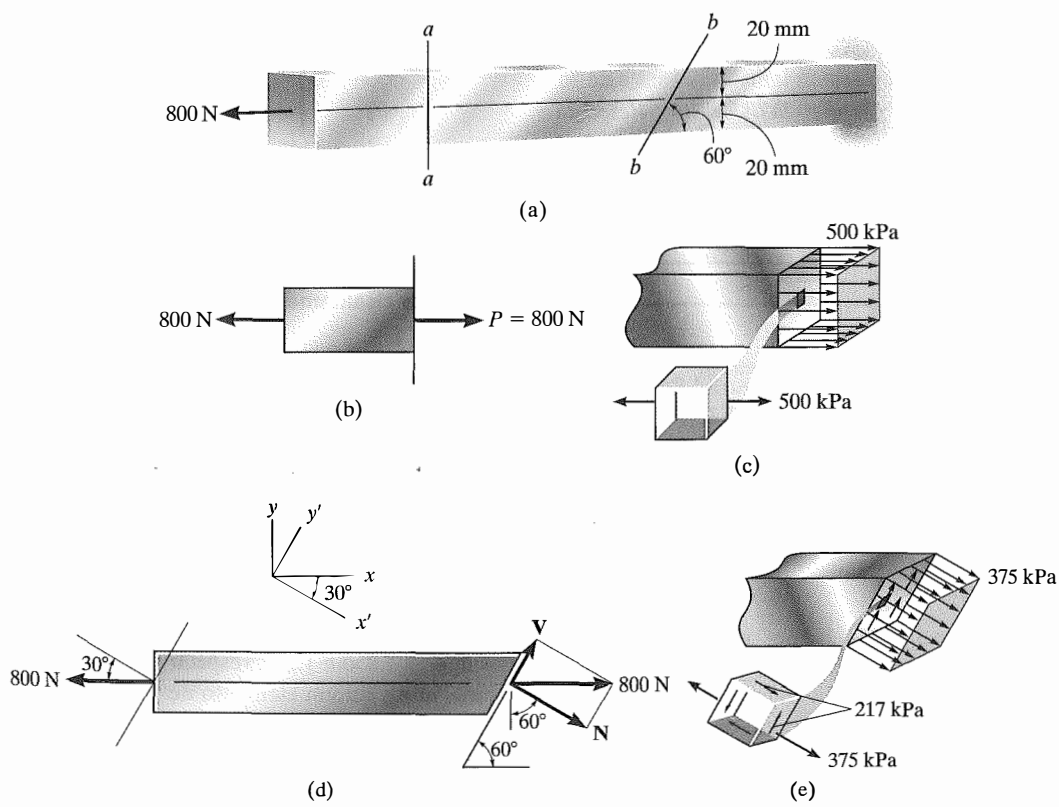


Figura 1.24

Não existe nenhuma tensão de cisalhamento na seção, visto que a força de cisalhamento na seção é zero.

$$\tau_{méd} = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: A distribuição da tensão normal média na seção transversal é mostrada na Figura 1.24c.

Parte (b)

Carga interna. Se a barra for secionada ao longo de *b–b*, o diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é mostrado na Figura 1.24d. Neste caso, a força normal (**N**) e a força de cisalhamento (**V**) agem na área secionada. A utilização dos eixos x, y resulta

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad -800\ \text{N} + N \operatorname{sen} 60° + V \cos 60° = 0$$
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V \operatorname{sen} 60° - N \cos 60° = 0$$

ou, mais diretamente, utilizando os eixos x', y',

$$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0; \qquad N - 800\ \text{N} \cos 30° = 0$$
$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \qquad V - 800\ \text{N} \operatorname{sen} 30° = 0$$

Resolvendo qualquer conjunto de equações,

$$N = 692{,}8\ \text{N}$$
$$V = 400\ \text{N}$$

Tensões médias. Neste caso, a área secionada tem espessura e profundidade de 40 mm e 40 mm/sen 60° = 46,19 mm, respectivamente (Figura 1.24a). Portanto, a tensão normal média é

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{692{,}8\ \text{N}}{(0{,}04\ \text{m})(0{,}04619\ \text{m})} = 375\ \text{kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

e a tensão de cisalhamento média é

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} = \frac{400\ \text{N}}{(0{,}04\ \text{m})(0{,}04619\ \text{m})} = 217\ \text{kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: A distribuição das tensões é mostrada na Figura 1.24e.

EXEMPLO 1.11

A escora de madeira mostrada na Figura 1.25a está suspensa por uma haste de aço de 10 mm de diâmetro que está presa na parede. Considerando que a escora suporta uma carga vertical de 5 kN, calcule a tensão de cisalhamento média na haste na parede e ao longo dos dois planos sombreados da escora, um dos quais é indicado como *abcd*.

SOLUÇÃO

Cisalhamento interno. Como mostra o diagrama de corpo livre na Figura 1.25b, a haste resiste à força de cisalhamento de 5 kN no local em que está presa à parede. A Figura 1.25c mostra um diagrama de corpo livre do segmento secionado da escora que está em contato com a haste. Aqui, a força de cisalhamento que age ao longo de cada plano sombreado é 2,5 kN.

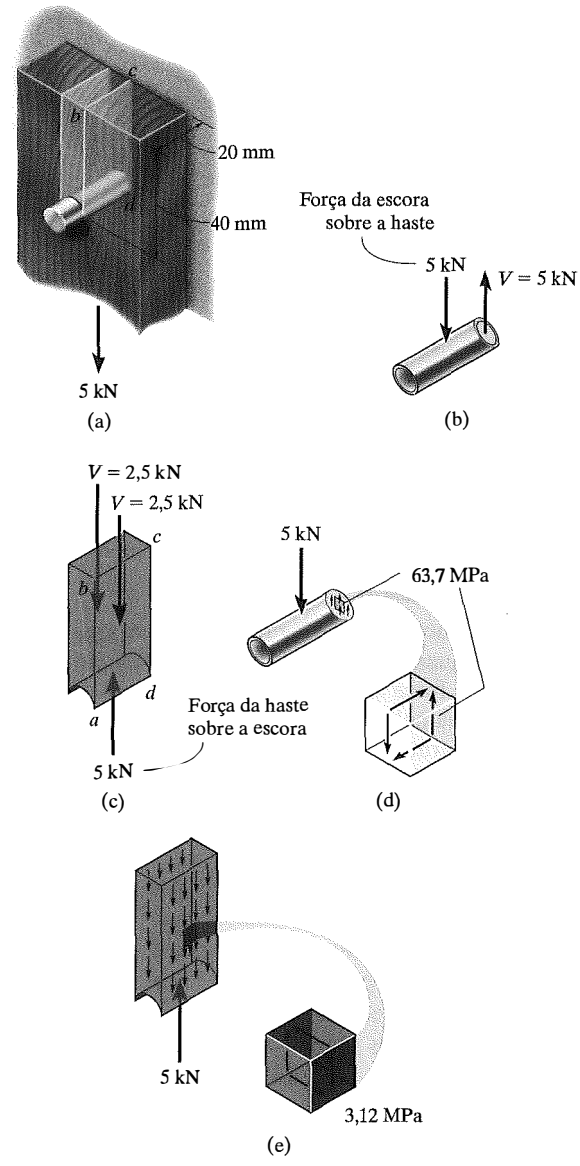


Figura 1.25

Tensão de cisalhamento média. Para a haste,

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} = \frac{5.000\ \text{N}}{\pi(0{,}005\ \text{m})^2} = 63{,}7\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Para a escora,

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A} = \frac{2.500\ \text{N}}{(0{,}04\ \text{m})(0{,}02\ \text{m})} = 3{,}12\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: A distribuição da tensão de cisalhamento média no segmento secionado de haste e escora é mostrada nas figuras 1.25d e 1.25e, respectivamente. Além disso, essas figuras mostram um elemento de volume típico do material tomado em um ponto localizado na superfície de cada seção. Observe cuidadosamente como a tensão de cisalhamento deve agir em cada face sombreada desses elementos e, então, nas faces adjacentes dos elementos.

EXEMPLO 1.12

O elemento inclinado na Figura 1.26a está submetido a uma força de compressão de 3.000 N. Determine a tensão de compressão média ao longo das áreas de contato lisas definidas por AB e BC e a tensão de cisalhamento média ao longo do plano horizontal definido por EDB.

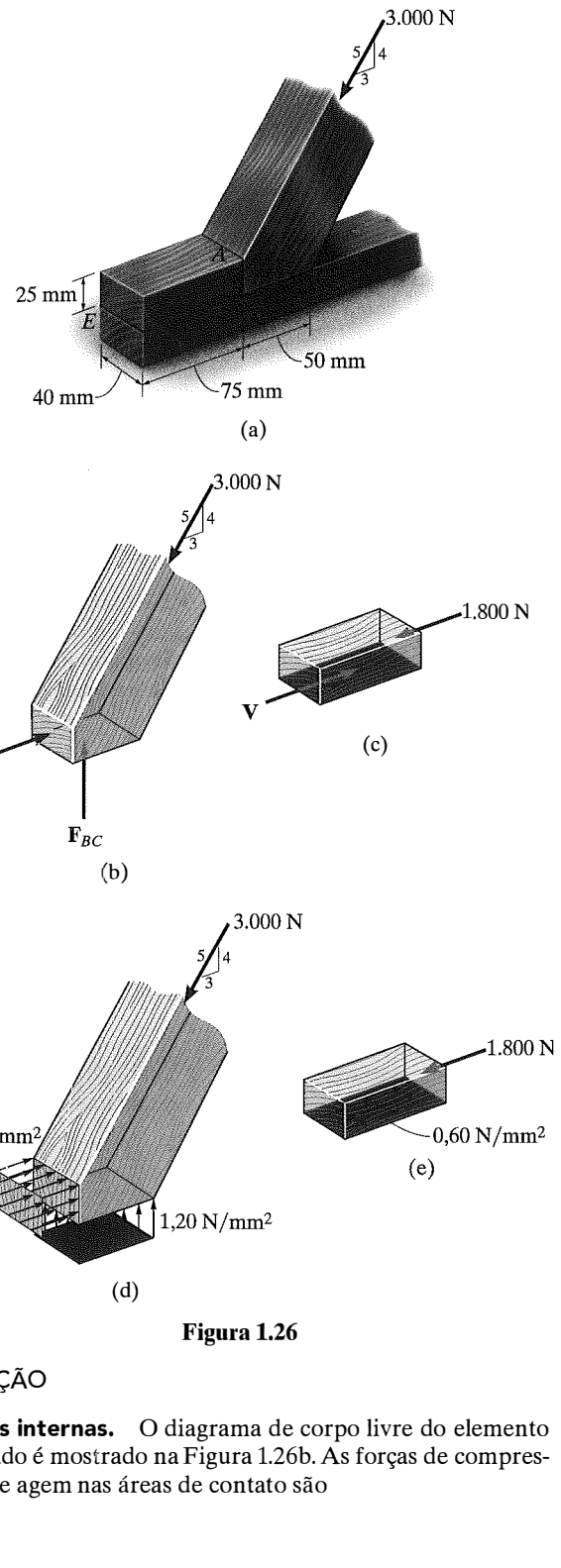


Figura 1.26

SOLUÇÃO

Cargas internas. O diagrama de corpo livre do elemento inclinado é mostrado na Figura 1.26b. As forças de compressão que agem nas áreas de contato são

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad F_{AB} - 3.000\ \text{N}\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0 \qquad F_{AB} = 1.800\ \text{N}$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad F_{BC} - 3.000\ \text{N}\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0 \qquad F_{BC} = 2.400\ \text{N}$$

Além disso, pelo diagrama de corpo livre do segmento superior do elemento inferior (Figura 1.26c), a força de cisalhamento que age no plano horizontal secionado EDB é

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad V = 1.800\ \text{N}$$

Tensão média. As tensões de compressão médias ao longo dos planos horizontal e vertical do elemento inclinado são

$$\sigma_{AB} = \frac{1.800\text{N}}{(25\ \text{mm})(40\ \text{mm})} = 1{,}80\ \text{N/mm}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{2.400\text{N}}{(50\ \text{mm})(40\ \text{mm})} = 1{,}20\ \text{N/mm}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

Essas distribuições de tensão são mostradas na Figura 1.26d.

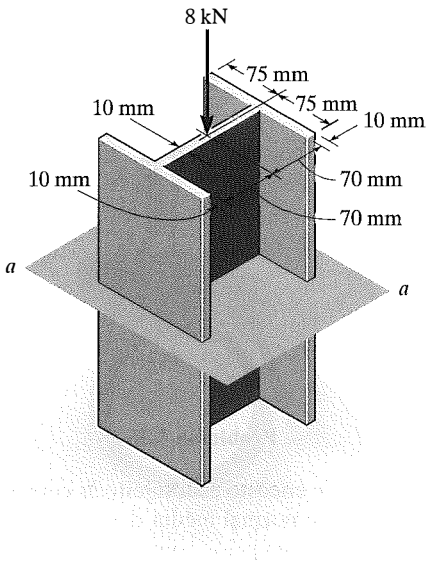
A tensão de cisalhamento média que age no plano horizontal definido por EDB é

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{1.800\ \text{N}}{(75\ \text{mm})(40\ \text{mm})} = 0{,}60\ \text{N/mm}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

A distribuição dessa tensão na área secionada em questão é mostrada na Figura 1.26e.

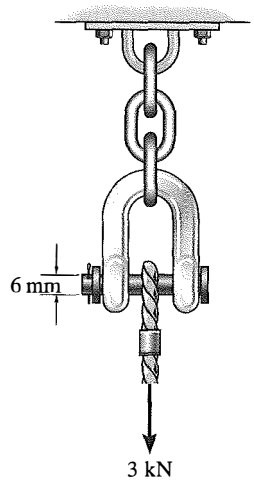
PROBLEMAS

1.34. A coluna está sujeita a uma força axial de 8 kN aplicada no centroide da área da seção transversal. Determine a tensão normal média que age na seção a–a. Mostre como fica essa distribuição de tensão sobre a seção transversal da área.



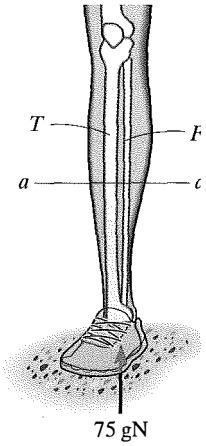
Problema 1.34

1.35. O arganéu da âncora suporta uma força de cabo de 3 kN. Se o pino tiver diâmetro de 6 mm, determine a tensão média de cisalhamento no pino.



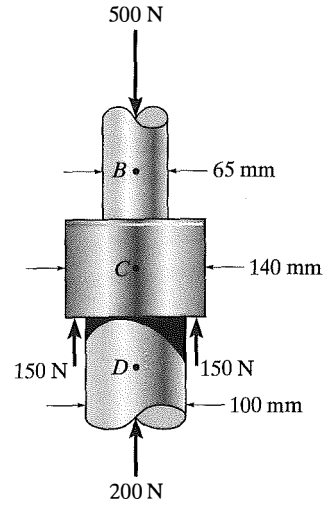
Problema 1.35

***1.36.** Durante uma corrida, o pé de um homem com massa 75 kg é submetido momentaneamente a uma força equivalente a 5 vezes o seu peso. Determine a tensão normal média desenvolvida na tíbia *T* da perna desse homem na seção média *a–a*. A seção transversal pode ser considerada circular, com diâmetro externo de 45 mm e diâmetro interno de 25 mm. Considere que a fíbula *F* não está suportando nenhuma carga.



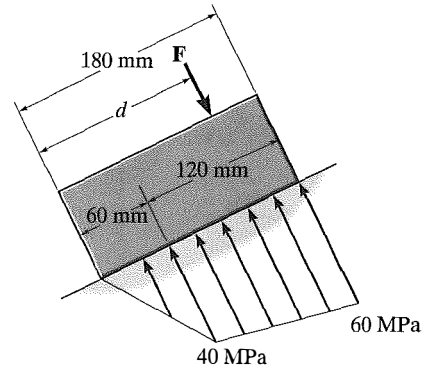
Problema 1.36

1.37. O mancal de encosto está sujeito às cargas mostradas. Determine a tensão normal média desenvolvida nas seções transversais que passam pelos pontos *B*, *C* e *D*. Faça um rascunho dos resultados sobre um elemento de volume infinitesimal localizado em cada seção.



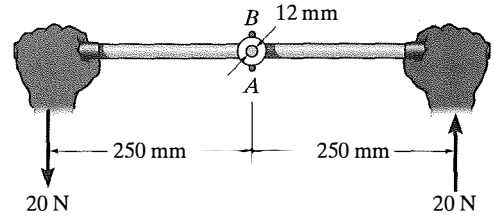
Problema 1.37

1.38. O pequeno bloco tem espessura de 5 mm. Se a distribuição de tensão no apoio desenvolvida pela carga variar como mostra a figura, determine a força **F** aplicada ao bloco e a distância *d* até o ponto onde ela é aplicada.



Problema 1.38

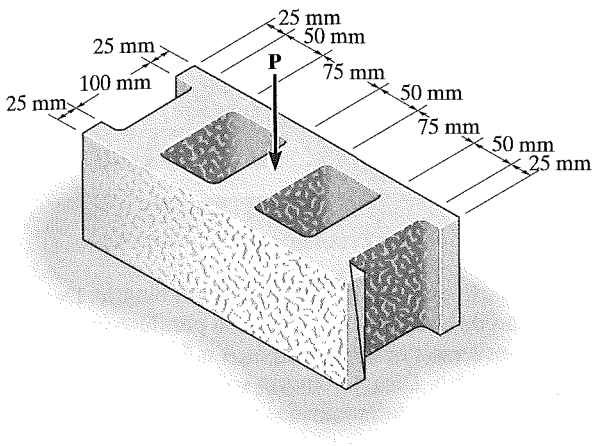
1.39. A alavanca está presa ao eixo fixo por um pino cônico *AB*, cujo diâmetro médio é 6 mm. Se um binário for aplicado à alavanca, determine a tensão de cisalhamento média no pino entre ele e a alavanca.



Problema 1.39

*1.40. O bloco de concreto tem as dimensões mostradas na figura. Se o material falhar quando a tensão normal média atingir 0,840 MPa, determine a maior carga vertical **P** aplicada no centro que ele pode suportar.

1.41. O bloco de concreto tem as dimensões mostradas na figura. Se ele for submetido a uma força **P** = 4 kN aplicada em seu centro, determine a tensão normal média no material. Mostre o resultado sobre um elemento de volume infinitesimal do material.

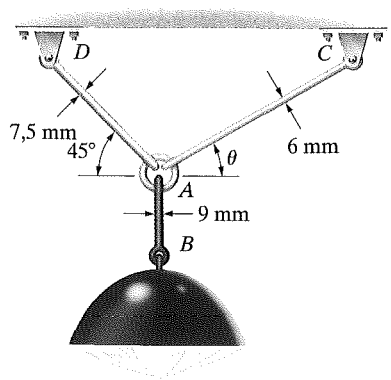


Problemas 1.40/41

1.42. A luminária de 250 N é sustentada por três hastes de aço interligadas por um anel em A. Determine qual das hastes está submetida à maior tensão normal média e calcule seu valor. Considere $\theta = 30°$. O diâmetro de cada haste é dado na figura.

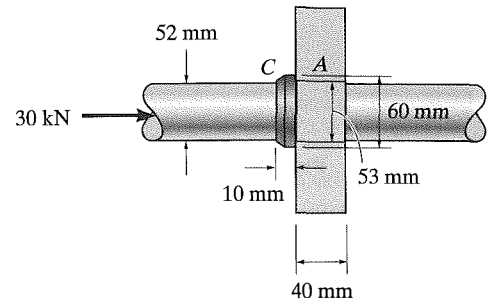
1.43. Resolva o Problema 1.42 para $\theta = 45°$.

*1.44. A luminária de 250 N é sustentada por três hastes de aço interligadas por um anel em A. Determine o ângulo de orientação θ de AC de modo que a tensão normal média na haste AC seja duas vezes a tensão normal média na haste AD. Qual é a intensidade da tensão em cada haste? O diâmetro de cada haste é dado na figura.



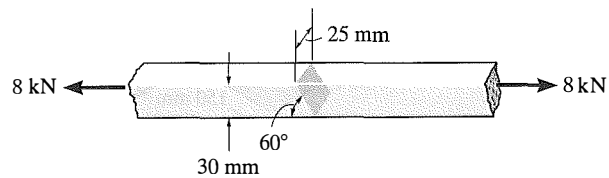
Problemas 1.42/43/44

1.45. O eixo está sujeito à força axial de 30 kN. Se ele passar pelo orifício de 53 mm de diâmetro no apoio fixo A, determine a tensão no mancal que age sobre o colar C. Determine também a tensão de cisalhamento média que age ao longo da superfície interna do colar no ponto onde ele está acoplado ao eixo de 52 mm de diâmetro.



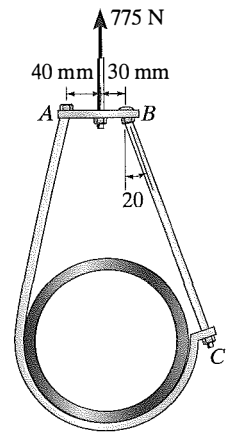
Problema 1.45

1.46. Os dois elementos de aço estão interligados por uma solda de topo angulada de 60°. Determine a tensão de cisalhamento média e a tensão normal média suportada no plano da solda.



Problema 1.46

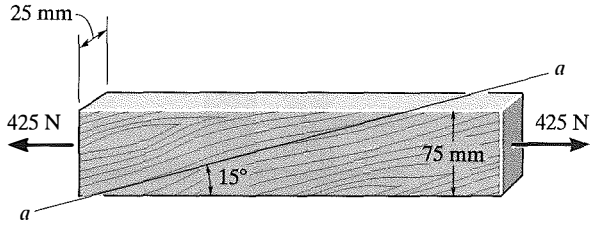
1.47. O gancho é usado para sustentar o tubo de tal modo que a força no parafuso vertical é 775 N. Determine a tensão normal média desenvolvida no parafuso BC se ele tiver diâmetro de 8 mm. Considere que A seja um pino.



Problema 1.47

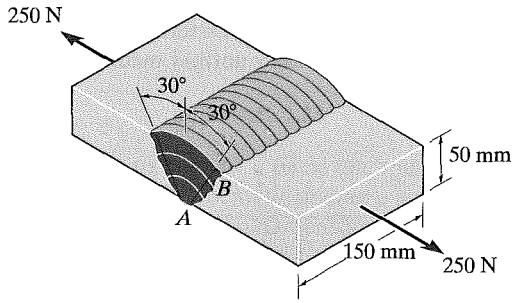
*1.48. A prancha de madeira está sujeita a uma força de tração de 425 N. Determine a tensão de cisalhamento média

e a tensão normal média desenvolvidas nas fibras da madeira orientadas ao longo da seção a–a a 15° em relação ao eixo da prancha.



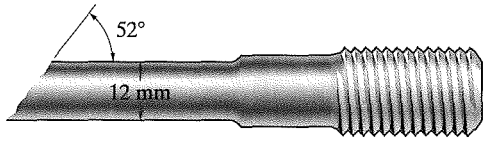
Problema 1.48

1.49. A junta de topo quadrada aberta é usada para transmitir uma força de 250 N de uma placa a outra. Determine as componentes da tensão de cisalhamento média e da tensão normal média que essa carga cria na face da solda, seção AB.



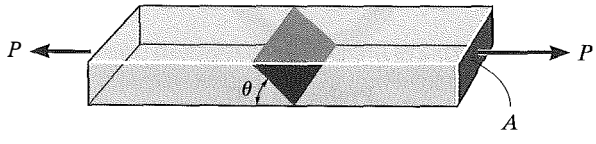
Problema 1.49

1.50. O corpo de prova falhou no ensaio de tração a um ângulo de 52° sob uma carga axial de 100 kN. Se o diâmetro do corpo de prova for 12 mm, determine a tensão de cisalhamento média e a tensão normal média que agem na área do plano de falha inclinado. Determine também qual a tensão normal média em atuação sobre a seção transversal quando ocorreu a falha.



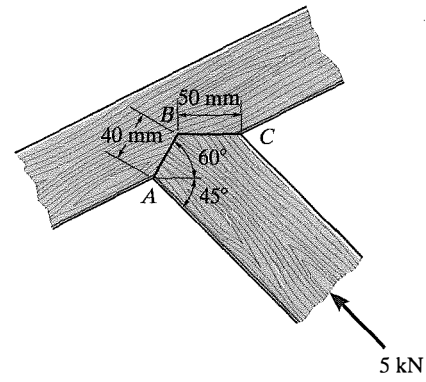
Problema 1.50

1.51. Um corpo de prova sob tração com área de seção transversal A é submetido a uma força axial **P**. Determine a tensão de cisalhamento média máxima no corpo de prova e indique a orientação θ de uma seção na qual ela ocorre.



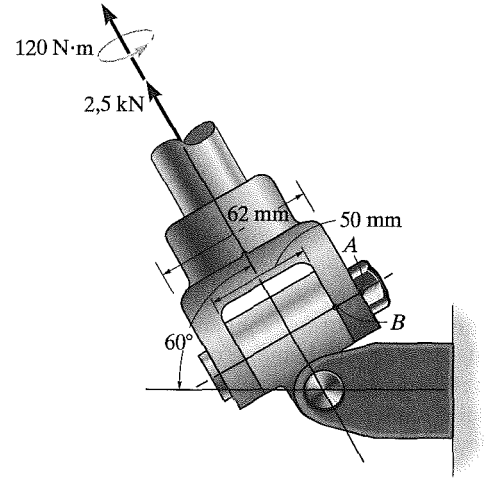
Problema 1.51

***1.52.** A junta está submetida a uma força axial de 5 kN. Determine a tensão normal média que age nas seções AB e BC. Considere que o elemento é liso e tem 50 mm de espessura.



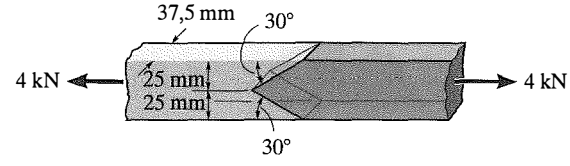
Problema 1.52

1.53. O garfo está sujeito a força e a um binário. Determine a tensão de cisalhamento média no parafuso que age nas seções transversais que passam por A e B. O parafuso tem 6 mm de diâmetro. *Dica:* O binário sofre a resistência de um conjunto de forças desenvolvidas na haste do parafuso.



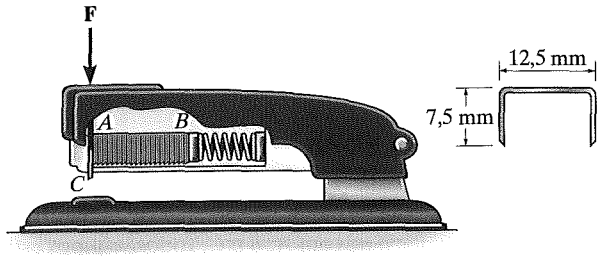
Problema 1.53

1.54. Os dois elementos usados na construção da fuselagem de um avião estão interligados por uma solda em boca-de-peixe a 30°. Determine a tensão de cisalhamento média e a tensão normal média no plano de cada solda. Considere que cada plano inclinado suporta uma força horizontal de 2 kN.



Problema 1.54

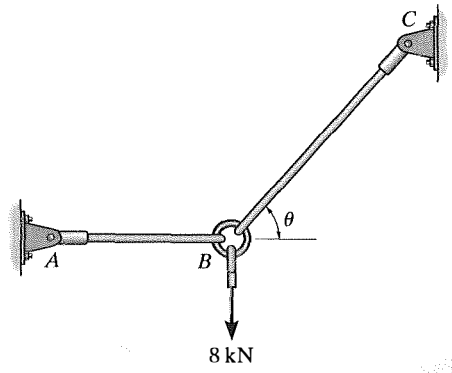
1.55. Os grampos na fileira AB contida no grampeador estão colados de modo que a tensão de cisalhamento máxima que a cola pode suportar é $\theta_{máx} = 84$ kPa. Determine a força mínima **F** que deve ser aplicada ao êmbolo para extrair um grampo da fileira por cisalhamento e permitir que ele saia sem deformação pela fenda em C. As dimensões externas do grampo são mostradas na figura, e a espessura é 1,25 mm. Considere que todas as outras partes são rígidas e despreze o atrito.



Problema 1.55

*1.56. Os diâmetros das hastes AB e BC são 4 mm e 6 mm, respectivamente. Se for aplicada uma carga de 8 kN ao anel em B, determine a tensão normal média em cada haste se $\theta = 60°$.

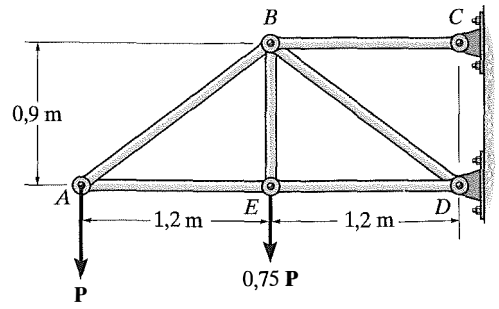
1.57. Os diâmetros das hastes AB e BC são 4 mm e 6 mm, respectivamente. Se a carga vertical de 8 kN for aplicada ao anel em B, determine o ângulo θ da haste BC de modo que a tensão normal média em cada haste seja equivalente. Qual é essa tensão?



Problemas 1.56/57

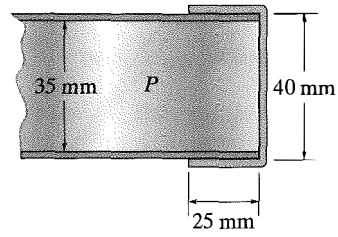
1.58. Cada uma das barras da treliça tem área de seção transversal de 780 mm². Determine a tensão normal média em cada elemento resultante da aplicação da carga $P = 40$ kN. Indique se a tensão é de tração ou de compressão.

1.59. Cada uma das barras da treliça tem área de seção transversal de 780 mm². Se a tensão normal média máxima em qualquer barra não pode ultrapassar 140 MPa, determine o valor máximo P das cargas que podem ser aplicadas à treliça.



Problemas 1.58/59

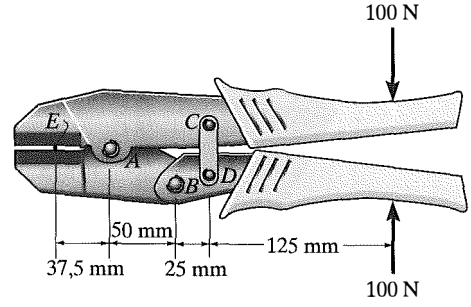
*1.60. O tampão é utilizado para vedar a extremidade do tubo cilíndrico que está sujeito a uma pressão interna $p = 650$ Pa. Determine a tensão de cisalhamento média que a cola exerce sobre os lados do tubo necessária para manter o tampão no lugar.



Problema 1.60

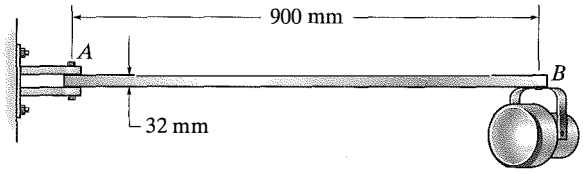
1.61. O alicate de pressão é usado para dobrar a extremidade do arame E. Se uma força de 100 N for aplicada nas hastes do alicate, determine a tensão de cisalhamento média no pino em A. O pino está sujeito a cisalhamento duplo e tem diâmetro de 5 mm. Somente uma força vertical é exercida no arame.

1.62. Resolva o Problema 1.61 para o pino B, o qual está sujeito a cisalhamento duplo e tem 5 mm de diâmetro.



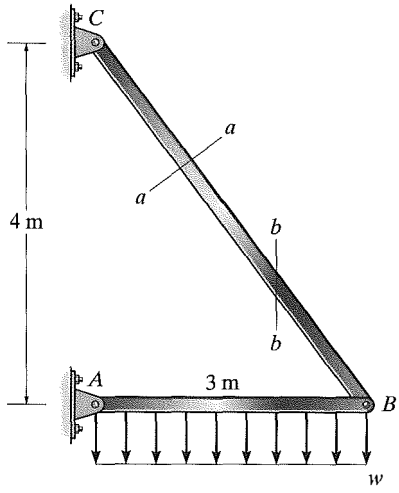
Problemas 1.61/62

1.63. A lâmpada de engate do vagão ferroviário é sustentada pelo pino de 3 mm de diâmetro em A. Se a lâmpada pesar 20 N e o peso do braço extensor AB for 8 N/m, determine a tensão de cisalhamento média no pino necessária para sustentar a lâmpada. *Dica:* A força de cisalhamento no pino é causada pelo binário exigido para o equilíbrio em A.



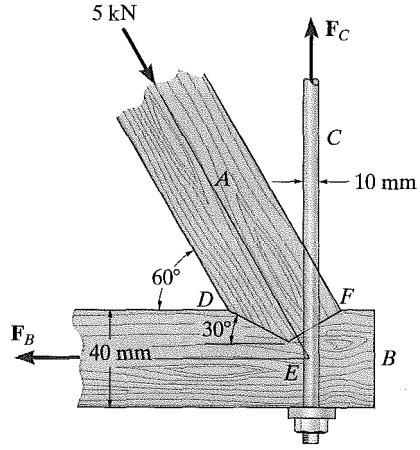
Problema 1.63

***1.64.** A estrutura de dois elementos está sujeita a um carregamento distribuído mostrado. Determine a tensão normal média e a tensão de cisalhamento média que agem nas seções *a–a* e *b–b*. A seção transversal quadrada do elemento *CB* tem 35 mm. Considere $w = 8$ kN/m.



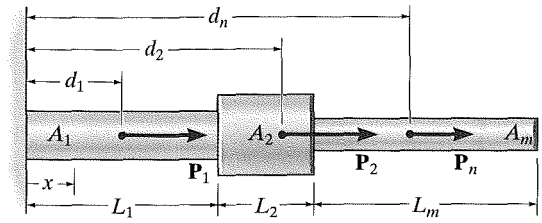
Problema 1.64

1.65. O elemento *A* da junta escalonada de madeira usada na treliça está submetido a uma força de compressão de 5 kN. Determine a tensão normal média que age na haste do pendural *C* com diâmetro de 10 mm e no elemento *B* com espessura de 30 mm.



Problema 1.65

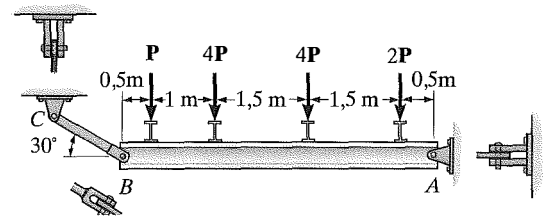
***1.66.** Considere o problema geral de uma barra composta por *m* segmentos, cada um deles com área de seção transversal constante A_m e comprimento L_m. Se houver *n* cargas na barra como mostra a figura, escreva um código computacional que possa ser usado para determinar a tensão normal média em qualquer localização especificada *x*. Mostre uma aplicação do programa usando os valores $L_1 = 1{,}2$ m, $d_1 = 0{,}6$ m, $P_1 = 2$ kN, $A_1 = 1.875$ mm², $L_2 = 0{,}6$ m, $d_2 = 1{,}8$ m, $P_2 = -1{,}5$ kN, $A_2 = 625$ mm².



Problema 1.66

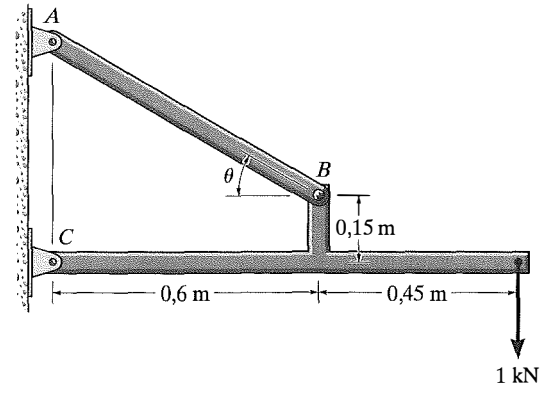
1.67. A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo curto *BC*. Se $P = 15$ kN, determine a tensão de cisalhamento média desenvolvida nos pinos em *A*, *B* e *C*. Todos os pinos estão sujeitos a cisalhamento duplo, como mostra a figura, e cada um tem diâmetro de 18 mm.

***1.68.** A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo curto *BC*. Determine o valor máximo *P* das cargas que a viga suportará se a tensão de cisalhamento média em cada pino não puder ultrapassar 80 MPa. Todos os pinos sofrem cisalhamento duplo, como mostra a figura, e cada um tem diâmetro de 18 mm.



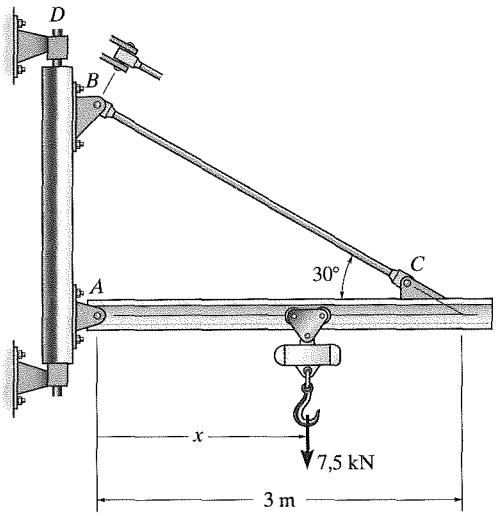
Problemas 1.67/68

1.69. A estrutura está sujeita a carga de 1 kN. Determine a tensão de cisalhamento média no parafuso em *A* em função do ângulo da barra θ. Represente essa função em gráfico para $0 \leq \theta \leq 90°$ e indique os valores de θ para os quais essa tensão é mínima. O parafuso tem diâmetro de 6 mm e está sujeito a cisalhamento simples.



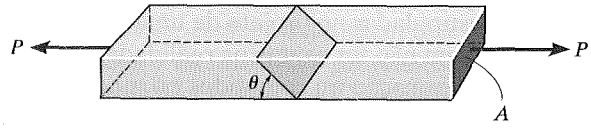
Problema 1.69

1.70. O guindaste giratório está preso por um pino em A e suporta um montacargas de corrente que pode deslocar-se ao longo da flange inferior da viga, 0,3 m $\leq x \leq$ 3,6 m. Se a capacidade de carga nominal máxima do guindaste for 7,5 kN, determine a tensão normal média máxima na barra BC de 18 mm de diâmetro e a tensão de cisalhamento média máxima no pino de 16 mm de diâmetro em B.



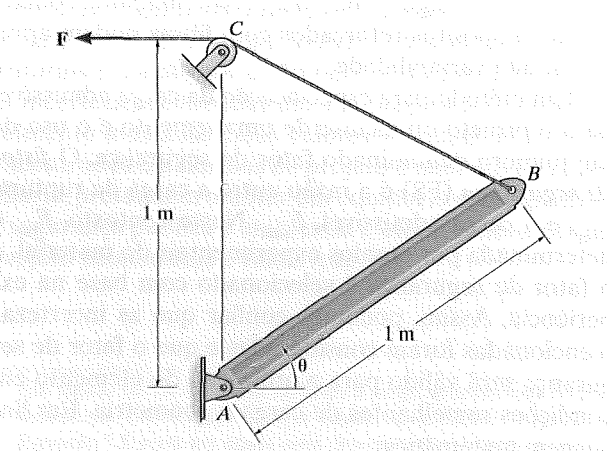
Problema 1.70

1.71. A barra tem área de seção transversal A e está submetida à carga axial P. Determine a tensão normal média e a tensão de cisalhamento média que agem na seção sombreada que está orientada a um ângulo θ em relação à horizontal. Represente em gráfico a variação dessas tensões em função de θ ($0 \leq \theta \leq 90°$).



Problema 1.71

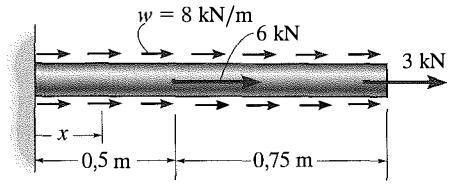
***1.72.** A lança tem peso uniforme de 3 kN e é alçada até a posição desejada por meio do cabo BC. Se o cabo tiver diâmetro de 15 mm, construa um gráfico da tensão normal média no cabo em função da posição da lança θ para $0° \leq \theta \leq 90°$.



Problema 1.72

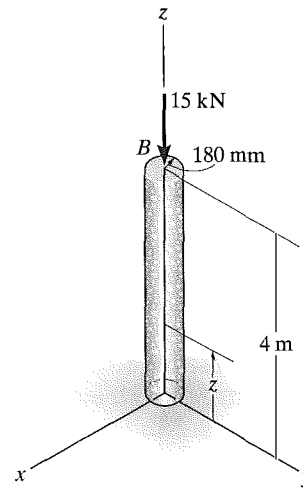
1.73. A área da seção transversal da barra é $400(10^{-6})$ m^2. Se ela estiver sujeita a uma carga axial distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento e a duas cargas concentradas como mostra a figura, determine a tensão normal média na barra em função de x para $0 < x \leq 0{,}5$ m.

1.74. A área da seção transversal da barra é $400(10^{-6})$ m^2. Se ela estiver sujeita a uma carga axial distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento e a duas cargas concentradas como mostra a figura, determine a tensão normal média na barra em função de x para 0,5 m $< x \leq$ 1,25 m.



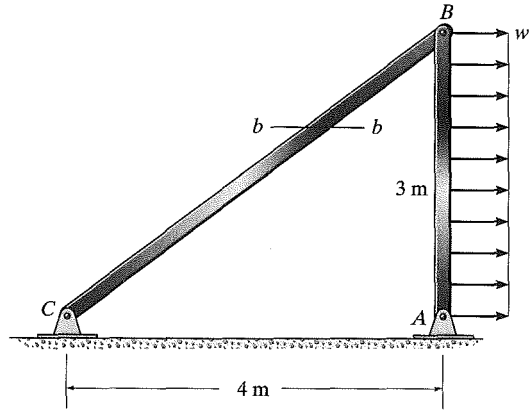
Problemas 1.73/74

1.75. A coluna é feita de concreto de densidade 2,30 Mg/m^3 e está sujeita a uma força de compressão axial de 15 kN em sua extremidade superior B. Determine a tensão normal média na coluna em função da distância z medida em relação à base. *Observação*: por causa da deformação localizada nas extremidades, o resultado servirá apenas para determinar a tensão normal média em uma seção removida das extremidades da coluna.



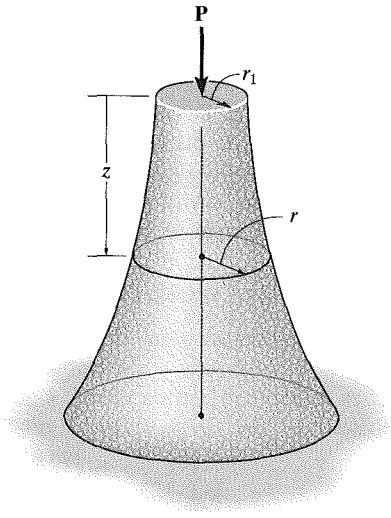
Problema 1.75

***1.76.** A estrutura de dois elementos está sujeita à carga distribuída mostrada. Determine a maior intensidade w da carga uniforme que pode ser aplicada à estrutura sem que a tensão normal média ou a tensão de cisalhamento média na seção b–b ultrapasse $\sigma = 15$ MPa e $\tau = 16$ MPa, respectivamente. O elemento CB tem seção transversal quadrada de 30 mm de lado.



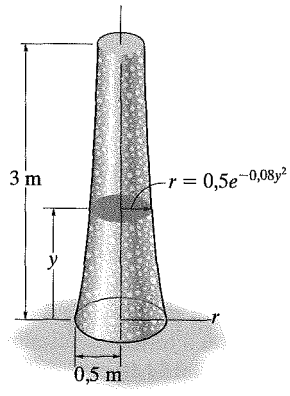
Problema 1.76

1.77. O pedestal suporta uma carga **P** em seu centro. Se a densidade de massa do material for ρ, determine a dimensão radial r em função de z de modo que a tensão normal média no pedestal permaneça constante. A seção transversal é circular.



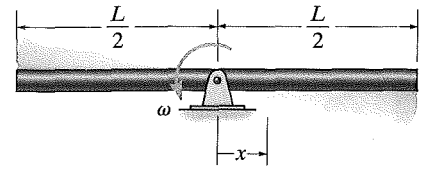
Problema 1.77

1.78. O raio do pedestal é definido por $r = (0{,}5e^{-0{,}08y^2})$ m, onde y é dado em metros. Se o material tiver densidade de 2,5 Mg/m^3, determine a tensão normal média no apoio.



Problema 1.78

1.79. A barra uniforme com área da seção transversal A e massa por unidade de comprimento m está apoiada por um pino em seu centro. Se ela girar no plano horizontal a uma velocidade angular constante ω, determine a tensão normal média na barra em função de x.



Problema 1.79

1.6 Tensão admissível

Um engenheiro responsável pelo *projeto* de um elemento estrutural ou mecânico deve restringir a tensão atuante no material a um nível seguro. Além disso, uma estrutura ou máquina em uso contínuo deve ser *analisada* periodicamente para que se verifique quais cargas adicionais seus elementos ou partes podem suportar. Portanto, vale repetir, é necessário fazer os cálculos usando-se uma tensão segura ou admissível.

Para se garantir a segurança, é preciso escolher uma tensão admissível que restrinja a carga aplicada a um valor *menor* do que a carga que o elemento pode suportar totalmente. Há várias razões para isso. Por exemplo, a carga para a qual o elemento é projetado pode ser diferente das cargas realmente aplicadas. As dimensões estipuladas no projeto de uma estrutura ou máquina podem não ser exatas, na realidade, por causa de erros de fabricação ou cometidos na montagem de seus componentes. É possível ocorrer problemas com vibrações, impactos ou cargas acidentais desconhecidas, que não tenham sido contemplados no projeto. Corrosão atmosférica, deterioração ou desgaste provocado por exposição a intempéries tendem a deteriorar os materiais em serviço. Por fim, as propriedades mecânicas de alguns materiais como madeira, concreto ou compósitos reforçados com fibras podem apresentar alta variabilidade.

Um método para especificação da carga admissível para o projeto ou análise de um elemento é o uso de um número denominado fator de segurança. O ***fator de segurança*** (FS) é a razão entre a carga de ruptura, F_{rup}, e a carga admissível, F_{adm}. Neste contexto, F_{rup} é determinada por ensaios experimentais do material, e o fator de segurança é selecionado com base na experiência. Assim, podemos confiar que as incertezas mencionadas foram consideradas e que o fator de segurança será válido para a utilização do elemento em condições semelhantes de carga e geometria. Em linguagem matemática,

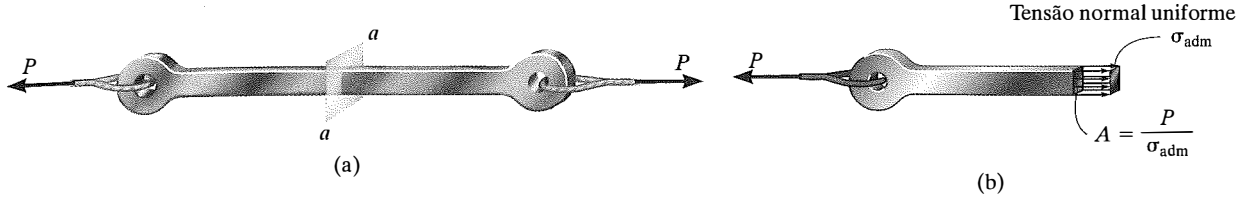


Figura 1.27

$$\text{FS} = \frac{F_{\text{rup}}}{F_{\text{adm}}} \tag{1.8}$$

Se a carga aplicada ao elemento estiver *linearmente relacionada* com a tensão desenvolvida no interior do elemento, como no caso da utilização de $\sigma = P/A$ e $\tau_{\text{méd}} = V/A$, então podemos expressar o fator de segurança como a razão entre a tensão de ruptura σ_{rup} (ou τ_{rup}) e a tensão admissível σ_{adm} (ou τ_{adm});* isto é,

$$\text{FS} = \frac{\sigma_{\text{rup}}}{\sigma_{\text{adm}}} \tag{1.9}$$

ou

$$\text{FS} = \frac{\tau_{\text{rup}}}{\tau_{\text{adm}}} \tag{1.10}$$

Em qualquer dessas equações o fator de segurança escolhido é *maior* que 1, para evitar o potencial de falha. Valores específicos dependem dos tipos de materiais usados e da finalidade pretendida da estrutura ou máquina. Por exemplo, o FS utilizado no projeto dos componentes de um avião ou de veículos espaciais pode estar próximo de 1, de modo a reduzir o peso do veículo. Por outro lado, no caso de uma usina nuclear, o fator de segurança para alguns de seus componentes pode chegar a 3, visto que podem existir incertezas no carregamento ou no comportamento do material. Todavia, em geral, os fatores de segurança e, portanto, as cargas ou tensões admissíveis para elementos estruturais e mecânicos estão bem padronizados, já que as incertezas envolvidas em seu projeto foram razoavelmente avaliadas. Seus valores, os quais podem ser encontrados em normas de projeto e manuais de engenharia, pretendem manter um equilíbrio entre garantir a segurança pública e ambiental e oferecer soluções de projeto econômicas e razoáveis.

* Em alguns casos, como em colunas, a carga aplicada não está linearmente relacionada com a tensão e, portanto, somente a Equação 1.8 pode ser usada para determinar o fator de segurança. Ver Capítulo 13.

1.7 Projeto de acoplamentos simples

Adotando-se premissas simplificadoras em relação ao comportamento do material, as equações $\sigma = P/A$ e $\tau_{\text{méd}} = V/A$ geralmente podem ser usadas para projetar um acoplamento simples ou um elemento mecânico. Em particular, se um elemento estiver submetido a uma *força normal* em uma seção, a área de seção exigida é determinada por

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{adm}}} \tag{1.11}$$

Por outro lado, se a seção estiver sujeita a uma *força de cisalhamento*, então a área de seção exigida é

$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}} \tag{1.12}$$

Como discutido na Seção 1.6, a tensão admissível usada em cada uma dessas equações é determinada pela aplicação de um fator de segurança a uma tensão normal ou de cisalhamento especificada ou pela obtenção dessas tensões diretamente de uma norma de projeto adequada.

Agora, discutiremos quatro tipos comuns de problemas em cujo projeto as equações citadas podem ser usadas.

Área da seção transversal de um elemento de tração. A área da seção transversal de um elemento prismático submetido a uma força de tração pode ser determinada *desde que* a força tenha uma linha de ação que passe pelo centroide da seção transversal. Por exemplo, considere a "barra com olhal" mostrada na Figura 1.27a. Na seção intermediária *a–a*, a distribuição de tensão é uniforme na seção transversal e a área sombreada A é determinada, como mostra a Figura 1.27b.

Área da seção transversal de um acoplamento submetido a cisalhamento. Muitas vezes, parafusos ou pinos são usados para interligar chapas, pranchas ou vários elementos. Como exemplo,

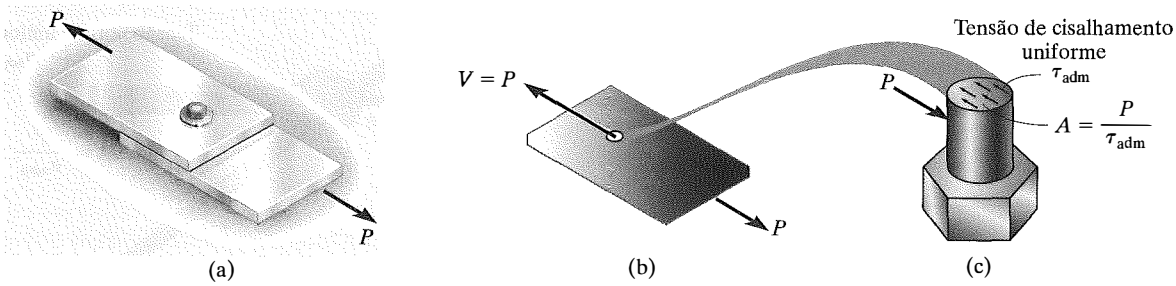


Figura 1.28

considere a junta sobreposta mostrada na Figura 1.28a. Se o parafuso estiver solto ou se a força de aperto do parafuso for desconhecida, é seguro supor que qualquer força de atrito *entre* as chapas é desprezível. O resultado é o diagrama de corpo livre para uma seção que passa *entre* as chapas e pelo parafuso mostrado na Figura 1.28b. O parafuso está sujeito a uma força de cisalhamento interna resultante $V = P$ em sua seção transversal. Considerando-se que a tensão de cisalhamento que provoca essa força está *uniformemente distribuída* na seção transversal, a área da seção transversal do parafuso, A, é determinada como mostra a Figura 1.28c.

Área exigida para resistir ao apoio. A tensão normal produzida pela compressão de uma superfície contra outra é denominada ***tensão de apoio***. Se essa tensão se tornar suficientemente grande, poderá esmagar ou deformar localmente uma ou ambas as superfícies. Por consequência, para evitar falha, é necessário determinar a área de apoio adequada para o material usando uma tensão de apoio admissível. Por exemplo, a área A da chapa da base da coluna B mostrada na Figura 1.29 é determinada pela tensão de apoio admissível do concreto obtida por $A = P/(\sigma_a)_{adm}$. É claro que, por essa fórmula, consideramos que a tensão de apoio admissível para o concreto é menor do que a admissível para o material da chapa de base da coluna e, além disso, que a tensão de apoio é uniformemente distribuída entre a chapa e o concreto, como mostra a figura.

Área exigida para resistir a cisalhamento provocado por carga axial. Em alguns casos, hastes ou outros elementos serão apoiados de tal modo que pode ser desenvolvida uma tensão de cisalhamento no elemento, ainda que ele esteja submetido a uma carga axial. Um exemplo dessa situação seria uma haste de aço cuja extremidade esteja engastada em concreto e carregada como mostra a Figura 1.30a. O diagrama de corpo livre da haste (Figura 1.30b) mostra que uma *tensão de cisalhamento* age na área de contato da haste com o concreto. Essa área é $(\pi d)l$, onde d é diâmetro da haste e l é o comprimento do engaste. Seria difícil determinar a distribuição real da tensão de cisalhamento ao longo da haste, mas, se considerarmos que ela é *uniforme*, poderemos usar $A = V/\tau_{adm}$ para calcular l, desde que d e τ_{adm} sejam conhecidos (Figura 1.30b).

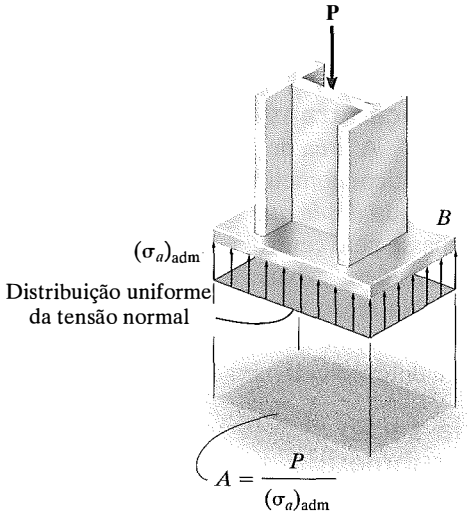


Figura 1.29

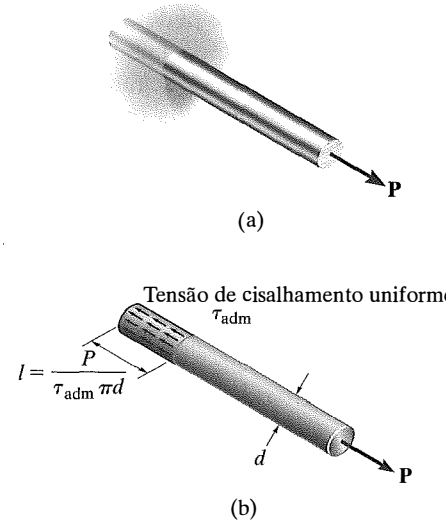


Figura 1.30

PONTOS IMPORTANTES

- O projeto de um elemento para resistência é baseado na seleção de uma tensão admissível que o capacitará a suportar com segurança a carga pretendida. Há muitos fatores desconhecidos capazes de influenciar a tensão real aplicada a um elemento. Portanto, dependendo da utilização pretendida do elemento, aplica-se um *fator de segurança* para se obter a carga admissível que o elemento pode suportar.
- Os quatro casos ilustrados nesta seção representam apenas algumas das muitas aplicações das fórmulas para tensão normal média e tensão de cisalhamento média utilizadas no projeto e na análise de engenharia. Entretanto, sempre que essas equações forem aplicadas, é importante ter em mente que consideramos que a distribuição de tensão é *uniformemente distribuída* ou "ponderada" na seção.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Quando usamos a tensão normal média e a tensão de cisalhamento média para resolver problemas, é preciso, em primeiro lugar, considerar cuidadosamente a seção na qual a tensão crítica agirá. Uma vez feita a seção, o elemento deve ser projetado para que a área da seção seja suficiente para resistir à tensão que age sobre ela. A determinação dessa área envolve as etapas a seguir.

Carga interna

- Secione o elemento passando pela área e desenhe um diagrama de corpo livre de um segmento do elemento. Então, a força resultante interna na seção é determinada pelas equações de equilíbrio.

Área exigida

- Contanto que a tensão admissível seja conhecida ou possa ser determinada, a área exigida necessária para sustentar a carga na seção é calculada por $A = P/\sigma_{adm}$ ou $A = V/\tau_{adm}$.

EXEMPLO 1.13

Os dois elementos estão interligados por pinos em B como mostra a Figura 1.31a, que também apresenta vistas de cima dos acoplamentos em A e B. Se a tensão admissível de cisalhamento para os pinos for $\tau_{adm} = 90$ MPa e a tensão de tração admissível para a haste CB for $(\sigma_t)_{adm} = 115$ MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro dos pinos A e B e o diâmetro de haste CB necessários para suportar a carga.

SOLUÇÃO

Reconhecendo que CB é um elemento de duas forças, o diagrama de corpo livre do elemento AB juntamente com as reações calculadas em A e B é mostrado na Figura 1.31b. Como exercício, verifique os cálculos e observe que a *força resultante* em A deve ser usada para o projeto do pino A, visto que essa é a força de cisalhamento à qual o pino resiste.

Diâmetro dos pinos. Pela Figura 1.31a e diagramas de corpo livre da porção secionada de cada pino em contato com o elemento AB (Figura 1.31c), vemos que o pino A está submetido a cisalhamento duplo, ao passo que o pino B está sujeito a cisalhamento simples. Portanto,

$$A_A = \frac{V_A}{T_{adm}} = \frac{2{,}84\ \text{kN}}{90 \times 10^3\ \text{kPa}} = 31{,}56 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

$$= \pi\left(\frac{d_A^{\,2}}{4}\right) \quad d_A = 6{,}3\ \text{mm}$$

$$A_B = \frac{V_B}{T_{adm}} = \frac{6{,}67\ \text{kN}}{90 \times 10^3\ \text{kPa}} = 74{,}11 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

$$= \pi\left(\frac{d_B^{\,2}}{4}\right) \quad d_B = 9{,}7\ \text{mm}$$

Embora esses valores representem os *menores* diâmetros admissíveis para os pinos, teremos de escolher um tamanho que seja *fabricado* ou esteja disponível. Escolheremos um tamanho *maior* do que o exigido, com aproximação de 1 mm.

$$d_A = 7\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$d_B = 10\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Diâmetro da haste. O diâmetro exigido para a haste em sua seção média é, portanto,

$$A_{BC} = \frac{P}{(\sigma_1)_{adm}} = \frac{6{,}67\ \text{kN}}{115 \times 10^3\ \text{kPa}}$$

$$= 58 \times 10^{-6}\ \text{m}^{22} = \pi\left(\frac{d_{BC}^{\,2}}{4}\right)$$

$$d_{BC} = 8{,}59\ \text{mm}$$

escolheremos

$$d_{BC} = 9\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

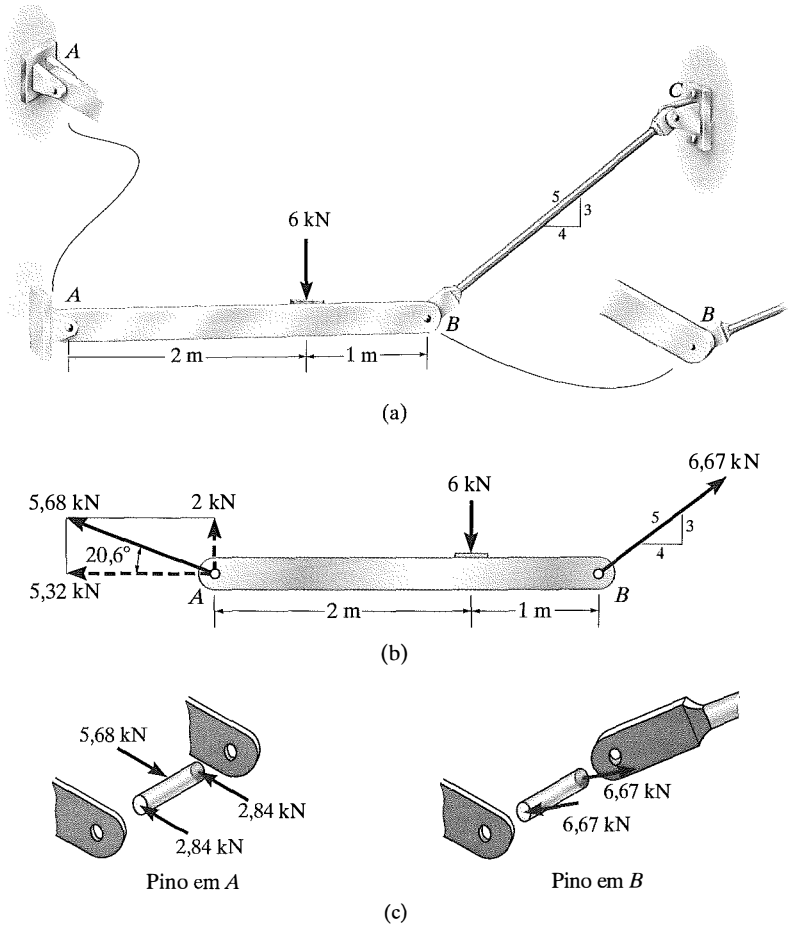


Figura 1.31

EXEMPLO 1.14

O braço de controle está submetido ao carregamento mostrado na Figura 1.32a. Determine, com aproximação de 5 mm, o diâmetro exigido para o pino de aço em C se a tensão de cisalhamento admissível para o aço for $\tau_{adm} = 55$ MPa. Observe, na figura, que o pino está sujeito a cisalhamento duplo.

SOLUÇÃO

Força de cisalhamento interna. A Figura 1.32b mostra um diagrama de corpo livre do braço. Para equilíbrio, temos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \quad F_{AB}(0{,}2\text{ m}) = 15\text{ kN}(0{,}075\text{ m})$$
$$-25\text{ kN}\left(\tfrac{3}{5}\right)(0{,}125\text{ m}) = 0$$
$$F_{AB} = 15\text{ kN}$$

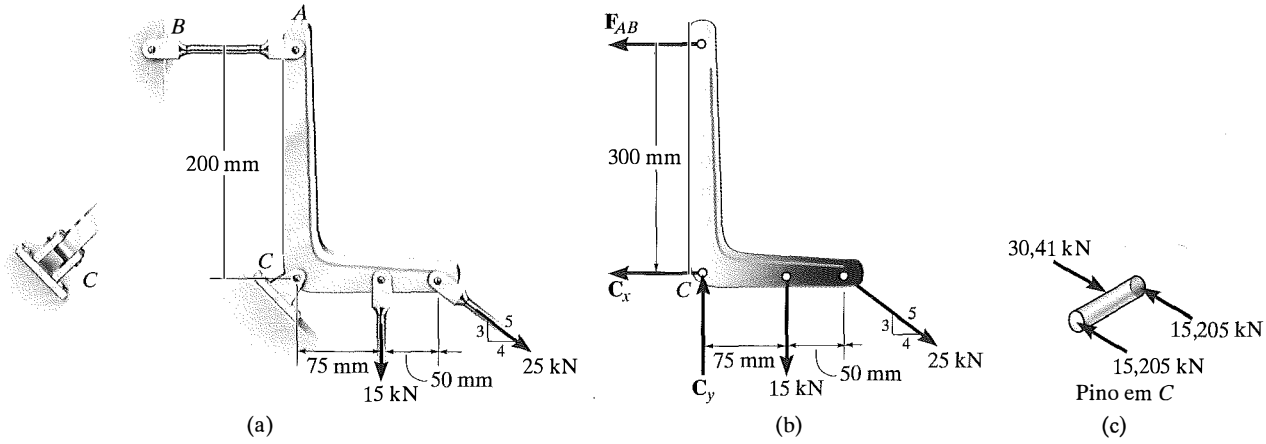


Figura 1.32

$$\pm \Sigma F_x = 0; \qquad -15\,\text{kN} - C_x + 25\,\text{kN}\left(\tfrac{4}{5}\right) = 0$$
$$C_x = 5\,\text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad C_y - 15\,\text{kN} - 25\,\text{kN}\left(\tfrac{3}{5}\right) = 0$$
$$C_y = 30\,\text{kN}$$

O pino em C resiste à força resultante em C. Portanto,

$$F_C = \sqrt{(5\,\text{kN})^2 - (30\,\text{kN})^2} = 30{,}41\,\text{kN}$$

Como o pino está sujeito a cisalhamento duplo, a força de cisalhamento de 15,205 kN age sobre sua área da seção transversal *entre* o braço e cada orelha de apoio do pino (Figura 1.32c).

Área exigida. Temos

$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{15{,}205\,\text{kN}}{55 \times 10^3\,\text{kN/m}^2} = 276{,}45 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$
$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 276{,}45\,\text{mm}^2$$
$$d = 18{,}8\,\text{mm}$$

Use um pino que tenha um diâmetro

$$d = 20\,\text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 1.15

A haste suspensa está apoiada em sua extremidade por um disco circular fixo acoplado como mostra a Figura 1.33a. Se a haste passar por um orifício de 40 mm de diâmetro, determine o diâmetro mínimo exigido para a haste e a espessura mínima do disco necessária para suportar a carga de 20 kN. A tensão normal admissível para a haste é $\sigma_{\text{adm}} = 60$ MPa e a tensão admissível de cisalhamento para o disco é $\tau_{\text{adm}} = 35$ MPa.

SOLUÇÃO

Diâmetro de haste. Por inspeção, a força axial na haste é 20 kN. Portanto, a área da seção transversal exigida para a haste é

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{20(10^3)\,\text{N}}{60(10^6)\,\text{N/m}^2} = 0{,}3333(10^{-3})\,\text{m}^2$$

De modo que

$$A = \pi\left(\frac{d^2}{4}\right) = 0{,}3333(10^{-2})\,\text{m}^2$$
$$d = 0{,}0206\,\text{m} = 20{,}6\,\text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Espessura do disco. Como mostra o diagrama de corpo livre da seção central do disco (Figura 1.33b), o material na área secionada deve resistir à *tensão de cisalhamento* para impedir que o disco passe pelo orifício. Se *considerarmos* que essa tensão de cisalhamento é distribuída uniformemente pela área secionada, então, sendo $V = 20$ kN, temos

$$A = \frac{V}{\tau_{\text{adm}}} = \frac{20(10^3)\,\text{N}}{35(10^6)\,\text{N/m}^2} = 0{,}571(10^{-3})\,\text{m}^2$$

Uma vez que a área secionada $A = 2\pi(0{,}02\,\text{m})(t)$, a espessura exigida para o disco é

$$t = \frac{0{,}5714(10^{-3})\,\text{m}^2}{2\pi(0{,}02\,\text{m})} = 4{,}55(10^{-3})\,\text{m} = 4{,}55\,\text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

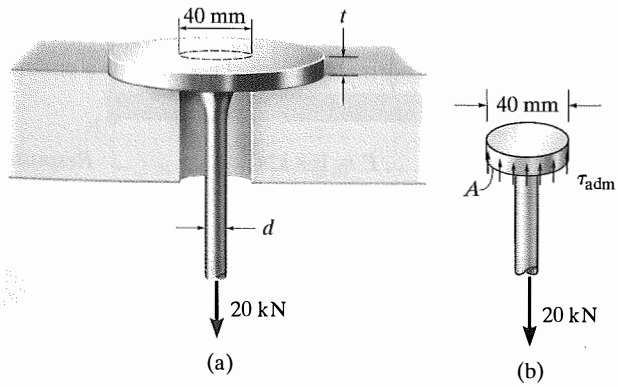


Figura 1.33

EXEMPLO 1.16

Uma carga axial sobre o eixo mostrado na Figura 1.34a sofre a resistência do colar em C, que está acoplado ao eixo e localizado no lado direito do mancal em B. Determine o maior valor de P para as duas forças axiais em E e F de modo que a tensão no colar não ultrapasse uma tensão de apoio admissível em C de $(\sigma_b)_{\text{adm}} = 75$ MPa e que a tensão normal média no eixo não exceda a tensão de tração admissível $(\sigma_t)_{\text{adm}} = 55$ MPa.

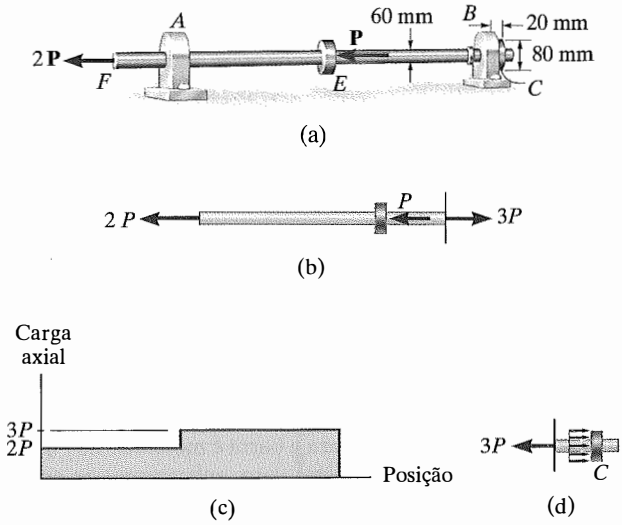


Figura 1.34

SOLUÇÃO

Para resolver o problema, determinaremos P para cada condição de falha possível. Então, escolheremos o *menor* valor. Por quê?

Tensão normal. Usando o método das seções, a carga axial no interior da região FE do eixo é $2P$, ao passo que a *maior* carga axial, $3P$, ocorre no interior da região EC (Figura 1.34b). A variação da carga interna é claramente mostrada no diagrama de força normal (Figura 1.34c). Como a área da seção transversal é constante em todo o eixo, a região EC estará sujeita à tensão normal média máxima. Aplicando a Equação 1.11, temos

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} \qquad 55(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{3P}{\pi(0{,}03\ \text{m})^2}$$
$$P = 51{,}8\ \text{kN}$$

Tensão de apoio. Como mostra o diagrama de corpo livre na Figura 1.34d, o colar em C deve resistir à carga de $3P$ que age sobre uma área de apoio de $A_b = [\pi(0{,}04\ \text{m})^2 - \pi(0{,}03\ \text{m})^2] = 2{,}199(10^{-3})\text{m}^2$. Assim,

$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}}; \qquad 75(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{3P}{2{,}199(10^{-3})\ \text{m}^2}$$
$$P = 55{,}0\ \text{kN}$$

Por comparação, a maior carga que pode ser aplicada ao eixo é $P = 51{,}8$ kN, pois qualquer carga maior do que essa resultará em tensão maior do que a tensão normal admissível no eixo.

EXEMPLO 1.17

A barra rígida AB mostrada na Figura 1.35a é sustentada por uma haste de aço AC de 20 mm de diâmetro e um bloco de alumínio com área de seção transversal de 1.800 mm². Os pinos de 18 mm de diâmetro em A e C estão submetidos a *cisalhamento simples*. Se as tensões de ruptura do aço e do alumínio forem $(\sigma_{aço})_{rup} = 680$ MPa e $(\sigma_{al})_{rup} = 70$ MPa, respectivamente, e a tensão de ruptura por cisalhamento para cada pino for $\tau_{rup} = 900$ MPa, determine a maior carga P que pode ser aplicada à barra. Aplique um fator de segurança FS = 2.

SOLUÇÃO

Pelas equações 1.9 e 1.10, as tensões admissíveis são

$$(\sigma_{aço})_{adm} = \frac{(\sigma_{aço})_{rup}}{FS} = \frac{680\ \text{MPa}}{2} = 340\ \text{MPa}$$
$$(\sigma_{al})_{adm} = \frac{(\sigma_{al})_{rup}}{FS} = \frac{70\ \text{MPa}}{2} = 35\ \text{MPa}$$
$$\tau_{adm} = \frac{\tau_{rup}}{FS} = \frac{900\ \text{MPa}}{2} = 450\ \text{MPa}$$

O diagrama de corpo livre para a barra é mostrado na Figura 1.35b. Há três incógnitas. Neste caso, aplicaremos as equações de equilíbrio de modo a expressar F_{AC} e F_B em termos da carga aplicada P. Temos

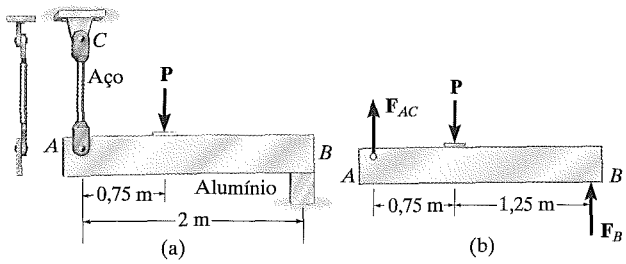


Figura 1.35

$$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0; \qquad P(1{,}25\ \text{m}) - F_{AC}(2\ \text{m}) = 0 \qquad (1)$$
$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \qquad F_B(2\ \text{m}) - P(0{,}75\ \text{m}) = 0 \qquad (2)$$

Agora, determinaremos cada valor de P que crie a tensão admissível na haste, no bloco e nos pinos, respectivamente.

Haste AC. A haste exige

$$F_{AC} = (\sigma_{aço})_{adm}(A_{AC}) = 340(10^6)\ \text{N/m}^2\ [\pi(0{,}01\ \text{m})^2] = 106{,}8\ \text{kN}$$

Usando a Equação 1,

$$P = \frac{(106{,}8\ \text{kN})\ (2\ \text{m})}{1{,}25\ \text{m}} = 171\ \text{kN}$$

Bloco B. Nesse caso,

$$F_B = (\sigma_{al})_{adm}$$
$$A_B = 35(10^6)\ \text{N/m}^2\ [1.800\ \text{mm}^2\ (10^{-6})\ \text{m}^2/\text{mm}^2] = 63\ \text{kN}$$

Usando a Equação 2,

$$P = \frac{(63\ \text{kN})(2\ \text{m})}{0{,}75\ \text{m}} = 168\ \text{kN}$$

Pino A ou C. Para esses pinos,

$$V = F_{AC} = \tau_{adm} A = 450(10^6)\ \text{N/m}^2\ [\pi(0{,}009\ \text{m})^2] = 114{,}5\ \text{kN}$$

Pela Equação 1,

$$P = \frac{114{,}5\ \text{kN}\ (2\ \text{m})}{1{,}25\ \text{m}} = 183\ \text{kN}$$

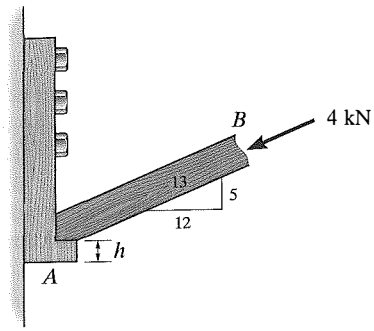
Por comparação, quando P alcança seu *menor valor* (168 kN), desenvolve a tensão normal admissível no bloco de alumínio. Por consequência,

$$P = 168\ \text{kN} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

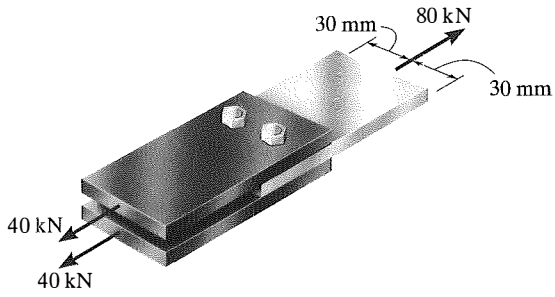
*1.80. O elemento B está sujeito a uma força de compressão de 4 kN. Se A e B forem feitos de madeira e tiverem 10 mm de espessura, determine, com aproximação de 5 mm, a

menor dimensão h do apoio de modo que a tensão de cisalhamento média não exceda $\tau_{adm} = 2{,}1$ MPa.



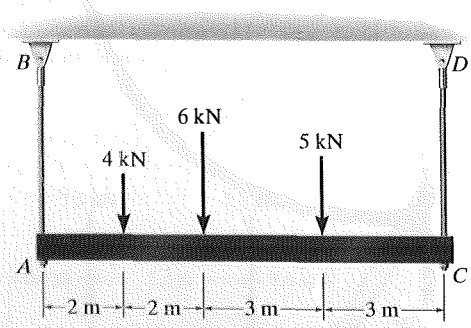
Problema 1.80

1.81. A junta está presa por dois parafusos. Determine o diâmetro exigido para os parafusos se a tensão de ruptura por cisalhamento para os parafusos for $\tau_{rup} = 350$ MPa. Use um fator de segurança para cisalhamento FS = 2,5.



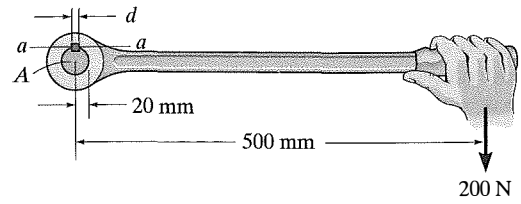
Problema 1.81

1.82. As hastes AB e CD são feitas de aço cuja tensão de ruptura por tração é $\sigma_{rup} = 510$ MPa. Usando um fator de segurança FS = 1,75 para tração, determine o menor diâmetro das hastes de modo que elas possam suportar a carga mostrada. Considere que a viga está acoplada por pinos em A e C.



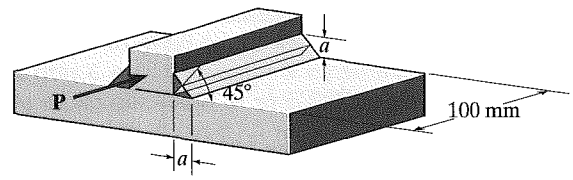
Problema 1.82

1.83. A manivela está presa ao eixo A por uma chaveta de largura d e comprimento 25 mm. Se eixo for fixo e uma força vertical de 200 N for aplicada perpendicularmente ao cabo, determine a dimensão d se a tensão de cisalhamento admissível para a chaveta for $\tau_{adm} = 35$ MPa.



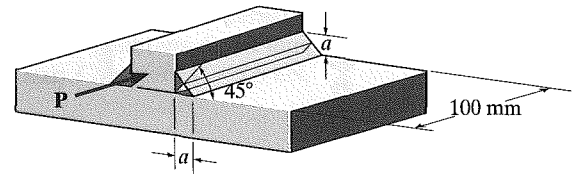
Problema 1.83

*__1.84.__ O tamanho a do cordão de solda é determinado pelo cálculo da tensão de cisalhamento média ao longo do plano sombreado, que tem a menor seção transversal. Determine o menor tamanho a das duas soldas se a força aplicada à chapa for $P = 100$ kN. A tensão de cisalhamento admissível para o material da solda é $\tau_{adm} = 100$ MPa.



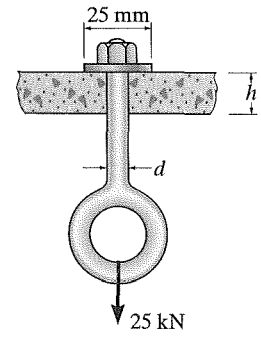
Problema 1.84

1.85. O tamanho do cordão de solda é $a = 8$ mm. Considerando que a junta falhe por cisalhamento em ambos os lados do bloco ao longo do plano sombreado, que é a menor seção transversal, determine a maior força P que pode ser aplicada à chapa. A tensão de cisalhamento admissível para o material da solda é $\tau_{adm} = 100$ MPa.



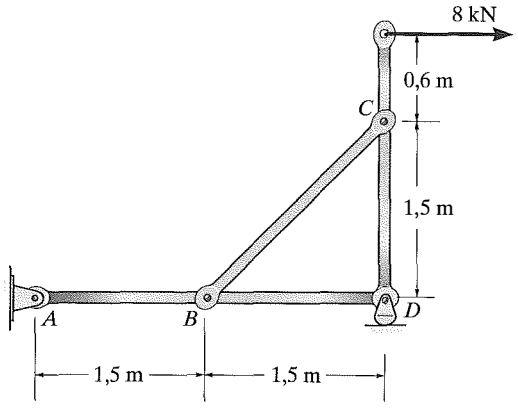
Problema 1.85

1.86. O parafuso de olhal é usado para sustentar a carga de 25 kN. Determine seu diâmetro d com aproximação de múltiplos de 5 mm e a espessura exigida h com aproximação de múltiplos de 5 mm do suporte de modo que a arruela não penetre ou cisalhe o suporte. A tensão normal admissível para o parafuso é $\sigma_{adm} = 150$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível para o material do suporte é $\tau_{adm} = 35$ MPa.



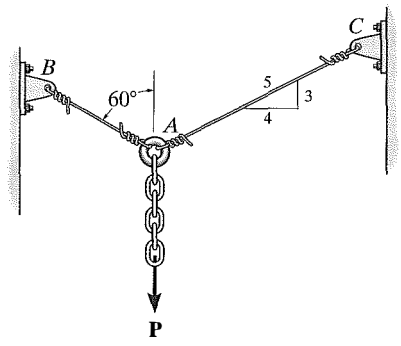
Problema 1.86

1.87. A estrutura está sujeita a carga de 8 kN. Determine o diâmetro exigido para os pinos em A e B se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 42$ MPa. O pino A está sujeito a cisalhamento duplo, ao passo que o pino B está sujeito a cisalhamento simples.



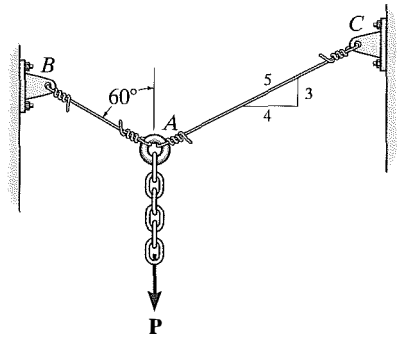
Problema 1.87

*__1.88.__ Os dois cabos de aço AB e AC são usados para suportar a carga. Se ambos tiverem uma tensão de tração admissível $\sigma_{adm} = 200$ MPa, determine o diâmetro exigido para cada cabo se a carga aplicada for $P = 5$ kN.



Problema 1.88

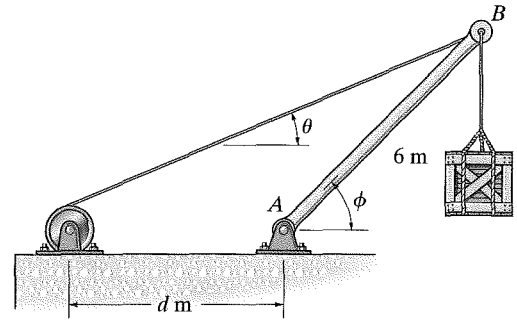
1.89. Os dois cabos de aço AB e AC são usados para suportar a carga. Se ambos tiverem uma tensão de tração admissível $\sigma_{adm} = 180$ MPa, e se o cabo AB tiver diâmetro de 6 mm e o cabo AC tiver diâmetro de 4 mm, determine a maior força P que pode ser aplicada à corrente antes que um dos cabos falhe.



Problema 1.89

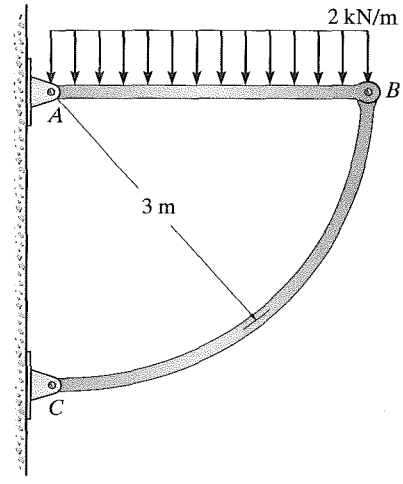
1.90. A lança é suportada pelo cabo do guincho com diâmetro de 6 mm com tensão normal admissível $\sigma_{adm} = 168$ MPa. Determine a maior carga que pode ser suportada sem provocar a ruptura do cabo quando $\theta = 30°$ e $\phi = 45°$. Despreze o tamanho do guincho.

1.91. A lança é suportada pelo cabo do guincho cuja tensão normal admissível é $\sigma_{adm} = 168$ MPa. Se a lança tiver de levantar lentamente uma carga de 25 kN, de $\theta = 20°$ até $\theta = 50°$, determine o menor diâmetro do cabo com aproximação de múltiplos de 5 mm. O comprimento da lança AB é 6 m. Despreze o tamanho do guincho. Considere $d = 3{,}6$ m.



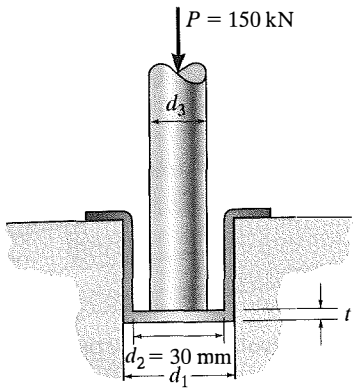
Problemas 1.90/91

*__1.92.__ A estrutura está sujeita ao carregamento distribuído de 2 kN/m. Determine o diâmetro exigido para os pinos em A e B se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 100$ MPa. Ambos os pinos estão sujeitos a cisalhamento duplo.



Problema 1.92

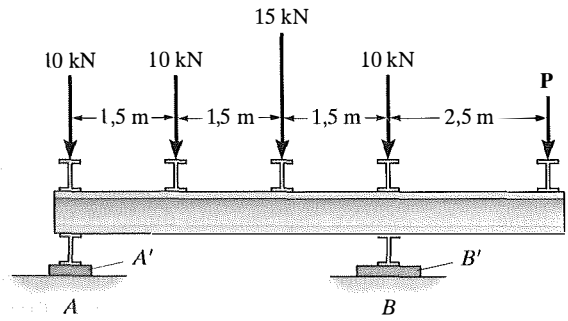
1.93. Determine as menores dimensões do eixo circular e da tampa circular se a carga que devem suportar é $P = 150$ kN. A tensão de tração, a tensão de apoio e a tensão de cisalhamento admissíveis são $(\sigma_t)_{adm} = 175$ MPa, $(\sigma_a)_{adm} = 275$ MPa e $\sigma_{adm} = 115$ MPa.



Problema 1.93

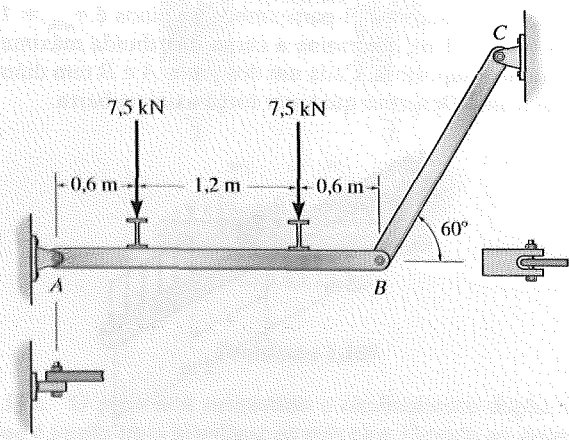
1.94. Se a tensão de apoio admissível para o material sob os apoios em A e B for $(\sigma_a)_{adm} = 2{,}8$ MPa, determine os tamanhos das chapas de apoio *quadradas* A' e B' exigidos para suportar a carga. Considere $P = 7{,}5$ kN. A dimensão das chapas deverá ter aproximação de 10 mm. As reações nos apoios são verticais.

1.95. Se a tensão de apoio admissível para o material sob os apoios em A e B for $(\sigma_a)_{adm} = 2{,}8$ MPa, determine a carga **P** máxima que pode ser aplicada à viga. As seções transversais quadradas das chapas de apoio A' e B' são 50 mm × 50 mm e 100 mm × 100 mm, respectivamente.



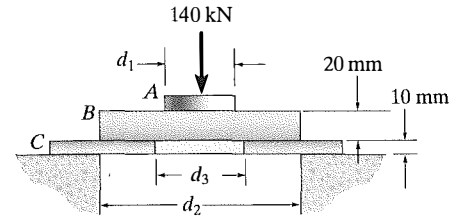
Problemas 1.94/95

*__1.96.__ Determine a área da seção transversal exigida para o elemento BC e os diâmetros exigidos para os pinos em A e B se a tensão normal admissível for $\sigma_{adm} = 21$ MPa e a tensão de cisalhamento for $\tau_{adm} = 28$ MPa.



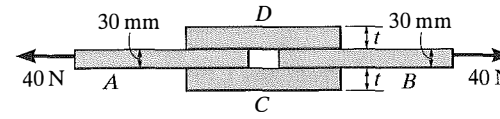
Problema 1.96

1.97. O conjunto consiste em três discos A, B e C usados para suportar a carga de 140 kN. Determine o menor diâmetro d_1 do disco superior, o diâmetro d_2 do espaço entre os apoios e o diâmetro d_3 do orifício no disco inferior. A tensão de apoio admissível para o material é $(\sigma_{adm})_a = 350$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 125$ MPa.



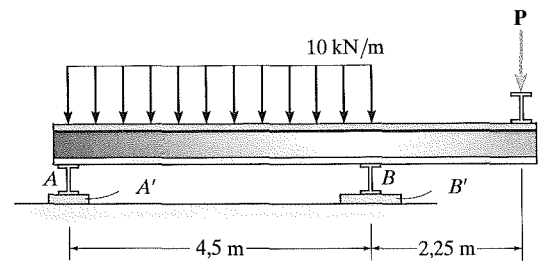
Problema 1.97

1.98. As tiras A e B devem ser coladas com a utilização das duas tiras C e D. Determine a espessura exigida t para C e D de modo que todas as tiras falhem simultaneamente. A largura das tiras A e B é 1,5 vez a das tiras C e D.



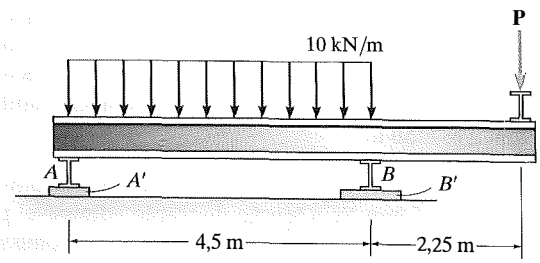
Problema 1.98

1.99. Se a tensão de apoio admissível para o material sob os apoios em A e B for $(\sigma_a)_{adm} = 2{,}8$ MPa, determine os tamanhos das chapas de apoio *quadradas* A' e B' exigidos para suportar a carga. A dimensão das chapas deve ter aproximação de múltiplos de 10 mm. As reações nos apoios são verticais. Considere $P = 7{,}5$ kN.



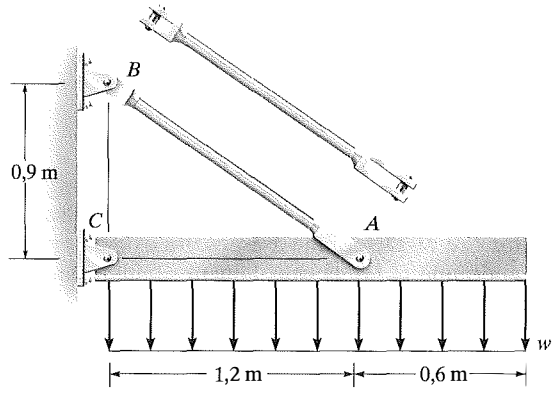
Problema 1.99

*__1.100.__ Se a tensão de apoio admissível para o material sob os apoios em A e B for $(\sigma_a)_{adm} = 2{,}8$ MPa, determine a carga máxima **P** que pode ser aplicada à viga. As seções transversais quadradas das chapas de apoio A' e B' são 50 mm × 50 mm e 100 mm × 100 mm, respectivamente.



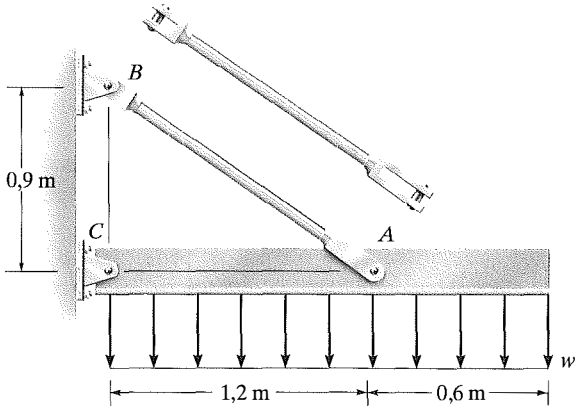
Problema 1.100

1.101. O conjunto de pendural é usado para suportar um carregamento distribuído $w = 12$ kN/m. Determine a tensão de cisalhamento média no parafuso de 10 mm de diâmetro em A e a tensão de tração média na haste AB, com diâmetro de 12 mm. Se a tensão de escoamento por cisalhamento para o parafuso for $\tau_e = 175$ MPa e a tensão de escoamento por tração para a haste for $\sigma_e = 266$ MPa, determine o fator de segurança em relação ao escoamento em cada caso.



Problema 1.101

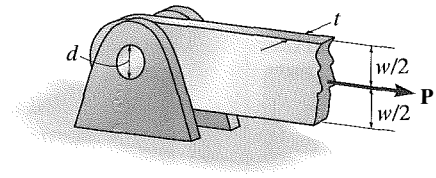
1.102. Determine a intensidade w da carga distribuída máxima que pode ser suportada pelo conjunto de pendural de modo a não ultrapassar uma tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 95$ MPa nos parafusos de 10 mm de diâmetro em A e B e uma tensão de tração admissível de $\sigma_{adm} = 155$ MPa na haste AB de 12 mm de diâmetro.



Problema 1.102

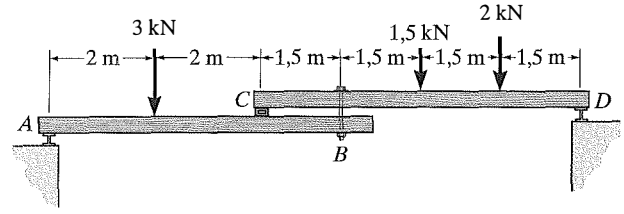
1.103. A barra é suportada pelo pino. Se a tensão de tração admissível para a barra for $(\sigma_t)_{adm} = 150$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível para o pino for $\tau_{adm} = 85$ MPa, determine o diâmetro do pino para o qual a carga P será máxima. Qual é essa carga máxima? Considere que o orifício na barra tem o mesmo diâmetro d do pino. Considere também $t = 6$ mm e $w = 50$ mm.

***1.104.** A barra está acoplada ao suporte por um pino de diâmetro $d = 25$ mm. Se a tensão de tração admissível para a barra for $(\sigma_t)_{adm} = 140$ MPa e a tensão de apoio admissível entre o pino e a barra for $(\sigma_a)_{adm} = 210$ MPa, determine as dimensões w e t tais que a área bruta da área da seção transversal seja $wt = 1.250$ mm² e a carga P seja máxima. Qual é essa carga máxima? Considere que o orifício na barra tem o mesmo diâmetro do pino.



Problemas 1.103/104

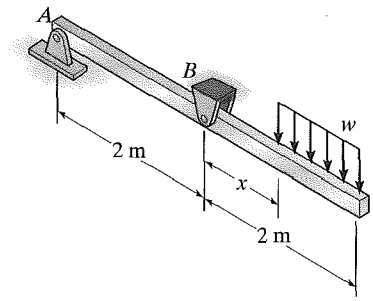
1.105. A viga composta de madeira está interligada por um parafuso em B. Considerando que os acoplamentos em A, B, C e D exerçam somente forças verticais na viga, determine o diâmetro exigido para o parafuso em B e o diâmetro externo exigido para as respectivas arruelas se a tensão de tração admissível para o parafuso for $(\sigma_t)_{adm} = 150$ MPa e a tensão de apoio admissível para a madeira for $(\sigma_a)_{adm} = 28$ MPa. Considere que o orifício das arruelas tem o mesmo diâmetro do parafuso.



Problema 1.105

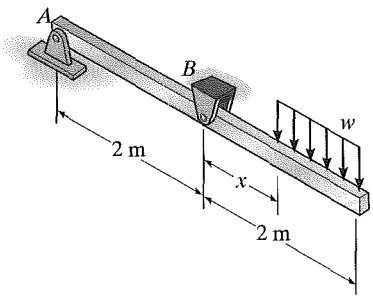
1.106. A barra é mantida em equilíbrio por pinos em A e B. Observe que o apoio em A tem uma única orelha, o que envolve cisalhamento simples no pino, e o apoio B tem orelha dupla, o que envolve cisalhamento duplo. A tensão de cisalhamento admissível para ambos os pinos é $\tau_{adm} = 150$ MPa. Se uma carga uniformemente distribuída $w = 8$ kN/m for colocada sobre a barra, determine sua posição admissível mínima x em relação a B. Cada um dos pinos A e B tem diâmetro de 8 mm. Despreze qualquer força axial na barra.

1.107. A barra é mantida em equilíbrio pelos apoios de pino em A e B. Observe que o apoio em A tem uma única orelha, o que envolve cisalhamento simples no pino, e o apoio B tem orelha dupla, o que envolve cisalhamento duplo. A tensão de cisalhamento admissível para ambos os pinos é $\tau_{adm} = 125$ MPa. Se $x = 1$ m, determine a carga distribuída máxima w que a barra suportará. Cada um dos pinos A e B tem diâmetro de 8 mm. Despreze qualquer força axial na barra.



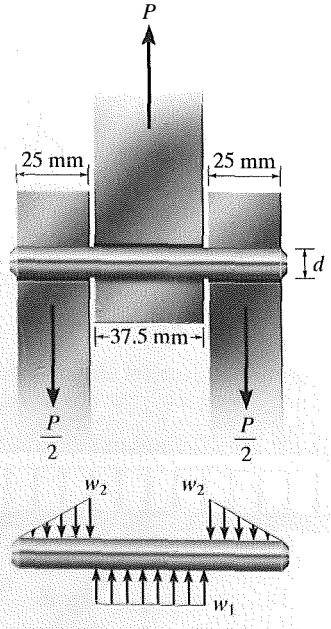
Problemas 1.106/107

1.108. A barra é mantida em equilíbrio pelos apoios de pino em A e B. Observe que o apoio em A tem uma única orelha, o que envolve cisalhamento simples no pino, e o apoio B tem orelha dupla, o que envolve cisalhamento duplo. A tensão de cisalhamento admissível para ambos os pinos é $\tau_{adm} = 125$ MPa. Se $x = 1$ m e $w = 12$ kN/m, determine o menor diâmetro exigido para os pinos A e B. Despreze qualquer força axial na barra.



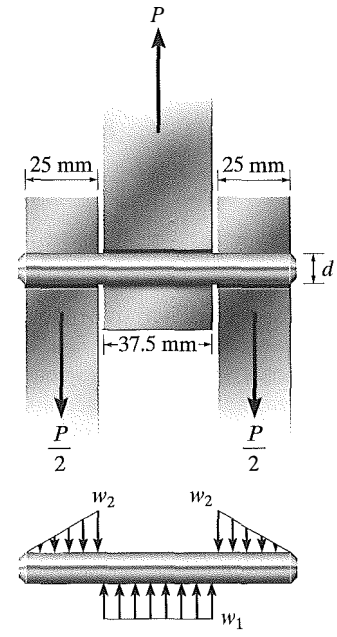
Problema 1.108

1.109. O pino está submetido a cisalhamento duplo, visto que é usado para interligar os três elos. Devido ao desgaste, a carga é distribuída nas partes superior e inferior do pino como mostra o diagrama de corpo livre. Determine o diâmetro d do pino se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 70$ MPa e a carga $P = 49$ kN. Determine também as intensidades das cargas w_1 e w_2.



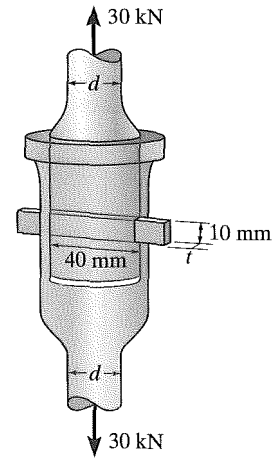
Problema 1.109

1.110. O pino está submetido a cisalhamento duplo, visto que é usado para interligar os três elos. Devido ao desgaste, a carga é distribuída nas partes superior e inferior do pino como mostra o diagrama de corpo livre. Determine a carga máxima P que o acoplamento pode suportar se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 56$ MPa e o diâmetro do pino for 12,5 mm. Determine também as intensidades das cargas w_1 e w_2.



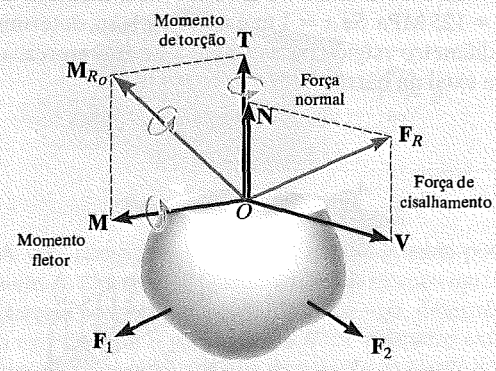
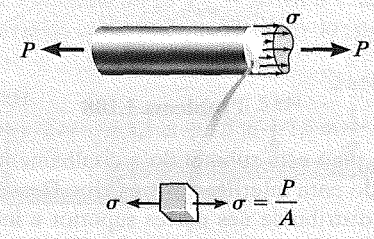
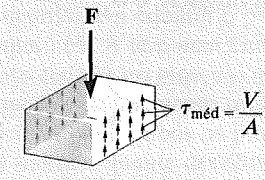
Problema 1.110

1.111. A chaveta é usada para manter as duas hastes juntas. Determine a menor espessura t da chaveta e o menor diâmetro d das hastes. Todas as partes são feitas de aço com tensão de ruptura por tração $\sigma_{rup} = 500$ MPa e tensão de ruptura por cisalhamento $\tau_{rup} = 375$ MPa. Use um fator de segurança $(FS)_t = 2{,}50$ em tração e $(FS)_c = 1{,}75$ em cisalhamento.



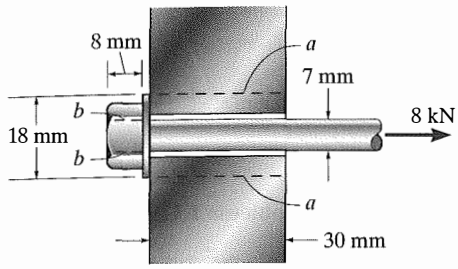
Problema 1.111

Revisão do capítulo

As carga internas em um corpo consistem em uma força normal, uma força de cisalhamento, um momento fletor e um momento de torção. Elas representam as resultantes de uma distribuição de tensão normal e de tensão de cisalhamento que agem na seção transversal. Para obter essas resultantes, use o método das seções e as equações de equilíbrio.	$\Sigma Fx = 0$ $\Sigma Fy = 0$ $\Sigma Fz = 0$ $\Sigma Mx = 0$ $\Sigma My = 0$ $\Sigma Mz = 0$	
Se uma barra for feita de um material isotrópico homogêneo e submetida a uma série de cargas axiais externas que passam pelo centroide da seção transversal, então uma distribuição de tensão normal uniforme agirá sobre a seção transversal. Essa tensão normal média pode ser determinada por $\sigma = P/A$, onde P é a carga axial interna na seção.	$\sigma = \frac{P}{A}$	
A tensão de cisalhamento média pode ser determinada por $\tau_{méd} = V/A$, onde V é a força de cisalhamento resultante na área da seção transversal A. Essa fórmula é frequentemente usada para determinar a tensão de cisalhamento média em elementos de fixação ou em peças usadas para acoplamentos.	$\tau_{méd} = \frac{V}{A}$	
O projeto de qualquer acoplamento simples exige que a tensão média ao longo de qualquer seção transversal não ultrapasse um fator de segurança ou um valor admissível de σ_{adm} ou τ_{adm}. Esses valores são apresentados em normas ou padrões e são considerados seguros com base em testes experimentais ou por experiência.	$FS = \frac{\sigma_{rup}}{\sigma_{adm}} = \frac{\tau_{rup}}{\tau_{adm}}$	

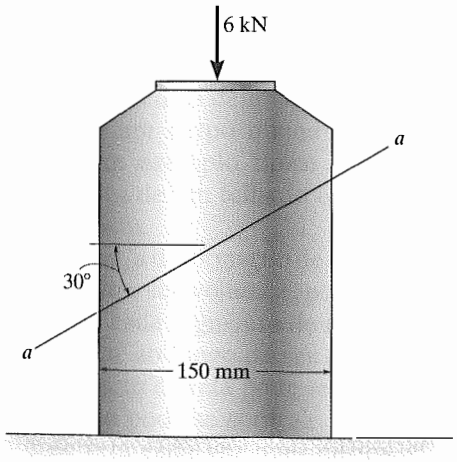
PROBLEMAS DE REVISÃO

*1.112. O parafuso longo passa pela chapa de 30 mm de espessura. Se a força na haste do parafuso for 8 kN, determine a tensão normal média na haste, a tensão de cisalhamento média ao longo da área cilíndrica da chapa definida pelas linhas de corte *a–a* e a tensão de cisalhamento média na cabeça do parafuso ao longo da área cilíndrica definida pelas linhas de corte *b–b*.



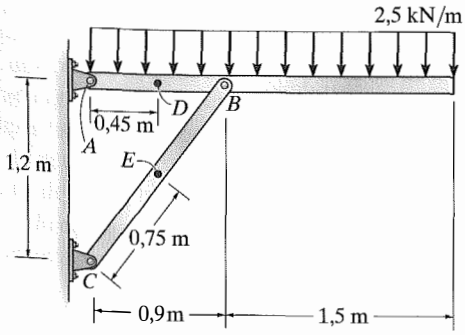
Problema 1.112

1.113. A sapata de apoio consiste em um bloco de alumínio de 150 mm por 150 mm que suporta uma carga de compressão de 6 kN. Determine a tensão normal média e a tensão de cisalhamento média que agem no plano que passa pela seção *a–a*. Mostre os resultados em um elemento de volume infinitesimal localizado no plano.



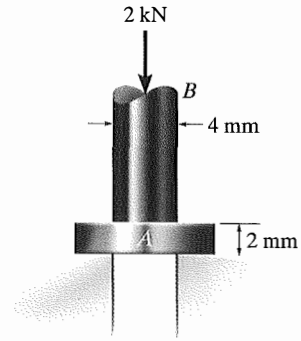
Problema 1.113

1.114. Determine as cargas internas resultantes que agem nas seções transversais que passam pelos pontos *D* e *E* da estrutura.



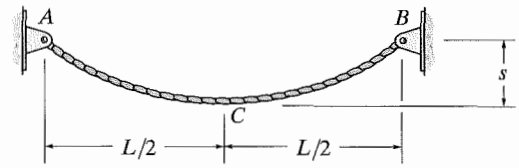
Problema 1.114

1.115. O punção circular *B* exerce uma força de 2 kN na parte superior da chapa *A*. Determine a tensão de cisalhamento média na chapa provocada por essa carga.



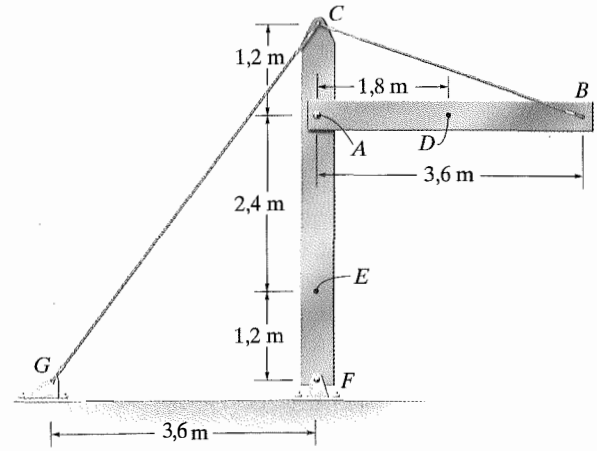
Problema 1.115

*1.116. O cabo tem peso específico γ (peso/volume) e área de seção transversal *A*. Se a flecha *s* for pequena, de modo que o comprimento do cabo seja aproximadamente *L* e seu peso possa ser distribuído uniformemente ao longo do eixo horizontal, determine a tensão normal média no cabo em seu ponto mais baixo *C*.



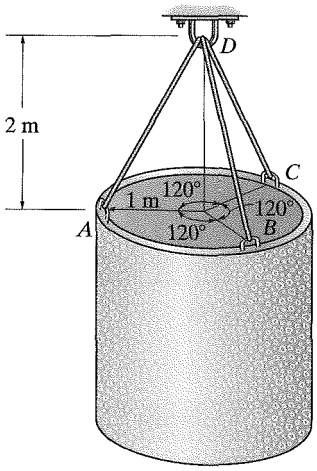
Problema 1.116

1.117. A viga *AB* é suportada por um pino em *A* e também por um cabo *BC*. Um cabo *separado CG* é usado para manter a estrutura na posição vertical. Se *AB* pesar 2 kN/m e o peso da coluna *FC* for 3 kN/m, determine as cargas internas resultantes que agem nas seções transversais localizadas nos pontos *D* e *E*. Despreze a espessura da viga e da coluna nos cálculos.



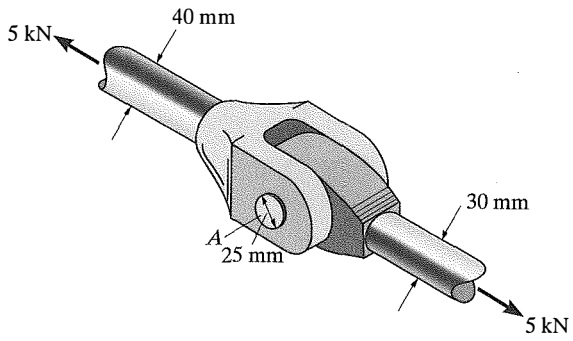
Problema 1.117

1.118. O tubo de concreto de 3 Mg está suspenso por três cabos. Se os diâmetros de BD e CD forem 10 mm e AD tiver diâmetro de 7 mm, determine a tensão normal média em cada cabo.



Problema 1.118

1.119. O acoplamento de gancho e haste está sujeito a uma força de tração de 5 kN. Determine a tensão normal média em cada haste e a tensão de cisalhamento média no pino A entre os elementos.



Problema 1.119

2 Deformação

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Em engenharia, a deformação de um corpo é especificada pelo conceito da deformação normal e por cisalhamento. Neste capítulo, definiremos essas quantidades e mostraremos como elas podem ser determinadas para vários tipos de problemas.

2.1 Deformação

Sempre que uma força é aplicada a um corpo, esta tende a mudar a forma e o tamanho dele. Essas mudanças são denominadas ***deformações*** e podem ser altamente visíveis ou praticamente imperceptíveis se não forem utilizados equipamentos que façam medições precisas. Por exemplo, uma tira de borracha sofrerá uma grande deformação quando esticada. Por outro lado, os elementos estruturais de um edifício sofrem apenas leves deformações quando há muitas pessoas andando dentro dele. Também pode ocorrer deformação em um corpo quando há mudança de temperatura. Um exemplo típico é a expansão ou contração térmica de um telhado causada pelas condições atmosféricas.

De modo geral, a deformação de um corpo não será uniforme em todo o seu volume e, portanto, a mudança na geometria de cada segmento de reta no interior do corpo pode variar ao longo de seu comprimento. Por exemplo, uma parte da reta pode se alongar, ao passo que outra porção pode se contrair. Se considerarmos segmentos de reta cada vez mais curtos, eles ficarão aproximadamente mais retos após a deformação e, portanto, para um estudo mais uniforme das mudanças provocadas por deformação, consideraremos que as retas são muito curtas e localizadas na vizinhança de um ponto. Com isso, percebemos que a quantidade da mudança em qualquer segmento de reta localizado em um ponto distinto do corpo será diferente da observada em qualquer outro ponto. Além disso, essas mudanças também dependem da orientação do segmento de reta no ponto em questão. Por exemplo, um segmento de reta pode se alongar se estiver orientado em uma direção, ao passo que pode contrair-se, caso esteja orientado em outra direção.

2.2 Conceito de deformação

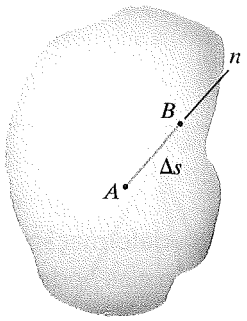
Para descrever a deformação por meio de mudanças no comprimento de segmentos de reta e nos ângulos entre eles, desenvolveremos o conceito de deformação. De fato, as medições de deformação são experimentais e, uma vez obtidas, podem ser relacionadas com as cargas aplicadas, ou tensões, que agem no interior do corpo, o que mostraremos a seguir.

Deformação normal. O alongamento ou contração de um segmento de reta por unidade de comprimento é denominado ***deformação normal***. Para desenvolver uma definição formal da deformação normal, considere a reta AB, contida no interior do corpo não deformado mostrado na Figura 2.1a. Essa reta se encontra ao longo do eixo n e tem um comprimento original Δs. Após a deformação, os pontos A e B são deslocados para A' e B', e a reta torna-se uma curva de comprimento $\Delta s'$ (Figura 2.1b). Portanto, a mudança no comprimento da reta é $\Delta s' - \Delta s$. Se definirmos a *deformação normal média* usando o símbolo $\epsilon_{\text{méd}}$ (epsílon), então

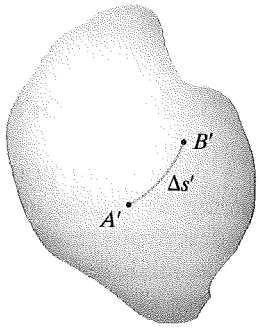
$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \tag{2.1}$$

À medida que escolhemos o ponto B cada vez mais próximo do ponto A, o comprimento da reta fica cada vez menor, de modo tal que $\Delta s \to 0$. Desta maneira, B' aproxima-se de A', de forma que $\Delta s' \to 0$. Por consequência, no limite, a deformação normal no *ponto* A e na direção de n é

$$\epsilon = \lim_{B \to A \text{ ao longo de } n} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \tag{2.2}$$



Corpo não deformado
(a)



Corpo deformado
(b)

Figura 2.1

Se a deformação normal for conhecida, podemos usar essa equação para obter o comprimento final aproximado de um segmento *curto* de reta na direção de n após a deformação. Temos

$$\Delta s' \approx (1 + \epsilon)\,\Delta s \tag{2.3}$$

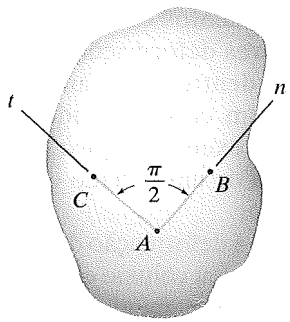
Por consequência, quando ϵ é positivo, a reta inicial se alongará, ao passo que, se ϵ for negativo, a reta se contrairá.

Unidades. Observe que a deformação normal é uma *quantidade adimensional*, visto que é uma razão entre dois comprimentos. Apesar disso, é prática comum expressá-la em termos de uma razão entre unidades de comprimento. Se usarmos o Sistema Internacional de Unidades de Medida (SI), as unidades básicas serão metros/metro (m/m). Na prática, na maioria das aplicações de engenharia, ϵ será muito pequena, portanto as medidas de deformação serão expressas em micrômetros por metro (μm/m), onde 1 μm = 10^{-6} m. Às vezes, em trabalho experimental, a deformação é expressa como porcentagem, por exemplo, 0,001 m/m = 0,1%. Uma deformação normal de 480(10^{-6}) pode ser expressa como 480 μm/m, ou 0,0480%, e também podemos indicar essa resposta simplesmente como 480 μ (480 "micros").

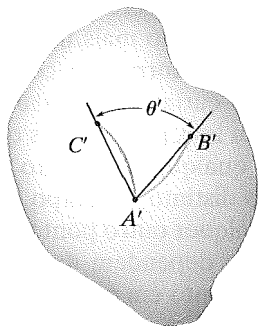
Deformação por cisalhamento. A mudança que ocorre no ângulo entre dois segmentos de reta que originalmente eram *perpendiculares* um ao outro é denominada ***deformação por cisalhamento***. Esse ângulo é representado por γ (gama) e medido em radianos (rad). Para mostrar como isso se desenvolve, considere os segmentos de reta AB e AC que se originam no mesmo ponto A de um corpo e estão direcionados ao longo dos eixos perpendiculares n e t (Figura 2.2a). Após deformação, as extremidades das retas são deslocadas, e as próprias retas transformam-se em curvas, de modo tal que o ângulo entre elas em A é θ' (Figura 2.2b). Por consequência, definimos a deformação por cisalhamento no ponto A associada aos eixos n e t como

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \to A \text{ ao longo de } n \\ C \to A \text{ ao longo de } t}} \theta' \tag{2.4}$$

Observe que, se θ' for menor do que $\pi/2$, a deformação por cisalhamento é positiva, ao passo que se θ' for maior do que $\pi/2$, então a deformação por cisalhamento é negativa.

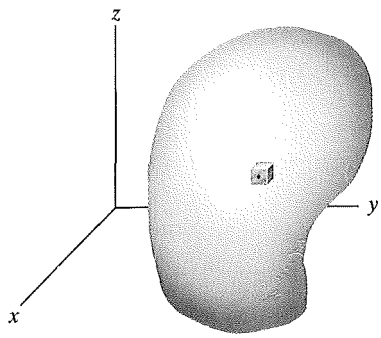


Corpo não deformado
(a)

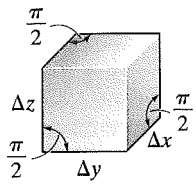


Corpo deformado
(b)

Figura 2.2

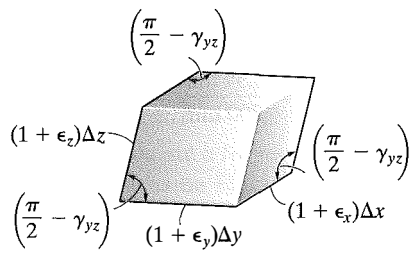


(a)



Corpo não deformado

(b)



Elemento deformado

(c)

Figura 2.3

Componentes cartesianas da deformação.

Usando as definições anteriores de deformação normal e deformação por cisalhamento, mostraremos agora como elas podem ser usadas para descrever a deformação do corpo (Figura 2.3a). Para isso, imagine que o corpo está subdividido em pequenos elementos como o mostrado na Figura 2.3b. Esse elemento é retangular, suas dimensões, quando não deformado, são Δx, Δy e Δz e ele está localizado na vizinhança de um ponto no corpo (Figura 2.3a). Considerando que as dimensões do elemento são muito pequenas, sua forma, quando deformado, será a de um paralelepípedo (Figura 2.3c), visto que segmentos de reta muito pequenos permanecerão aproximadamente retos após a deformação do corpo. Para chegar a isso, temos de considerar, em primeiro lugar, como a deformação normal muda os comprimentos dos lados do elemento retangular e, em seguida, como a deformação por cisalhamento muda os ângulos de cada lado. Assim, pela Equação 2.3, $\Delta s' \approx (1 + \epsilon)\Delta s$ em relação às retas Δx, Δy e Δz, os comprimentos aproximados dos lados do paralelepípedo são

$$(1 + \epsilon_x)\Delta x \qquad (1 + \epsilon_y)\Delta y \qquad (1 + \epsilon_z)\Delta z$$

e os ângulos aproximados entre os lados, mais uma vez definidos originalmente pelos lados Δx, Δy e Δz, são

$$\frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma_{yz} \qquad \frac{\pi}{2} - \gamma_{xz}$$

Observe, em particular, que as ***deformações normais causam uma mudança no volume*** do elemento retangular, ao passo que ***deformações por cisalhamento provocam uma mudança em sua forma***. É claro que ambos os efeitos ocorrem simultaneamente durante a deformação.

Então, resumindo, o *estado de deformação* em um ponto de um corpo exige a especificação de três deformações normais, ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z, e três deformações por cisalhamento, γ_{xy}, γ_{yz} e γ_{xz}. Essas deformações descrevem completamente a deformação de um elemento de volume retangular do material localizado no ponto e orientado de modo que seus lados são originalmente paralelos aos eixos x, y, z. Uma vez definidas essas deformações em todos os pontos no corpo, a forma deformada do corpo poderá ser descrita. Devemos acrescentar, ainda, que, conhecido o estado de deformação em um ponto, definido por suas seis componentes, é possível determinar as componentes da deformação em um elemento orientado no ponto em qualquer outra direção. Discutiremos essa questão no Capítulo 10.

Análise de pequenas deformações.

A maioria dos projetos de engenharia envolve aplicações para as quais são permitidas somente *pequenas deformações*. Por exemplo, quase todas as estruturas e máquinas parecem ser rígidas, e as deformações que ocorrem durante a utilização dificilmente são percebidas. Além disso, ainda que a deflexão de um elemento como uma chapa fina ou haste delgada seja aparentemente grande, o material de que ele é feito poderá estar submetido somente a deformações muito pequenas. Portanto, neste livro, consideraremos que as deformações que ocorrem no interior de um corpo são quase infinitesimais, de modo que as *deformações normais* que ocorrem dentro do material são *muito pequenas* em comparação com a unidade (ou seja, comparadas a 1), isto é, $\epsilon << 1$. Esta premissa, baseada na intensidade da deformação, tem ampla aplicação prática na engenharia e, em geral, é denominada *análise de pequenas deformações*. Como exemplo, ela permite as aproximações $\operatorname{sen}\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ e $\operatorname{tg}\theta = \theta$, contanto que θ seja muito pequeno.

PONTOS IMPORTANTES

- Cargas provocarão deformações em todos os corpos materiais e, como resultado, os pontos no corpo sofrerão *deslocamentos ou mudanças de posição*.
- *Deformação normal* é uma medida do alongamento ou contração de um pequeno segmento de reta no corpo, ao passo que *deformação por cisalhamento* é uma medida da mudança que ocorre no ângulo entre dois segmentos de reta pequenos originalmente perpendiculares um ao outro.
- O estado de deformação em um ponto é caracterizado por seis componentes da deformação: três deformações normais, ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z e três deformações por cisalhamento, γ_{xy}, γ_{yz} e γ_{xz}. Essas componentes dependem da orientação dos segmentos de reta e de sua localização no corpo.
- Deformação é a quantidade geométrica medida por técnicas experimentais. Uma vez obtida, pode-se determinar a tensão no corpo pelas relações entre as propriedades do material.
- A maioria dos materiais de engenharia sofre pequenas deformações e, portanto, uma deformação normal $\epsilon << 1$. Essa premissa da "análise de pequenas deformações" permite a simplificação dos cálculos da deformação normal, já que é possível fazer aproximações de primeira ordem em relação ao seu tamanho.

EXEMPLO 2.1

A haste delgada mostrada na Figura 2.4 é submetida a um aumento de temperatura ao longo de seu eixo, o que cria uma deformação normal na haste de $\epsilon_z = 40(10^{-3})z^{1/2}$, onde z é dado em metros. Determine (a) o deslocamento da extremidade B da haste devido ao aumento de temperatura e (b) a deformação normal média na haste.

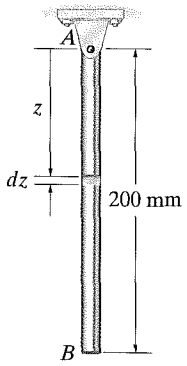


Figura 2.4

SOLUÇÃO

Parte (a). Visto que a deformação normal é dada em cada ponto ao longo da haste, um segmento diferencial dz, localizado na posição z (Figura 2.4) terá um comprimento deformado que pode ser determinado pela Equação 2.3; isto é,

$$dz' = \left[1 + 40(10^{-3})z^{1/2}\right] dz$$

A soma total desses segmentos ao longo do eixo dá como resultado o *comprimento deformado* da haste, isto é,

$$\begin{aligned} z' &= \int_0^{0,2\text{ m}} \left[1 + 40(10^{-3})z^{1/2}\right] dz \\ &= z + 40(10^{-3})\left(\tfrac{2}{3}z^{3/2}\right)\Big|_0^{0,2\text{ m}} \\ &= 0{,}20239\text{ m} \end{aligned}$$

Portanto, o deslocamento da extremidade da haste é

$$\Delta_B = 0{,}20239\text{ m} - 0{,}2\text{ m} = 0{,}00239\text{ m} = 2{,}39\text{ mm} \downarrow$$

Resposta

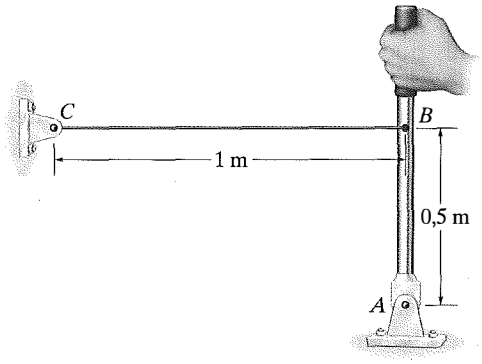
Parte (b). A deformação normal média na haste é determinada pela Equação 2.1, a qual considera que a haste ou "segmento de reta" tem um comprimento original de 200 mm e uma mudança no comprimento de 2,39 mm. Por consequência,

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \frac{2{,}39\text{ mm}}{200\text{ mm}} = 0{,}0119\text{ mm/mm}$$

Resposta

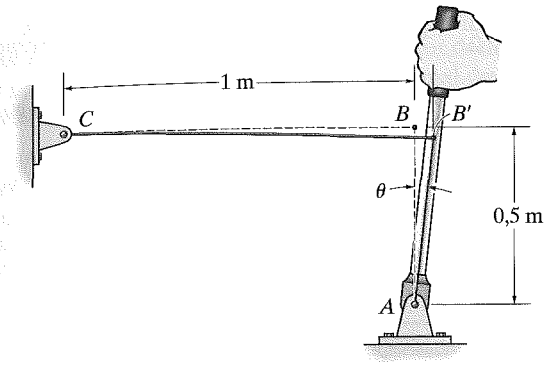
EXEMPLO 2.2

Uma força que atua na empunhadura do cabo da alavanca mostrada na Figura 2.5a provoca uma rotação no cabo da alavanca de $\theta = 0{,}002$ rad em sentido horário. Determine a deformação normal média desenvolvida no cabo BC.



(a)

Figura 2.5



(b)

Figura 2.5 (cont.)

SOLUÇÃO

Visto que $\theta = 0{,}002$ rad é um ângulo pequeno, o alongamento do cabo CB (Figura 2.5b) é $BB' = \theta(0{,}5\text{ m}) = (0{,}002\text{ rad})(0{,}5\text{ m}) = 0{,}001$ m. Portanto, a deformação normal média no cabo é

$$\epsilon_{méd} = \frac{BB'}{CB} = \frac{0{,}001\text{ m}}{1\text{ m}} = 0{,}001\text{ m/m} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 2.3

A chapa é deformada até a forma representada pelas linhas tracejadas mostradas na Figura 2.6a. Se, nessa forma deformada, as retas horizontais na chapa permanecerem horizontais e seus comprimentos não mudarem, determine (a) a deformação normal ao longo do lado AB e (b) a deformação por cisalhamento média da chapa em relação aos eixos x e y.

SOLUÇÃO

Parte (a). A reta AB, coincidente com o *eixo y*, torna-se a reta AB' após a deformação, como mostra a Figura 2.6b. O comprimento desta reta é

$$AB' = \sqrt{(250 - 2)^2 + (3)^2} = 248{,}018\text{ mm}$$

Portanto, a deformação normal média para AB é

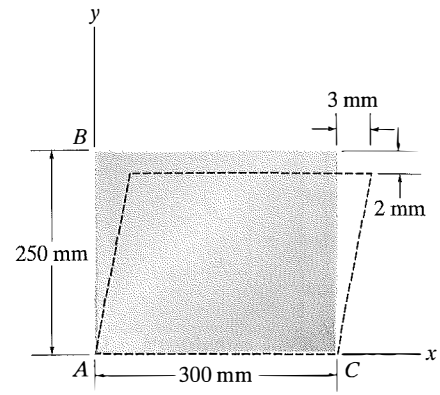
$$(\epsilon_{AB})_{méd} = \frac{AB' - AB}{AB} = \frac{248{,}018\text{ mm} - 250\text{ mm}}{250\text{ mm}} =$$

$$= -7{,}93(10^{-3})\text{ mm/mm} \qquad \textit{Resposta}$$

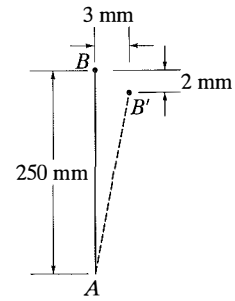
O sinal negativo indica que a deformação causa uma contração de AB.

Parte (b). Como observamos na Figura 2.6c, o ângulo BAC entre os lados da chapa, em relação aos eixos x, y, que antes era 90°, muda para θ' devido ao deslocamento de B para B'. Visto que $\gamma_{xy} = \pi/2 - \theta'$, então γ_{xy} é o ângulo mostrado na figura. Assim,

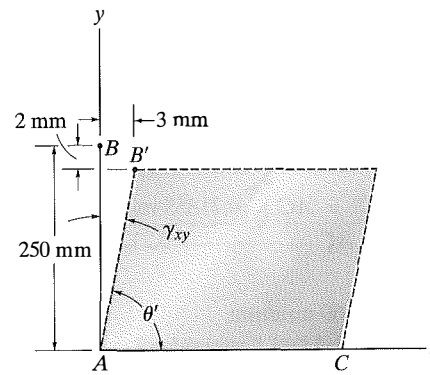
$$\gamma_{xy} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{3\text{ mm}}{250\text{ mm} - 2\text{ mm}}\right) = 0{,}0121\text{ rad} \qquad \textit{Resposta}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 2.6

EXEMPLO 2.4

A chapa mostrada na Figura 2.7a é fixa ao longo de AB e presa por guias horizontais rígidas nas partes superior e inferior, AD e BC. Se o lado direito da chapa, CD, sofrer um deslocamento horizontal uniforme de 2 mm, determine

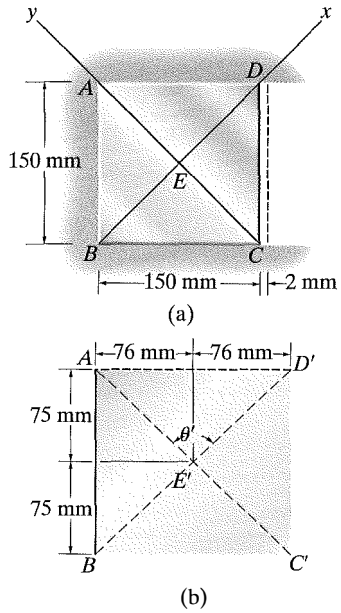


Figura 2.7

(a) a deformação normal média ao longo da diagonal AC e (b) a deformação por cisalhamento em E em relação aos eixos x, y.

SOLUÇÃO

Parte (a). Quando a chapa é deformada, a diagonal AC torna-se AC' (Figura 2.7b). Os comprimentos das diagonais AC e AC' podem ser determinados pelo teorema de Pitágoras. Temos

$$AC = \sqrt{(0{,}150)^2 + (0{,}150)^2} = 0{,}21213 \text{ m}$$
$$AC' = \sqrt{(0{,}150)^2 + (0{,}152)^2} = 0{,}21355 \text{ m}$$

Portanto, a deformação normal média ao longo da diagonal é

$$(\epsilon_{AC})_{méd} = \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{0{,}21355 \text{ m} - 0{,}21213 \text{ m}}{0{,}21213 \text{ m}}$$

$$= 0{,}00669 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Parte (b). Para obter a deformação por cisalhamento em E em relação aos eixos x e y, em primeiro lugar, é necessário determinar o ângulo θ', que especifica o ângulo entre esses eixos após a deformação (Figura 2.7b). Temos

$$\text{tg}\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{76 \text{ mm}}{75 \text{ mm}}$$

$$\theta' = 90{,}759° = \frac{\pi}{180°}(90{,}759°) = 1{,}58404 \text{ rad}$$

Aplicando a Equação 2.4, a deformação por cisalhamento em E é, portanto,

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 1{,}58404 \text{ rad} = -0{,}0132 \text{ rad} \qquad \textit{Resposta}$$

De acordo com a convenção de sinais, um *sinal negativo* indica que o ângulo θ' é *maior que* 90°.

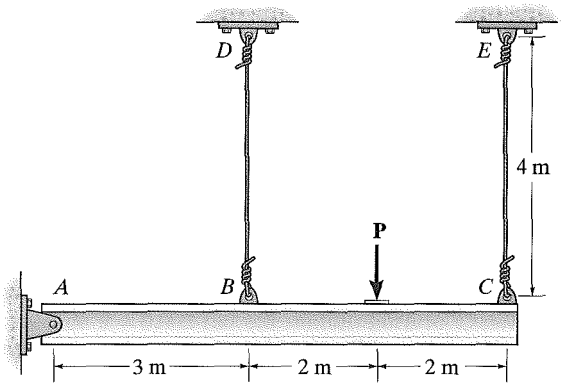
OBSERVAÇÃO: Se os eixos x e y fossem horizontal e vertical no ponto E, não haveria nenhuma deformação normal na direção y e uma deformação normal na direção x. Os eixos continuariam perpendiculares um ao outro e, portanto, devido à deformação, $\gamma_{xy} = 0$ no ponto E.

PROBLEMAS

2.1. O diâmetro de um balão de borracha cheio de ar é 150 mm. Se a pressão do ar em seu interior for aumentada até o diâmetro atingir 175 mm, determine a deformação normal média na borracha.

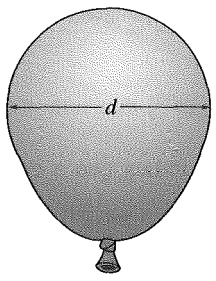
2.2. O comprimento de uma fita elástica delgada não esticada é 375 mm. Se a fita for esticada ao redor de um cano de diâmetro externo 125 mm, determine a deformação normal média na fita.

2.3. A barra rígida é sustentada por um pino em A e pelos cabos BD e CE. Se a carga **P** aplicada à viga provocar um deslocamento de 10 mm para baixo na extremidade C, determine a deformação normal desenvolvida nos cabos CE e BD.



Problema 2.3

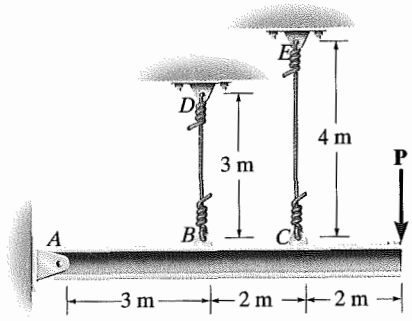
*2.4. O diâmetro da parte central do balão de borracha é d = 100 mm. Se a pressão do ar em seu interior provocar o aumento do diâmetro do balão até d = 125 mm, determine a deformação normal média na borracha.



Problema 2.4

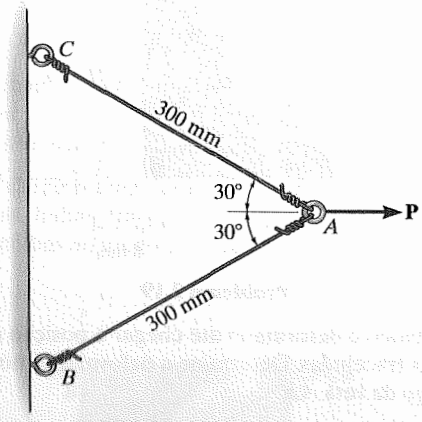
2.5. A viga rígida é sustentada por um pino em A e pelos cabos BD e CE. Se a carga **P** aplicada à viga for deslocada 10 mm para baixo, determine a deformação normal desenvolvida nos cabos CE e BD.

2.6. A viga rígida é sustentada por um pino em A e pelos cabos BD e CE. Se a deformação normal admissível máxima em cada cabo for $\epsilon_{máx} = 0{,}002$ mm/mm, determine o deslocamento vertical máximo da carga **P**.



Problemas 2.5/6

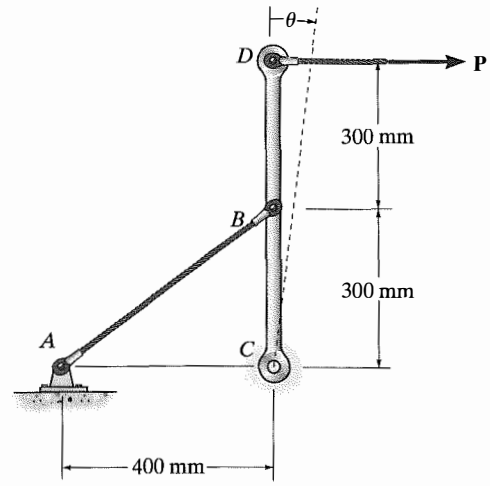
2.7. Os dois cabos estão interligados em A. Se a força **P** provocar um deslocamento horizontal de 2 mm no ponto em A, determine a deformação normal desenvolvida em cada cabo.



Problema 2.7

*2.8. Parte de uma ligação de controle para um avião consiste em um elemento rígido CBD e um cabo flexível AB. Se uma força for aplicada à extremidade D do elemento e provocar uma rotação $\theta = 0{,}3°$, determine a deformação normal no cabo. Em sua posição original, o cabo não está esticado.

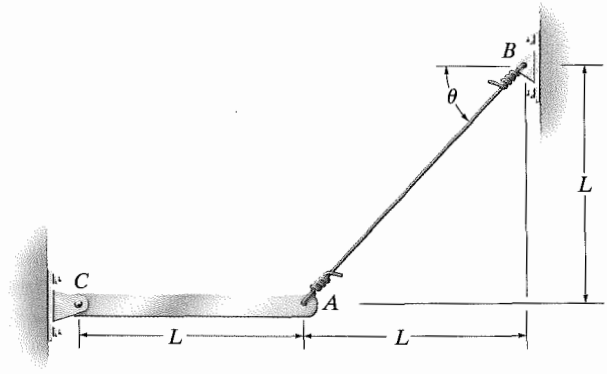
2.9. Parte de uma ligação de controle para um avião consiste em um elemento rígido CBD e um cabo flexível AB. Se uma força for aplicada à extremidade D do elemento e provocar uma deformação normal no cabo de 0,0035 mm/mm, determine o deslocamento do ponto D. Em sua posição original, o cabo não está esticado.



Problemas 2.8/9

2.10. O cabo AB não está esticado quando $\theta = 45°$. Se uma carga vertical for aplicada à barra AC e provocar a mudança do ângulo para $\theta = 47°$, determine a deformação normal no cabo.

2.11. Se a carga aplicada à barra AC provocar o deslocamento do ponto A para a esquerda de uma quantidade ΔL, determine a deformação normal no cabo AB. Originalmente, $\theta = 45°$.

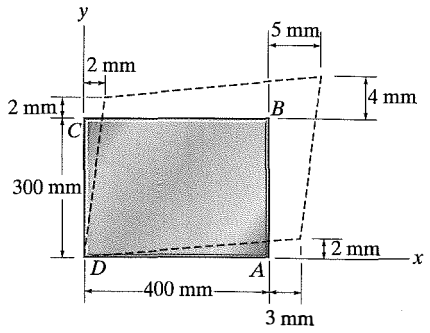


Problemas 2.10/11

*2.12. A forma original de uma peça de plástico é retangular. Determine a deformação por cisalhamento γ_{xy} nos cantos A e B se o plástico se distorcer como mostram as linhas tracejadas.

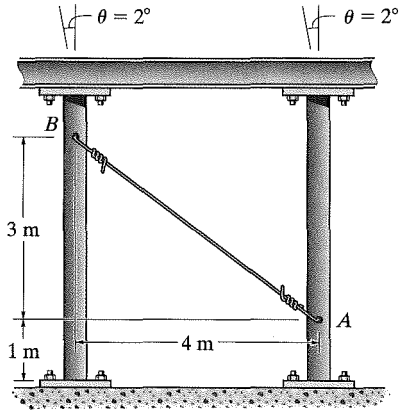
2.13. A forma original de uma peça de plástico é retangular. Determine a deformação por cisalhamento γ_{xy} nos cantos D e C se o plástico se distorcer como mostram as linhas tracejadas.

2.14. A forma original de uma peça de plástico é retangular. Determine a deformação normal média que ocorre ao longo das diagonais AC e DB.



Problemas 2.12/13/14

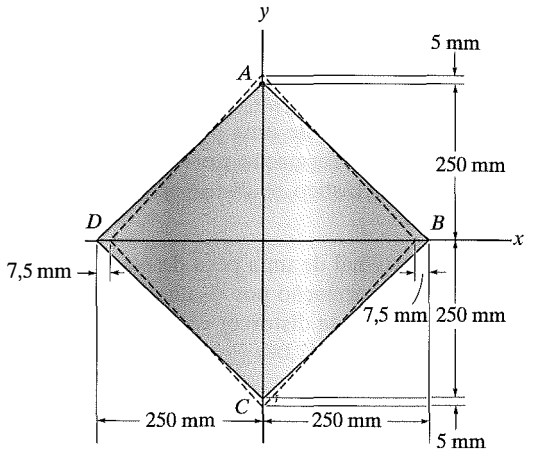
2.15. Originalmente, o cabo de ancoragem AB de uma estrutura de edifício não está esticado. Devido a um terremoto, as duas colunas da estrutura inclinam-se até um ângulo $\theta = 2°$. Determine a deformação normal aproximada do cabo quando a estrutura estiver nessa posição. Considere que as colunas são rígidas e giram ao redor de seus apoios inferiores.



Problema 2.15

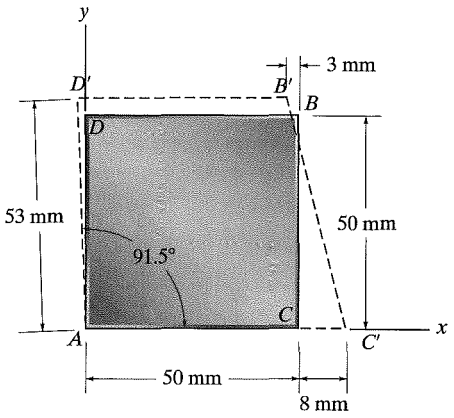
*__2.16.__ Os cantos da chapa quadrada sofrem os deslocamentos indicados. Determine a deformação por cisalhamento ao longo das bordas da chapa em A e B.

2.17. Os cantos da chapa quadrada sofrem os deslocamentos indicados. Determine as deformações normais médias ao longo do lado AB e das diagonais AC e DB.



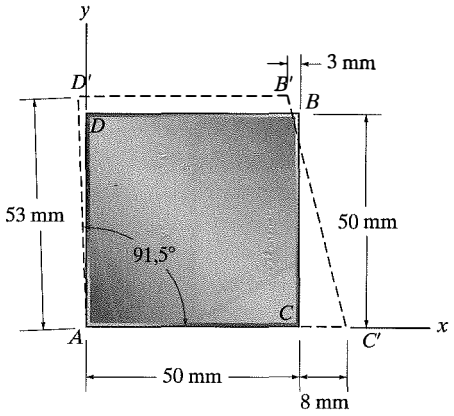
Problemas 2.16/17

2.18. O quadrado deforma-se até chegar à posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determine a deformação normal média ao longo de cada diagonal, AB e CD. O lado $D'B'$ permanece horizontal.



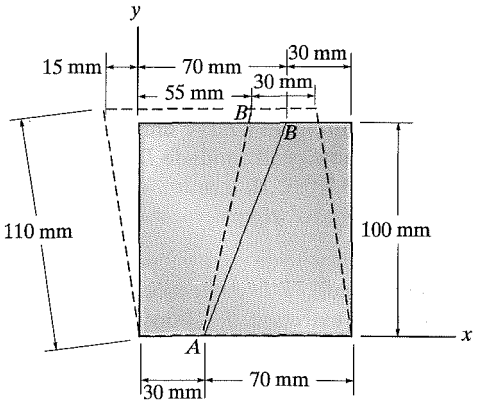
Problema 2.18

2.19. O quadrado deforma-se até chegar à posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determine a deformação por cisalhamento em cada um de seus cantos, A, B, C e D. O lado $D'B'$ permanece horizontal.



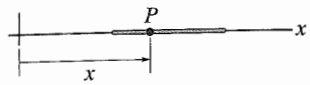
Problema 2.19

*__2.20.__ O bloco é deformado até chegar à posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determine a deformação normal média ao longo da reta AB.



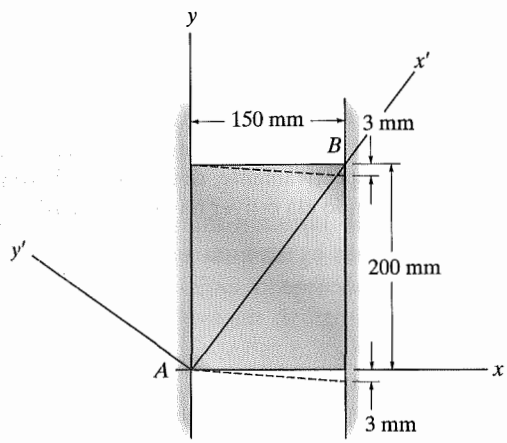
Problema 2.20

2.21. Um cabo fino que se encontra ao longo do eixo x é deformado de tal modo que cada um de seus pontos sofre um deslocamento $\Delta x = kx^2$ ao longo do eixo. Se k for constante, qual é a deformação normal em qualquer ponto P ao longo do cabo?



Problema 2.21

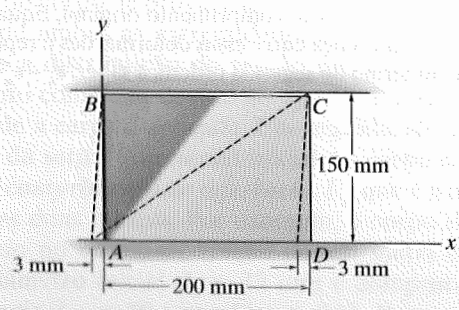
2.22. A chapa retangular é submetida à deformação mostrada pela linha tracejada. Determine a deformação por cisalhamento média γ_{xy} da chapa.



Problema 2.22

2.23. A chapa retangular é submetida à deformação mostrada pelas linhas tracejadas. Determine a deformação por cisalhamento média γ_{xy} da chapa.

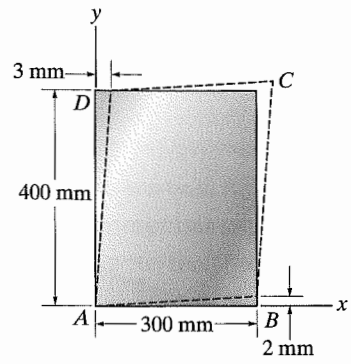
*__2.24.__ A chapa retangular é submetida à deformação mostrada pelas linhas tracejadas. Determine as deformações normais médias ao longo da diagonal AC e do lado AB.



Problemas 2.23/24

2.25. A forma original da peça de borracha é retangular. Determine a deformação por cisalhamento média γ_{xy}, se os cantos B e D forem submetidos a deslocamentos que provoquem a distorção da borracha mostrada pelas linhas tracejadas.

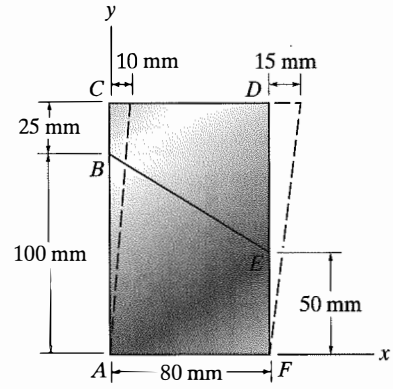
2.26. A forma original da peça de borracha é retangular e ela é submetida à deformação mostrada pelas linhas tracejadas. Determine a deformação normal média ao longo da diagonal DB e do lado AD.



Problemas 2.25/26

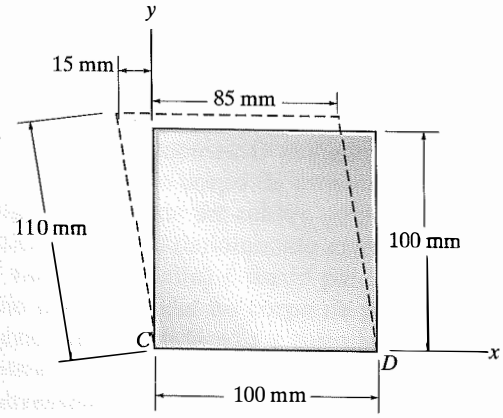
2.27. O material é distorcido até a posição tracejada, como mostra a figura. Determine (a) as deformações normais médias ϵ_x e ϵ_y e a deformação por cisalhamento γ_{xy} em A e (b) a deformação normal média ao longo da reta BE.

*__2.28.__ O material é distorcido até a posição, como mostra a figura. Determine a deformação normal média que ocorre ao longo das diagonais AD e CF.



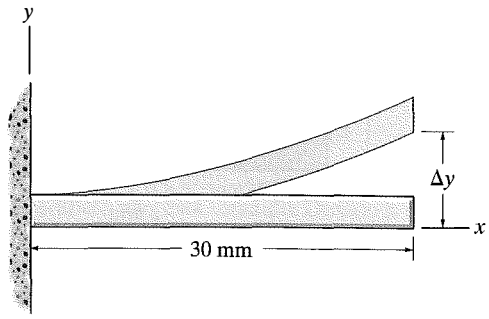
Problemas 2.27/28

2.29. O bloco é deformado até a posição mostrada pelas linhas tracejadas. Determine a deformação por cisalhamento nos cantos C e D.



Problema 2.29

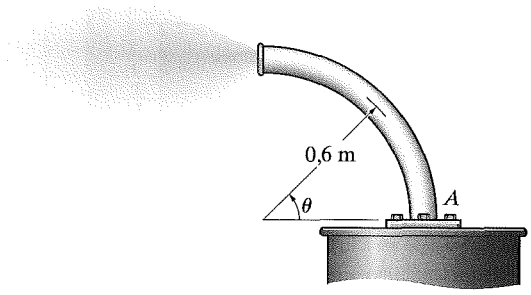
2.30. O comprimento original da barra é 30 mm quando está reta. Se ela for submetida a uma deformação por cisalhamento definida por $\gamma_{xy} = 0{,}02x$, onde x é dado em milímetros, determine o deslocamento Δy na extremidade de sua borda inferior. A barra foi distorcida até a forma mostrada, na qual não ocorre alongamento da barra na direção x.



Problema 2.30

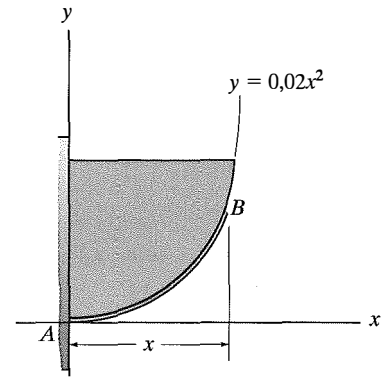
2.31. O raio original do tubo curvado é 0,6 m. Se ele sofrer aquecimento não uniforme que provoque uma deformação normal ao longo de seu comprimento $\epsilon = 0{,}05 \cos \theta$, determine o aumento no comprimento do tubo.

***2.32.** Resolva o Problema 2.31 considerando $\epsilon = 0{,}08 \operatorname{sen} \theta$.



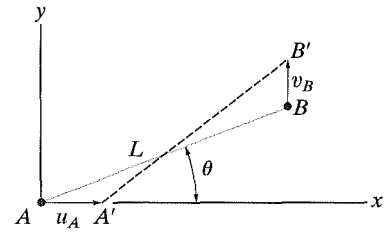
Problemas 2.31/32

2.33. Um cabo fino é enrolado ao longo da superfície cuja forma é $y = 0{,}02x^2$, onde x e y são dados em mm. A posição original da extremidade B é $x = 250$ mm. Se o cabo sofrer uma deformação normal $\epsilon = 0{,}0002x$ ao longo de seu comprimento, determina mudança no comprimento do cabo. *Dica*: Para a curva, $y = f(x), ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \cdot dx$.



Problema 2.33

2.34. A fibra AB tem comprimento L e orientação θ. Se suas extremidades A e B sofrerem deslocamentos muito pequenos u_A e v_B, respectivamente, determine a deformação normal na fibra quando ela estiver na posição $A'B'$.



Problema 2.34

2.35. Se a deformação normal for definida em relação ao comprimento final, isto é,

$$\epsilon'_n = \lim_{p \to p'} \left(\frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s'} \right)$$

em vez de em relação ao comprimento original, Equação 2.2, mostre que a diferença entre essas deformações é representada como um termo de segunda ordem, a saber, $\epsilon_n - \epsilon'_n = \epsilon_n \epsilon'_n$.

3 Propriedades mecânicas dos materiais

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Agora que já discutimos os conceitos básicos de tensão e deformação, mostraremos, neste capítulo, como a tensão pode ser relacionada com a deformação por meio de métodos experimentais capazes de determinar o diagrama tensão–deformação para um material específico. O comportamento descrito por esse diagrama será discutido para materiais comumente utilizados na engenharia. Discutiremos, também, propriedades mecânicas e outros ensaios relacionados com o desenvolvimento da resistência dos materiais.

3.1 O ensaio de tração e compressão

A resistência de um material depende de sua capacidade de suportar uma carga sem deformação excessiva ou ruptura. Essa propriedade é inerente ao próprio material e deve ser determinada por *métodos experimentais*. Um dos testes mais importantes nesses casos é o ensaio de ***tração ou compressão***. Embora seja possível determinar muitas propriedades mecânicas importantes de um material por esse teste, ele é usado primariamente para determinar a relação entre a tensão normal média e a deformação normal média em muitos materiais usados na engenharia, como metais, cerâmicas, polímeros e compósitos.

Para executar o ensaio de tração ou compressão, prepara-se um corpo de prova do material com forma e tamanho "padronizados". Antes do teste, duas pequenas marcas são identificadas ao longo do comprimento do corpo de prova. Essas marcas são localizadas longe de ambas as extremidades do corpo de prova, porque a distribuição de tensão nas extremidades é um tanto complexa devido ao aperto nos acoplamentos onde a carga é aplicada. Em seguida, são medidos a área da seção transversal inicial do corpo de prova, A_0, e o ***comprimento de referência***, L_0, que é a distância entre as duas marcas. Por exemplo, o corpo de prova utilizado no ensaio de tração de um metal em geral tem diâmetro inicial $d_0 = 13$ mm e comprimento de referência $L_0 = 50$ mm (Figura 3.1). Para aplicar-se uma carga axial sem provocar flexão no corpo de prova, as extremidades normalmente são encaixadas em juntas universais. Então, uma máquina de teste, como a mostrada na Figura 3.2, é utilizada para alongar o corpo de prova a uma taxa muito lenta e constante, até ele atingir o ponto de ruptura. A máquina é projetada para ler a carga exigida para manter esse alongamento uniforme.

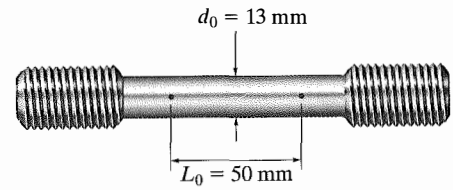


Figura 3.1

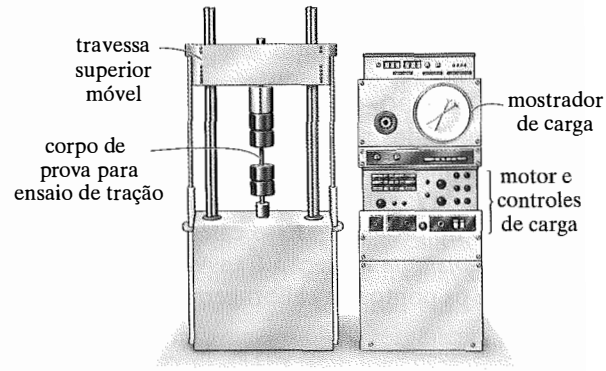
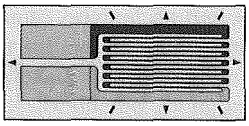


Figura 3.2

Dados da carga aplicada P são lidos no mostrador da máquina ou em um mostrador digital e registrados em intervalos frequentes. O alongamento $\delta = L - L_0$ entre as marcas no corpo de prova também pode ser medido por meio de um calibre ou por um dispositivo mecânico ou ótico denominado ***extensômetro***. Então, esse valor de δ (delta) é usado para calcular a deformação normal média no corpo de prova. Entretanto, às vezes, essa medida não é tomada, já que também é possível ler a deformação *diretamente* por meio de um ***extensômetro de resistência elétrica***, mostrado na Figura 3.3. A operação desse equipamento baseia-se



Extensômetro de resistência elétrica

Figura 3.3

na variação da resistência elétrica em um arame muito fino ou lâmina delgada de metal sob deformação. Em essência, o extensômetro é colado ao corpo de prova em uma direção específica. Se o adesivo for muito forte em comparação com o extensômetro, este passará, então, a ser parte integrante do corpo de prova. Assim, quando o corpo de prova for solicitado na direção do extensômetro, o arame e o corpo de prova sofrerão a mesma deformação. Pela medição da resistência elétrica do arame, o extensômetro pode ser calibrado para ler valores de deformação normal diretamente.

3.2 O diagrama tensão–deformação

Pelos dados obtidos em um ensaio de tração ou compressão, é possível calcular vários valores da tensão e da deformação correspondentes no corpo de prova e, então, construir um gráfico com esses resultados. A curva resultante é denominada ***diagrama tensão–deformação*** e, normalmente, ela pode ser descrita de duas maneiras.

Diagrama tensão–deformação convencional.

Utilizando os dados registrados, podemos determinar a ***tensão nominal***, ou ***tensão de engenharia***, dividindo a carga aplicada P pela área *original* da seção transversal do corpo de prova, A_0. Esse cálculo considera que a tensão é *constante* na seção transversal e em toda a região entre os pontos de calibragem. Temos

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \tag{3.1}$$

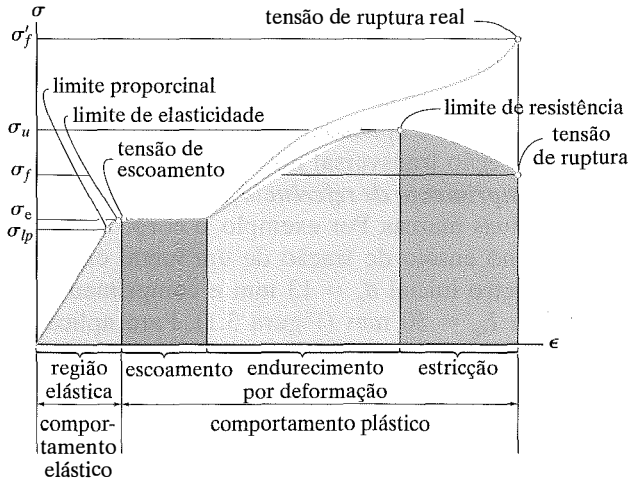
Da mesma maneira, a ***deformação nominal***, ou ***deformação de engenharia***, é determinada diretamente pela leitura da deformação no extensômetro, ou dividindo a variação, δ, no comprimento de referência do corpo de prova pelo comprimento de referência original do corpo de prova, L_0. Aqui, consideramos que a deformação é constante em toda a região entre os pontos de calibragem. Assim,

$$\epsilon = \frac{\delta}{L_0} \tag{3.2}$$

Se os valores correspondentes de σ e ϵ forem marcados em um gráfico no qual a ordenada é a tensão e a abscissa é a deformação, a curva resultante é denominada ***diagrama tensão–deformação convencional***. Esse diagrama é muito importante na engenharia porque proporciona os meios para se obterem dados sobre a resistência à tração (ou compressão) de um material *sem* considerar o tamanho ou a forma física do material, isto é, sua geometria. Entretanto, tenha sempre em mente que dois diagramas tensão–deformação para um determinado material nunca serão *exatamente* iguais, já que os resultados dependem de variáveis como a composição e as imperfeições microscópicas do material, seu modo de fabricação e a taxa de carga e temperatura utilizadas durante o teste.

Agora, discutiremos as características da curva tensão–deformação convencional referente ao *aço*, um material comumente utilizado para fabricação de elementos estruturais e mecânicos. A Figura 3.4 mostra o diagrama tensão–deformação característico para um corpo de prova de aço obtido pelo método descrito. Por essa curva, podemos identificar quatro modos diferentes de comportamento do material, dependendo do grau de deformação nele induzido.

Comportamento elástico. Ocorre o comportamento elástico do material quando as deformações no corpo de prova estão dentro da primeira região mostrada na Figura 3.4. Podemos ver que a curva é, na verdade, uma *linha reta* em grande parte dessa região, de modo que a tensão é *proporcional* à deformação. Em outras palavras, o material é *linearmente elástico*. O limite superior da tensão para essa relação linear é denominado ***limite de proporcionalidade***, σ_{lp}. Se a tensão ultrapassar ligeiramente o limite de proporcionalidade, o material ainda pode responder de maneira elástica; todavia, a reta tende a encurvar-se e achatar-se, como



Diagramas de tensão–deformação convecional e real para um material dúctil (aço)(não está em escala)

Figura 3.4

mostra a figura. Isso continua até a tensão atingir o ***limite de elasticidade***. Ao atingir esse ponto, se a carga for removida, o corpo de prova ainda voltará à sua forma original. No entanto, no caso do aço, o limite de elasticidade raramente é determinado, visto que está muito próximo do limite de proporcionalidade, portanto é muito difícil detectá-lo.

Escoamento. Um pequeno aumento na tensão acima do limite de elasticidade resultará no colapso do material e fará com que ele *se deforme permanentemente*. Esse comportamento é denominado ***escoamento*** e é indicado pela segunda região da curva. A tensão que causa escoamento é denominada ***tensão de escoamento*** ou ***ponto de escoamento***, σ_e, e a deformação que ocorre é denominada ***deformação plástica***. Embora a Figura 3.4 não mostre, o ponto de escoamento para aços com baixo teor de carbono ou laminados a quente é frequentemente distinguido por dois valores. O ***ponto de escoamento superior*** ocorre antes e é seguido por uma redução repentina na capacidade de suportar carga até um ***ponto de escoamento inferior***. Entretanto, uma vez alcançado o ponto de escoamento, o corpo de prova continuará a alongar-se (deformar-se) *sem qualquer aumento na carga*, como mostra a Figura 3.4. Observe que a figura não está em escala; se estivesse, as deformações induzidas pelo escoamento seriam 10 a 40 vezes maiores do que as produzidas até o limite de elasticidade. Quando o material está nesse estado, costuma ser denominado ***perfeitamente plástico***.

Endurecimento por deformação. Quando o escoamento tiver terminado, pode-se aplicar uma carga adicional ao corpo de prova, o que resulta em uma curva que cresce continuamente, mas torna-se mais achatada até atingir uma tensão máxima denominada ***limite de resistência***, σ_r. O crescimento da curva dessa maneira é denominado ***endurecimento por deformação*** e é identificado na terceira região da Figura 3.4. Durante todo o ensaio, enquanto o corpo se alonga, sua seção transversal diminui. Essa redução na área é razoavelmente *uniforme* por todo o comprimento de referência do corpo de prova, até mesmo a deformação que corresponde ao limite de resistência.

Estricção. No limite de resistência, a área da seção transversal começa a diminuir em uma região *localizada* do corpo de prova, em vez de em todo o seu comprimento. Esse fenômeno é causado por planos deslizantes formados no interior do material, e as deformações reais produzidas são causadas por tensão de cisalhamento (ver Seção 10.7). Como resultado, tende a formar-se uma constrição, ou "estricção", gradativa nessa região, à medida que o corpo de prova se alonga cada vez mais (Figura 3.5a). Visto que a área da seção transversal nessa região está diminuindo continuamente,

Estricção

(a)

Falha de um material dúctil

(b)

Figura 3.5

a área menor só pode suportar uma carga sempre decrescente. Por consequência, o diagrama tensão–deformação tende a curvar-se para baixo até o corpo de prova quebrar, quando atinge a ***tensão de ruptura***, σ_{rup} (Figura 3.5b). Essa região da curva provocada pela estricção é indicada na quarta região da Figura 3.4.

Diagrama tensão–deformação real. Em vez de sempre usar a área da seção transversal e o comprimento *originais* do corpo de prova para calcular a tensão e a deformação (de engenharia), poderíamos utilizar a área da seção transversal e o comprimento *reais* do corpo de prova no *instante* em que a carga é medida. Os valores da tensão e da deformação calculados por essas medições são denominados *tensão real e deformação real*, e a representação gráfica de seus valores é denominada ***diagrama tensão–deformação real***. O gráfico desse diagrama tem a forma mostrada pela curva superior na Figura 3.4. Observe que os diagramas σ–ϵ convencional e real são praticamente coincidentes quando a deformação é pequena. As diferenças entre os diagramas começam a aparecer na faixa do endurecimento por deformação, quando a amplitude da deformação se torna mais significativa. Em particular, há uma grande divergência na região de estricção. Nessa região, o diagrama σ–ϵ convencional mostra que, *na verdade*, o corpo de prova suporta uma carga *decrescente*, já que A_0 é constante quando calculamos a tensão de engenharia, $\sigma = P/A_0$. Contudo, pelo diagrama σ–ϵ real, a área real A no interior da região de estricção diminui sempre até a ruptura, σ_{rup}, portanto, na verdade, o material suporta *tensão crescente*, visto que $\sigma = P/A$.

Embora os diagramas tensão–deformação convencional e real sejam diferentes, a maioria dos projetos de engenharia fica dentro da faixa elástica, pois, em geral, a distorção do material não é severa dentro dessa faixa. Contanto que o material seja "rígido", como a maioria dos metais, a deformação até o limite de elasticidade permanecerá pequena, e o erro associado à

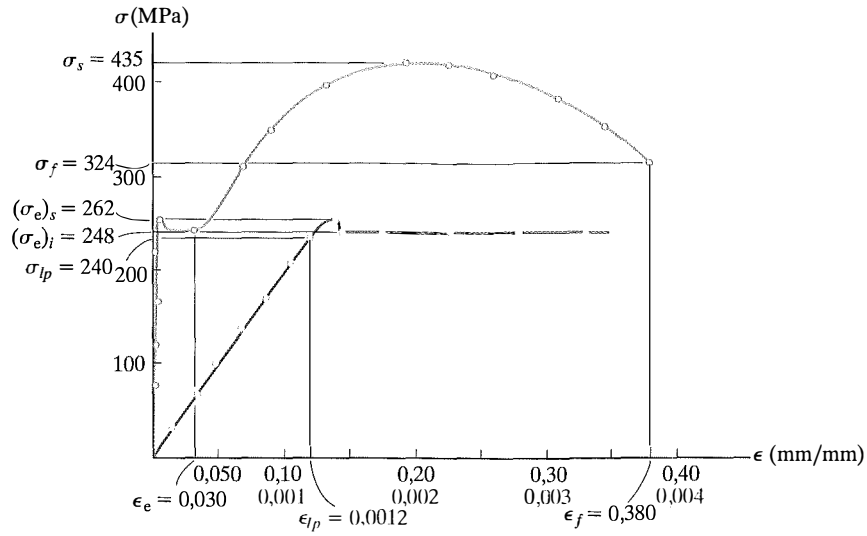


Diagrama tensão–deformação para aço doce

Figura 3.6

utilização de valores de engenharia de σ e ϵ é muito pequeno (aproximadamente 0,1%), em comparação com seus valores reais. Essa é uma das principais razões para a utilização dos diagramas tensão–deformação convencionais.

Os conceitos discutidos até aqui podem ser resumidos na Figura 3.6, a qual mostra um diagrama tensão–deformação convencional para um corpo de prova real feito de aço doce. Para destacar os detalhes, a região elástica da curva é mostrada em cor clara em uma escala de deformação exagerada, também em cor clara. Acompanhando o comportamento, vemos que o limite de proporcionalidade é atingido em $\sigma_{lp} = 241$ MPa, onde $\epsilon_{lp} = 0{,}0012$ mm/mm. Em seguida, ocorre um limite superior de escoamento $(\sigma_e)_s = 262$ MPa e, então, repentinamente, um limite inferior de escoamento $(\delta_e)_i = 248$ MPa. O final do escoamento ocorre a uma deformação $\epsilon_e = 0{,}030$ mm/mm, que é 25 vezes maior do que a deformação no limite de proporcionalidade. Na continuação, o corpo de prova sofre endurecimento por deformação até atingir o limite de resistência $\epsilon_r = 434$ MPa e, então, começa a sofrer estricção até ocorrer falha, $\sigma_f = 324$ MPa. Por comparação, a deformação na falha, $\epsilon_f = 0{,}380$ mm/mm é 317 vezes maior que ϵ_{lp}!

3.3 Comportamento da tensão–deformação de materiais dúcteis e frágeis

Os materiais podem ser classificados como dúcteis ou frágeis, dependendo de suas características de tensão-deformação. Agora, cada um será estudado separadamente.

Materiais dúcteis. Qualquer material que possa ser submetido a grandes deformações antes de sofrer ruptura é denominado ***material dúctil***. O aço doce, como já discutimos, é um exemplo típico. Os engenheiros costumam escolher materiais dúcteis para o projeto uma vez que esses materiais são capazes de absorver choque ou energia e, se ficarem sobrecarregados, exibirão, em geral, grande deformação antes de falhar.

Um modo de especificar a ductilidade de um material é calcular o percentual de alongamento ou a redução percentual da área no instante da ruptura. A ***porcentagem de alongamento*** é a deformação de ruptura do corpo de prova expressa como porcentagem. Assim, se o comprimento de referência original do corpo de prova for L_0 e seu comprimento na ruptura for L_{rup}, então

$$\text{Porcentagem de alongamento} = \frac{L_{rup} - L_0}{L_0}(100\%) \qquad (3.3)$$

Como vimos na Figura 3.6, visto que $\epsilon_f = 0{,}380$, esse valor seria 38% para um corpo de prova de aço doce.

A ***porcentagem de redução da área*** é outro modo de especificar a ductilidade e é definida dentro da região de estricção da seguinte maneira:

$$\text{Porcentagem de redução da área} = \frac{A_0 - A_f}{A_0}(100\%) \qquad (3.4)$$

Nessa expressão, A_0 é a área da seção transversal original do corpo de prova e A_f é a área na ruptura. O aço doce tem um valor típico de 60%.

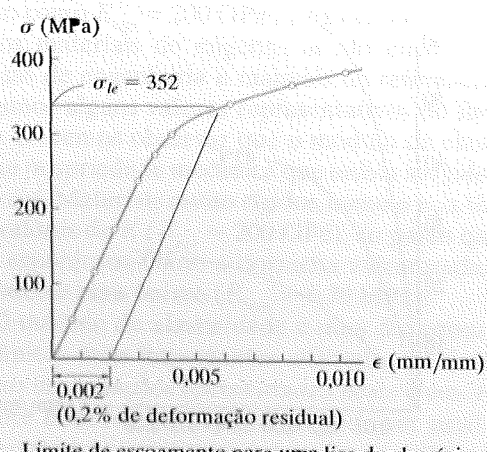
Outros materiais, como latão, molibdênio e zinco, também podem exibir características de tensão–deformação dúctil semelhantes às do aço e, por isso, passam por comportamento de tensão–deformação elástica, escoamento a tensão constante, endurecimento por deformação e, por fim, estricção até ruptura. Entretanto, na maioria dos metais *não ocorrerá* escoamento constante além da faixa elástica. Um metal que apresenta tal comportamento é o alumínio. Frequentemente, esse metal não tem um *ponto de escoamento* bem definido e, por consequência, é prática padrão definir um ***limite de escoamento*** para o alumínio por meio de um procedimento gráfico denominado ***método da deformação residual***. Em geral escolhe-se uma deformação de 0,2% (0,002 mm/mm) e, tomando como origem esse ponto no eixo ϵ, traça-se uma paralela à parte inicial em linha reta do diagrama tensão–deformação. O ponto em que essa reta intercepta a curva determina o limite de escoamento. Um exemplo da construção desse gráfico para determinar o limite de escoamento para uma liga de alumínio é mostrado na Figura 3.7. Pelo gráfico, o limite de escoamento é $\sigma_{le} = 352$ MPa.

Tenha sempre em mente que o limite de escoamento não é uma propriedade física do material, visto que é uma tensão que causa uma deformação *específica* permanente no material. Todavia, neste livro, consideraremos que limite de escoamento, ponto de escoamento, limite de elasticidade e limite de proporcionalidade *coincidem*, a menos que seja afirmado o contrário. Uma exceção seria a borracha natural que, na verdade, não tem sequer um limite de proporcionalidade, já que a tensão e a deformação *não* são relacionadas linearmente (Figura 3.8). Ao contrário, esse material, que é conhecido como um polímero exibe *comportamento elástico não linear.*

A madeira é um material que, em geral, é moderadamente dúctil e, por isso, costuma ser projetada para reagir somente a carregamentos elásticos. As características de resistência da madeira variam muito de uma espécie para outra e, para cada uma dessas espécies, dependem do teor de umidade, da idade, do tamanho e do arranjo dos nós na madeira já cortada. Como a madeira é um material fibroso, suas características de tração e compressão serão muito diferentes quando ela for carregada paralela ou perpendicularmente a seu grão. A madeira racha quando carregada em tração perpendicular a seu grão e, por consequência, quase sempre se entende que, em elementos estruturais de madeira, as cargas de tração serão aplicadas paralelamente ao grão.

Materiais frágeis. Materiais que exibem pouco ou nenhum escoamento antes da falha são denominados ***materiais frágeis***. O ferro fundido cinzento é um exemplo, pois tem um diagrama tensão–deformação sob tração, como o mostrado pela porção AB da curva na Figura 3.9. Neste caso, a ruptura em $\sigma_{rup} = 152$ MPa ocorreu, inicialmente, uma imperfeição ou trinca microscópica, então propagou-se rapidamente pelo corpo de prova causando a ruptura completa. O resultado desse tipo de ruptura é que a tensão de ruptura sob tração para materiais frágeis não é bem definida, visto que o surgimento de trincas iniciais em um corpo de prova é bastante aleatório. Por essa razão, em vez da tensão de ruptura propriamente dita, registra-se a tensão de ruptura *média* observada em um conjunto de ensaios de tração. A Figura 3.10a mostra um corpo de prova que sofreu uma falha típica.

Em comparação com seu comportamento sob tração, os materiais frágeis, como o ferro fundido cinzento, exibem uma resistência muito mais alta à compressão axial, como fica claro na porção AC da curva na Figura 3.9. Neste caso, quaisquer trincas ou imperfeições no



Limite de escoamento para uma liga de alumínio

Figura 3.7

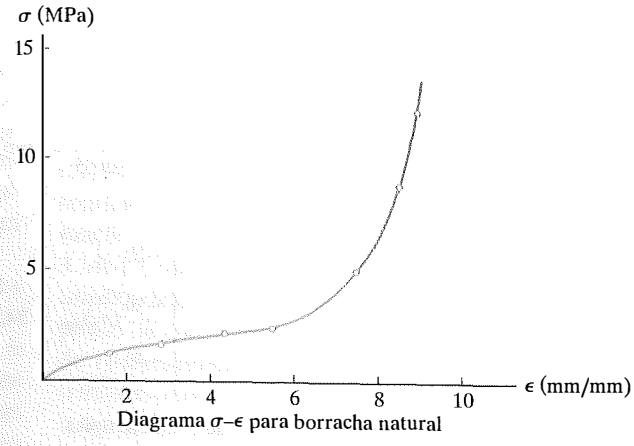


Diagrama σ–ϵ para borracha natural

Figura 3.8

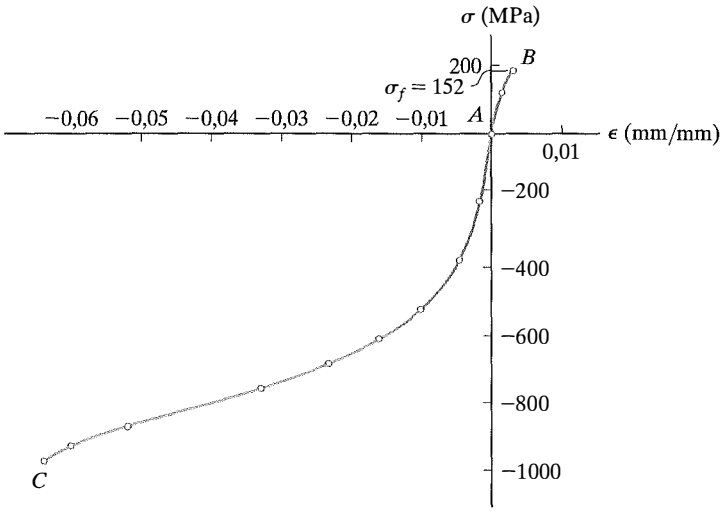


Diagrama σ–ϵ para ferro fundido cinzento

Figura 3.9

Ruptura de um material frágil por tração
(a)

Compressão provoca protuberância lateral no material
(b)

Figura 3.10

corpo de prova tendem a fechar-se e, à medida que a carga aumenta, o material em geral abaula-se ou toma a forma de um barril (Figura 3.10b).

O concreto, assim como o ferro fundido cinzento, é classificado como um material frágil e também tem baixa capacidade de resistência à tração. As características de seu diagrama tensão–deformação dependem primariamente da mistura do concreto (água, areia, brita e cimento) e do tempo e temperatura de cura. Um exemplo típico de um diagrama tensão–deformação "completo" para o concreto é dado na Figura 3.11. Observamos nesse gráfico que a máxima resistência à compressão do concreto é quase 12,5 vezes maior do que sua resistência à tração, $(\sigma_c)_{máx} = 34{,}5$ MPa, em comparação com $(\sigma_t)_{máx} = 2{,}76$ MPa. Por essa razão, o concreto é quase sempre reforçado com barras ou hastes de aço quando projetado para suportar cargas de tração.

Em geral, pode-se dizer que a maioria dos materiais exibe comportamentos dúcteis e frágeis. Por exemplo, o aço tem comportamento frágil quando seu teor de carbono é alto, e dúctil quando o teor de carbono é reduzido. Além do mais, em baixas temperaturas, os materiais tornam-se mais duros e mais frágeis, ao passo que, quando a temperatura sobe, eles ficam mais macios e mais dúcteis. Esse efeito é mostrado na Figura 3.12 para um plástico metacrilato.

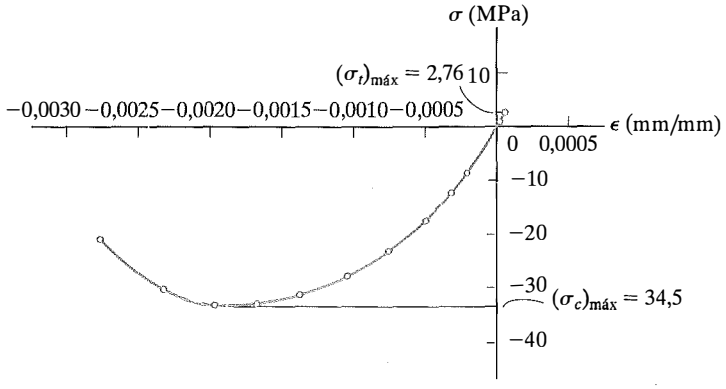


Diagrama σ–ϵ para mistura de concreto típica

Figura 3.11

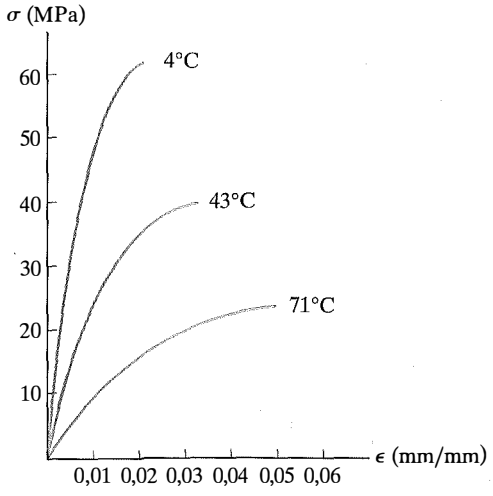


Diagrama σ–ϵ para um plástico metacrilato

Figura 3.12

3.4 Lei de Hooke

Como observamos na seção anterior, o diagrama tensão–deformação para a maioria dos materiais de engenharia exibe uma *relação linear* entre tensão e deformação dentro da região elástica. Por consequência, um aumento na tensão provoca um aumento proporcional na deformação. Esse fato foi descoberto por Robert Hooke, em 1676, para molas, e é conhecido como *lei de Hooke* e pode ser expresso matematicamente como

$$\sigma = E\epsilon \tag{3.5}$$

Nesta expressão, E representa a constante de proporcionalidade, denominada ***módulo de elasticidade*** ou ***módulo de Young***, nome que se deve a Thomas Young, que publicou uma explicação sobre o módulo em 1807.

Na realidade, a Equação 3.5 representa a equação da *porção inicial em linha reta* do diagrama tensão–deformação até o limite de proporcionalidade. Além disso, o módulo de elasticidade representa a *inclinação* dessa reta. Visto que a deformação é adimensional, pela Equação 3.5 E terá unidades de tensão como Pascal, MPa ou GPa. Como exemplo, considere o diagrama tensão–deformação para o aço mostrado na Figura 3.6. Nesse diagrama, $\sigma_{lp} = 240$ MPa e $\epsilon_{lp} = 0{,}0012$ mm/mm, de modo que

$$E = \frac{\sigma_{lp}}{\epsilon_{lp}} = \frac{240 \text{ GPa}}{0{,}0012 \text{ mm/mm}} = 200 \text{ GPa}$$

Como mostra a Figura 3.13, o limite de proporcionalidade para um tipo particular de aço depende da composição de sua liga. Todavia, a maioria dos aços, desde o mais mole aço laminado até o mais duro aço-ferramenta, tem o mesmo módulo de elasticidade, geralmente aceito como $E_{aço} = 200$ GPa. Valores comuns de E para outros materiais de engenharia são encontrados em normas de engenharia e manuais de referência. Apresentamos alguns valores representativos no final deste livro. Devemos observar que o módulo de elasticidade é uma propriedade mecânica que indica a *rigidez* de um material. Materiais muito rígidos, como o aço, têm grandes valores de E ($E_{aço} = 200$ GPa), ao passo que materiais esponjosos, como a borracha vulcanizada, podem ter valores mais baixos ($E_{borr} = 0{,}70$ MPa).

O módulo de elasticidade é uma das propriedades mecânicas mais importantes utilizadas no desenvolvimento de equações apresentadas neste livro. Porém, é sempre bom lembrar que E só pode ser usado se um material tiver *comportamento linear elástico*. Além disso, se a tensão no material for *maior* que o limite de proporcionalidade, o diagrama tensão–deformação deixa de ser uma linha reta, e a Equação 3.5 deixa de ser válida.

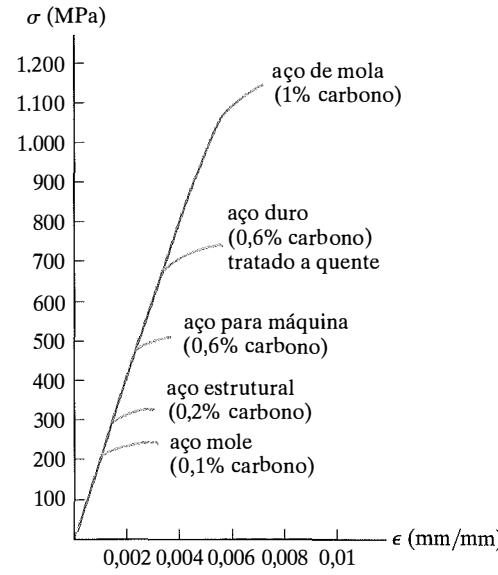


Figura 3.13

Endurecimento por deformação. Se um corpo de prova de material dúctil, como o aço, for carregado na *região plástica* e, então, descarregado, a *deformação elástica é recuperada* à medida que o material volta a seu estado de equilíbrio. Entretanto, a *deformação plástica permanece*, e o resultado é que o material fica sujeito a uma ***deformação permanente***. Por exemplo, um cabo que é encurvado (plasticamente) retomará (elasticamente) um pouco da forma original quando a carga for retirada, mas não retornará totalmente à sua posição original. Esse comportamento pode ser ilustrado no diagrama tensão–deformação mostrado na Figura 3.14a. Nesse diagrama, em primeiro lugar, o corpo de prova é carregado além de seu ponto de escoamento A, até o ponto A'. Uma vez que é preciso vencer forças interatômicas para alongar o corpo de prova *elasticamente*, então essas mesmas forças reunirão os átomos novamente quando a carga for removida (Figura 3.14a). Por consequência, o módulo de elasticidade, E, é o mesmo, e, portanto, a inclinação da reta $O'A'$ é igual à inclinação da reta OA.

Se a carga for reaplicada, os átomos no material serão deslocados novamente até ocorrer escoamento à tensão A' ou próximo dela, e o diagrama tensão-deformação continuará na mesma trajetória de antes (Figura 3.14b). Contudo, cabe observar que esse novo diagrama tensão–deformação, definido por $O'A'B$, agora tem um ponto de escoamento *mais alto,* (A'), uma consequência do endurecimento por deformação. Em outras palavras, o material tem, agora, uma *região elástica maior*; contudo, tem *menos ductilidade* e uma região plástica menor do que tinha quando em seu estado original.

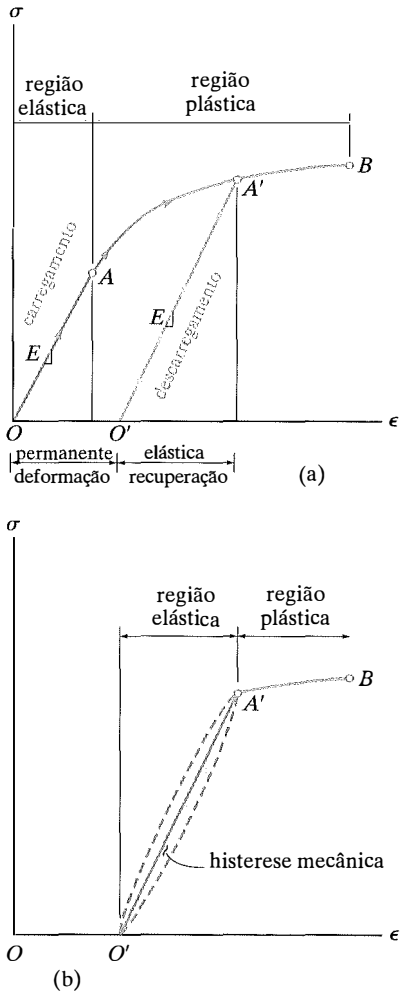


Figura 3.14

Na verdade, certa quantidade de calor ou *energia* pode ser *perdida* à medida que o corpo de prova é descarregado desde A' e novamente carregado até essa mesma tensão. O resultado é que as trajetórias A' a O' e O' a A' apresentarão leves curvaturas durante uma medição cuidadosa do ciclo de carregamento, mostradas pelas linhas tracejadas na Figura 3.14b. A área interna entre essas curvas representa energia perdida e é denominada ***histerese mecânica***. Ela se torna uma consideração importante na seleção de materiais que servirão como amortecedores para elementos estruturais ou equipamentos mecânicos vibratórios, embora seus efeitos não sejam considerados neste livro.

3.5 Energia de deformação

Quando um material é deformado por uma carga externa, tende a armazenar energia *internamente* em todo o seu volume. Como essa energia está relacionada com as deformações no material, ela é denominada ***energia de deformação***. Por exemplo, quando um corpo de prova de ensaio de tração é submetido a uma carga axial, um elemento de volume do material é submetido a uma tensão uniaxial, como mostra a Figura 3.15. Essa tensão desenvolve uma força $\Delta F = \sigma \Delta A = \sigma(\Delta x\, \Delta y)$ nas faces superior e inferior do elemento *após* ele ter sofrido um deslocamento vertical $\epsilon\, \Delta z$. Por definição, *trabalho* é determinado pelo produto entre a força e o deslocamento na direção da força. Visto que a força aumenta uniformemente de zero até seu valor final δF quando é obtido o deslocamento $\epsilon\, \Delta z$, o trabalho realizado pela força sobre o elemento é igual ao valor *médio* da força ($\Delta F/2$) vezes o deslocamento $\epsilon\, \Delta z$. Esse "trabalho externo" é equivalente ao "trabalho interno" ou energia de deformação armazenada no elemento, se considerarmos que nenhuma energia é perdida sob a forma de calor. Por consequência, a energia de deformação ΔU é $\Delta U = (1/2\Delta F)\, \epsilon\, \Delta z = (1/2\sigma\, \Delta x\, \Delta y)\, \epsilon\, \Delta z$. Visto que o volume do elemento é $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$, então $\Delta U = 1/2\sigma\epsilon\Delta V$.

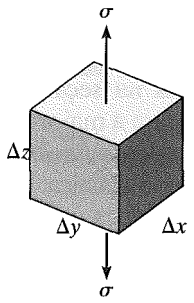


Figura 3.15

Às vezes, é conveniente formular a energia de deformação por unidade de volume de material, denominada ***densidade de energia de deformação***, a qual pode ser expressa por

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \tag{3.6}$$

Se o comportamento do material for *linear elástico*, então a lei de Hooke se aplica, $\sigma = E\epsilon$ e, portanto, podemos expressar a densidade de energia de deformação em termos da tensão uniaxial como

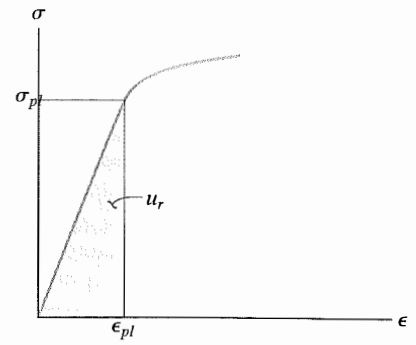
$$u = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \tag{3.7}$$

Módulo de resiliência. Em particular, quando a tensão σ atinge o limite de proporcionalidade, a densidade de energia de deformação, como calculada pela Equação 3.6 ou 3.7, é denominada ***módulo de resiliência***, isto é,

$$u_r = \frac{1}{2}\sigma_{lp}\epsilon_{lp} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{pl}^2}{E} \tag{3.8}$$

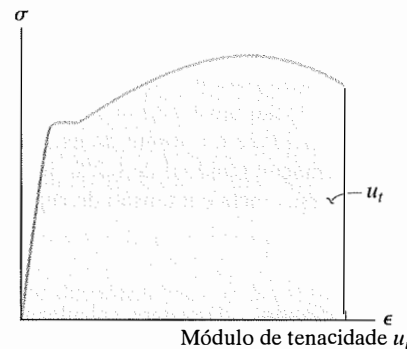
Observe, na região elástica do diagrama tensão–deformação (Figura 3.16a), que u_r é equivalente à *área triangular* sombreada sob o diagrama. Em termos físicos, a resiliência de um material representa sua capacidade de absorver energia sem sofrer qualquer dano permanente.

Módulo de tenacidade. Outra importante propriedade de um material é o ***módulo de tenacidade*** (u_t). Essa quantidade representa a *área inteira* sob o diagrama tensão–deformação (Figura 3.16b), portanto indica a densidade de energia de deformação do material um pouco antes da ruptura. Essa propriedade é importante no projeto de elementos estruturais que possam ser sobrecarregados acidentalmente. Materiais com alto módulo de tenacidade sofrerão grande distorção devido à sobrecarga; contudo, podem ser preferíveis aos que têm baixo valor de módulo de tenacidade, já que os que têm u_t baixo podem sofrer ruptura repentina sem dar nenhum sinal dessa ruptura iminente. Ligas de metais podem mudar sua resiliência e tenacidade. Por exemplo, os diagramas tensão–deformação na Figura 3.17 mostram como os graus de resiliência e tenacidade de um aço podem mudar quando o teor de carbono na liga é alterado.



Módulo de resiliência u_r

(a)



Módulo de tenacidade u_t

(b)

Figura 3.16

PONTOS IMPORTANTES

- Um *diagrama tensão–deformação convencional* é importante na engenharia porque proporciona um meio para obtenção de dados sobre a resistência à tração ou à compressão de um material sem considerar o tamanho ou a forma física do material.
- *Tensão e deformação de engenharia* são calculadas pela área da seção transversal e comprimento de referência *originais* do corpo de prova.
- Um *material dúctil*, como o aço doce, tem quatro comportamentos distintos quando é carregado: *comportamento elástico*, *escoamento*, *endurecimento por deformação* e *estricção*.
- Um material é *linear elástico* se a tensão for proporcional à deformação dentro da região elástica. Essa propriedade é denominada *lei de Hooke*, e a inclinação da curva é denominada *módulo de elasticidade*, E.
- Pontos importantes no diagrama tensão-deformação são o *limite de proporcionalidade*, o *limite de elasticidade*, a *tensão de escoamento*, o *limite de resistência* e *a tensão de ruptura*.
- A *ductilidade* de um material pode ser especificada pela *porcentagem de alongamento* ou pela *porcentagem de redução* da área do corpo de prova.
- Se um material não tiver um ponto de escoamento distinto, pode-se especificar um *limite de escoamento* por meio de um procedimento gráfico como o *método da deformação residual*.
- *Materiais frágeis*, como o ferro fundido cinzento, apresentam pouco ou nenhum escoamento e sofrem ruptura repentina.
- *Endurecimento por deformação* é usado para estabelecer um ponto de escoamento *mais alto* para um material. O material é submetido à deformação além do limite elástico e, então, a carga é retirada. O módulo de elasticidade permanece o mesmo, porém a ductilidade do material *diminui*.
- *Energia de deformação* é a energia armazenada no material por conta de sua deformação. Essa energia por unidade de volume é denominada *densidade de energia de deformação*. Se for medida até o limite de proporcionalidade, é denominada *módulo de resiliência*; se for medida até o ponto de ruptura, é denominada *módulo de tenacidade*.

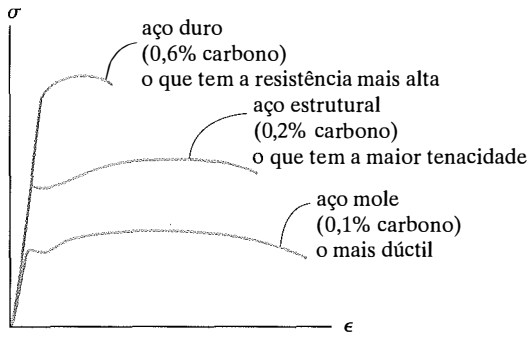


Figura 3.17

EXEMPLO 3.1

Um ensaio de tração para um aço-liga resultou no diagrama tensão–deformação mostrado na Figura 3.18. Calcule o módulo de elasticidade e o limite de escoamento com base em uma deformação residual de 0,2%. Identifique no gráfico o limite de resistência e a tensão de ruptura.

SOLUÇÃO

Módulo de elasticidade. Devemos calcular a *inclinação* da porção inicial em linha reta do gráfico. Pela curva e escala ampliadas, essa reta se estende do ponto O até um ponto estimado A, cujas coordenadas aproximadas são (0,0016 mm/mm, 345 MPa).

Portanto,

$$E = \frac{345 \text{ MPa}}{0{,}0016 \text{ mm/mm}} = 215 \text{ GPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que a equação da reta OA é, portanto, $\sigma = 215(10^3)\epsilon$.

Limite de escoamento. Para uma deformação residual de 0,2%, partimos da deformação de 0,2% ou 0,0020 mm/mm e traçamos, no gráfico, uma reta paralela a OA (tracejada) até interceptar a curva σ–ϵ em A'. O limite de escoamento é aproximadamente

$$\sigma_{le} = 469 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Limite de resistência. Essa tensão é definida pelo pico do gráfico σ–ϵ, ponto B na Figura 3.18.

$$\sigma_r = 745{,}2 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Tensão de ruptura. Quando o corpo de prova é deformado até seu máximo de $\epsilon_{rup} = 0{,}23$ mm/mm, ocorre ruptura no ponto C. Por isso,

$$\sigma_{rup} = 621 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 3.2

O diagrama tensão–deformação para uma liga de alumínio utilizada na fabricação de peças de aeronaves é mostrado na Figura 3.19. Se um corpo de prova desse material for submetido à tensão de tração de 600 MPa, determine a deformação permanente no corpo de prova quando a carga é retirada. Calcule também o módulo de resiliência antes e depois da aplicação da carga.

SOLUÇÃO

Deformação permanente. Quando o corpo de prova é submetido à carga, endurece por deformação até alcançar o ponto B no diagrama σ–ϵ (Figura 3.19). Nesse ponto, a deformação é aproximadamente 0,023 mm/mm. Quando a

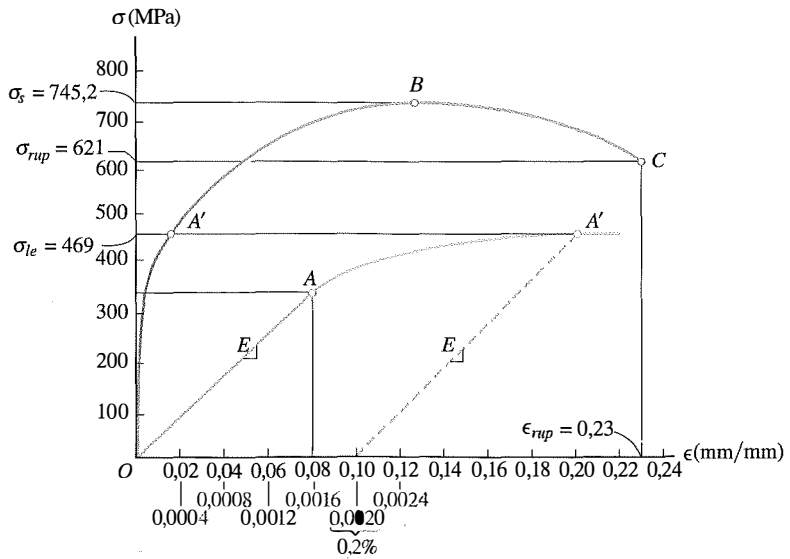


Figura 3.18

carga é retirada, o comportamento do material segue a reta BC, paralela à reta OA. Visto que ambas as retas têm a mesma inclinação, a deformação no ponto C pode ser determinada analiticamente. A inclinação da reta OA é o módulo de elasticidade, isto é,

$$E = \frac{450 \text{ MPa}}{0{,}006 \text{ mm/mm}} = 75{,}0 \text{ GPa}$$

Pelo triângulo CBD, temos que

$$E = \frac{450 \text{ MPa}}{0{,}006 \text{ mm/mm}} = 75{,}0 \text{ GPa}$$

Essa deformação representa a quantidade de *deformação elástica recuperada*. Assim, a deformação permanente, ϵ_{OC}, é

$$\epsilon_{OC} = 0{,}023 \text{ mm/mm} - 0{,}008 \text{ mm/mm} = 0{,}0150 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Se a distância original entre as marcas de referência no corpo de prova era 50 mm, após a *remoção* da carga essa distância será 50 mm + (0,0150)(50 mm) = 50,75 mm.

Módulo de resiliência. Aplicando a Equação 3.8, temos*

$$(u_r)_{\text{início}} = \frac{1}{2}\sigma_{lp}\epsilon_{lp} = \frac{1}{2}(450 \text{ MPa})(0{,}006 \text{ mm/mm}) = 1{,}35 \text{ MJ/m}^3 \qquad \textit{Resposta}$$

$$(u_r)_{\text{fim}} = \frac{1}{2}\sigma_{lp}\epsilon_{lp} = \frac{1}{2}(600 \text{ MPa})(0{,}008 \text{ mm/mm}) = 2{,}40 \text{ MJ/m}^3 \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Por comparação, o endurecimento por deformação no material provocou um aumento no módulo de resiliência; contudo, observe que o módulo de tenacidade para o material diminuiu, visto que a área sob a curva original, $OABF$, é maior que a área sob a curva CBF.

EXEMPLO 3.3

A Figura 3.20a mostra uma haste de alumínio com área de seção transversal circular e sujeita a uma carregamento axial de 10 kN. Se uma porção do diagrama tensão–deformação para o material for a mostrada na Figura 3.20b, determine o valor aproximado do alongamento da haste quando a carga é aplicada. Se a carga for removida, qual é o alongamento permanente da haste? Considere $E_{al} = 70$ GPa.

SOLUÇÃO

Para a análise, desprezaremos as *deformações localizadas* no ponto de aplicação da carga e no local em que a área da seção transversal da haste muda repentinamente. (Esses efeitos serão discutidos nas seções 4.1 e 4.7.) A tensão normal e a deformação normal são uniformes em toda a seção média de cada segmento.

Para estudar a deformação da haste, devemos obter a deformação propriamente dita. Para isso, em primeiro lugar, calculamos a tensão e, em seguida, usamos o diagrama ten-

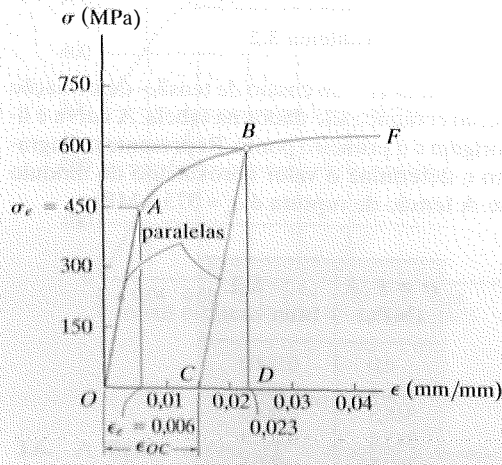


Figura 3.19

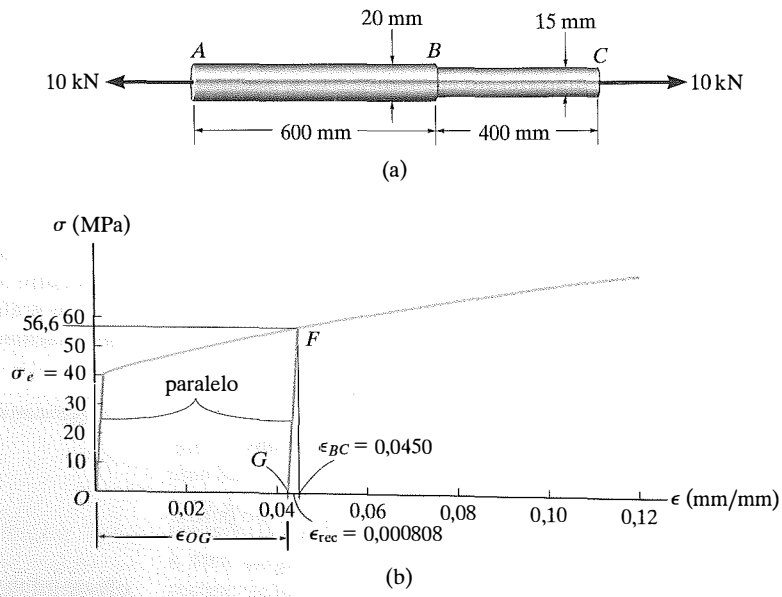


Figura 3.20

* No SI, o trabalho é medido em joules, onde 1 J = 1 N·m.

são–deformação para obter a deformação. A tensão normal no interior de cada segmento é

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi(0{,}01\text{ m})^2} = 31{,}83\text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi(0{,}0075\text{ m})^2} = 56{,}59\text{ MPa}$$

Pelo diagrama tensão–deformação, o material na região AB é deformado *elasticamente,* visto que $\sigma_e = 40\text{ MPa} > 31{,}83\text{ MPa}$. Usando a lei de Hooke,

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31{,}83(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0{,}0004547\text{ mm/mm}$$

O material no interior da região BC é deformado plasticamente, visto que $\sigma_e = 40\text{ MPa} < 56{,}59\text{ MPa}$. Pelo gráfico, para $\sigma_{BC} = 56{,}59\text{ MPa}$,

$$\epsilon_{BC} \approx 0{,}045\text{ mm/mm}$$

O valor aproximado do alongamento da haste é, portanto,

$$\delta = \Sigma\epsilon L = 0{,}0004547(600\text{ mm}) + 0{,}045(400\text{ mm})$$
$$= 18{,}3\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Quando a carga de 10 kN for removida, o segmento AB da haste retornará a seu comprimento original. Por quê? Por outro lado, o material no segmento BC se recuperará elasticamente ao longo da reta FG (Figura 3.20b). Uma vez que a inclinação de FG é E_{al}, a recuperação da deformação elástica é

$$\epsilon_{rec} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{al}} = \frac{56{,}59(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0{,}000808\text{ mm/mm}$$

Então, a deformação plástica remanescente no segmento BC é

$$\epsilon_{OG} = 0{,}0450 - 0{,}000808 = 0{,}0442\text{ mm/mm}$$

Portanto, quando a carga é removida, o alongamento permanente da haste é

$$\delta' = \epsilon_{OG} L_{BC} = 0{,}0442(400\text{ mm}) = 17{,}7\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

3.1. Um cilindro de concreto com 150 mm de diâmetro e 300 mm de comprimento de referência é testado sob compressão. Os resultados do ensaio são apresentados na tabela como carga em relação à contração. Desenhe o diagrama tensão–deformação usando escalas de 10 mm = 2 MPa e 10 mm = $0{,}1(10^{-3})$ mm/mm. Use o diagrama para determinar o módulo de elasticidade aproximado.

Carga (kN)	Contração (mm)
0,0	0,0000
25,0	0,0150
47,5	0,0300
82,5	0,0500
102,5	0,0650
127,5	0,0850
150,0	0,1000
172,5	0,1125
192,5	0,1250
232,5	0,1550
250,0	0,1750
265,0	0,1875

Problema 3.1

3.2. Os dados obtidos em um ensaio de tensão–deformação para um material cerâmico são dados na tabela. A curva é linear entre a origem e o primeiro ponto. Represente o diagrama em gráfico e determine o módulo de elasticidade e o módulo de resiliência.

$\sigma = P/A$ (MPa)	$\epsilon = \delta/L$ (mm/mm)
0,0	0,0000
232,4	0,0006
318,5	0,0010
345,8	0,0014
360,5	0,0018
373,8	0,0022

Problema 3.2

3.3. Os dados obtidos em um ensaio de tensão–deformação para um material cerâmico são dados na tabela. A curva é linear entre a origem e o primeiro ponto. Represente o diagrama em gráfico e determine o valor aproximado do módulo de tenacidade. A tensão de ruptura é $\sigma_r = 373{,}8\text{ MPa}$.

$\sigma = P/A$ (MPa)	$\epsilon = \delta/L$ (mm/mm)
0,0	0,0000
232,4	0,0006
318,5	0,0010
345,8	0,0014
360,5	0,0018
373,8	0,0022

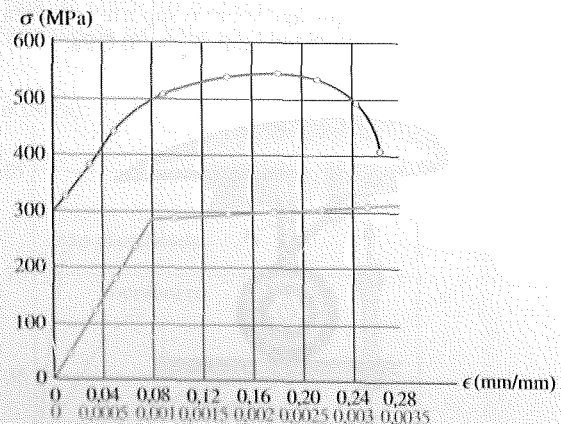
Problema 3.3

*3.4. Um corpo de prova de aço com diâmetro original de 13 mm e 50 mm de comprimento de referência foi submetido a um ensaio de tração. Os dados resultantes são apresentados na tabela. Construa o gráfico do diagrama tensão–deformação e determine os valores aproximados do módulo de elasticidade, da tensão de escoamento, do limite de resistência e da tensão de ruptura. Use uma escala de 10 mm = 209 MPa e 10 mm = 0,05 mm/mm. Desenhe novamente a região elástica usando a mesma escala de tensão, mas use uma escala de deformação de 10 mm = 0,001 mm/mm.

Carga (kN)	Alongamento (mm)
0,0	0,0000
7,5	0,0125
23,0	0,0375
40,0	0,0625
55,0	0,0875
59,0	0,1250
59,0	0,2000
60,0	0,5000
83,0	1,0000
100,0	2,5000
107,5	7,0000
97,5	10,0000
92,5	11,5000

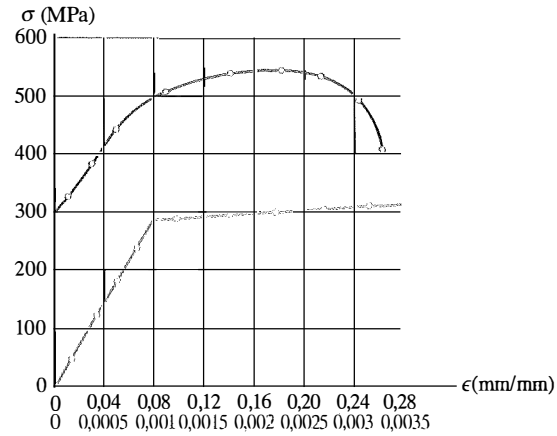
Problema 3.4

3.5. A figura apresenta o diagrama tensão–deformação para um aço-liga com 12 mm de diâmetro original e comprimento de referência 50 mm. Determine os valores aproximados do módulo de elasticidade para o material, a carga aplicada ao corpo de prova que causa escoamento e a carga máxima que o corpo de prova suportará.



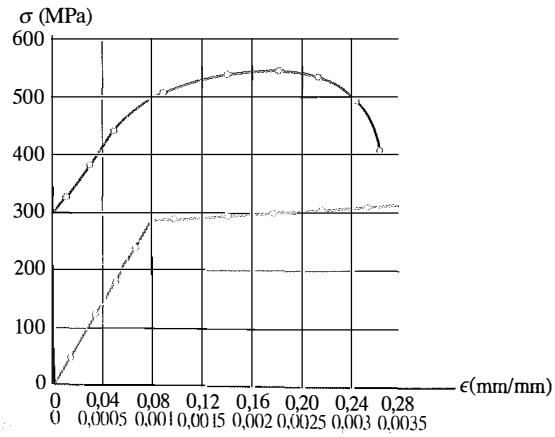
Problema 3.5

3.6. A figura apresenta o diagrama tensão–deformação para um aço-liga com 12 mm de diâmetro original e 50 mm de comprimento de referência. Se o corpo de prova for submetido a carga de tração até 500 MPa, determine o valor aproximado da recuperação elástica e do aumento no comprimento de referência após o descarregamento.



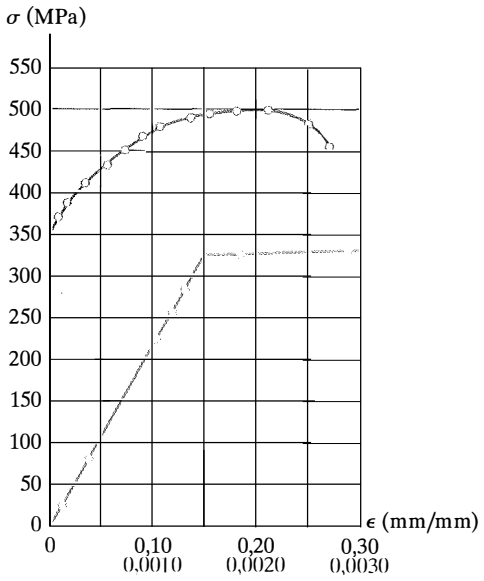
Problema 3.6

3.7. A figura apresenta o diagrama tensão–deformação para um aço-liga com 12 mm de diâmetro original e 50 mm de comprimento de referência. Determine os valores aproximados do módulo de resiliência e do módulo de tenacidade para o material.



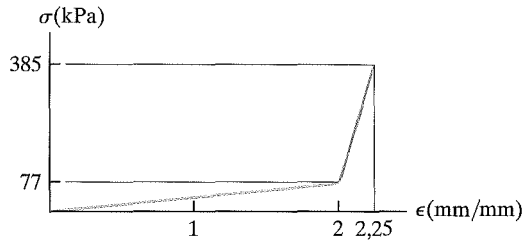
Problema 3.7

*3.8. A figura apresenta o diagrama tensão–deformação de uma barra de aço. Determine os valores aproximados do módulo de elasticidade, limite de proporcionalidade, limite de resistência e módulo de resiliência. Se a barra for submetida a uma carga de tração de 450 MPa, determine o valor da recuperação da deformação elástica e da deformação permanente na barra quando descarregada.



Problema 3.8

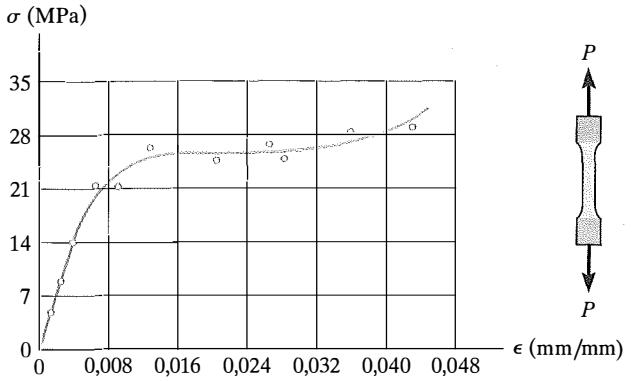
3.9. A figura mostra o diagrama σ–ϵ para as fibras elásticas que compõem a pele e os músculos dos seres humanos. Determine o módulo de elasticidade das fibras e estime os módulos de tenacidade e de resiliência.



Problema 3.9

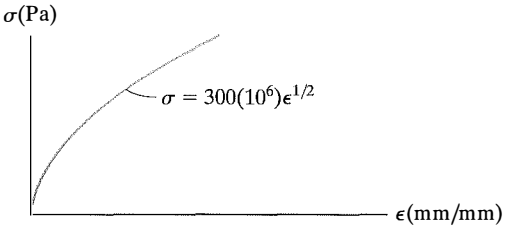
3.10. Uma barra de aço A-36 tem comprimento de 1.250 mm e área da seção transversal de 430 mm². Determine o comprimento da barra se ela for submetida a uma tração axial de 25 kN. O material tem comportamento elástico linear.

3.11. O diagrama tensão–deformação para o polietileno que é utilizado para revestir cabos coaxiais é determinado por um ensaio com um corpo de prova com comprimento de referência de 250 mm. Se uma carga P aplicada ao corpo de prova desenvolver uma deformação $\epsilon = 0{,}024$ mm/mm, determine o valor aproximado do comprimento do corpo de prova medido entre os pontos de referência quando a carga é removida. Considere que o corpo de prova se recupere elasticamente.



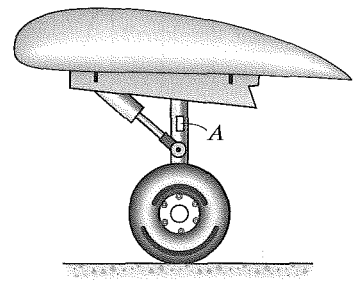
Problema 3.11

***3.12.** A figura mostra o diagrama tensão-deformação para fibra de vidro. Se uma barra de 50 mm de diâmetro e 2 m de comprimento fabricada com esse material for submetida a uma carga de tração axial de 60 kN, determine seu alongamento.



Problema 3.12

3.13. A mudança no peso de um avião é determinada pela leitura de um extensômetro A montado no suporte de alumínio da roda do avião. *Antes* de o avião ser carregado, a leitura do extensômetro no suporte é $\epsilon = 0{,}00100$ mm/mm, ao passo que, após o carregamento, é $\epsilon_2 = 0{,}00243$ mm/mm. Determine a mudança na força que age sobre o suporte se a área da seção transversal dele for 2.200 mm². $E_{al} = 70$ GPa.

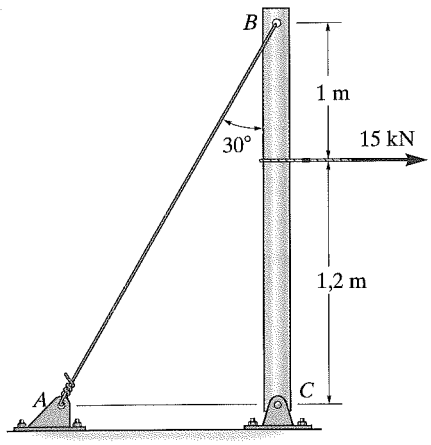


Problema 3.13

3.14. Um corpo de prova com comprimento original de 300 mm tem diâmetro original de 12 mm e é submetido a uma força de 2,5 kN. Quando a força é aumentada para 9 kN, o corpo de prova sofre um alongamento de 22,5 mm. Determine o módulo de elasticidade para o material se ele permanecer elástico.

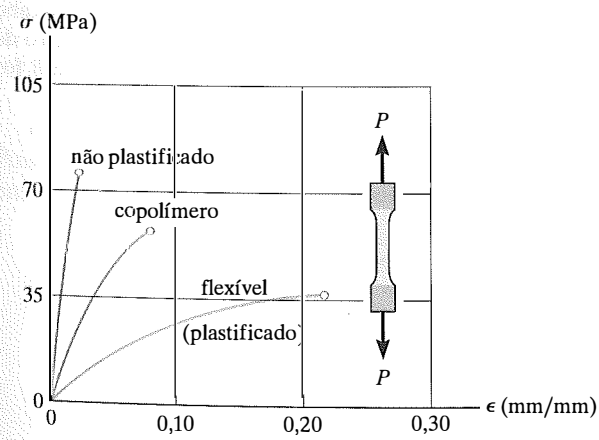
3.15. Um elemento estrutural de um reator nuclear é feito de uma liga de zircônio. Se esse elemento tiver de suportar uma carga axial de 20 kN, determine a área da seção transversal exigida. Use um fator de segurança 3 em relação ao escoamento. Qual é a carga sobre o elemento se ele tiver 1 m de comprimento e seu alongamento for 0,5 mm? $E_{zr} = 100$ GPa, $\sigma_e = 400$ MPa. O material tem comportamento elástico.

***3.16.** O poste é sustentado por um pino em C e por um arame de ancoragem AB de aço A-36. Se o diâmetro do arame for 5 mm, determine quanto ele se deforma quando uma força horizontal de 15 kN agir sobre o poste.



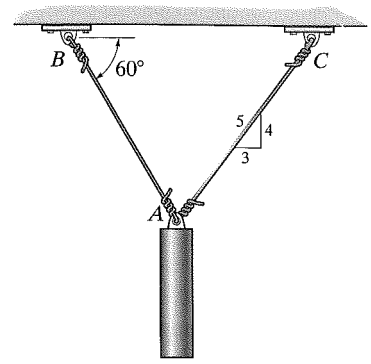
Problema 3.16

3.17. A adição de plastificadores ao cloreto de polivinil provoca a redução de sua rigidez. Os diagramas tensão–deformação apresentados a seguir mostram tal efeito para três tipos desse material. Especifique o tipo que deve ser usado na fabricação de uma haste com 125 mm de comprimento e 50 mm de diâmetro que terá de suportar, no mínimo, uma carga axial de 100 kN e alongar, no máximo, 6 mm.



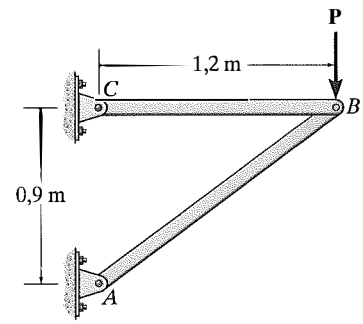
Problema 3.17

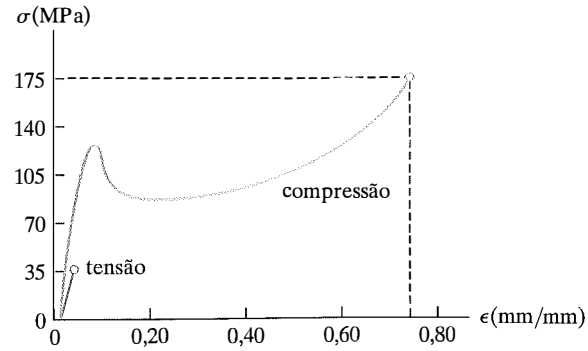
3.18. Os cabos de aço AB e AC sustentam a massa de 200 kg. Se a tensão axial admissível para os cabos for $\sigma_{adm} = 130$ MPa, determine o diâmetro exigido para cada cabo. Além disso, qual é o novo comprimento do cabo AB após a aplicação da carga? Considere que o comprimento não alongado de AB seja 750 mm. $E_{aço} = 200$ GPa.



Problema 3.18

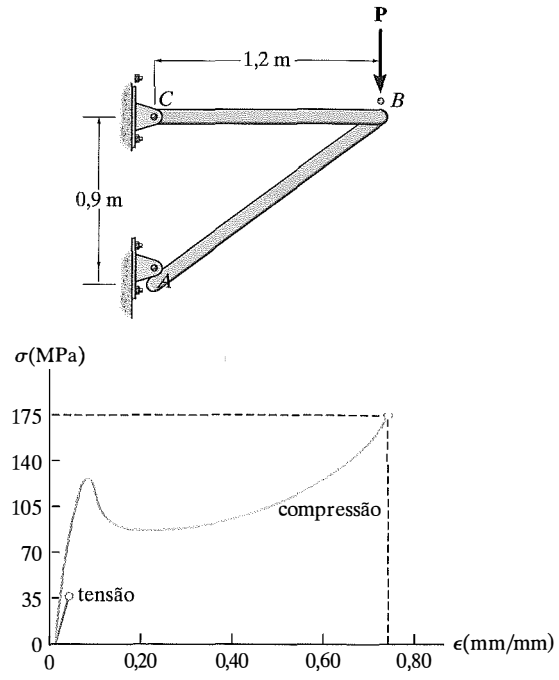
3.19. A figura mostra o diagrama tensão–deformação para duas barras de poliestireno. Se a área da seção transversal da barra AB for 950 mm² e a de BC for 2.500 mm², determine a maior força P que pode ser suportada antes que qualquer dos elementos sofra ruptura. Considere que não ocorre nenhuma flambagem.





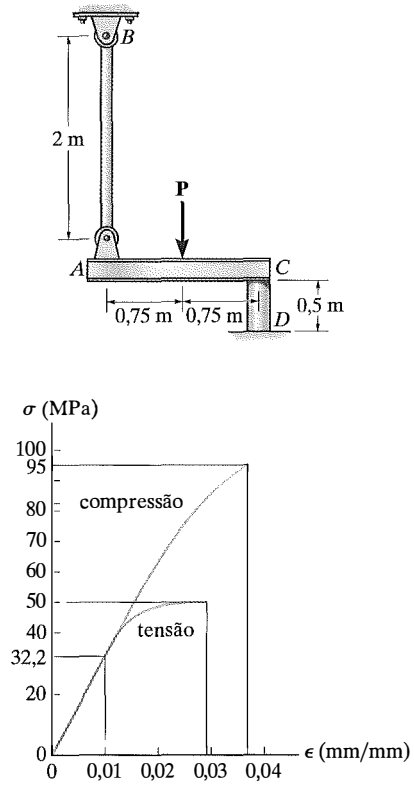
Problema 3.19

***3.20.** A figura mostra o diagrama tensão–deformação de duas barras de poliestireno. Determine a área da seção transversal de cada barra de modo que elas sofram ruptura simultânea quando a carga $P = 15$ kN é aplicada. Considere que não ocorra nenhuma flambagem.



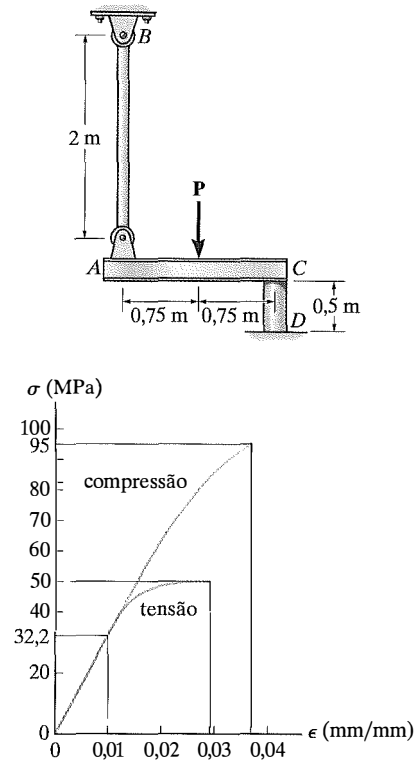
Problema 3.20

3.21. A figura apresenta o diagrama tensão–deformação para uma resina de poliéster. Se a viga rígida for suportada por uma barra AB e um poste CD, ambos feitos desse material, e for submetida à carga $P = 80$ kN, determine o ângulo de inclinação da viga quando a carga for aplicada. O diâmetro da barra é 40 mm, e o diâmetro do poste é 80 mm.



Problema 3.21

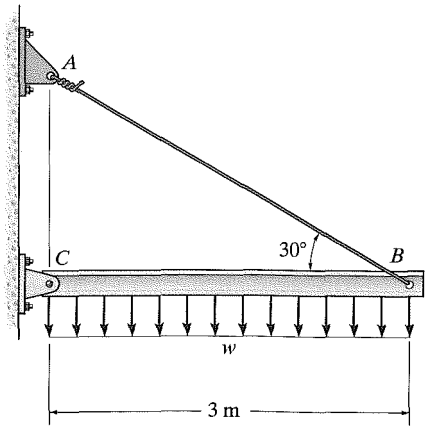
3.22. A figura apresenta o diagrama tensão-deformação para uma resina de poliéster. Se a viga rígida for suportada por uma barra AB e um poste CD, ambos feitos desse material, determine a maior carga P que pode ser aplicada à viga antes da ruptura. O diâmetro da barra é 12 mm, e o diâmetro do poste é 40 mm.



Problema 3.22

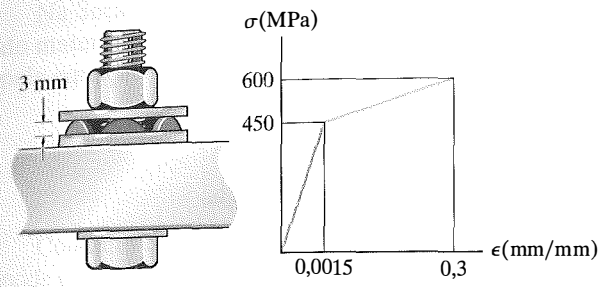
3.23. A viga é sustentada por um pino em C e por um cabo de ancoragem AB de aço A-36. Se o cabo tiver diâmetro de 5 mm, determine quanto ele estica quando um carregamento distribuído $w = 1{,}5$ kN/m agir sobre o tubo. O material permanece elástico.

***3.24.** A viga é sustentada por um pino em C e por um cabo de ancoragem AB de aço A-36. Se o cabo tiver diâmetro de 5 mm, determine o carregamento w se a extremidade B for deslocada 18 mm para baixo.



Problemas 3.23/24

3.25. Às vezes, são instalados indicadores de tração em vez de torquímetros para garantir que um parafuso tenha a tração prescrita quando utilizado em conexões. Se uma porca do parafuso for apertada de tal modo que seis cabeças do indicador, cujas alturas originais eram de 3 mm, forem esmagadas até 0,3 mm, deixando uma área de contato de 1,5 mm^2 em cada cabeça, determine a tensão na haste do parafuso. O diagrama tensão–deformação do material é mostrado na figura.



Problema 3.25

3.6 Coeficiente de Poisson

Quando submetido a uma força de tração axial, um corpo deformável não apenas se alonga, mas também se contrai lateralmente. Por exemplo, se esticarmos uma tira de borracha, podemos notar que a espessura, assim como a largura da tira diminuem. Da mesma forma, uma força de compressão que age sobre um corpo provoca contração na direção da força e, no entanto, seus lados se expandem lateralmente. Esses dois casos são ilustrados na Figura 3.21 para uma barra com comprimento e raio originais r e L, respectivamente.

Quando a carga **P** é aplicada à barra, provoca uma mudança δ no comprimento e δ' no raio da barra. As deformações na direção longitudinal ou axial e na direção lateral ou radial são, respectivamente,

$$\epsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \quad \text{e} \quad \epsilon_{lat} = \frac{\delta'}{r}$$

No início do século XIX, o cientista francês S. D. Poisson percebeu que, dentro da *faixa elástica*, a *razão* entre essas deformações é uma *constante*, visto que δ e δ' são proporcionais. Essa constante é denominada ***coeficiente de Poisson***, ν (nu), e seu valor numérico é único para um determinado material *homogêneo* e *isotrópico*. Em termos matemáticos,

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}} \tag{3.9}$$

Essa expressão tem sinal negativo porque o *alongamento longitudinal* (deformação positiva) provoca *contração lateral* (deformação negativa) e vice-versa. Observe que essa deformação lateral é a *mesma* em todas as direções laterais (ou radiais). Além do mais, ela é causada somente pela força axial ou longitudinal; isto é, nenhuma força ou tensão age em uma direção lateral de modo a deformar o material nessa direção.

O coeficiente de Poisson é *adimensional* e, para a maioria dos sólidos não-porosos, seu valor encontra-se, em geral, entre 1/4 e 1/3. Valores típicos de ν para alguns materiais comuns são apresentados no final deste livro. Um material ideal que não apresente nenhum movimento lateral quando é alongado ou comprimido terá $\nu = 0$. Na Seção 10.6 mostraremos que o valor *máximo* possível para o coeficiente de Poisson é 0,5. Portanto, $0 \leq \nu \leq 0{,}5$.

EXEMPLO 3.4

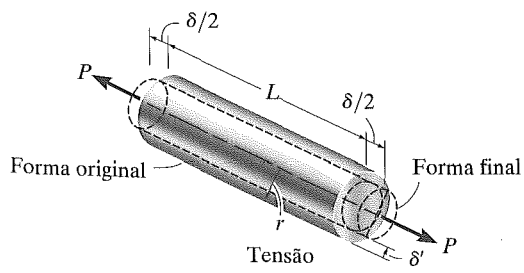
Uma barra de aço A-36 tem as dimensões mostradas na Figura 3.22. Se uma força axial $P = 80$ kN for aplicada à barra, determine a mudança em seu comprimento e a mudança nas dimensões da área de sua seção transversal após a aplicação da carga. O material comporta-se elasticamente.

SOLUÇÃO

A tensão normal na barra é

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{80(10^3)\ \text{N}}{(0{,}1\ \text{m})(0{,}05\ \text{m})} = 16{,}0(10^6)\ \text{Pa}$$

Pela tabela apresentada no final deste livro, para o aço A-36, $E_{aço} = 200$ GPa e, portanto, a deformação na direção z é



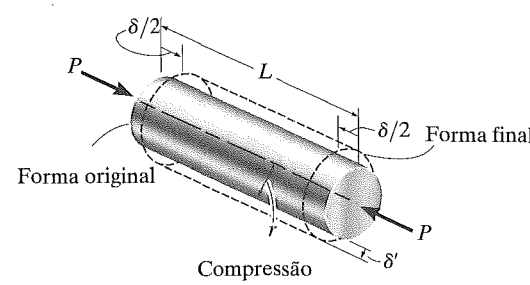


Figura 3.21

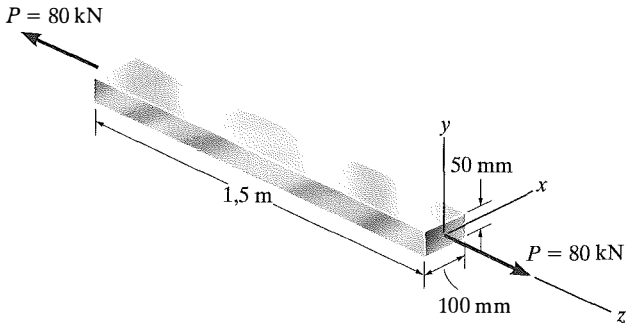


Figura 3.22

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_{aço}} = \frac{16{,}0(10^6)\text{ Pa}}{200(10^9)\text{ Pa}} = 80(10^{-6})\text{ mm/mm}$$

O alongamento axial da barra é, portanto,

$$\delta_z = \epsilon_z L_z = [80(10^{-6})](1{,}5\text{ m}) = 120\ \mu\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Pela Equação 3.9, onde $\nu_{aço} = 0{,}32$, dado encontrado em tabela no final deste livro, as deformações de contração em *ambas* as direções x e y são

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu_{aço}\epsilon_z = -0{,}32[80(10^{-6})] = -25{,}6\ \mu\text{m/m}$$

Assim, as mudanças nas dimensões da seção transversal são

$$\delta_x = \epsilon_x L_x = -[25{,}6(10^{-6})](0{,}1\text{ m}) = -2{,}56\ \mu\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L_y = -[25{,}6(10^{-6})](0{,}05\text{ m}) = -1{,}28\ \mu\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

3.7 O diagrama tensão–deformação de cisalhamento

Na Seção 1.5 mostramos que, quando um elemento do material é submetido a *cisalhamento puro*, o equilíbrio exige que tensões de cisalhamento iguais sejam desenvolvidas nas quatro faces do elemento. Essas tensões devem dirigir-se ou afastar-se de cantos diagonalmente opostos do elemento (Figura 3.23a). Além disso, se o material for *homogêneo* e *isotrópico*, essa tensão de cisalhamento distorcerá o elemento uniformemente (Figura 3.23b). Como mencionamos na Seção 2.2, a deformação por cisalhamento γ_{xy} mede a distorção angular do elemento em relação aos lados que se encontravam, originalmente, ao longo dos eixos x e y.

O comportamento de um material submetido a cisalhamento puro pode ser estudado em laboratório por meio de corpos de prova na forma de tubos finos submetidos a carga de torção. Se o torque aplicado e

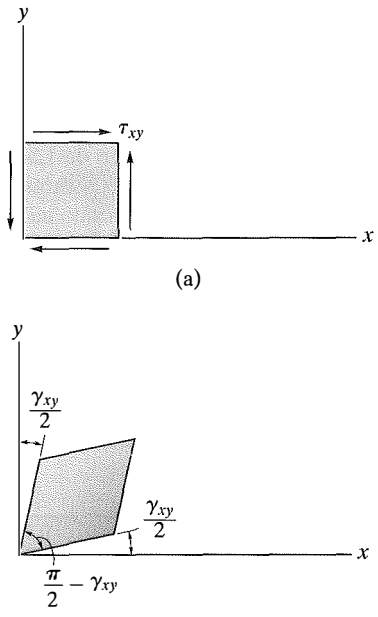


Figura 3.23

os ângulos de torção resultantes forem medidos, então, pelos métodos que explicaremos no Capítulo 5, os dados podem ser usados para determinar a tensão de cisalhamento e a deformação por cisalhamento e para construir um diagrama tensão–deformação de cisalhamento. Um exemplo desse diagrama para um material dúctil é mostrado na Figura 3.24. Como ocorre no ensaio de tração, esse material, quando submetido a cisalhamento, exibe comportamento linear elástico e terá um *limite de proporcionalidade* definido τ_{lp}. Também ocorrerá endurecimento por deformação até que a *tensão de cisalhamento máxima* τ_m seja atingida. Por fim, o material começará a perder sua resistência ao cisalhamento até atingir um ponto no qual sofrerá ruptura, τ_{rup}.

A maioria dos materiais de engenharia, como o que acabamos de descrever, apresentará comportamento elástico *linear* e, portanto, a lei de Hooke para cisalhamento pode ser expressa por

$$\boxed{\tau = G\gamma} \qquad (3.10)$$

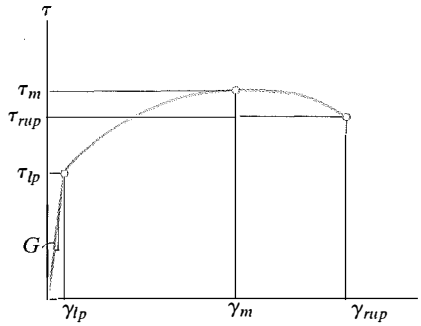


Figura 3.24

Nessa expressão, G é denominado ***módulo de elasticidade ao cisalhamento*** ou módulo de rigidez. Seu valor pode ser medido como a inclinação da reta no diagrama τ–γ, isto é, $G = \tau_{lp}/\gamma_{lp}$. Valores típicos para materiais comuns de engenharia são apresentados no final deste livro. Observe que as unidades de medida de G serão as *mesmas* de E (Pa ou psi), visto que γ é medida em radianos, uma quantidade adimensional.

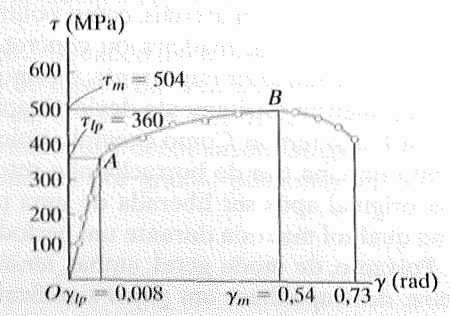
Na Seção 10.6 mostraremos que as três constantes do material, E, ν e G, na realidade, estão *relacionadas* pela equação

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.11}$$

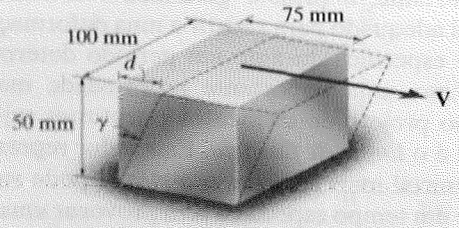
Contanto que E e G sejam conhecidos, o valor de ν pode ser determinado por essa equação, em vez de medições experimentais. Por exemplo, no caso do aço A-36, $E_{aço} = 200$ GPa e $G_{aço} = 76$ GPa; portanto, pela Equação 3.11, $\nu_{aço} = 0{,}32$.

EXEMPLO 3.5

Um corpo de prova de liga de titânio é testado em torção, e a Figura 3.25a mostra o diagrama tensão-deformação de cisalhamento. Determine o módulo de cisalhamento G, o limite de proporcionalidade e o limite de resistência ao cisalhamento. Determine também a máxima distância d de deslocamento horizontal da parte uperior de um bloco desse material, mostrado na Figura 3.25b, se ele se comportar elasticamente quando submetido a uma força de cisalhamento **V**. Qual é o valor de **V** necessário para causar esse deslocamento?



(a)



(b)

Figura 3.25

SOLUÇÃO

Módulo de cisalhamento. Esse valor representa a inclinação da porção em linha reta OA do diagrama τ–γ. As coordenadas do ponto A são (0,008 rad, 360 MPa). Assim,

$$G = \frac{360 \text{ MPa}}{0{,}008 \text{ rad}} = 45(10^3) \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

A equação da reta OA é, portanto, $\tau = 45(10^3)\gamma$, que é a lei de Hooke para cisalhamento.

Limite de proporcionalidade. Por inspeção, o gráfico deixa de ser linear no ponto A. Assim,

$$\tau_{lp} = 360 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Limite de resistência. Esse valor representa a tensão de cisalhamento máxima, ponto B. Pelo gráfico,

$$\tau_m = 504 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Deslocamento elástico máximo e força de cisalhamento. Visto que a máxima deformação elástica por cisalhamento é 0,008 rad, um valor muito pequeno, o deslocamento horizontal da parte superior do bloco na Figura 3.25b será:

$$\tan(0{,}008 \text{ rad}) \approx 0{,}008 \text{ rad} = \frac{d}{50 \text{ mm}} \qquad \textit{Resposta}$$
$$d = 0{,}4 \text{ mm}$$

A tensão de cisalhamento *média* correspondente no bloco é $\tau_{lp} = 360$ MPa. Assim, a força de cisalhamento V necessária para provocar o deslocamento é

$$\tau_{méd} = \frac{V}{A};\ 360 \text{ MPa} = \frac{V}{(75 \text{ mm})(100 \text{ mm})}$$
$$V = 2.700 \text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 3.6

Um corpo de prova de alumínio, mostrado na Figura 3.26, tem diâmetro $d_0 = 25$ mm e comprimento de referência $L_0 = 250$ mm. Se uma força de 165 kN provocar um alongamento de 1,20 mm no comprimento de referência, determine o módulo de elasticidade. Determine também qual é a contração do diâmetro que a força provoca no corpo de prova. Considere $G_{al} = 26$ GPa e $\sigma_e = 440$ MPa.

SOLUÇÃO

Módulo de elasticidade. A tensão normal média no corpo de prova é

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{165(10^3) \text{ N}}{(\pi/4)(0{,}025 \text{ m})^2} = 336{,}1 \text{ MPa}$$

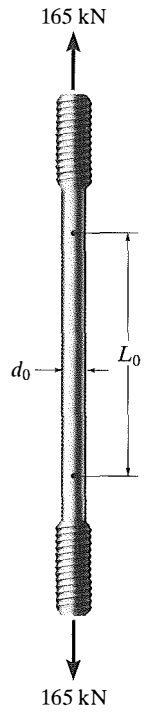


Figura 3.26

e a deformação normal média é

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1{,}20\text{ mm}}{250\text{ mm}} = 0{,}00480\text{ mm/mm}$$

Como $\sigma < \sigma_e = 440$ MPa, o material comporta-se elasticamente. O módulo de elasticidade é

$$E_{al} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{336{,}1(10^6)\text{ Pa}}{0{,}00480} = 70{,}0\text{ GPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Contração do diâmetro. Em primeiro lugar, determinaremos o coeficiente de Poisson para o material, usando a Equação 3.11.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
$$26\text{ GPa} = \frac{70{,}0\text{ GPa}}{2(1+\nu)}$$
$$\nu = 0{,}347$$

Visto que $\epsilon_{compr} = 0{,}00480$ mm/mm, então, pela Equação 3.9,

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$$
$$0{,}347 = \frac{\epsilon_{lat}}{0{,}00480\text{ mm/mm}}$$
$$\epsilon_{lat} = -0{,}00166\text{ mm/mm}$$

A contração do diâmetro é, portanto,

$$\delta' = (0{,}00166)(25\text{ mm})$$
$$= 0{,}0416\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

*3.8 Falha de materiais devida à fluência e à fadiga

Até aqui, as propriedades mecânicas de um material foram discutidas somente para uma carga estática ou aplicada lentamente à temperatura constante. Entretanto, em alguns casos, pode acontecer de um elemento estrutural ser usado em um ambiente no qual tenha de suportar carregamentos por longos períodos a temperaturas elevadas ou, em outros casos, o carregamento pode ser repetitivo ou cíclico. Não consideraremos esses efeitos neste livro, embora mencionemos brevemente como determinar a resistência de um material para essas condições, já que eles recebem tratamento especial no projeto de máquinas e estruturas.

Fluência. Quando um material tem de suportar uma carga por muito tempo, pode continuar a deformar-se até sofrer uma ruptura repentina ou ter sua utilidade prejudicada. Essa deformação permanente dependente do tempo é conhecida como ***fluência***. Normalmente, a fluência é considerada quando metais e materiais cerâmicos são usados em elementos estruturais ou peças mecânicas sujeitos a altas temperaturas. Todavia, para alguns materiais, como polímeros e compósitos — entre eles, madeira ou concreto —, a temperatura *não* é um fator importante; mesmo assim, pode ocorrer fluência estritamente devido à aplicação de carga por longo tempo. Como exemplo típico, considere o fato de uma tira de borracha não retornar à sua forma original após ser liberada de uma posição esticada na qual foi mantida durante um período muito longo. Portanto, de modo geral, ambas, *tensão* e/ou *temperatura,* desempenham um papel significativo na *taxa* de fluência.

Para finalidades práticas, quando a fluência se torna importante, o projeto geralmente considera um material adequado para resistir a uma deformação por fluência específica durante um período determinado. Nesse caso, uma importante propriedade mecânica usada no projeto de elementos estruturais sujeitos à fluência é o *limite de fluência.* Esse valor representa a tensão inicial mais alta que o material pode suportar durante um tempo específico sem provocar uma determinada quantidade de deformação por fluência. Como o limite de fluência varia com a temperatura, o projeto deverá especificar os valores para temperatura, dura-

ção do carregamento e deformação admissível por fluência. Por exemplo, uma deformação por fluência de 0,1% por ano foi sugerida para o aço empregado em parafusos e tubulações e de 0,25% por ano para revestimento de chumbo para cabos.

Há vários métodos para determinar um limite de fluência admissível para um determinado material. Um dos mais simples envolve o teste simultâneo de vários corpos de prova à temperatura constante, mas cada um deles é submetido a uma *tensão axial diferente*. A medição do tempo necessário para se produzir uma deformação admissível ou a deformação de ruptura para cada corpo de prova permite a construção de um gráfico da tensão em relação ao tempo. Normalmente, esses testes são executados durante 1.000 horas, no máximo. A Figura 3.27 mostra um exemplo dos resultados para aço inoxidável à temperatura de 650°C e fluência de deformação prescrita de 1%. Como podemos observar, esse material tem limite de escoamento de 276 MPa à temperatura ambiente (0,2% de deformação residual) e uma resistência à fluência em 1.000 horas de aproximadamente $\sigma_f = 138$ MPa.

Em geral, a resistência à fluência *diminuirá* para *temperaturas mais altas* ou para *tensões aplicadas mais altas*. Para períodos mais longos, é preciso fazer extrapolações nas curvas, o que costuma exigir certa experiência com o comportamento da fluência e algum conhecimento suplementar das propriedades de fluência do material a ser utilizado. Contudo, uma vez determinada a resistência à fluência do material, aplica-se um fator de segurança para obter-se uma tensão admissível adequada para o projeto.

Fadiga. Quando um metal é submetido a *ciclos* repetidos de tensão ou deformação, sua estrutura pode romper-se, o que, por fim, resulta em ruptura. Esse comportamento é denominado ***fadiga*** e, normalmente, é responsável por grande porcentagem de falhas em bielas e virabrequins de motores, pás de turbinas a vapor ou a gás, acoplamentos ou apoios para pontes, rodas e eixos de vagões ferroviários, entre outras peças sujeitas a carregamento cíclico. Em todos esses casos, a ruptura ocorrerá a uma tensão *menor* que a tensão de escoamento do material.

Aparentemente, a natureza dessa falha resulta do fato de haver regiões microscópicas, geralmente na superfície de um elemento, onde a tensão localizada se torna *muito maior* do que a tensão média que age na seção transversal como um todo. Como essa tensão mais alta é cíclica, leva à formação de minúsculas trincas. A ocorrência dessas trincas provoca aumento adicional da tensão em suas extremidades ou bordas, o que, por sua vez, provoca aumento adicional da extensão das trincas no material com a contínua aplicação da tensão cíclica. A certa altura, a área da seção transversal do elemento reduz-se a um ponto no qual não se pode mais suportar a carga, e o resultado é a ocorrência de ruptura repentina. O material, ainda que considerado dúctil, comporta-se como se fosse *frágil*.

Para especificar uma resistência segura para um material metálico sob carga repetida, é necessário determinar um limite abaixo do qual nenhuma evidência de falha possa ser detectada após a aplicação de uma carga durante um número específico de ciclos. Essa tensão-limite é denominada *limite de fadiga*. Usando uma máquina de ensaio adequada para tal finalidade, vários corpos de prova são submetidos a uma tensão cíclica específica até falharem. Os resultados são marcados em um gráfico no qual a tensão S (ou σ) é a ordenada e o número de ciclos até a falha, N, é a abscissa. Esse gráfico é denominado *diagrama S–N* ou *diagrama tensão–ciclo* e, na maioria das vezes, os valores de N são marcados em uma escala logarítmica, já que, em geral, são muito grandes.

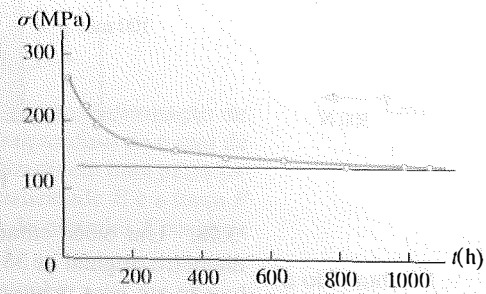


Diagrama σ–t para aço inoxidável a 650°C e deformação por fluência de 1%

Figura 3.27

Exemplos de diagramas *S–N* para dois materiais comuns de engenharia são mostrados na Figura 3.28. O limite de fadiga é a tensão à qual o gráfico *S–N* se torna horizontal ou assintótico. Como podemos observar, ele tem um valor bem definido $(S_{lf})_{aço} = 186$ MPa para o aço. Entretanto, para o alumínio, o limite de fadiga não é bem definido e, por isso, é normalmente especificado como a tensão $(S_{lf})_{al} = 131$ MPa para um limite de 500 milhões de ciclos. Valores típicos de limites de fadiga para vários materiais de engenharia geralmente são encontrados em manuais. Uma vez obtido um determinado valor, considera-se que a vida útil em relação à fadiga é infinita para qualquer tensão abaixo desse valor, e, portanto, o número de ciclos até a falha não é mais levado em consideração.

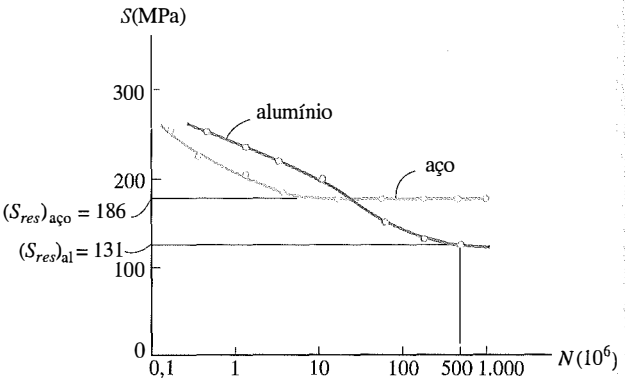


Diagrama *S–N* para ligas de aço e alumínio (o eixo *N* tem escala logarítmica)

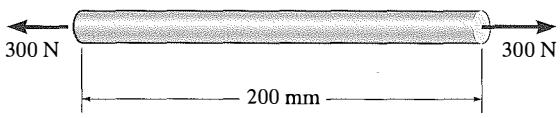
Figura 3.28

PONTOS IMPORTANTES

- *Coeficiente de Poisson*, ν, é uma medida da deformação lateral de um material homogêneo e isotrópico em relação à sua deformação longitudinal. De modo geral, essas deformações têm sinais opostos, isto é, se uma delas for um alongamento, a outra será uma contração.
- O *diagrama tensão–deformação de cisalhamento* é um gráfico da tensão de cisalhamento em relação à deformação por cisalhamento. Se o material for homogêneo e isotrópico e também linear elástico, a inclinação da curva dentro da região elástica é denominada módulo de rigidez ou módulo de cisalhamento, *G*.
- Existe uma relação matemática entre *G*, *E* e ν.
- *Fluência* é a deformação de um material relacionada ao tempo no qual a tensão e/ou temperatura desempenham um importante papel. Elementos estruturais são projetados para resistir aos efeitos da fluência com base em seu limite de fluência, que é a tensão inicial mais alta que um material pode suportar durante um período específico sem provocar uma deformação por fluência também específica.
- *Fadiga* ocorre em metais quando a tensão ou deformação é cíclica. Provoca a ocorrência de ruptura frágil. Elementos estruturais são projetados para resistir à fadiga assegurando que a tensão no elemento não ultrapasse seu *limite de resistência* ou *limite de fadiga*. Esse valor é determinado em um diagrama *S–N* como a máxima tensão à qual o elemento pode resistir quando submetido a um número determinado de ciclos de carregamento.

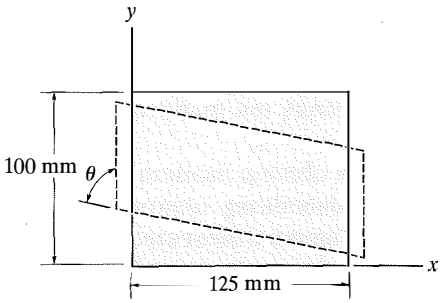
PROBLEMAS

3.26. A haste plástica de acrílico tem 200 mm de comprimento e 15 mm de diâmetro. Se uma carga axial de 300 N for aplicada a ela, determine a mudança em seu comprimento e em seu diâmetro. $E_p = 2{,}70$ GPa, $\nu_p = 0{,}4$.



Problema 3.26

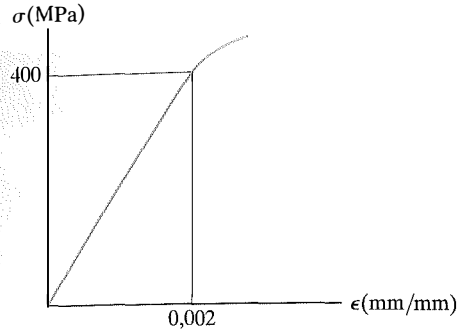
3.27. O bloco é feito de titânio Ti-6A1-4V. É submetido a uma compressão de 1,5 mm ao longo do eixo *y*, e sua forma sofre uma inclinação de $\theta = 89{,}7°$. Determine ϵ_x, ϵ_y e ϵ_{xy}.



Problema 3.27

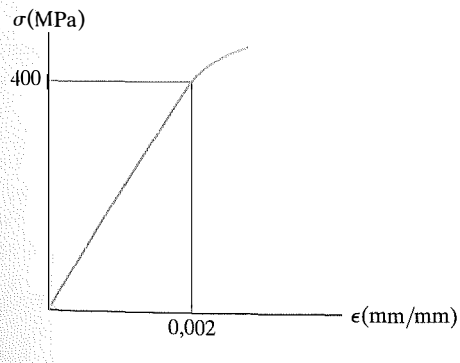
*__3.28.__ Um bloco cilíndrico curto de bronze C86.100, com diâmetro original de 38 mm e comprimento de 75 mm, é colocado em uma máquina de compressão e comprimido até atingir o comprimento de 74,5 mm. Determine o novo diâmetro do bloco.

3.29. A figura mostra a porção elástica do diagrama tensão-deformação para um aço-liga. O corpo de prova do qual ela foi obtida tinha diâmetro original de 13 mm e comprimento de referência de 50 mm. Quando a carga aplicada ao corpo de prova for 50 kN, o diâmetro é 12,99265 mm. Determine o coeficiente de Poisson para o material.



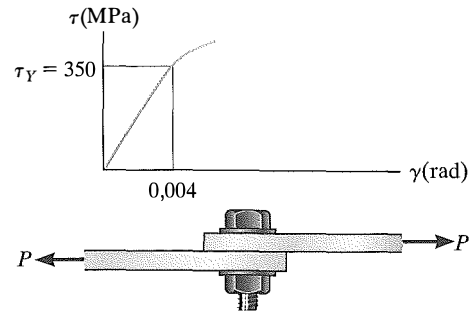
Problema 3.29

3.30. A figura mostra a porção elástica do diagrama tensão–deformação para um aço-liga. O corpo de prova do qual ela foi obtida tinha diâmetro original de 13 mm e comprimento de referência de 50 mm. Se uma carga $P = 20$ kN for aplicada ao corpo de prova, determine seu diâmetro e comprimento de referência. Considere $\nu = 0,4$.



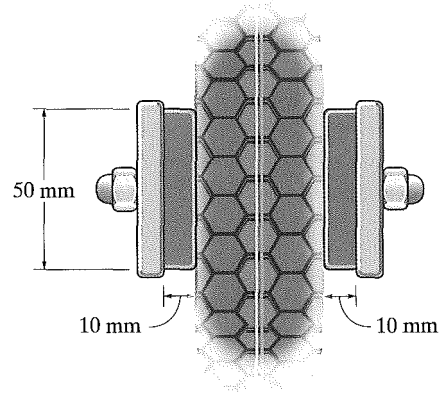
Problema 3.30

3.31. A figura mostra o diagrama tensão–deformação de cisalhamento para um aço-liga. Se um parafuso de 6 mm de diâmetro feito desse material for utilizado em uma junta sobreposta, determine o módulo de elasticidade E e a força P exigida para provocar o escoamento do material. Considere $\nu = 0,3$.



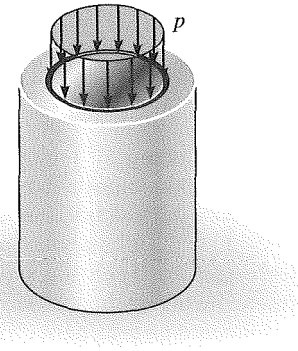
Problema 3.31

*__3.32.__ As sapatas do freio do pneu de uma bicicleta são feitas de borracha. Se uma força de atrito de 50 N for aplicada de cada lado dos pneus, determine a deformação por cisalhamento média na borracha. As dimensões da seção transversal de cada sapata são 20 mm e 50 mm. $G_b = 0,20$ MPa.



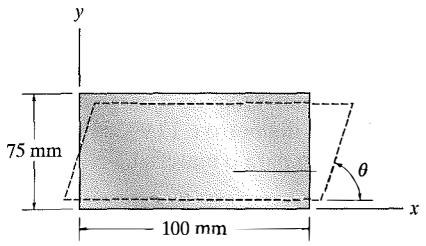
Problema 3.32

3.33. O tampão tem diâmetro de 30 mm e ajusta-se ao interior de uma luva rígida com diâmetro interno de 32 mm. Ambos, tampão e luva, têm 50 mm de comprimento. Determine a pressão axial p que deve ser aplicada à parte superior do tampão para que ele entre em contato com as laterais da luva. Determine também a que distância o tampão deve ser comprimido para baixo para que isso aconteça. O material do tampão tem $E = 5$ MPa e $\nu = 0,45$.



Problema 3.33

3.34. O bloco de borracha é submetido a um alongamento de 0,75 mm ao longo do eixo x, e suas faces verticais sofrem uma inclinação de modo que $\theta = 89{,}3°$. Determine as deformações ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy}. Considere $\nu_b = 0{,}5$.



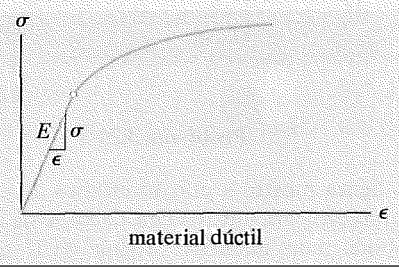
Problema 3.34

Revisão do capítulo

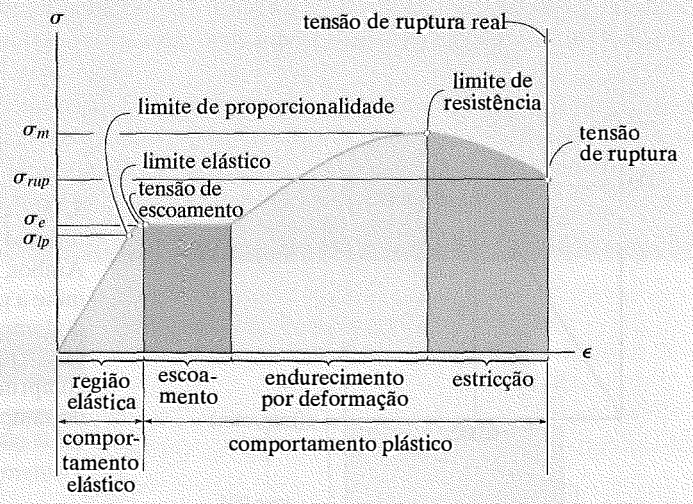
Um dos testes mais importantes para a resistência de um material é o ensaio de tração. Os resultados obtidos com a aplicação de uma força de tração a um corpo de prova de tamanho conhecido são representados em um gráfico no qual a tensão normal é marcada no eixo vertical e a deformação normal é marcada no eixo horizontal.

Muitos materiais de engenharia exibem comportamento inicial linear elástico, pelo qual a tensão é proporcional à deformação, definida pela lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Nesta expressão, E, denominado módulo de elasticidade, é a inclinação dessa reta no diagrama tensão-deformação.

$$\sigma = E\epsilon$$



Quando o material sofre tensão além do ponto de escoamento, ocorre deformação permanente. O aço, particularmente, tem uma região de escoamento na qual o material exibe um aumento na deformação, mas nenhum aumento na tensão. A região de endurecimento por deformação provoca escoamento adicional do material com um aumento correspondente na tensão. No limite de resistência, uma região localizada no corpo de prova começa a sofrer uma constrição, denominada estricção. É nesse local onde, finalmente, ocorre a ruptura.

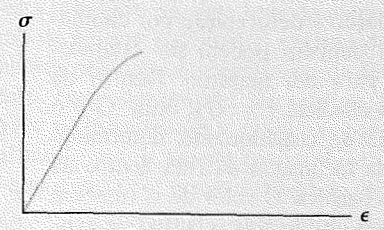


Materiais dúcteis, como a maioria dos metais, exibem comportamento elástico e plástico. A madeira é moderadamente dúctil. Geralmente, a ductilidade é especificada pelo alongamento permanente até a falha ou pela redução permanente na área da seção transversal.

$$\text{Porcentagem de alongamento} = \frac{L_f - L_0}{L_0}(100\%)$$

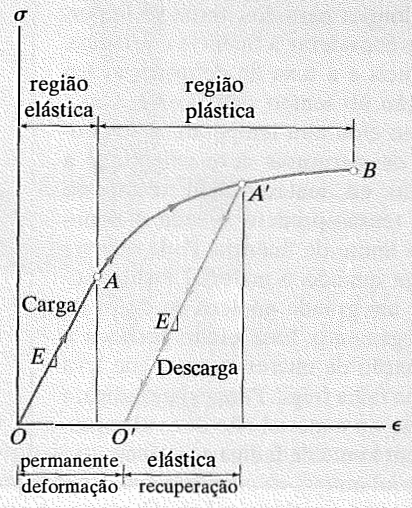
$$\text{Porcentagem de redução de área} = \frac{A_0 - A_f}{A_0}(100\%)$$

Materiais frágeis exibem pouco ou nenhum escoamento antes da falha. Ferro fundido e vidro são exemplos típicos. Além disso, o concreto é frágil sob tração.

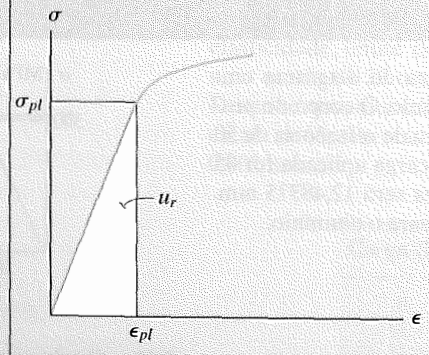


Material frágil

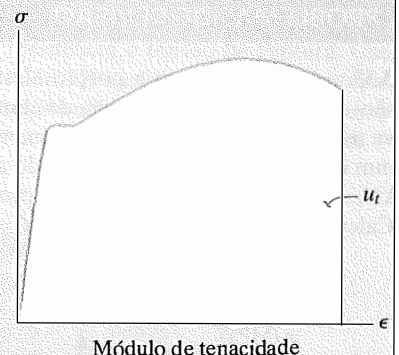
O ponto de escoamento de um material pode ser elevado por endurecimento por deformação, o que se consegue pela aplicação de uma carga grande o suficiente para provocar um aumento na tensão de modo a causar escoamento e, em seguida, liberando a carga. A maior tensão produzida torna-se o novo ponto de escoamento para o material.



Quando uma carga é aplicada a um elemento estrutural, as deformações provocam armazenamento de energia de deformação no material. A energia de deformação por unidade de volume ou densidade de energia de deformação é equivalente à área sob a curva do diagrama tensão–deformação. Até o ponto de escoamento, essa área é denominada módulo de resiliência. A área inteira sob o diagrama tensão–deformação é denominada módulo de tenacidade.



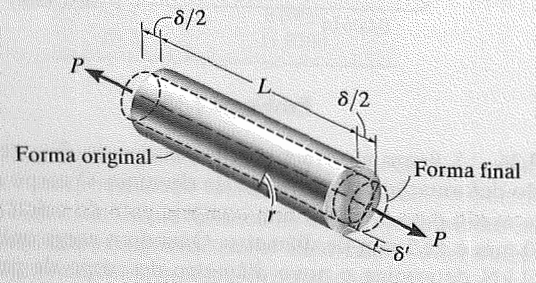
Módulo de resiliência

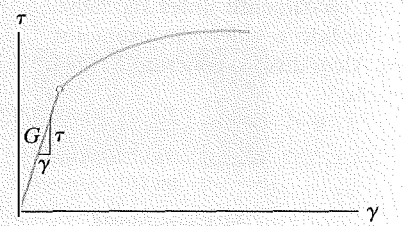


Módulo de tenacidade

O coeficiente de Poisson ν é uma propriedade adimensional do material. Ele mede a relação entre a deformação lateral e a deformação longitudinal. Sua faixa de valores é $0 < \nu \leq 0{,}5$.

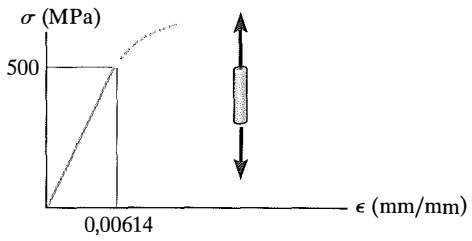
$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$$



Diagramas de tensão de cisalhamento em relação à deformação por cisalhamento também podem ser estabelecidos para um material. Dentro da região elástica, $\tau = G\gamma$, onde G é o módulo de cisalhamento, determinado pela inclinação da reta dentro da região elástica. O valor de G também pode ser obtido pela relação que existe entre G, E e ν.	$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$	
Quando materiais estão em serviço por longos períodos, torna-se importante considerar a fluência e a fadiga. Fluência é a taxa de deformação em relação ao tempo que ocorre a alta tensão e/ou alta temperatura. O projeto de estruturas deve exigir que a tensão no material não ultrapasse uma tensão predeterminada denominada limite de fluência. Pode ocorrer fadiga quando o material é submetido a um grande número de ciclos de carregamento. Esse efeito provoca a formação de microtrincas, o que leva a uma falha frágil. Para evitar fadiga, a tensão no material não deve ultrapassar um limite de fadiga específico.		

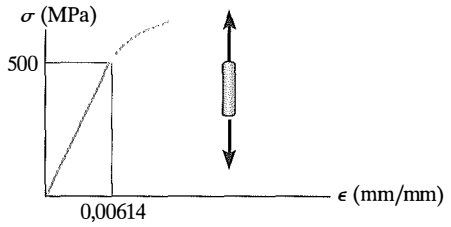
PROBLEMAS DE REVISÃO

3.35. A figura mostra a porção elástica do diagrama tensão–deformação para uma liga de alumínio. O corpo de prova usado para o ensaio tem comprimento de referência de 50 mm e 12,5 mm de diâmetro. Quando a carga aplicada for 45 kN, o novo diâmetro do corpo de prova será 12,48375 mm. Calcule o módulo de cisalhamento G_{al} para o alumínio.



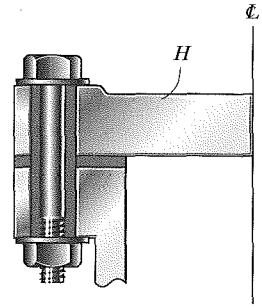
Problema 3.35

*__3.36.__ A figura mostra a porção elástica do diagrama tensão-deformação para uma liga de alumínio. O corpo de prova usado para o ensaio tem comprimento de referência de 50 mm e 12,5 mm de diâmetro. Quando a carga aplicada é 50 kN, determine o novo diâmetro do corpo de prova. O módulo de cisalhamento é G_{al} = 28 GPa.



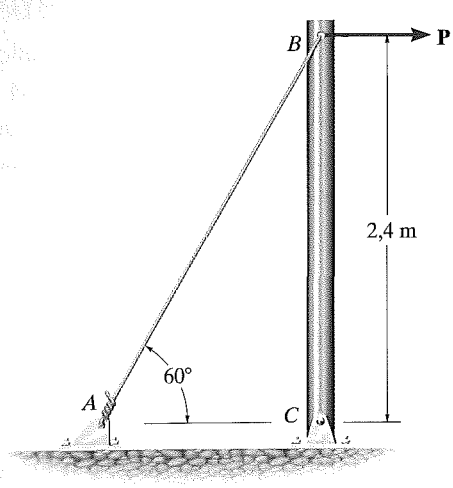
Problema 3.36

3.37. O cabeçote H está acoplado ao cilindro de um compressor por seis parafusos de aço. Se a força de aperto de cada parafuso for 4 kN, determine a deformação normal nos parafusos. Cada um deles tem 5 mm de diâmetro. Se σ_e = 280 MPa e $E_{aço}$ = 200 GPa, qual é a deformação em cada parafuso quando a porca é desatarraxada, aliviando, assim, a força de aperto?



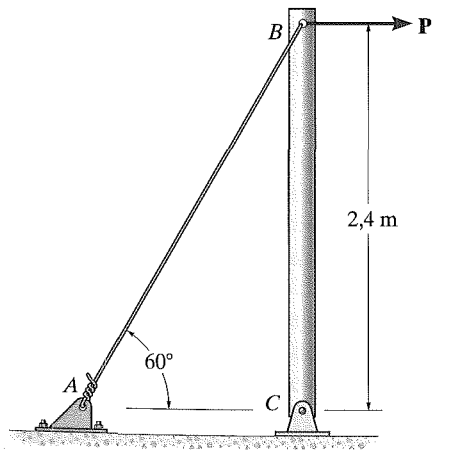
Problema 3.37

3.38. O tubo rígido é sustentado por um pino em C e um cabo de ancoragem AB de aço A-36. Se o diâmetro do cabo for 5 mm, determine o quanto ele é esticado quando uma carga $P = 1{,}5$ kN age sobre o tubo. O material permanece elástico.



Problema 3.38

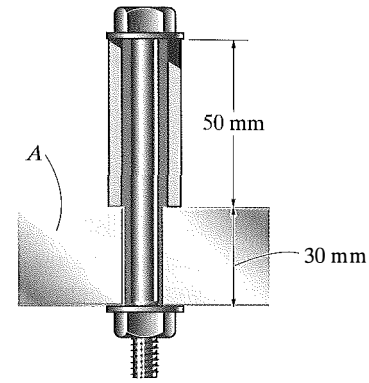
3.39. O tubo rígido é sustentado por um pino em C e um cabo de ancoragem AB de aço A-36. Se o diâmetro do cabo for 5 mm, determine a carga P se a extremidade B for deslocada 2,5 mm para a direita.



Problema 3.39

***3.40.** Ao ser submetido a um ensaio de tração, um corpo de prova de liga de cobre com comprimento de referência de 50 mm sofre uma deformação de 0,40 mm/mm quando a tensão é de 490 MPa. Se $\sigma_e = 315$ MPa quando $\epsilon_e = 0{,}0025$ mm/mm, determine a distância entre os pontos de referência quando a carga é aliviada.

3.41. O parafuso de 8 mm de diâmetro é feito de uma liga de alumínio e está instalado em uma luva de magnésio com diâmetro interno de 12 mm e diâmetro externo de 20 mm. Se os comprimentos originais do parafuso e da luva forem 80 mm e 50 mm, respectivamente, determine as deformações na luva e no parafuso se a porca do parafuso for apertada de tal modo que a tensão no parafuso seja de 8 kN. Considere que o material em A é rígido. $E_{al} = 70$ GPa, $E_{mg} = 45$ GPa.



Problema 3.41

3.42. Um corpo de prova de aço com diâmetro original de 12,5 mm e comprimento de referência de 50 mm foi submetido a um ensaio de tração. Os dados resultantes do teste são apresentados na tabela. Construa o diagrama tensão–deformação e determine os valores aproximados do módulo de elasticidade, limite de resistência e tensão de ruptura. Use uma escala de 20 mm = 50 MPa e 20 mm = 0,05 mm/mm. Desenhe novamente a região elástica linear usando a mesma escala de tensão, mas uma escala de deformação de 20 mm = 0,001 mm/mm.

Carga (kN)	Alongamento (mm)
0	0
11,1	0,0175
31,9	0,0600
37,8	0,1020
40,9	0,1650
43,6	0,2490
53,4	1,0160
62,3	3,0480
64,5	6,3500
62,3	8,8900
58,8	11,9380

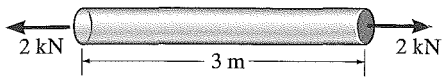
Problema 3.42

3.43. Um corpo de prova de aço com diâmetro original de 12,5 mm e comprimento de referência de 50 mm foi submetido a um ensaio de tração. Usando os dados apresentados na tabela, construa o diagrama tensão–deformação e determine o valor aproximado do módulo de tenacidade. Use uma escala de 20 mm = 50 MPa e 20 mm = 0,05 mm/mm.

Carga (kN)	Alongamento (mm)
0	0
11,1	0,0175
31,9	0,0600
37,8	0,1020
40,9	0,1650
43,6	0,2490
53,4	1,0160
62,3	3,0480
64,5	6,3500
62,3	8,8900
58,8	11,9380

Problema 3.43

***3.44.** Uma haste de latão de 8 mm de diâmetro tem módulo de elasticidade E_{lat} = 100 GPa. Se a haste tiver 3 m de comprimento e for submetida a uma carga axial de 2 kN, determine seu alongamento. Qual será o alongamento se o diâmetro for 6 mm?



Problema 3.44

4 Carga axial

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

No Capítulo 1, desenvolvemos o método para determinar a tensão normal em elementos carregados axialmente. Neste capítulo, discutiremos como determinar a deformação desses elementos e desenvolveremos um método para determinar as reações nos apoios quando tais reações não puderem ser determinadas estritamente pelas equações de equilíbrio. Também discutiremos uma análise dos efeitos da tensão térmica, concentrações de tensão, deformações inelásticas e tensão residual.

4.1 Princípio de Saint-Venant

Nos capítulos anteriores, desenvolvemos o conceito de *tensão* como um meio para medir a distribuição de força no interior de um corpo e o conceito de *deformação* como um meio para medir a deformação geométrica de um corpo. Também mostramos que a relação matemática entre tensão e deformação depende do tipo de material do qual o corpo é feito. Em particular, se o material se comportar de maneira linear elástica, a lei de Hooke será aplicável e haverá uma relação proporcional entre tensão e deformação.

Com essa ideia em mente, considere o modo como uma barra retangular se deforma elasticamente quando submetida a uma força **P** aplicada ao longo do eixo de seu centroide (Figura 4.1a). Nesta figura, a barra está presa a um apoio em uma de suas extremidades, e a força é aplicada em um furo na outra extremidade. Devido ao carregamento, a barra deforma-se como indicam as distorções das linhas da grade desenhada sobre a barra, que antes eram horizontais e verticais. Observe a *deformação localizada* que ocorre em cada extremidade. Esse efeito tende a *diminuir* conforme as medições são feitas cada vez mais distante das extremidades. Além disso, as deformações vão se nivelando e tornam-se uniformes em toda a seção média da barra.

Visto que a deformação está relacionada com a tensão no interior da barra, podemos afirmar que a tensão será distribuída mais uniformemente por toda a área da seção transversal se um corte for feito em uma seção distante do ponto onde a carga externa é aplicada. Por exemplo, considere um perfil da variação da distribuição de tensão que age nas seções *a–a*, *b–b* e *c–c*, cada uma mostrada na Figura 4.1b. Comparando as curvas, a tensão *quase* alcança um valor uniforme na seção *c–c*, que está suficientemente afastada da extremidade. Em outras palavras, a seção *c–c* está longe o suficiente do ponto de aplicação de **P**, de tal modo que a deformação localizada provocada por **P** *seja desprezível*. A distância mínima em relação à extremidade da barra onde isso ocorre pode ser determinada por meio de uma análise matemática baseada na teoria da elasticidade.

Todavia, como *regra geral*, que também se aplica a muitos outros casos de carregamento e geometria de elementos estruturais, podemos considerar que essa distância é, no mínimo, igual à *maior dimensão* da seção transversal carregada. Em consequência, no caso da barra na Figura 4.1b, a seção *c–c* deve estar localizada a uma distância no mínimo igual à largura (e não à espessura) da barra.* Essa regra se baseia na *observação experimental do comportamento do material*, e somente em casos especiais, como o que acabamos de discutir, ela foi validada matematicamente. Entretanto, devemos observar que essa regra não se aplica a todos os tipos de elementos e casos de carregamento. Por exemplo, elementos estruturais de paredes finas submetidos a carregamentos que provocam grandes deflexões podem criar tensões e deformações localizadas que têm influência a uma distância considerável do ponto de aplicação da carga.

Observe, na Figura 4.1a, como o apoio impede a redução da largura da barra, o que deveria ocorrer devido ao alongamento lateral da barra — uma consequência do "efeito de Poisson", discutido na Seção 3.6. Contudo, por esse mesmo argumento, poderíamos demonstrar que a distribuição de tensão no apoio também se nivelará e se tornará uniforme em toda a seção transversal a uma curta distância do apoio; e mais, a amplitude da força resultante criada por essa distribuição de tensão deve ser também igual a *P*.

O fato de a tensão e a deformação comportarem-se dessa maneira é denominado *princípio de Saint-Venant*, visto que foi observado pela primeira vez pelo cientista francês Barré de Saint-Venant, em 1855. Em essência, esse princípio afirma que a tensão e a deformação produzidas em pontos de um corpo suficientemente distantes

* Quando a seção *c–c* está localizada dessa maneira, a teoria da elasticidade prevê que a tensão máxima será $\sigma_{máx} = 1{,}02\ \sigma_{méd}$.

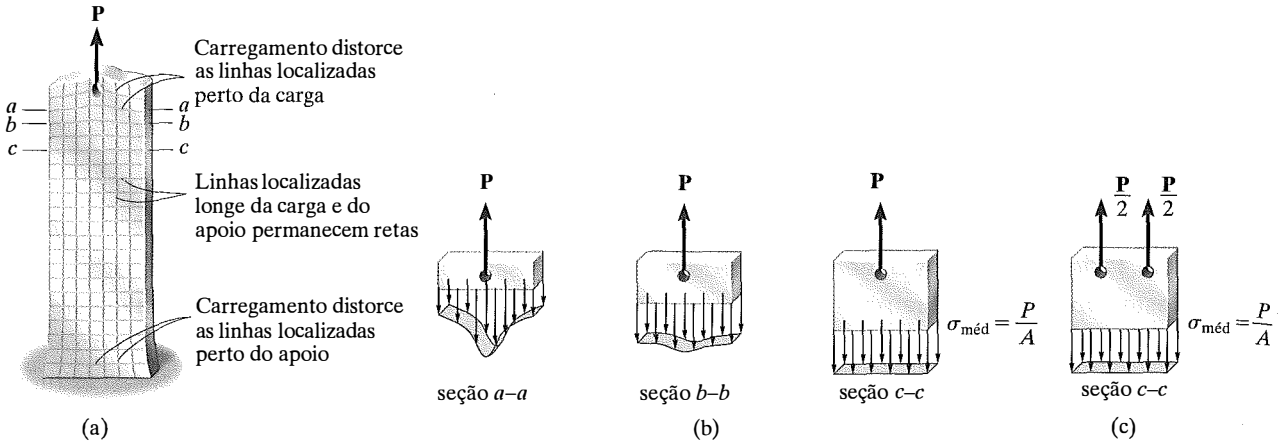


Figura 4.1

da região da aplicação da carga serão *iguais* à tensão e à deformação produzidas por *quaisquer carregamentos aplicados* que tenham a mesma resultante estaticamente equivalente e sejam aplicados ao corpo dentro da mesma região. Por exemplo, se duas forças $P/2$ aplicadas simetricamente agirem sobre a barra (Figura 4.1c), a distribuição de tensão na seção c–c, que é suficientemente afastada dos efeitos localizados dessas cargas, será uniforme e, portanto, equivalente a $\sigma_{méd} = P/A$ como antes.

Então, resumindo, não temos mais de considerar as distribuições de tensão um tanto complexas que podem realmente se desenvolver nos pontos de aplicação de carga ou em apoios, quando estudarmos a distribuição de tensão em um corpo em seções *suficientemente afastadas* dos pontos de aplicação de carga. O princípio de Saint-Venant afirma que os efeitos localizados causados por qualquer carga que age sobre um corpo serão dissipados ou atenuados em regiões suficientemente afastadas do ponto de aplicação da carga. Além do mais, a distribuição de tensão resultante nessas regiões será a *mesma* que a causada por qualquer outra carga estaticamente equivalente aplicada ao corpo dentro da mesma área localizada.

4.2 Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial

Usando a lei de Hooke e as definições de tensão e deformação, desenvolveremos, agora, uma equação que pode ser usada para determinar a deformação elástica de um elemento submetido a cargas axiais. Para generalizar o desenvolvimento, considere a barra mostrada na Figura 4.2a, cuja área de seção transversal varia *gradativamente* ao longo de seu comprimento L. A barra está sujeita a cargas concentradas em suas extremidades e a uma carga externa variável distribuída ao longo de seu comprimento. Essa carga distribuída poderia, por exemplo, representar o peso de uma barra vertical ou forças de atrito que agem sobre a superfície da barra. Aqui, queremos determinar o ***deslocamento relativo*** δ (delta) de uma das extremidades da barra em relação à outra extremidade, causada por esse carregamento. Na análise a seguir, desprezaremos as deformações localizadas que ocorrem em pontos de carregamento concentrado e nos locais em que a seção transversal muda repentinamente. Como observamos na Seção 4.1, esses efeitos ocorrem no interior de pequenas regiões do comprimento da barra e, portanto, terão somente um leve efeito sobre o resultado final. Na maioria dos casos, a barra se deformará uniformemente, de modo que a tensão normal será uniformemente distribuída na seção transversal.

Usando o método das seções, isolamos um elemento diferencial da barra de comprimento dx e área de seção transversal $A(x)$ em uma posição arbitrária x. O diagrama de corpo livre desse elemento é mostrado na Figura 4.2b. A força axial interna resultante é representada por $P(x)$, já que o carregamento externo fará com que ela varie ao longo do comprimento da barra. Essa carga, $P(x)$, deformará o elemento até a forma indicada pela

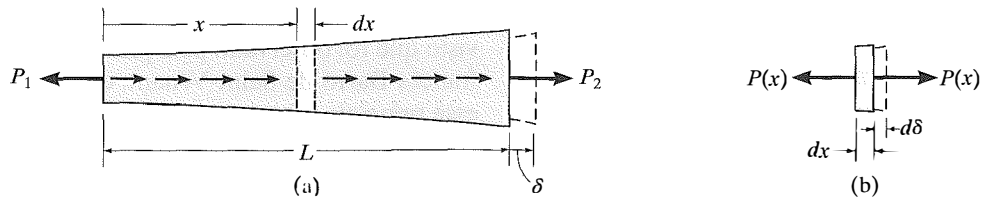


Figura 4.2

linha tracejada e, portanto, o deslocamento de uma das extremidades do elemento em relação à outra extremidade será d. A tensão e a deformação no elemento são

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \qquad \text{e} \qquad \epsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

Contanto que essas quantidades não ultrapassem o limite de proporcionalidade, podemos relacioná-las usando a lei de Hooke, isto é,

$$\sigma = E\epsilon$$
$$\frac{P(x)}{A(x)} = E\left(\frac{d\delta}{dx}\right)$$
$$d\delta = \frac{P(x)\,dx}{A(x)E}$$

Para o comprimento total da barra, L, devemos integrar essa expressão para determinar o deslocamento da extremidade exigido. Isso nos dá

$$\boxed{\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)E}} \tag{4.1}$$

onde

δ = deslocamento de um ponto na barra relativo a um outro ponto
L = distância original entre os pontos
$P(x)$ = força axial interna na seção, localizada a distância x de uma extremidade
$A(x)$ = área da seção transversal da barra, expressa em função de x
E = módulo de elasticidade para o material

Carga constante e área de seção transversal. Em muitos casos, a barra terá uma área de seção transversal constante, A; e o material será homogêneo, de modo que E é constante. Além do mais, se uma força externa constante for aplicada a cada extremidade (Figura 4.3), então a força interna P também será constante em todo o comprimento da barra. O resultado é que a Equação 4.1 pode ser integrada e nos dará

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{AE}} \tag{4.2}$$

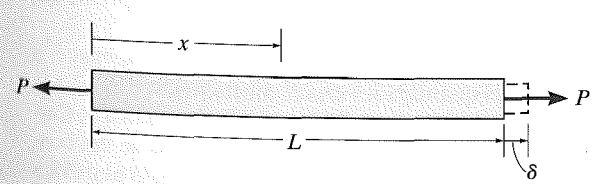


Figura 4.3

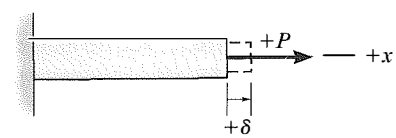
Se a barra for submetida a várias forças axiais diferentes, ou se a área da seção transversal ou o módulo de elasticidade mudar repentinamente de uma região da barra para outra, a equação acima poderá ser aplicada a cada *segmento* da barra onde todas essas quantidades são *constantes*. Então, o deslocamento de uma extremidade da barra em relação à outra é determinado pela *adição algébrica* dos deslocamentos das extremidades de cada segmento. Para esse caso geral,

$$\boxed{\delta = \sum \frac{PL}{AE}} \tag{4.3}$$

Convenção de sinais. Para aplicar a Equação 4.3, temos de desenvolver uma convenção de sinal para a força axial interna e o deslocamento de uma extremidade da barra em relação à outra extremidade. Para tanto, consideraremos que ambos, força e deslocamento, são positivos se provocarem tração e alongamento, respectivamente (Figura 4.4); ao contrário, força e deslocamento negativos causarão compressão e contração, respectivamente.

Por exemplo, considere a barra mostrada na Figura 4.5a. As *forças axiais internas*, "P", são determinadas pelo método das seções para cada segmento (Figura 4.5b). Elas são $P_{AB} = +5$ kN, $P_{BC} = -3$ kN, $P_{CD} = -7$ kN. Essa variação na carga axial é mostrada no diagrama de força normal para a barra (Figura 4.5c). Aplicando a Equação 4.3 para obter o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D, temos

$$\delta_{A/D} = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{(5\text{ kN})L_{AB}}{AE} + \frac{(-3\text{ kN})L_{BC}}{AE} + \frac{(-7\text{ kN})L_{CD}}{AE}$$



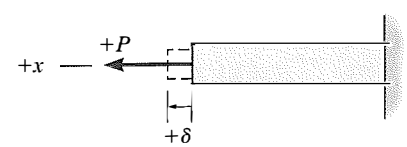


Figura 4.4

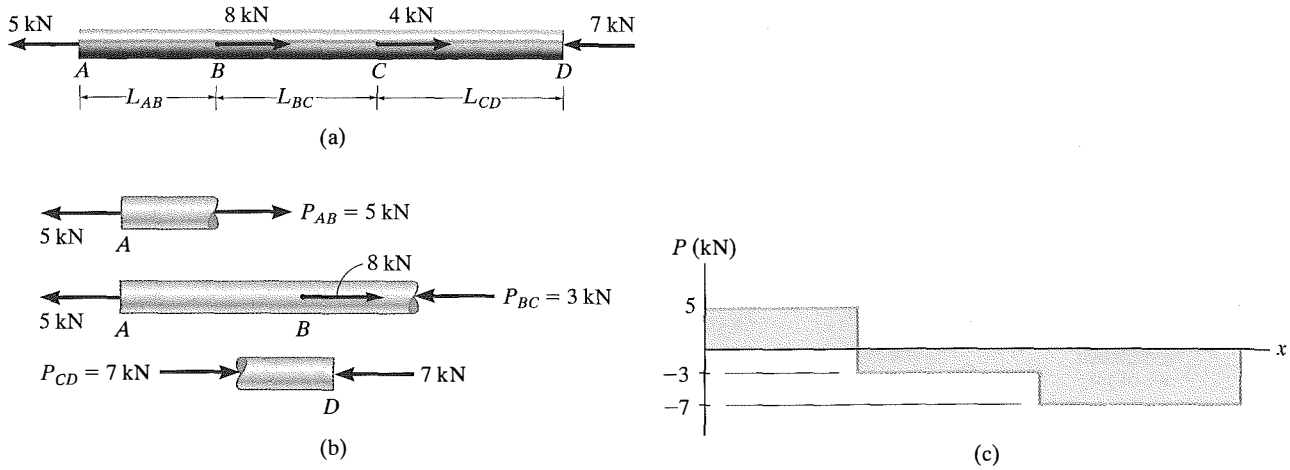


Figura 4.5

Se substituirmos os outros dados e a resposta calculada for positiva, significará que a extremidade A se afasta da extremidade D (a barra alonga-se), ao passo que um resultado negativo indicaria que a extremidade A se aproxima da extremidade D (a barra fica mais curta). A notação de índice duplo é usada para indicar esse deslocamento relativo, ($\delta_{A/D}$); entretanto, se o deslocamento tiver de ser determinado em relação a um *ponto fixo*, então será usado um único índice. Por exemplo, se D estiver localizado em um apoio *fixo*, o deslocamento calculado será denotado simplesmente como δ_A.

PONTOS IMPORTANTES

- O *princípio de Saint-Venant* afirma que ambas, deformação e tensão localizadas que ocorrem no interior das regiões de aplicação de carga ou nos apoios, tendem a "nivelar-se" a uma distância suficientemente afastada dessas regiões.
- O deslocamento de um elemento carregado axialmente é determinado pela relação entre a carga aplicada e a tensão por meio da fórmula $\sigma = P/A$ e pela relação entre o deslocamento e a deformação por meio da expressão $\epsilon = d\delta/dx$. Por fim, essas duas equações são combinadas, usando-se a lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, dando como resultado a Equação 4.1.
- Uma vez que a lei de Hooke é usada no desenvolvimento da equação do deslocamento, é importante que as cargas não provoquem escoamento do material e que o material seja homogêneo e se comporte de maneira linear elástica.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O deslocamento relativo entre dois pontos A e B em um elemento carregado axialmente pode ser determinado aplicando-se a Equação 4.1 (ou a Equação 4.2). A aplicação exige as etapas descritas a seguir.

Força interna

- Use o método das seções para determinar a força axial interna P no elemento.
- Se essa força variar ao longo do comprimento do elemento, deve-se fazer um corte em um local arbitrário a distância x de uma extremidade do elemento e a força deve ser representada em função de x, isto é, $P(x)$.
- Se várias *forças externas constantes* agirem sobre o elemento, então, em cada *segmento* do elemento se deve determinar a força interna entre quaisquer duas forças externas.
- Para qualquer segmento, uma *força de tração* interna é *positiva* e uma *força de compressão* interna é *negativa*. Por conveniência, os resultados do carregamento interno podem ser mostrados graficamente em um diagrama de força normal.

Deslocamento

- Quando a área da seção transversal do elemento *varia* ao longo de seu eixo, essa área deve ser expressa em função de sua posição, x, isto é, $A(x)$.
- Se a área da seção transversal, o módulo de elasticidade ou o carregamento interno mudar *repentinamente*, a Equação 4.2 deverá ser aplicada a cada segmento para o qual essas quantidades sejam constantes.
- Quando se substituem dados nas equações 4.1 a 4.3, não se deve esquecer de atribuir o sinal adequado a P. Carregamentos de tração são positivos, e carregamentos de compressão são negativos. Além disso, usa-se um conjunto de unidades consistente. Para qualquer segmento, se o resultado calculado for uma quantidade numérica *positiva*, indica *alongamento*; se for *negativa*, indica uma *contração*.

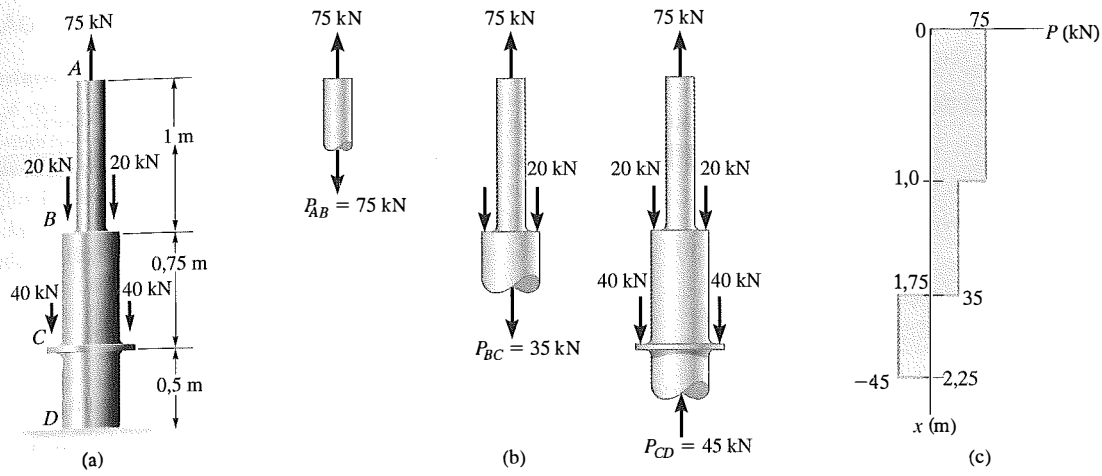


Figura 4.6

EXEMPLO 4.1

A barra de aço A-36 mostrada na Figura 4.6a é composta por dois segmentos, AB e BD, com áreas de seção transversal $A_{AB} = 600\,\text{mm}^2$ e $A_{BD} = 1.200\,\text{mm}^2$, respectivamente. Determine o deslocamento vertical da extremidade A e o deslocamento de B em relação a C.

SOLUÇÃO

Força interna. Devido à aplicação das cargas externas, as forças axiais internas nas regiões AB, BC e CD serão todas diferentes. Essas forças são obtidas pela aplicação do método das seções e da equação do equilíbrio da força vertical, como mostra a Figura 4.6b. A Figura 4.6c mostra a representação gráfica dessa variação.

Deslocamento. Pelos dados apresentados na tabela ao final deste livro, $E_{aço} = 210(10^3)$ MPa. Pela convenção de sinais, as forças de tração internas são positivas, e as forças de compressão são negativas; portanto, o deslocamento vertical de A em relação ao apoio *fixo* D é

$$\delta_A = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{[+75\,\text{kN}](1\,\text{m})(10^6)}{[600\,\text{mm}^2(210)(10^3)\,\text{kN/m}^2]} + \frac{[+35\,\text{kN}](0{,}75\,\text{m})(10^6)}{[1.200\,\text{mm}^2(210)(10^3)\,\text{kN/m}^2]} + \frac{[-45\,\text{kN}](0{,}5\,\text{m})(10^6)}{[1.200\,\text{mm}^2(210)(10^3)\,\text{kN/m}^2]}$$

$$= +0{,}61\,\text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Uma vez que o resultado é *positivo*, a barra *alonga-se*, portanto o deslocamento em A é para cima.

Aplicando a Equação 4.2 entre os pontos B e C, obtemos

$$\delta_{B/C} = \frac{P_{BC}L_{BC}}{A_{BC}B} = \frac{[+35\,\text{kN}](0{,}75\,\text{m})(10^6)}{[1.200\,\text{mm}^2(210)(10^3)\,\text{kN/m}^2]}$$

$$= +0{,}104\,\text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Nesse caso, B afasta-se de C, visto que o segmento se alonga.

EXEMPLO 4.2

O conjunto mostrado na Figura 4.7a é composto por um tubo de alumínio AB com área de seção transversal de 400 mm². Uma barra de aço com 10 mm de diâmetro está acoplada a um colar rígido e passa pelo tubo. Se uma carga de tração de 80 kN for aplicada à barra, determine o deslocamento da extremidade C da barra. Considere $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

SOLUÇÃO

Força interna. O diagrama de corpo livre do tubo e da barra (Figura 4.7b) mostra que a barra está sujeita a uma tração de 80 kN e o tubo, a uma compressão de 80 kN.

Deslocamento. Em primeiro lugar, determinaremos o deslocamento da extremidade C em relação à extremidade B. Trabalhando com as unidades newtons e metros, temos

$$\delta_{C/B} = \frac{PL}{AE} = \frac{[+80(10^3)\,\text{N}](0{,}6\,\text{m})}{\pi(0{,}005\,\text{m})^2[200(10^9)\,\text{N/m}^2]}$$

$$= +0{,}003056\,\text{m} \rightarrow$$

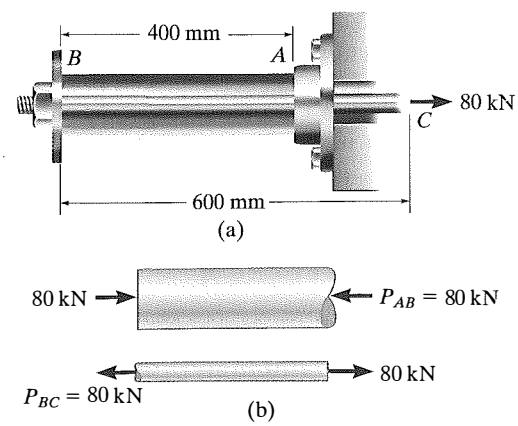


Figura 4.7

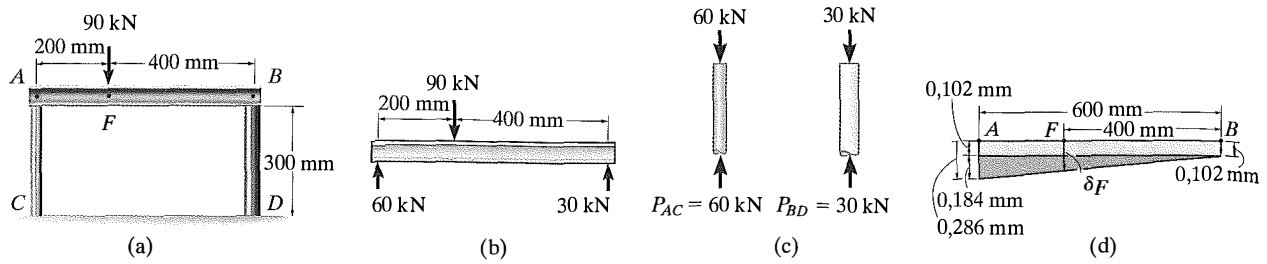


Figura 4.8

O sinal positivo indica que a extremidade C se desloca *para a direita* em relação à extremidade B, já que a barra se alonga.

O deslocamento da extremidade B em relação à *extremidade fixa* A é

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{[-80(10^3)\text{ N}](0{,}4\text{ m})}{[400\text{ mm}^2(10^{-6})\text{ m}^2/\text{mm}^2][70(10^9)\text{ N/m}^2]}$$
$$= -0{,}001143\text{ m} = 0{,}001143\text{ m} \rightarrow$$

Nesta expressão, o sinal negativo indica que o tubo fica mais curto e, por isso, B desloca-se para a *direita* em relação a A.

Visto que ambos os deslocamentos são para a direita, o deslocamento resultante de C em relação à extremidade fixa A é, portanto,

$$(\pm) \qquad \delta_C = \delta_B + \delta_{C/B} = 0{,}001143\text{ m} + 0{,}003056\text{ m}$$
$$= 0{,}00420\text{ m} = 4{,}20\text{ mm} \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 4.3

Uma *viga rígida* AB está apoiada nos dois postes curtos mostrados na Figura 4.8a. AC é feito de aço e tem diâmetro de 20 mm, e BD é feito de alumínio e tem diâmetro de 40 mm. Determine o deslocamento do ponto F em AB se uma carga vertical de 90 kN for aplicada nesse ponto. Considere $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

SOLUÇÃO

Força interna. As forças de compressão que agem na parte superior de cada poste são determinadas pelo equilíbrio do elemento AB (Figura 4.8b). Essas forças são iguais às forças internas em cada poste (Figura 4.8c).

Deslocamento. O deslocamento da parte superior de cada poste é

Poste AC:

$$\delta_A = \frac{P_{AC}L_{AC}}{A_{AC}E_{aço}} = \frac{[-60(10^3)\text{ N}](0{,}300\text{ m})}{\pi(0{,}010\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]}$$
$$= -286(10^{-6})\text{ m}$$
$$= 0{,}286\text{ mm} \downarrow$$

Poste BD:

$$\delta_B = \frac{P_{BD}L_{BD}}{A_{BD}E_{al}} = \frac{[-30(10^3)\text{ N}](0{,}300\text{ m})}{\pi(0{,}020\text{ m})^2[70(10^9)\text{ N/m}^2]}$$
$$= -102(10^{-6})\text{ m}$$
$$= 0{,}102\text{ mm} \downarrow$$

A Figura 4.8d mostra um diagrama que ilustra os deslocamentos da linha central nos pontos A, B e F na viga. Por cálculo proporcional do triângulo sombreado, o deslocamento do ponto F é, portanto,

$$\delta_F = 0{,}102\text{ mm} + (0{,}184\text{ mm})\left(\frac{400\text{ mm}}{600\text{ mm}}\right) = 0{,}225\text{ mm} \downarrow$$
Resposta

EXEMPLO 4.4

Um elemento é feito de um material com peso específico γ e módulo de elasticidade E. Se esse elemento tiver a forma de um *cone* com as dimensões mostradas na Figura 4.9a, determine até que distância sua extremidade se deslocará sob a força da gravidade, quando suspenso na posição vertical.

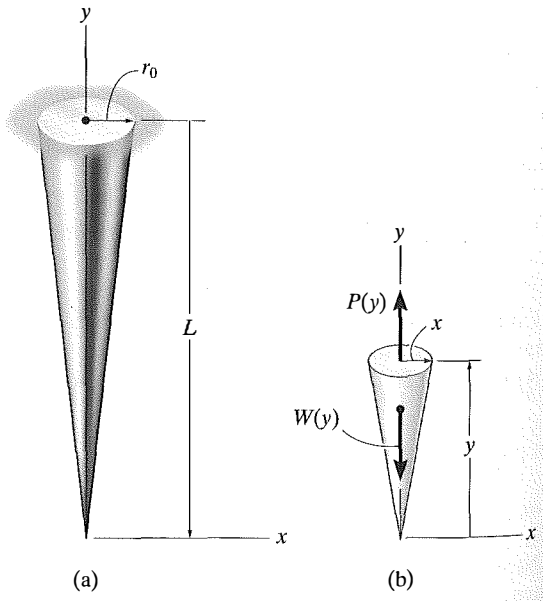


Figura 4.9

SOLUÇÃO

Força interna. A força axial interna varia ao longo do elemento, já que ela depende do peso $W(y)$ de um segmento do elemento abaixo de qualquer seção (Figura 4.9b). Por consequência, para calcular o deslocamento, devemos usar a Equação 4.1. Na seção localizada a uma distância y de sua extremidade inferior, o raio x do cone em função de y é determinado por cálculo proporcional, isto é,

$$\frac{x}{y} = \frac{r_0}{L}; \qquad x = \frac{r_0}{L}y$$

O volume de um cone com raio da base x e altura y é

$$V = \frac{\pi}{3}yx^2 = \frac{\pi r_0^2}{3L^2}y^3$$

Visto que $W = \gamma V$, a força interna na seção torna-se

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad P(y) = \frac{\gamma \pi r_0^2}{3L^2}y^3$$

Deslocamento. A área da seção transversal também é função da posição y (Figura 4.9b). Temos

$$A(y) = \pi x^2 = \frac{\pi r_0^2}{L^2}y^2$$

A aplicação da Equação 4.1 entre os limites $y = 0$ e $y = L$ dá

$$\delta = \int_0^L \frac{P(y)\,dy}{A(y)E} = \int_0^L \frac{\left[\left(\gamma \pi r_0^2/3L^2\right)y^3\right]dy}{\left[\left(\pi r_0^2/L^2\right)y^2\right]E}$$

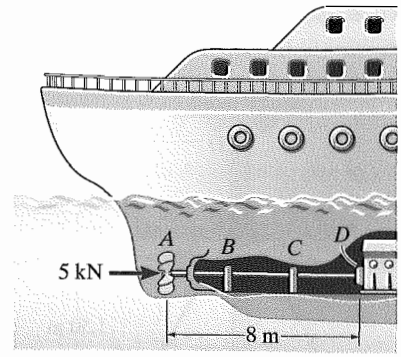
$$= \frac{\gamma}{3E}\int_0^L y\,dy$$

$$= \frac{\gamma L^2}{6E} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Uma verificação parcial desse resultado mostrará que as unidades dos termos, quando canceladas, dão o deslocamento em unidades de comprimento, como esperado.

PROBLEMAS

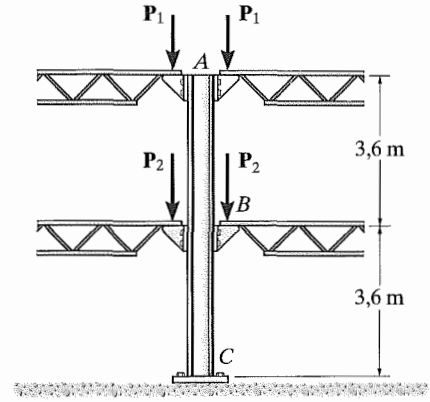
4.1. O navio é impulsionado na água pelo eixo de uma hélice de aço A-36 com 8 m de comprimento medido desde a hélice até o mancal de encosto D no motor. Se o eixo tiver diâmetro externo de 400 mm e espessura de parede de 50 mm, determine a quantidade de contração axial do eixo quando a hélice exercer uma força de 5 kN sobre o eixo. Os apoios em B e C são mancais de deslizamento.



Problema 4.1

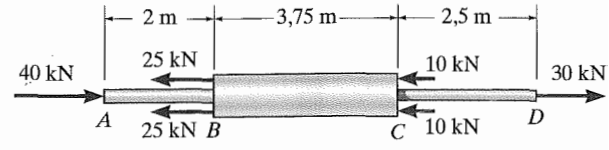
4.2. A coluna de aço A-36 é usada para suportar as cargas simétricas dos dois pisos de um edifício. Determine o deslocamento vertical de sua extremidade, A, se $P_1 = 200$ kN, $P_2 = 310$ kN e a coluna tiver área de seção transversal de 14.625 mm².

4.3. A coluna de aço A-36 é usada para suportar as cargas simétricas dos dois pisos de um edifício. Determine as cargas P_1 e P_2 se A se mover 3 mm para baixo e B se mover 2,25 mm para baixo quando as cargas forem aplicadas. A coluna tem área de seção transversal de 14.625 mm².



Problemas 4.2/3

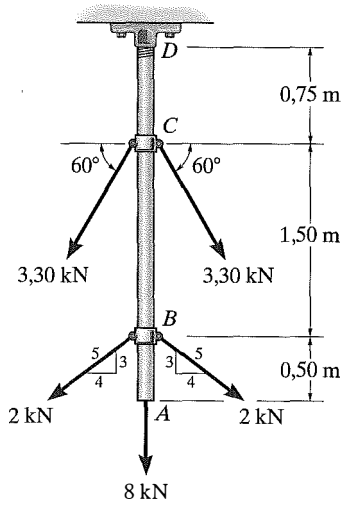
*4.4. O eixo de cobre está sujeito às cargas axiais mostradas na figura. Determine o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D se os diâmetros de cada segmento forem $d_{AB} = 20$ mm, $d_{BC} = 25$ mm e $d_{CD} = 12$ mm. Considere $E_{\text{cobre}} = 126$ GPa.



Problema 4.4

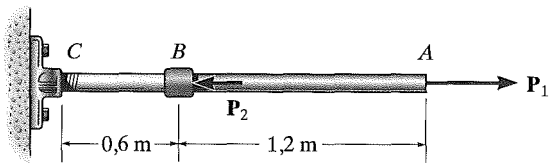
4.5. A haste de aço A-36 está sujeita ao carregamento mostrado. Se a área de seção transversal da haste for 60 mm²,

determine o deslocamento de B e A. Despreze o tamanho dos acoplamentos em B, C e D.



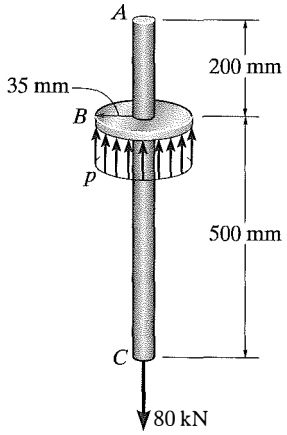
Problema 4.5

4.6. O conjunto é composto por uma haste CB de aço A-36 e uma haste BA de alumínio 6061-T6, cada uma com diâmetro de 25 mm. Determine as cargas aplicadas P_1 e P_2 se A se deslocar 2 mm para a direita e B se deslocar 0,5 mm para a esquerda quando as cargas forem aplicadas. O comprimento de cada segmento quando não alongado é mostrado na figura. Despreze o tamanho das conexões em B e C e considere que elas são rígidas.



Problema 4.6

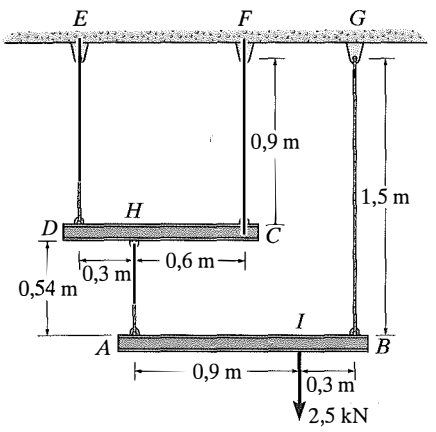
4.7. O eixo AC de aço A-36 com 15 mm de diâmetro é sustentado por um colar rígido fixado ao eixo B. Se for submetido a uma carga axial de 80 kN em sua extremidade, determine a distribuição de pressão uniforme p no colar exigida para o equilíbrio. Calcule também o alongamento nos segmentos BC e BA.



Problema 4.7

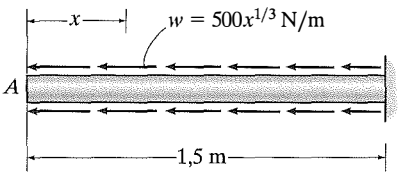
***4.8.** A carga é sustentada pelos quatro cabos de aço inoxidável 304 conectados aos elementos rígidos AB e DC. Determine o deslocamento vertical da carga de 2,5 kN se os elementos estiverem na horizontal quando a carga for aplicada. Cada cabo tem área de seção transversal de 16 mm².

4.9. A carga é sustentada pelos quatro cabos de aço inoxidável 304 conectados aos elementos rígidos AB e DC. Determine o ângulo de inclinação de cada elemento após a aplicação da carga de 2,5 kN. A posição original dos elementos era horizontal e cada cabo tem área de seção transversal de 16 mm².



Problemas 4.8/9

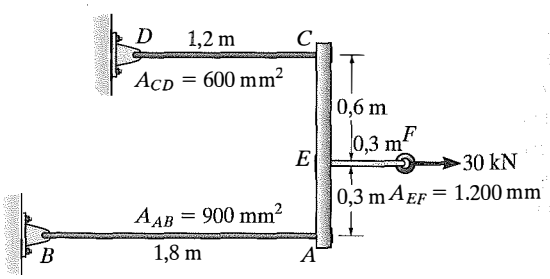
4.10. A barra tem área de seção transversal de 1.800 mm² e $E = 250$ GPa. Determine o deslocamento da extremidade A da barra quando submetida ao carregamento distribuído.



Problema 4.10

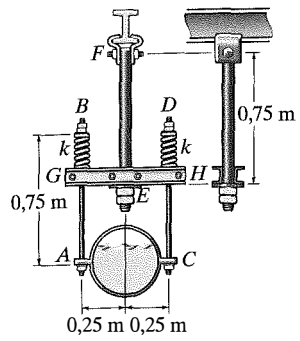
4.11. O conjunto é composto por três hastes de titânio (Ti-6A1-4V) e uma barra rígida AC. A área da seção transversal de cada haste é dada na figura. Se uma força de 30 kN for aplicada ao anel F, determine o deslocamento horizontal do ponto F.

***4.12.** O conjunto é composto por três hastes de titânio (Ti-6A1-4V) e uma barra rígida AC. A área da seção transversal de cada haste é dada na figura. Se uma força de 30 kN for aplicada ao anel F, determine o ângulo de inclinação da barra AC.



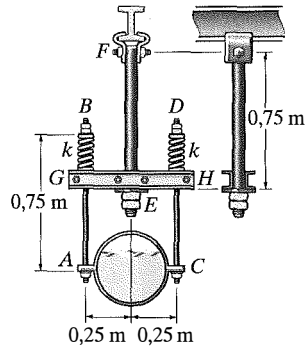
Problemas 4.11/12

4.13. Um suporte para tubos apoiado por molas é composto por duas molas que, na posição original, não estão alongadas e têm rigidez $k = 60$ kN/m, três hastes de aço inoxidável 304, AB e CD, com diâmetro de 5 mm e EF com diâmetro de 12 mm e uma viga rígida GH. Se o tubo e o fluido que ele transporta tiverem um peso de 4 kN, determine o deslocamento do tubo quando estiver acoplado ao suporte.



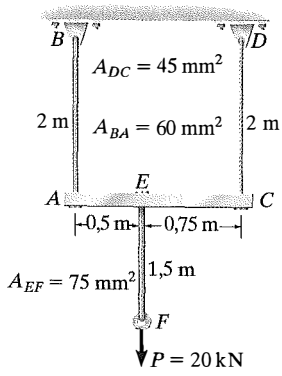
Problema 4.13

4.14. Um suporte para tubos apoiado por molas é composto por duas molas que, na posição original, não estão alongadas e têm rigidez $k = 60$ kN/m, três hastes de aço inoxidável 304, AB e CD, com diâmetro de 5 mm e EF com diâmetro de 12 mm, e uma viga rígida GH. Se o tubo for deslocado 82 mm quando estiver cheio de fluido, determine o peso do fluido.



Problema 4.14

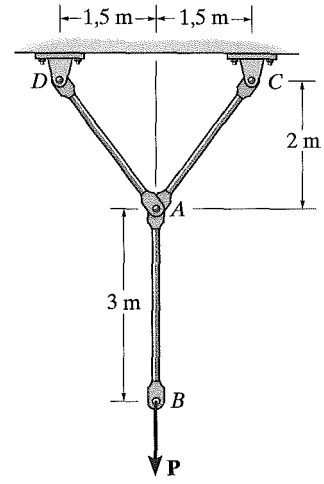
4.15. O conjunto é composto por três hastes de titânio e uma barra rígida AC. A área da seção transversal de cada haste é dada na figura. Se uma força vertical $P = 20$ kN for aplicada ao anel F, determine o deslocamento vertical do ponto F. $E_{ti} = 350$ GPa.



Problema 4.15

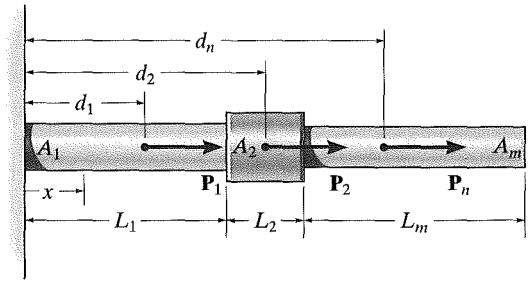
***4.16.** O sistema articulado é composto por três elementos de aço A-36 conectados por pinos, cada um com área de seção transversal de 500 mm². Se uma força vertical $P = 250$ kN for aplicada à extremidade B do elemento AB, determine o deslocamento vertical do ponto B.

4.17. O sistema articulado é composto por três elementos de aço A-36 conectados por pinos, cada um com área de seção transversal de 500 mm². Determine o valor da força **P** necessária para deslocar o ponto B a uma distância de 2,5 mm para baixo.



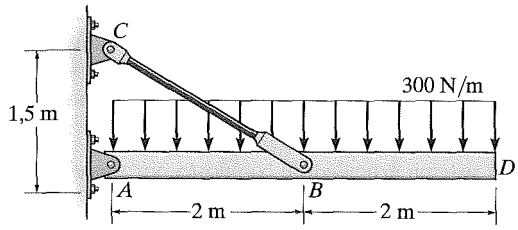
Problemas 4.16/4.17

4.18. Considere o problema geral de uma barra composta por m segmentos, cada um com área de seção transversal constante A_m e comprimento L_m. Se houver n cargas sobre a barra como mostra a figura, escreva um código computacional que possa ser usado para determinar o deslocamento da barra em qualquer local específico x. Mostre uma aplicação do código usando os valores $L_1 = 1{,}2$ m, $d_1 = 0{,}6$ m, $P_1 = 2$ kN, $A_1 = 1.875$ mm², $L_2 = 0{,}6$ m, $d_2 = 1{,}8$ m, $P_2 = -1{,}5$ kN, $A_2 = 625$ mm².



Problema 4.18

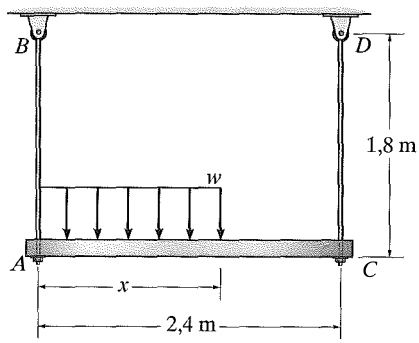
4.19. A barra rígida é sustentada pela haste CB acoplada por pino, com área de seção transversal de 14 mm² e feita de alumínio 6061-T6. Determine a deflexão vertical da barra em D quando a carga distribuída for aplicada.



Problema 4.19

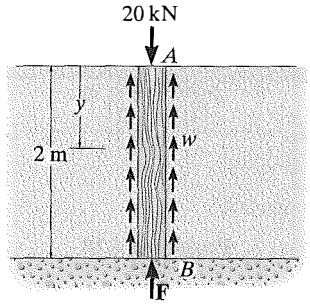
*4.20. A viga rígida está apoiada em suas extremidades por dois tirantes de aço A-36. Se a tensão admissível para o aço for $\sigma_{adm} = 115$ MPa, a carga $w = 50$ kN/m e $x = 1{,}2$ m, determine o diâmetro de cada haste de modo que a viga permaneça na posição horizontal quando carregada.

4.21. A viga rígida está apoiada em suas extremidades por dois tirantes de aço A-36. Os diâmetros das hastes são $d_{AB} = 12$ mm e $d_{CD} = 7{,}5$ mm. Se a tensão admissível para o aço for $\sigma_{adm} = 115$ MPa, determine a intensidade da carga distribuída w e seu comprimento x sobre a viga para que esta permaneça na posição horizontal quando carregada.



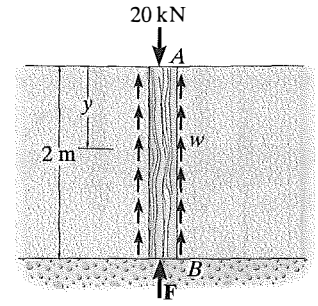
Problemas 4.20/21

4.22. O poste é feito de abeto Douglas e tem diâmetro de 60 mm. Se estiver sujeito a uma carga de 20 kN e o solo proporcionar resistência ao atrito $w = 4$ kN/m uniformemente distribuída ao longo de seus lados, determine a força **F** na parte inferior do poste necessária para haver equilíbrio. Calcule também qual é o deslocamento da parte superior do poste, A, em relação à sua parte inferior, B. Despreze o peso do poste.



Problema 4.22

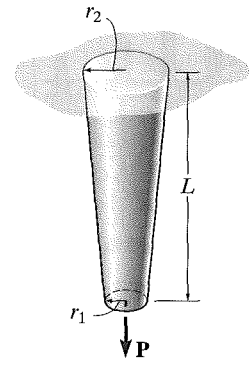
4.23. O poste é feito de abeto Douglas e tem diâmetro de 60 mm. Se estiver sujeito a uma carga 20 kN e o solo proporcionar resistência ao atrito uniformemente distribuída ao longo do comprimento do poste e variar linearmente de $w = 0$ em $y = 0$ a $w = 3$ kN/m em $y = 2$ m, determine a força **F** em sua parte inferior necessária para haver equilíbrio. Calcule também qual é o deslocamento da parte superior do poste, A, em relação à sua parte inferior, B. Despreze o peso do poste.



Problema 4.23

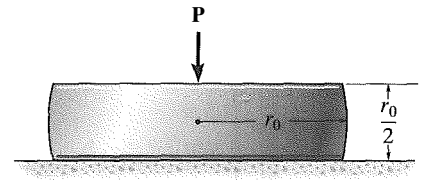
*4.24. A haste tem uma leve conicidade e comprimento L. Está suspensa a partir do teto e suporta uma carga **P** em sua extremidade. Mostre que o deslocamento de sua extremidade em razão dessa carga é $\delta = PL/(\pi E r_2 r_1)$. Despreze o peso do material. O módulo de elasticidade é E.

4.25. Resolva o Problema 4.24 incluindo **P** e o peso do material e também considerando que o peso específico da haste é γ (peso por unidade de volume).



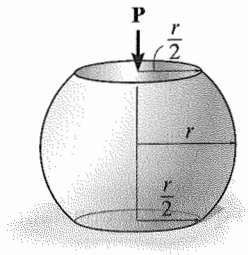
Problemas 4.24/25

4.26. Dois lados opostos de uma esfera de raio r_0 foram cortados para fabricar o suporte apresentado na figura. Se a altura original do suporte for $r_0/2$, determine até que distância ele se encurta quando suporta uma carga **P**. O módulo de elasticidade é E.



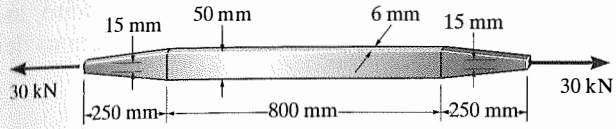
Problema 4.26

4.27. Uma bola cujas extremidades foram truncadas é usada para suportar a carga de apoio **P**. Se o módulo de elasticidade para o material for E, determine o decréscimo em sua altura quando a carga é aplicada.



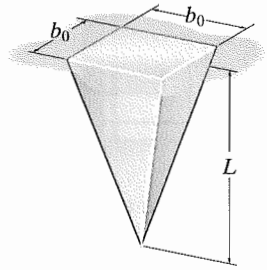
Problema 4.27

4.28. Determine o alongamento da tira de alumínio quando submetida a uma força axial de 30 kN. $E_{al} = 70$ GPa.



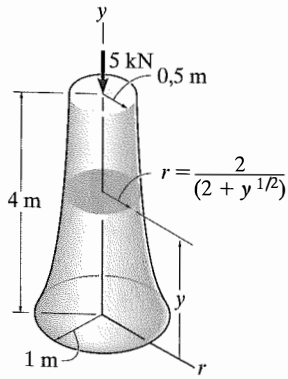
Problema 4.28

4.29. A peça fundida é feita de um material com peso específico γ e módulo de elasticidade E. Se ela tiver a forma da pirâmide cujas dimensões são mostradas na figura, determine até que distância sua extremidade será deslocada pela ação da gravidade quando estiver suspensa na posição vertical.



Problema 4.29

4.30. O raio do pedestal apresentado na figura é definido pela função $r = 2/(2 + y^{1/2})$ m, onde y é dado em metros. Se o módulo de elasticidade para o material for $E = 100$ MPa, determine o deslocamento da parte superior do pedestal quando ele suportar a carga de 5 kN.



Problema 4.30

4.3 Princípio da superposição

O princípio da superposição é frequentemente usado para determinar a tensão ou o deslocamento em um ponto de um elemento quando este estiver sujeito a um carregamento complicado. Subdividindo o carregamento em componentes, o ***princípio da superposição*** afirma que a tensão ou o deslocamento resultante no ponto pode ser determinado se antes se determinar a tensão ou o deslocamento causado por cada componente da carga agindo *separadamente* sobre o elemento. Então, a tensão ou deslocamento resultante é determinado pela soma algébrica das contribuições causadas por cada uma das componentes das cargas.

Para aplicar o princípio da superposição, as duas condições a seguir devem ser válidas.

1. ***A carga deve estar relacionada linearmente com a tensão ou o deslocamento a ser determinado.*** Por exemplo, as equações $\sigma = P/A$ e $\delta = PL/AE$ envolvem uma relação linear entre P e σ ou δ.
2. ***A carga não deve provocar mudanças significativas na geometria ou configuração original do elemento.*** Se ocorrerem mudanças significativas, a direção e a localização das forças aplicadas e seus momentos mudarão e, por consequência, a aplicação das equações de equilíbrio darão resultados diferentes. Como exemplo, considere a haste delgada mostrada na Figura 4.10a, sujeita à carga **P**. Na Figura 4.10b, **P** é substituída por duas de suas componentes, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Se **P** provocar uma grande deflexão na haste, como mostra a figura, o momento da carga em torno de seu apoio, Pd, não será igual à soma dos momentos das componentes das cargas, $Pd \neq P_1 d_1 + P_2 d_2$, porque $d_1 \neq d_2 \neq d$.

A maioria das equações envolvendo carga, tensão e deslocamento desenvolvidas neste livro representa relações lineares entre estas grandezas. Além disso, os elementos ou corpos considerados serão tais que o carregamento produzirá deformações tão pequenas que a mudança na posição e na direção do carregamento será insignificante e poderá ser desprezada. Entretanto, uma exceção a essa regra será discutida no Capítulo 13. Essa exceção é uma coluna que suporta uma carga axial equivalente à carga crítica ou de flambagem. Mostraremos que, mesmo quando essa carga sofre apenas um ligeiro aumento, provoca grande deflexão lateral na coluna, ainda que o material permaneça no regime linear elástico. Essas deflexões, associadas às componentes de qualquer carga axial, *não podem* ser superpostas.

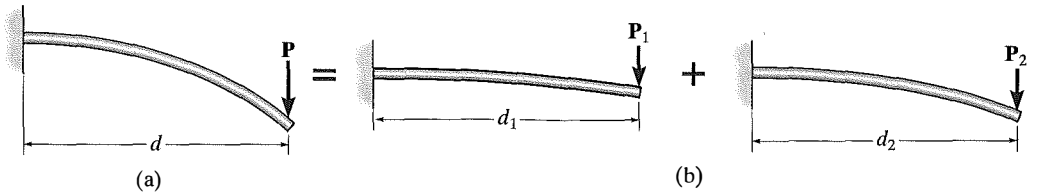


Figura 4.10

4.4 Elemento com carga axial estaticamente indeterminado

Quando uma barra está presa somente em uma extremidade e é submetida a uma força axial, a equação de equilíbrio da força aplicada ao longo do eixo da barra é *suficiente* para determinar a reação no suporte fixo. Um problema como esse, no qual as reações podem ser determinadas estritamente pelas equações de equilíbrio, é denominado *estaticamente determinado*. Entretanto, se a barra estiver presa em ambas as *extremidades*, como na Figura 4.11a, então aparecem duas reações axiais desconhecidas (Figura 4.11b), e a equação de equilíbrio de força torna-se

$$+\uparrow \Sigma F = 0; \qquad F_B + F_A - P = 0$$

Neste caso, a barra é denominada ***estaticamente indeterminada***, visto que a(s) equação(ões) de equilíbrio não é(são) suficiente(s) para determinar as reações.

Para estabelecer uma equação adicional necessária para a solução, temos de considerar a geometria da deformação. Especificamente, uma equação que indique as condições para o deslocamento é denominada ***condição de compatibilidade*** ou ***condição cinemática***. Uma condição de compatibilidade adequada exigiria que o deslocamento relativo de uma extremidade da barra em relação ao da outra extremidade fosse igual a zero, visto que os apoios das extremidades são fixos. Por consequência, podemos escrever

$$\delta_{A/B} = 0$$

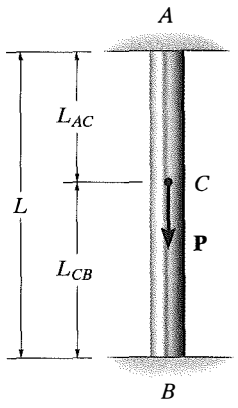
Essa equação pode ser expressa em termos das cargas aplicadas por meio de uma *relação carga–deslocamento* que depende do comportamento do material. Por exemplo, se ocorrer comportamento linear elástico, $\delta = PL/AE$ pode ser usada. Percebendo-se que a força interna no segmento AC é $+F_A$, e que no segmento CB a força interna é $-F_B$ (Figura 4.11c), a equação de compatibilidade pode ser escrita como

$$\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$$

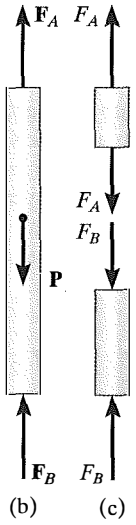
Considerando que AE é constante, podemos resolver essas duas equações para as reações, o que dá

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right) \quad \text{e} \quad F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Ambos os resultados são positivos, portanto, as reações estão mostradas corretamente no diagrama de corpo livre.



(a)



(b) (c)

Figura 4.11

PONTOS IMPORTANTES

- O *princípio da superposição* é, às vezes, usado para simplificar problemas de tensão e deslocamento com carregamentos complicados. Fazemos isso subdividindo o carregamento em suas componentes e somando os resultados algebricamente.
- A superposição exige que haja uma relação linear entre o carregamento e a tensão ou deslocamento e que o carregamento não provoque mudanças significativas na geometria original do elemento.
- Um elemento é *estaticamente indeterminado* se as equações de equilíbrio não forem suficientes para determinar as reações no elemento.
- *Condições de compatibilidade* especificam as restrições ao deslocamento que ocorrem nos apoios ou em outros pontos de um elemento.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Em problemas estaticamente indeterminados, as forças desconhecidas são determinadas satisfazendo os requisitos de equilíbrio, compatibilidade e força–deslocamento para o elemento.

Equilíbrio

- Desenhe um diagrama de corpo livre do elemento para identificar todas as forças que agem sobre ele.
- O problema pode ser classificado como estaticamente indeterminado se o número de reações desconhecidas no diagrama de corpo livre for maior do que o número de equações de equilíbrio disponíveis.
- Escreva a equações de equilíbrio para o elemento.

Compatibilidade

- Para escrever as equações de compatibilidade, considere desenhar um diagrama de deslocamento para investigar o modo como o elemento se alongará ou contrairá quando submetido a cargas externas.
- Expresse as condições de compatibilidade em termos dos deslocamentos causados pelas forças.
- Use uma relação carga–deslocamento tal como $\delta = PL/AE$ para relacionar os deslocamentos desconhecidos com as reações desconhecidas.
- Resolva as equações de equilíbrio e compatibilidade para as forças reativas desconhecidas. Se qualquer dessas forças tiver um valor numérico negativo, isso indica que ela age no sentido oposto ao indicado no diagrama de corpo livre.

EXEMPLO 4.5

A haste de aço mostrada na Figura 4.12a tem diâmetro de 5 mm e está presa à parede fixa em A. Antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede em B' e a haste. Determine as reações em A e B' se a haste for submetida a uma força axial $P = 20$ kN como mostra a figura. Despreze o tamanho do colar em C. Considere $E_{aço} = 200$ GPa.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. Como mostrado no diagrama de corpo livre (Figura 4.12b), consideraremos que a força P é grande o suficiente para fazer com que a extremidade B da haste entre em contato com a parede em B'. O problema é estaticamente indeterminado visto que há duas incógnitas e apenas uma equação de equilíbrio.

O equilíbrio da haste exige

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad -F_A - F_B + 20(10^3)\ \text{N} = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidade. A carga faz com que o ponto B movimente-se até o ponto B' sem mais nenhum deslocamento adicional. Portanto, a condição de compatibilidade para a haste é

$$\delta_{B/A} = 0{,}001\ \text{m}$$

Esse deslocamento pode ser expresso em termos das reações desconhecidas pela relação carga–deslocamento, Equação 4.2, aplicada aos segmentos AC e CB (Figura 4.12c). Trabalhando com as unidades newtons e metros, temos

$$\delta_{B/A} = 0{,}001\ \text{m} = \frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE}$$

$$0{,}001\ \text{m} = \frac{F_A(0{,}4\ \text{m})}{\pi(0{,}0025\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]} - \frac{F_B(0{,}8\ \text{m})}{\pi(0{,}0025\ \text{m})^2[200(10^9)\ \text{N/m}^2]}$$

ou

$$F_A(0{,}4\ \text{m}) - F_B(0{,}8\ \text{m}) = 3927{,}0\ \text{N} \cdot \text{m} \qquad (2)$$

A resolução das equações 1 e 2 nos dá

$$F_A = 16{,}6\ \text{kN} \qquad F_B = 3{,}39\ \text{kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Visto que a resposta para F_B é *positiva*, a extremidade B realmente entrará em contato com a parede, como consideramos desde o início.

OBSERVAÇÃO: Se F_B fosse uma quantidade negativa, o problema seria estaticamente determinado, de modo que $F_B = 0$ e $F_A = 20$ kN.

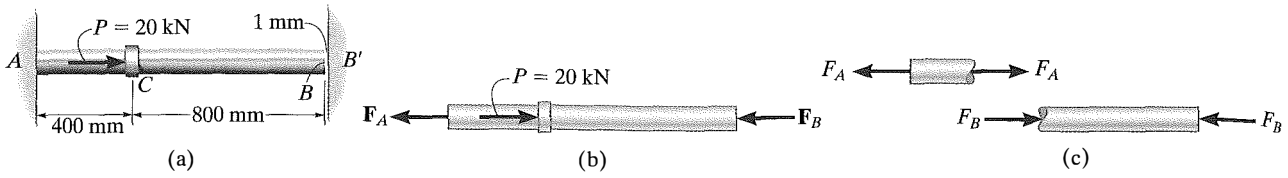


Figura 4.12

EXEMPLO 4.6

O poste de alumínio mostrado na Figura 4.13a é reforçado com um núcleo de latão. Se esse conjunto suportar uma carga de compressão axial resultante $P = 45$ kN, aplicada na tampa rígida, determine a tensão normal média no alumínio e no latão. Considere $E_{al} = 70(10^3)$ MPa e $E_{lat} = 105(10^3)$ MPa.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre do poste é mostrado na Figura 4.13b. Aqui, a força axial resultante na base é representada pelas componentes desconhecidas suportadas pelo alumínio, $\mathbf{F}_{al}$, e pelo latão, $\mathbf{F}_{lat}$. O problema é estaticamente indeterminado. Por quê?

O equilíbrio da força vertical exige

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -45\text{ kN} + F_{al} + F_{lat} = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidade. A tampa rígida na parte superior do poste obriga que o deslocamento de ambos, alumínio e latão, seja o mesmo. Portanto,

$$\delta_{al} = \delta_{lat}$$

Pelas relações carga–deslocamento,

$$\frac{F_{al}L}{A_{al}E_{al}} = \frac{F_{lat}L}{A_{lat}E_{lat}}$$

$$F_{al} = F_{lat}\left(\frac{A_{al}}{A_{lat}}\right)\left(\frac{E_{al}}{E_{lat}}\right)$$

$$F_{al} = F_{lat}\left[\frac{\pi[(0{,}05\text{ m})^2 - (0{,}025\text{ m})^2]}{\pi(0{,}025\text{ m})^2}\right]\left[\frac{70(10)^3\text{ MPa}}{105(10)^3\text{ MPa}}\right]$$

$$F_{al} = 2F_{lat} \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2 simultaneamente, temos

$$F_{al} = 30\text{ kN} \qquad F_{lat} = 15\text{ kN}$$

Visto que os resultados são positivos, a tensão será, realmente, de compressão.

Portanto, a tensão normal média no alumínio e no latão é

$$\sigma_{al} = \frac{30\text{ kN}}{\pi[(0{,}05\text{ m})^2 - (0{,}025\text{ m})^2]} = 5{,}09\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{lat} = \frac{15\text{ kN}}{\pi[(0{,}025\text{ m})^2]} = 7{,}64\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

As distribuições de tensão são mostradas na Figura 4.13c.

EXEMPLO 4.7

As três barras de aço A-36 mostradas na Figura 4.14a estão conectadas por pinos a um elemento *rígido*. Se a carga aplicada ao elemento for 15 kN, determine a força desenvolvida em cada barra. Cada uma das barras *AB* e *EF* tem área de seção transversal de 25 mm², e a barra *CD* tem área de seção transversal de 15 mm².

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre do elemento rígido é mostrado na Figura 4.14b. Esse problema é estaticamente indeterminado visto que há três incógnitas e somente duas equações de equilíbrio disponíveis. Essas equações são

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A + F_C + F_E - 15\text{ kN} = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0; \; -F_A(0{,}4\text{ m}) + 15\text{ kN}(0{,}2\text{ m}) + F_E(0{,}4\text{ m}) = 0 \qquad (2)$$

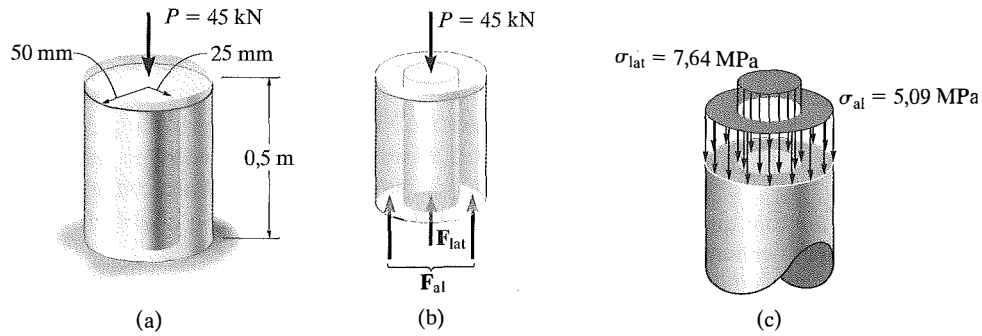


Figura 4.13

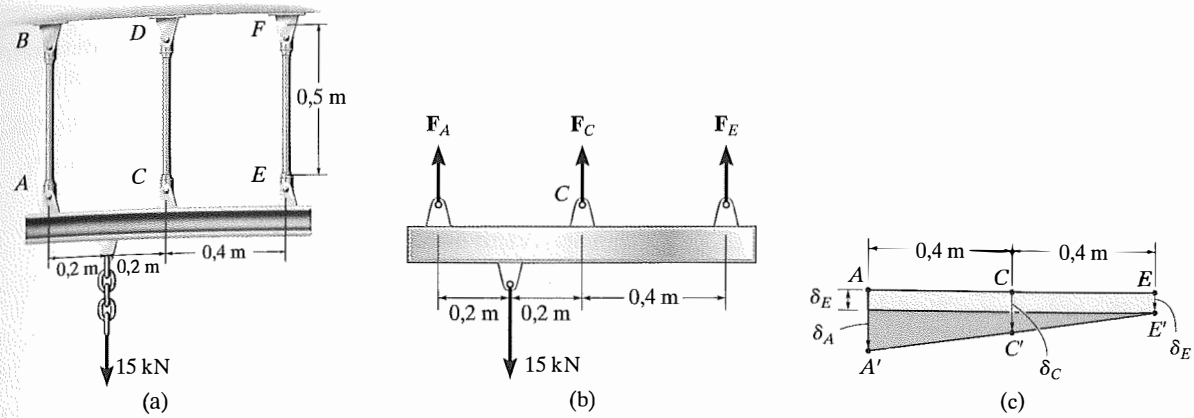


Figura 4.14

Compatibilidade. A carga aplicada fará com que a reta horizontal ACE mostrada na Figura 4.14c desloque-se até a reta inclinada $A'C'E'$. Os deslocamentos dos pontos A, C e E podem ser relacionados por triângulos proporcionais. Assim, a equação de compatibilidade para esses deslocamentos é

$$\frac{\delta_A - \delta_E}{0{,}8\text{ m}} = \frac{\delta_C - \delta_E}{0{,}4\text{ m}}$$

$$\delta_C = \frac{1}{2}\delta_A + \frac{1}{2}\delta_E$$

Pela relação carga–deslocamento (Equação 4.2), temos

$$\frac{F_C L}{(15\text{ mm}^2)E_{\text{aço}}} = \frac{1}{2}\left[\frac{F_A L}{(25\text{ mm}^2)E_{\text{aço}}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{F_E L}{(25\text{ mm}^2)E_{\text{aço}}}\right]$$

$$F_C = 0{,}3F_A + 0{,}3F_E \qquad (3)$$

A resolução simultânea das equações 1 a 3 resulta

$$F_A = 9{,}52\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

$$F_C = 3{,}46\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

$$F_E = 2{,}02\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

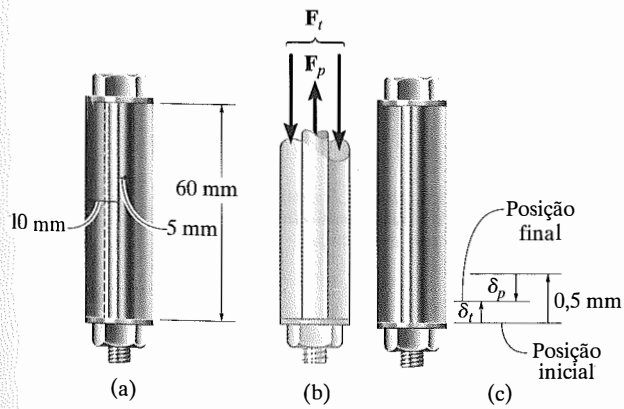


Figura 4.15

EXEMPLO 4.8

O parafuso de liga de alumínio 2014-T6 mostrado na Figura 4.15a é apertado de modo a comprimir um tubo cilíndrico de liga de magnésio Am 1004-T61. O tubo tem raio externo de 10 mm, e consideramos que o raio interno do tubo e o raio do parafuso são ambos 5 mm. As arruelas nas partes superior e inferior do tubo são consideradas rígidas e têm espessura desprezível. Inicialmente, a porca é apertada levemente à mão; depois, é apertada mais meia-volta com uma chave de porca. Se o parafuso tiver 20 roscas por polegada, determine a tensão no parafuso.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. Consideramos que o diagrama de corpo livre de uma seção do parafuso e do tubo (Figura 4.15b) está correto para relacionar a força no parafuso, F_p, com a força no tubo, F_t. O equilíbrio exige

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_p - F_t = 0 \qquad (1)$$

O problema é estaticamente indeterminado visto que há duas incógnitas nesta equação.

Compatibilidade. Quando a porca é apertada contra o parafuso, o tubo encurta δ_t, e o parafuso *alonga-se* δ_p (Figura 4.15c). Visto que a porca ainda é apertada mais meia-volta, ela avança uma distância de 1/2(20/20 mm) = 5 mm ao longo do parafuso. Assim, a compatibilidade desses deslocamentos exige

$$(+\uparrow) \qquad \delta_t = 0{,}5\text{ mm} - \delta_p$$

Considerando o módulo de elasticidade $E_{\text{Am}} = 45$ GPa, $E_{\text{al}} = 75$ GPa e aplicando a equação 4.2, temos

$$\frac{F_t(60\text{ mm})}{\pi[(10\text{ mm})^2 - (5\text{ mm})^2][45(10^3)\text{ MPa}]} = 0{,}5\text{ mm} - \frac{F_p(60\text{ mm})}{\pi[(5\text{ mm})^2][75(10^3)\text{ MPa}]}$$

$$5F_t = 125\pi(1{,}125) - 9F_p \qquad (2)$$

A resolução simultânea das equações 1 e 2 dá

$$F_p = F_t = 31.556\text{ N} = 31{,}56\text{ kN}$$

Portanto, as tensões no parafuso e no tubo são

$$\sigma_b = \frac{F_p}{A_p} = \frac{31.556\ \text{N}}{\pi(5\ \text{mm})^2} = 401{,}8\ \text{N/mm}^2 = 401{,}8\ \text{MPa}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = \frac{31.556\ \text{N}}{\pi[(10\ \text{mm})^2 - (5\ \text{mm})^2]} = 133{,}9\ \text{N/mm}^2$$

$$= 133{,}9\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Essas tensões são menores do que a tensão de escoamento informada para cada material, $(\sigma_e)_{al} = 414$ MPa e $(\sigma_e)_{mg} = 152$ MPa (ver o final do livro) e, portanto, essa análise "elástica" é válida.

4.5 Método de análise de força para elementos carregados axialmente

Também é possível resolver problemas estaticamente indeterminados escrevendo a equação de compatibilidade levando em consideração a superposição das forças que agem no diagrama de corpo livre. Este método de solução é conhecido como ***método de análise de flexibilidade ou de força***. Para demonstrar a aplicação desse método, considere, mais uma vez, a barra na Figura 4.11a. Para escrever a equação de compatibilidade necessária, em primeiro lugar, escolheremos qualquer um dos apoios como "redundante" e anularemos temporariamente o efeito que ele causa na barra. Neste contexto, a palavra ***redundante*** indica que o apoio não é necessário para manter a barra em equilíbrio estável e, portanto, quando ele é retirado, a barra torna-se estaticamente determinada. No caso em questão, escolheremos o apoio em B como redundante. Então, pelo princípio da superposição, a barra na Figura 4.16a é equivalente à barra submetida somente à carga externa **P** (Figura 4.16b) mais a barra submetida somente à carga redundante desconhecida $\mathbf{F}_B$ (Figura 4.16c).

Se a carga **P** provocar um deslocamento δ_P *para baixo* em B, a reação $\mathbf{F}_B$ deve provocar um deslocamento equivalente δ_B *para cima* na extremidade B, de modo que não ocorra nenhum deslocamento em B quando as duas cargas forem superpostas. Assim,

$$(+\downarrow) \qquad 0 = \delta_P - \delta_B$$

Esta equação representa a equação de compatibilidade para deslocamentos no ponto B, na qual consideramos que deslocamentos para baixo são positivos.

Aplicando a relação carga–deslocamento a cada caso, temos $\delta_P = PL_{AC}/AE$ e $\delta_B = F_BL/AE$. Por consequência,

$$0 = \frac{PL_{AC}}{AE} - \frac{F_BL}{AE}$$

$$F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Pelo diagrama de corpo livre da barra (Figura 4.11b), a reação em A pode ser agora determinada pela equação de equilíbrio,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right) + F_A - P = 0$$

Visto que $L_{CB} = L - L_{AC}$, então

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right)$$

Esses resultados são os mesmos que os obtidos na Seção 4.4, exceto pelo fato de que, aqui, aplicamos primeiro a condição de compatibilidade *e depois* a condição de equilíbrio para obter a solução. Observe também que o princípio da superposição pode ser usado aqui pois o deslocamento e a carga estão relacionados linearmente ($\delta = PL/AE$); portanto, entende-se que o material se comporta de maneira linear elástica.

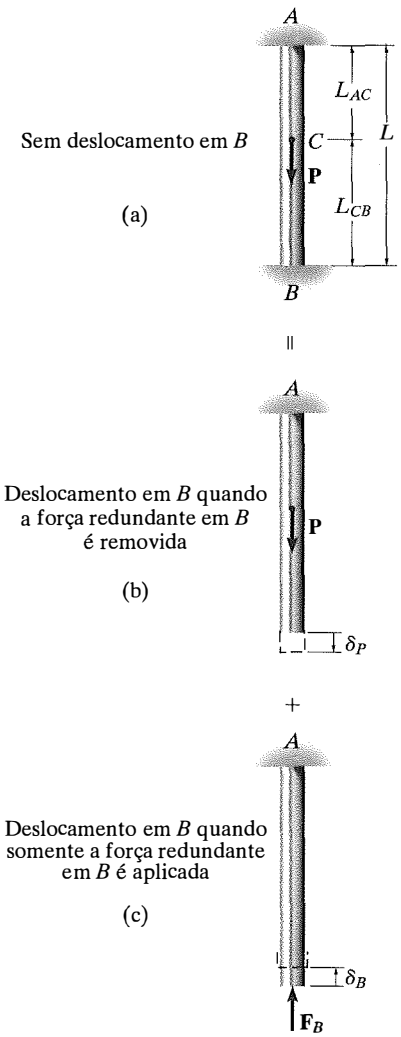


Figura 4.16

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O método de análise de força exige as seguintes etapas.

Compatibilidade

- Escolha um dos apoios como redundante e escreva a equação de compatibilidade. Para tanto, igualamos o deslocamento conhecido no apoio redundante, o qual é normalmente zero, ao deslocamento no apoio causado *somente* pelas cargas externas que agem sobre o elemento *mais* (vetorialmente) o deslocamento no apoio causado *somente* pela reação redundante que age sobre o elemento.
- Expresse a carga externa e deslocamentos redundantes em termos dos carregamentos usando uma relação carga-deslocamento tal como $\delta = PL/AE$.
- Uma vez estabelecida, a equação de compatibilidade pode ser, então, resolvida para a amplitude da força redundante.

Equilíbrio

- Desenhe um diagrama de corpo livre e escreva as equações de equilíbrio adequadas para o elemento usando o resultado calculado para o redundante. Resolva essas equações para as outras reações.

EXEMPLO 4.9

A haste de aço A-36 mostrada na Figura 4.17a tem diâmetro de 5 mm. Ela está presa à parede fixa em A e, antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede em B' e a haste. Determine as reações em A e B'.

SOLUÇÃO

Compatibilidade. Aqui, consideraremos o apoio em B' como redundante. Pelo princípio da superposição (Figura 4.17b), temos

$$(\pm\rightarrow) \qquad 0{,}001\text{ m} = \delta_P - \delta_B \qquad (1)$$

As deflexões δ_P e δ_B são determinadas pela Equação 4.2.

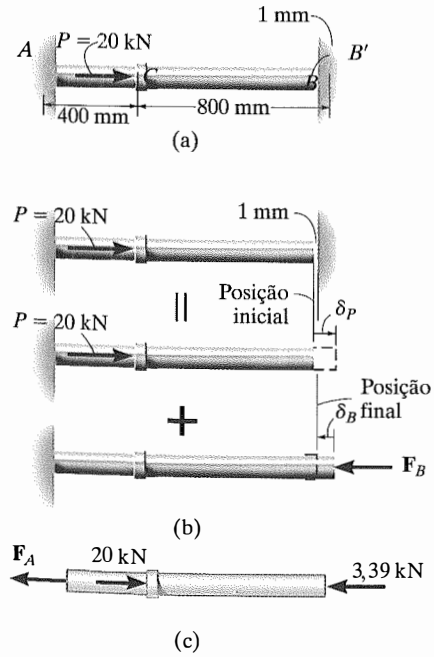


Figura 4.17

$$\delta_P = \frac{PL_{AC}}{AE} = \frac{[20(10^3)\text{ N}](0{,}4\text{ m})}{\pi(0{,}0025\text{ m})^2[200(10^9)\text{ N/m}^2]} = 0{,}002037\text{ m}$$

$$\delta_B = \frac{F_B L_{AB}}{AE} = \frac{F_B\,(1{,}20\text{ m})}{\pi(0{,}0025\text{ m})^2[200(10^9)\text{N/m}^2]} = 0{,}3056(10^{-6})F_B$$

Substituindo na equação 1, obtemos

$$0{,}001\text{ m} = 0{,}002037\text{ m} - 0{,}3056(10^{-6})F_B$$

$$F_B = 3{,}39(10^3)\text{ N} = 3{,}39\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Equilíbrio. Pelo diagrama de corpo livre (Figura 4.17c),

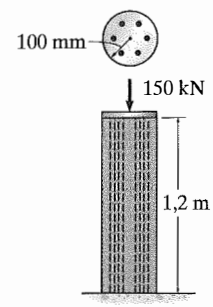
$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad -F_A + 20\text{ kN} - 3{,}39\text{ kN} = 0 \quad F_A = 16{,}6\text{ kN}$$

Resposta

PROBLEMAS

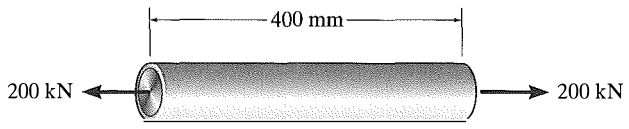
4.31. A coluna é construída de concreto de alta resistência e seis hastes de reforço de aço A-36. Se ela for submetida a uma força axial de 150 kN, determine a tensão normal média no concreto e em cada haste. Cada uma tem diâmetro de 20 mm.

***4.32.** A coluna é construída de concreto de alta resistência e seis hastes de reforço de aço A-36. Se for submetida a uma força axial de 150 kN, determine o diâmetro exigido para cada haste, de modo que 1/4 da carga seja suportada pelo concreto e 3/4, pelo aço.



Problemas 4.31/32

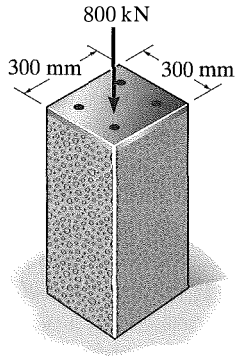
4.33. O tubo de aço A-36 tem núcleo de alumínio 6.061-T6 e está sujeito a uma força de tração de 200 kN. Determine a tensão normal média no alumínio e no aço devido a essa carga. O tubo tem diâmetro externo de 80 mm e diâmetro interno de 70 mm.



Problema 4.33

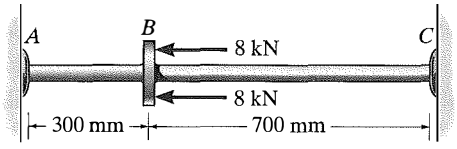
4.34. A coluna de concreto é reforçada com quatro hastes de aço, cada uma com diâmetro de 18 mm. Determine a tensão no concreto e no aço se a coluna for submetida a uma carga axial de 800 kN. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_c = 25$ GPa.

4.35. A coluna é de concreto de alta resistência e reforçada com quatro hastes de aço A-36. Se for submetida a uma força axial de 800 kN, determine o diâmetro exigido para cada haste de modo que 1/4 da carga seja suportada pelo aço e 3/4, pelo concreto. $E_{aço} = 200$ GPa e $E_c = 25$ GPa.



Problemas 4.34/35

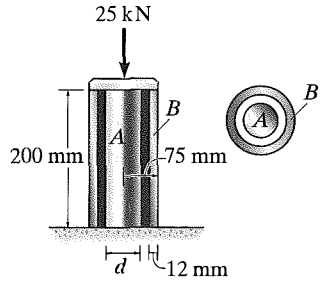
***4.36.** O tubo de aço A-36 tem raio externo de 20 mm e raio interno de 15 mm. Se ele se ajustar exatamente entre as paredes fixas antes de ser carregado, determine a reação nas paredes quando for submetido à carga mostrada.



Problema 4.36

4.37. O poste A de aço inoxidável 304 tem diâmetro $d = 50$ mm e está embutido em um tubo B de latão vermelho C83400. Ambos estão apoiados sobre a superfície rígida. Se for aplicada uma força de 25 kN à tampa rígida, determine a tensão normal média desenvolvida no poste e no tubo.

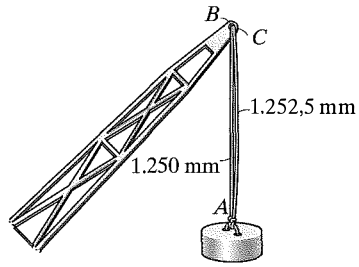
4.38. O poste A de aço inoxidável 304 está embutido em um tubo B de latão vermelho C83400. Ambos estão apoiados sobre a superfície rígida. Se for aplicada uma força de 25 kN à tampa rígida, determine o diâmetro d exigido para o poste de aço para que a carga seja compartilhada igualmente entre o poste e o tubo.



Problemas 4.37/38

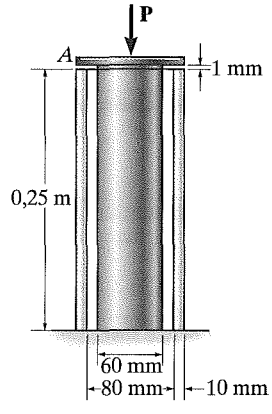
4.39. A carga de 7,5 kN deve ser suportada pelos dois cabos verticais de aço para os quais $\sigma_e = 500$ MPa. Se os comprimentos originais dos cabos AB e AC forem 1.250 mm e 1.252,5 mm respectivamente, determine a força desenvolvida em cada cabo depois da suspensão da carga. Cada cabo tem área de seção transversal de 12,5 mm².

***4.40.** A carga de 4 kN deve ser suportada pelos dois cabos verticais de aço para os quais $\sigma_e = 560$ MPa. Se os comprimentos originais dos cabos AB e AC forem 1.250 mm e 1.252,5 respectivamente, determine a área da seção transversal de AB para que a carga seja compartilhada igualmente entre os dois cabos. O cabo AC tem área de seção transversal de 13 mm².



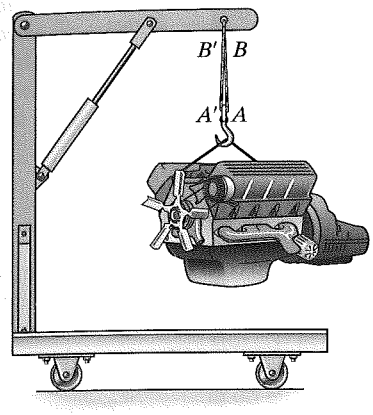
Problemas 4.39/40

4.41. O apoio é composto por um poste sólido de latão vermelho C83400 embutido em um tubo de aço inoxidável 304. Antes da aplicação da carga, a folga entre essas duas partes é 1 mm. Dadas as dimensões mostradas na figura, determine a maior carga axial que pode ser aplicada à tampa rígida A sem provocar o escoamento de qualquer um dos materiais.



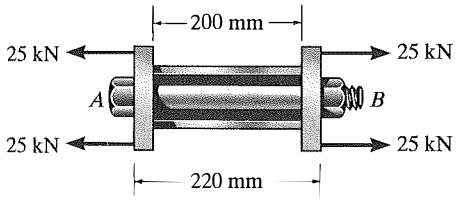
Problema 4.41

4.42. Dois cabos de aço A-36 são usados para suportar o motor de 3,25 kN (≈ 325 kg). O comprimento original de AB é 800 mm e o de $A'B'$ é 800,2 mm. Determine a força suportada por cada cabo quando o motor é suspenso por eles. Cada cabo tem área de seção transversal de 6,25 mm².



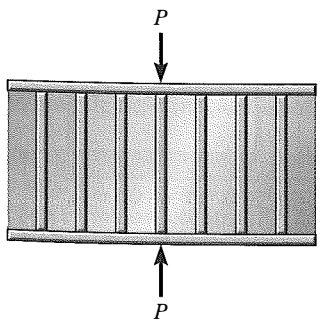
Problema 4.42

4.43. O parafuso AB tem diâmetro de 20 mm e passa por uma luva com diâmetro interno de 40 mm e diâmetro externo de 50 mm. O parafuso e a luva são feitos de aço A-36 e estão presos aos apoios rígidos como mostra a figura. Se o comprimento do parafuso for 220 mm e o comprimento da luva for 200 mm, determine a tração no parafuso quando for aplicada uma força de 50 kN aos apoios.



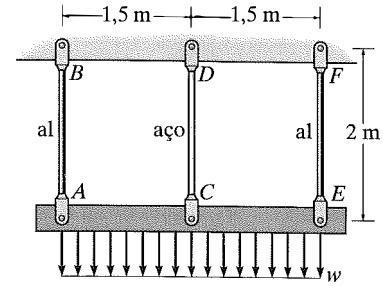
Problema 4.43

***4.44.** O corpo de prova representa um sistema de matriz reforçada por filamentos feito de plástico (matriz) e vidro (fibra). Se houver n fibras, cada uma com área de seção transversal A_f e módulo E_f, embutidas em uma matriz com área de seção transversal A_m e módulo E_m, determine a tensão na matriz e em cada fibra quando a força P for imposta ao corpo de prova.



Problema 4.44

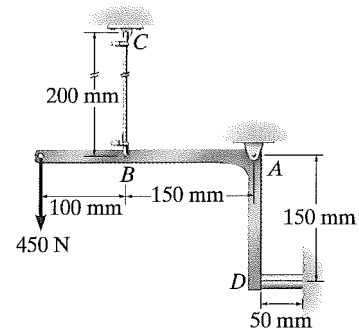
4.45. O carregamento distribuído é sustentado pelas três barras de suspensão. AB e EF são feitas de alumínio e CD é feita de aço. Se cada barra tiver área de seção transversal de 450 mm², determine a intensidade máxima w do carregamento distribuído de modo a não ultrapassar uma tensão admissível de $(\sigma_{adm})_{aço} = 180$ MPa no aço e $(\sigma_{adm})_{al} = 94$ MPa no alumínio. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.



Problema 4.45

4.46. O elo rígido é sustentado por um pino em A, um cabo de aço BC com comprimento de 200 mm quando não alongado com área de seção transversal de 22,5 mm² e um bloco curto de alumínio com 50 mm de comprimento quando não carregado com área de seção transversal de 40 mm². Se o elo for submetido à carga vertical mostrada, determine a tensão normal média no cabo e no bloco. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.

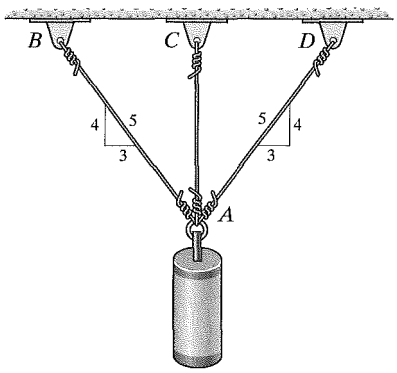
4.47. O elo rígido é sustentado por um pino em A, um cabo de aço BC com comprimento de 200 mm quando não alongado com área de seção transversal de 22,5 mm² e um bloco curto de alumínio com 50 mm de comprimento quando não carregado com área de seção transversal de 40 mm². Se o elo for submetido à carga vertical mostrada na figura, determine a rotação do elo em torno do pino A. Dê a resposta em radianos. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.



Problemas 4.46/47

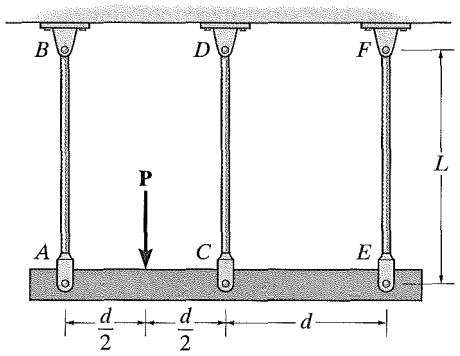
***4.48.** Cada um dos três cabos de aço A-36 tem diâmetro de 2 mm e comprimentos $L_{AC} = 1{,}60$ m e $L_{AB} = L_{AD} = 2{,}00$ m quando não carregados. Determine a força em cada cabo depois que a massa de 150 kg é suspensa pelo anel em A.

4.49. Cada um dos três cabos AB e AD de aço A-36 tem diâmetro de 2 mm e comprimentos $L_{AC} = 1{,}60$ m e $L_{AB} = L_{AD} = 2{,}00$ m quando não carregados. Determine o diâmetro exigido para o cabo AC de modo que cada cabo seja submetido à mesma força provocada pela massa de 150 kg suspensa pelo anel em A.



Problemas 4.48/49

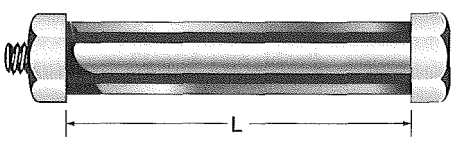
4.50. As três barras de suspensão são feitas do mesmo material e têm áreas de seção transversal iguais, A. Determine a tensão normal média em cada barra se a viga rígida ACE for submetida à força **P**.



Problema 4.50

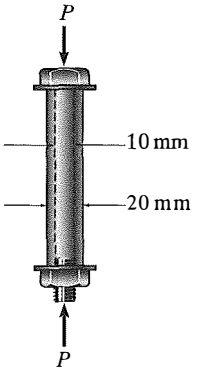
4.51. O conjunto é composto por um parafuso de aço A-36 e um tubo de latão vermelho C83400. Se a porca for apertada contra o tubo de modo que $L = 75$ mm, e quando girada um pouco mais, avance 0,02 mm no parafuso, determine a força no parafuso e no tubo. O parafuso tem diâmetro de 7 mm, e o tubo tem área de seção transversal de 100 mm².

*__4.52.__ O conjunto é composto por um parafuso de aço A-36 e um tubo de latão vermelho C83400. A porca foi apertada contra o tubo de modo que $L = 75$ mm. Determine a quantidade máxima de avanço adicional da porca no parafuso para que o material não sofra escoamento. O parafuso tem diâmetro de 7 mm, e o tubo tem área de seção transversal de 100 mm².



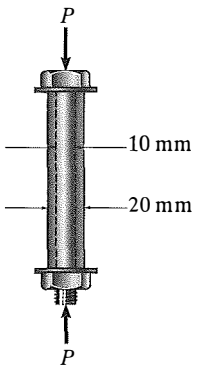
Problemas 4.51/52

4.53. O parafuso de aço com 10 mm de diâmetro está embutido em uma luva de bronze. O diâmetro externo dessa luva é 20 mm e seu diâmetro interno é 10 mm. Se o parafuso for submetido a uma força de compressão $P = 20$ kN, determine a tensão normal média no aço e no bronze. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{br} = 100$ GPa.



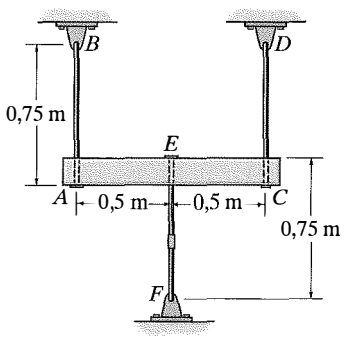
Problema 4.53

4.54. O parafuso de aço com 10 mm de diâmetro está embutido em uma luva de bronze. O diâmetro externo dessa luva é 20 mm e seu diâmetro interno é 10 mm. Se a tensão de escoamento para o aço for $(\sigma_e)_{aço} = 640$ MPa e para o bronze $(\sigma_e)_{lat} = 520$ MPa, determine o valor da maior carga elástica P que pode ser aplicada ao conjunto. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{br} = 100$ GPa.



Problema 4.54

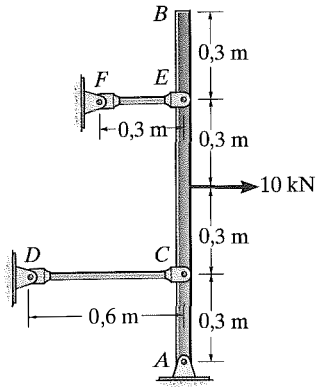
4.55. O elemento rígido é mantido na posição mostrada na figura por três tirantes de aço A-36. Cada tirante tem comprimento de 0,75 m quando não alongado e área de seção transversal de 125 mm². Determine as forças nos tirantes se for dada uma volta completa em um parafuso tensor na haste EF. O avanço da rosca é 1,5 mm. Despreze o tamanho do parafuso tensor e considere-o rígido. *Observação:* O avanço provocaria na haste, quando *não* carregada, um encurtamento de 1,5 mm quando o parafuso tensor girasse uma revolução completa.



Problema 4.55

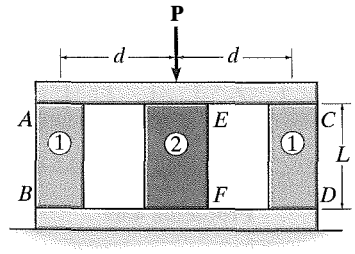
*4.56. A barra está presa por um pino em A e é sustentada por duas hastes de alumínio, cada uma com diâmetro de 25 mm e módulo de elasticidade E_{al} = 70 GPa. Considerando que a barra é rígida e inicialmente vertical, determine o deslocamento da extremidade B quando for aplicada uma força de 10 kN.

4.57. A barra está presa por um pino em A e é sustentada por duas hastes de alumínio, cada uma com diâmetro de 2 5 mm e módulo de elasticidade E_{al} = 70 GPa. Considerando que a barra é rígida e inicialmente vertical, determine a força em cada haste quando for aplicada uma força de 10 kN.



Problemas 4.56/57

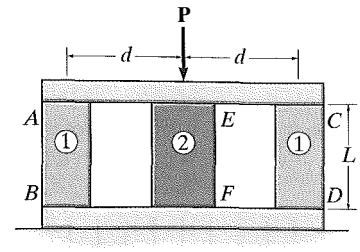
4.58. O conjunto é composto por dois postes do material 1 com módulo de elasticidade E_1 e cada um com área de seção transversal A_1 e um poste do material 2 com módulo de elasticidade E_2 e área de seção transversal A_2. Se uma carga central **P** for aplicada à tampa rígida, determine a força em cada material.



Problema 4.58

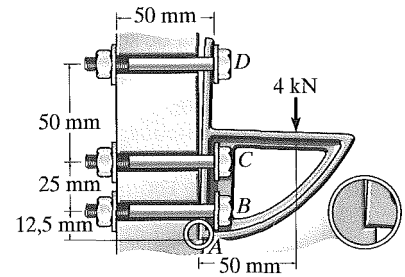
4.59. O conjunto é composto por dois postes AB e CD do material 1 com módulo de elasticidade E_1 e área de seção transversal A_1 cada e um poste central EF do material 2 com módulo de elasticidade E_2 e área de seção transversal A_2. Se os postes AB e CD tiverem de ser substituídos por postes do material 2, determine a área da seção transversal exigida para esses novos postes de modo que ambos os conjuntos sofram o mesmo grau de deformação quando carregados.

*4.60. O conjunto é composto por dois postes AB e CD do material 1 com módulo de elasticidade E_1 e área de seção transversal A_1 cada e um poste central EF do material 2 com módulo de elasticidade E_2 e área de seção transversal A_2. Se o poste EF tiver de ser substituído por um poste do material 1, determine a área da seção transversal exigida para esse novo poste de modo que ambos os conjuntos sofram o mesmo grau de deformação quando carregados.



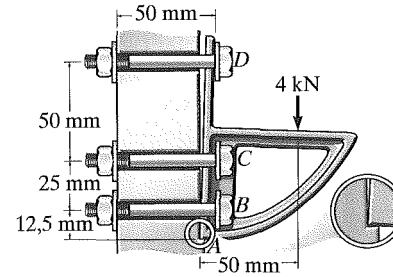
Problemas 4.59/60

4.61. O suporte é mantido preso à parede por três parafusos de aço A-36 em B, C e D. Cada parafuso tem diâmetro de 12,5 mm e comprimento de 50 mm quando não alongado. Se uma força de 4 kN for aplicada ao suporte como mostra a figura, determine a força desenvolvida em cada parafuso. Para o cálculo, considere que os parafusos não sofrem cisalhamento; ao contrário, a força vertical de 4 kN é suportada pela saliência em A. Considere também que a parede e o suporte são rígidos. O detalhe mostra a deformação muito ampliada dos parafusos.



Problema 4.61

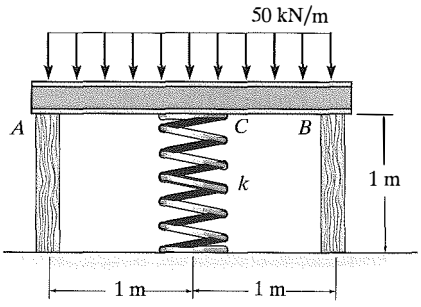
4.62. O suporte é mantido preso à parede por três parafusos de aço A-36 em B, C e D. Cada parafuso tem diâmetro de 12,5 mm e comprimento de 50 mm quando não alongado. Se uma força de 4 kN for aplicada ao suporte como mostra a figura, determine até que distância s a parte superior do suporte afasta-se da parede no parafuso D. Para o cálculo, considere que os parafusos não sofrem cisalhamento; ao contrário, a força vertical de 4 kN é suportada pela saliência em A. Considere também que a parede e o suporte são rígidos. O detalhe mostra a deformação muito ampliada dos parafusos.



Problema 4.62

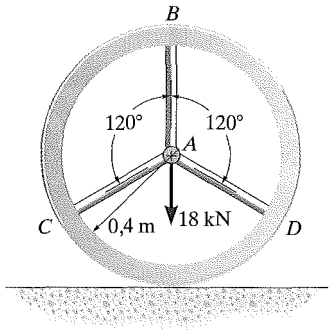
4.63. A barra rígida é apoiada pelos dois postes curtos de pinho branco e uma mola. Se o comprimento dos postes quando não carregados for 1 m e a área de seção transversal for 600 mm² e a mola tiver rigidez k = 2 MN/m e comprimento 1,02 m quando não deformada, determine a força em cada poste após a aplicação da carga à barra.

*4.64. A barra rígida é apoiada pelos dois postes curtos de pinho branco e uma mola. Se o comprimento dos postes quando não carregados for 1 m e a área de seção transversal for 600 mm² e a mola tiver rigidez $k = 2$ MN/m e comprimento de 1,02 m quando não deformada, determine o deslocamento vertical de A e B após a aplicação da carga à barra.



Problemas 4.63/64

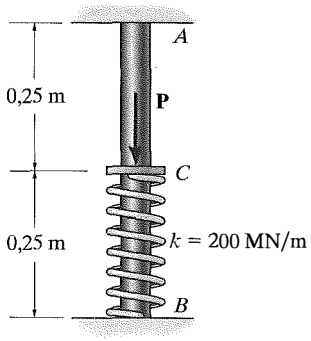
4.65. A roda está sujeita à força de 18 kN transmitida pelo eixo. Determine a força em cada um dos três raios. Considere que o aro é rígido, que os raios são feitos do mesmo material e que cada um tem a mesma área de seção transversal.



Problema 4.65

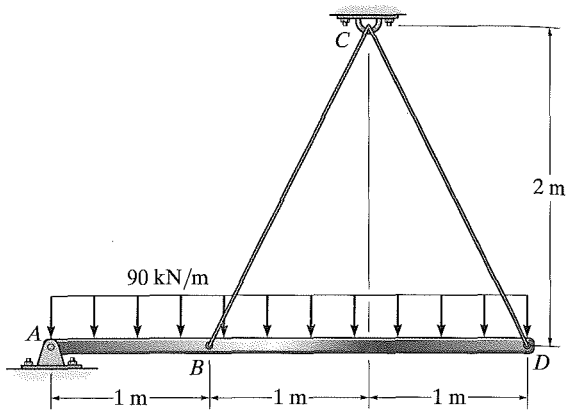
4.66. O poste é feito de alumínio 6061-T6 e tem 50 mm de diâmetro . Está preso aos suportes A e B e em seu centro C há uma mola espiral acoplada ao colar rígido. Se a mola não estiver comprimida na posição original, determine as reações em A e B quando a força $P = 40$ kN é aplicada ao colar.

4.67. O poste é feito de alumínio 6061-T6 e tem diâmetro de 50 mm. Está preso aos suportes A e B e em seu centro C há uma mola espiral acoplada ao colar rígido. Se a mola não estiver comprimida na posição inicial, determine a compressão na mola quando a carga $P = 50$ kN for aplicada ao colar.



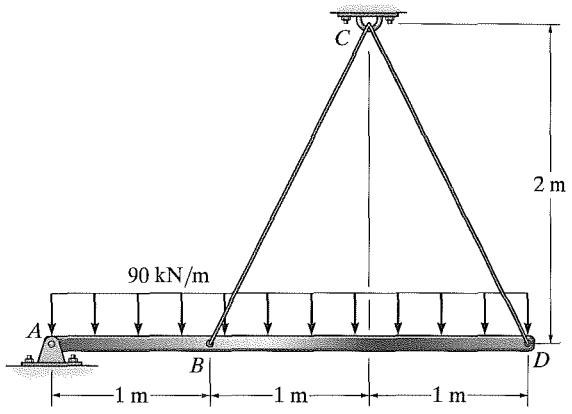
Problemas 4.66/67

*4.68. A barra rígida suporta um carregamento distribuído uniforme de 90 kN/m. Determine a força em cada cabo se cada um tiver área de seção transversal de 36 mm² e $E = 200$ GPa.



Problema 4.68

4.69. A posição original da barra rígida é horizontal e ela é sustentada por dois cabos com área de seção transversal de 36 mm² cada e $E = 200$ GPa. Determine a leve rotação da barra quando uma a carga uniforme é aplicada.



Problema 4.69

4.6 Tensão térmica

Uma mudança na temperatura pode provocar alterações nas dimensões de um material. Se a temperatura aumenta, o material, em geral, expande-se; se a temperatura diminui, o material contrai. A relação entre a expansão ou contração do material e o aumento ou redução da temperatura normalmente é *linear*. Se for esse o caso e se o material for homogêneo e isotrópico, estudos experimentais demonstraram que a deformação de um elemento de comprimento L pode ser calculada pela fórmula

$$\delta_T = \alpha \Delta T L \tag{4.4}$$

onde

α = uma propriedade do material denominada ***coeficiente linear de expansão térmica***. As unidades medem deformação por grau de temperatura [1/°C [Celsius] ou 1/°K [Kelvin] no SI]. Valores típicos são apresentados no final do livro.

ΔT = variação na temperatura do elemento

L = comprimento inicial do elemento

δ_T = variação no comprimento do elemento

Se a mudança na temperatura ocorrer em todo o comprimento do elemento, isto é, $\Delta T = \Delta T(x)$, ou se δ mudar ao longo do comprimento, a Equação 4.4 aplica-se para cada segmento que tenha comprimento dx. Neste caso, a mudança no comprimento do elemento é

$$\delta_T = \int_0^L \alpha \, \Delta T \, dx \tag{4.5}$$

A mudança no comprimento de um elemento *estaticamente determinado* pode ser calculada diretamente pela Equação 4.4 ou 4.5, visto que o elemento está livre para se expandir ou contrair quando sofrer mudança na temperatura. Contudo, quando o elemento é *estaticamente indeterminado*, esses deslocamentos térmicos podem ser restringidos pelos apoios, o que produz ***tensões térmicas*** que devem ser consideradas no projeto.

O cálculo dessas tensões térmicas pode ser feito pelos métodos descritos nas seções anteriores. Os exemplos apresentados a seguir ilustram algumas aplicações.

EXEMPLO 4.10

A barra de aço A-36 mostrada na Figura 4.18 está restringida para caber exatamente entre os dois suportes fixos quando $T_1 = 30°C$. Se a temperatura aumentar até $T_2 = 60°C$, determine a tensão térmica normal média desenvolvida na barra.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre da barra é mostrado na Figura 4.18b. Visto que não há nenhuma carga externa, a força em A é igual, mas oposta, à força que age em B; isto é,

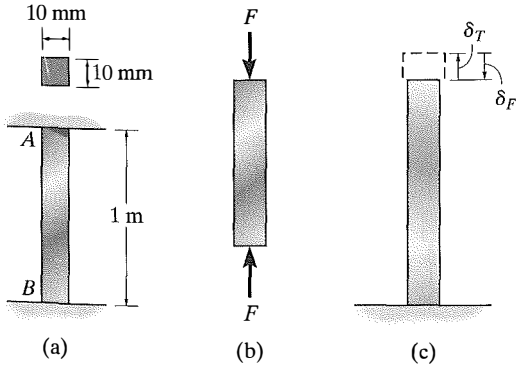


Figura 4.18

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_A = F_B = F$$

O problema é estaticamente indeterminado, uma vez que essa força não pode ser determinada por equilíbrio.

Compatibilidade. Visto que $\delta_{A/B} = 0$, o deslocamento térmico δ_T que ocorreria em A (Figura 4.18c) é contrabalançado pela força **F** que seria exigida para levar a barra δ_F de volta à sua posição original. A condição de compatibilidade em A torna-se

$$(+\uparrow) \qquad \delta_{A/B} = 0 = \delta_T - \delta_F$$

A aplicação das relações térmicas e de carga–deslocamento resulta:

$$0 = \alpha \Delta T L - \frac{FL}{AE}$$

Assim, pelos dados apresentados no final do livro,

$$\begin{aligned} F &= \alpha \Delta T A E \\ &= [12(10^{-6})/°C](60°C - 30°C)(0{,}010\,m)^2[200(10^6)\,kPa] \\ &= 7{,}2\,kN \end{aligned}$$

O valor de **F** indica claramente que mudanças na temperatura podem provocar grandes forças de reação em elementos estaticamente indeterminados.

Visto que **F** também representa a força axial interna no interior da barra, a tensão de compressão normal média é, portanto,

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{7{,}2 \times 10^{-3}\,MN}{(0{,}01\,m)^2} = 72\,MPa \quad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 4.11

Um tubo de alumínio 2014-T6 com área de seção transversal de 600 mm² é utilizado como luva para um parafuso de aço A-36 com área de seção transversal de 400 mm² (Figura 4.19a). Quando a temperatura é $T_1 = 15°C$, a porca mantém o conjunto em uma posição precisa, de tal modo que a força axial no parafuso é desprezível. Se a temperatura aumentar para $T_2 = 80°C$, determine a tensão normal média no parafuso e na luva.

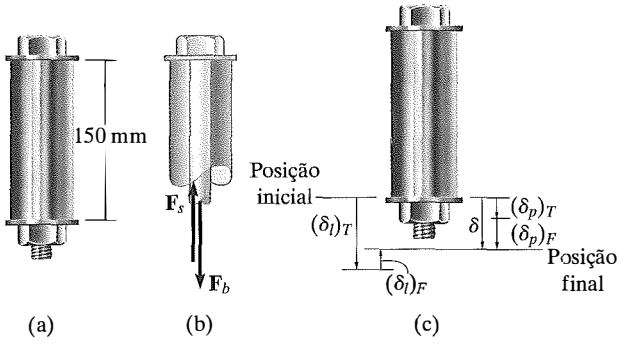


Figura 4.19

SOLUÇÃO

Equilíbrio. A Figura 4.19b mostra o diagrama de corpo livre para um segmento secionado do conjunto. As forças F_p e F_l são produzidas desde que o coeficiente de expansão térmica da luva seja mais alto do que o do parafuso. Por essa razão, a luva se expandirá mais do que o parafuso quando a temperatura aumentar. O problema é estaticamente indeterminado, pois essas forças não podem ser determinadas por equilíbrio. Entretanto, exige-se que

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad F_p = F_l \tag{1}$$

Compatibilidade. O aumento de temperatura provoca a expansão $(\delta_l)_T$ na luva e $(\delta_p)_T$ no parafuso (Figura 4.19c). Entretanto, as forças redundantes F_b e F_s alongam o parafuso e encurtam a luva. Como consequência, a extremidade do conjunto atinge uma posição final, que não é a mesma que a posição inicial. Consequentemente, a condição de compatibilidade torna-se

$$(+\downarrow) \qquad \delta = (\delta_p)_T + (\delta_p)_F = (\delta_l)_T - (\delta_l)_F$$

Aplicando as equações 4.2 e 4.4 e usando as propriedades mecânicas apresentadas no final do livro, temos

$$[12(10^{-6})/°C](80°C - 15°C)(0{,}150\ m) + \frac{F_b(0{,}150\ m)}{(400\ mm^2)(10^{-6}\ m^2/mm^2)[200(10^9)\ N/m^2]} = [23(10^{-6})/°C](80°C - 15°C)(0{,}150\ m) - \frac{F_s(0{,}150\ m)}{(600\ mm^2)(10^{-6}\ m^2/mm^2)[73{,}1(10^9)\ N/m^2]}$$

Usando a equação 1 e resolvendo, obtemos

$$F_l = F_p = 20{,}26\ kN$$

A tensão normal média no parafuso e luva é, portanto,

$$\sigma_p = \frac{20{,}26\ kN}{400\ mm^2\ (10^{-6}\ m^2/mm^2)} = 50{,}6\ MPa \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_l = \frac{20{,}26\ kN}{600\ mm^2\ (10^{-6}\ m^2/mm^2)} = 33{,}8\ MPa \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Visto que nessa análise consideramos comportamento linear elástico para o material, as tensões calculadas devem ser verificadas para garantir que não ultrapassem os limites de proporcionalidade para o material.

EXEMPLO 4.12

A barra rígida mostrada na Figura 4.20a está presa à parte superior dos três postes feitos de aço A-36 e alumínio 2014-T6. Cada um dos postes tem comprimento de 250 mm quando não há nenhuma carga aplicada à barra e a temperatura é $T_1 = 20°C$. Determine a força suportada por cada poste se a barra for submetida a um carregamento distribuído uniformemente de 150 kN/m e a temperatura aumentar até $T_2 = 80°C$.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. O diagrama de corpo livre da barra é mostrado na Figura 4.20b. O equilíbrio de momentos em torno do centro da barra exige que as forças nos postes de aço sejam iguais. A soma das forças no diagrama de corpo livre dá como resultado

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 2F_{aço} + F_{al} - 90(10^3)\ N = 0 \tag{1}$$

Compatibilidade. Por causa da carga, geometria e simetria do material, a parte superior de cada poste sofre o mesmo deslocamento. Em consequência,

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{aço} = \delta_{al} \tag{2}$$

A posição final da parte superior de cada poste é igual ao deslocamento causado pelo aumento da temperatura mais o deslocamento causado pela força de compressão axial interna (Figura 4.20c). Assim, para um poste de aço e para o poste de alumínio, temos

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{aço} = -(\delta_{aço})_T + (\delta_{aço})_F$$
$$(+\downarrow) \qquad \delta_{al} = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

Aplicando a equação 2, temos

$$-(\delta_{aço})_T + (\delta_{aço})_F = -(\delta_{al})_T + (\delta_{al})_F$$

Usando as equações 4.2 e 4.4 e as propriedades dos materiais apresentadas no final do livro, obtemos

$$-[12(10^{-6})/°C](80°C - 20°C)(0{,}250\ m) + \frac{F_{aço}(0{,}250\ m)}{\pi(0{,}020\ m)^2[200\ 10^9)\ N/m^2]} = -[23(10^{-6})/°C](80°C - 20°C)(0{,}250\ m) + \frac{F_{al}(0{,}250\ m)}{\pi(0{,}03\ m)^2[73{,}1(10^9)\ N/m^2]}$$

$$F_{aço} = 1{,}216F_{al} - 165{,}9(10^3) \tag{3}$$

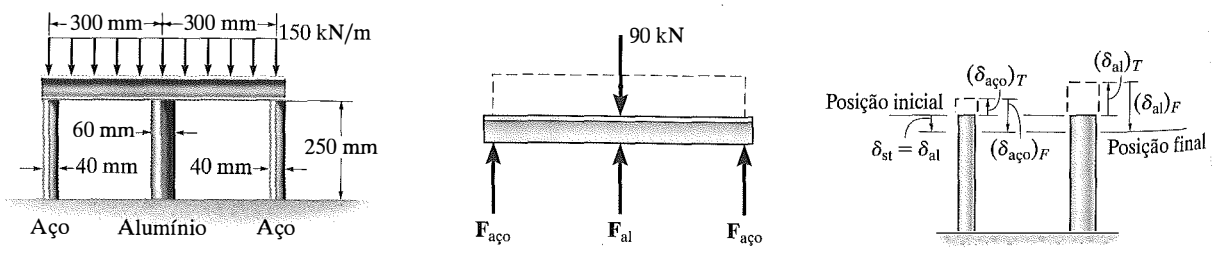


Figura 4.20

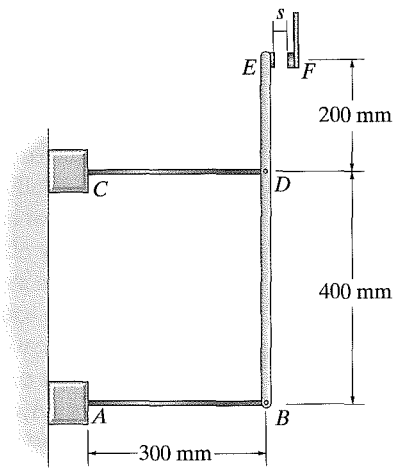
Para manter a *consistência*, todos os dados numéricos foram expressos em newtons, metros e graus Celsius. A solução simultânea das equações 1 e 3 dá

$F_{aço} = -16{,}4\ \text{kN}$ $\quad F_{al} = 123\ \text{kN}$ *Resposta*

O valor negativo para $F_{aço}$ indica que essa força age no sentido contrário ao mostrado na Figura 4.20b. Em outras palavras, os postes de aço estão sob tração, e o poste de alumínio está sob compressão.

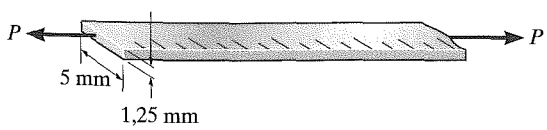
PROBLEMAS

4.70. A chave elétrica fecha quando as hastes de ligação *CD* e *AB* se aquecem, o que provoca a translação e a rotação do braço rígido *BDE* até fechar o contato em *F*. A posição original de *BDE é vertical* e a temperatura é 20°C. Se *AB* for feita de bronze C86100 e *CD*, de alumínio 6061-T6, determine o espaço *s* exigido entre os contatos para a chave fechar quando a temperatura alcançar 110°C.



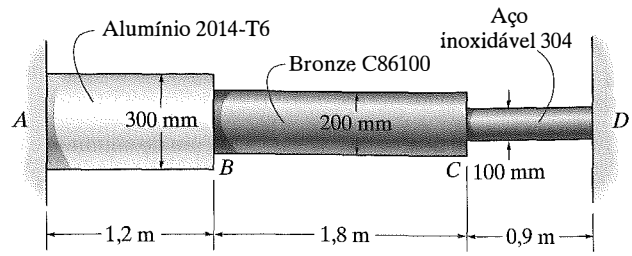
Problema 4.70

4.71. Uma trena de aço é usada por um supervisor para medir o comprimento de uma reta. A seção transversal da trena é retangular, com 1,25 mm de espessura por 5 mm de largura, e o comprimento é 30 m quando $T_1 = 20°C$ e a carga de tração na trena é 100 N. Determine o comprimento verdadeiro da reta medida se a leitura da trena for 139 m quando usada sob tração de 175 N a $T_2 = 40°C$. O piso onde a trena é utilizada é plano. $\alpha_{aço} = 17(10^{-6})/°C$, $E_{aço} = 200$ GPa.



Problema 4.71

4.72. Os diâmetros e materiais de fabricação do conjunto são indicados na figura. Se o conjunto estiver bem ajustado entre seus apoios fixos quando a temperatura é $T_1 = 20°C$, determine a tensão normal média em cada material quando a temperatura atingir $T_2 = 40°C$.

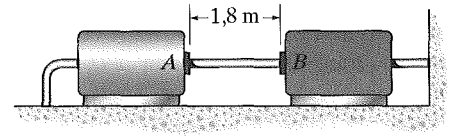


Problema 4.72

4.73. Uma placa de concreto de alta resistência utilizada em uma pista de rolamento tem 6 m de comprimento quando sua temperatura é 10°C. Se houver uma folga de 3 mm em um de seus lados antes de tocar seu apoio fixo, determine a temperatura exigida para fechar a folga. Qual é a tensão de compressão no concreto se a temperatura aumentar até 60°C?

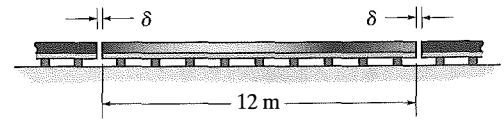
4.74. Um tubo de vapor com 1,8 m de comprimento é feito de aço com $\sigma_e = 280$ MPa e está ligado diretamente a duas turbinas *A* e *B*, como mostra a figura. O diâmetro externo do tubo é 100 mm e a espessura da parede é 6 mm. A ligação foi feita a $T_1 = 20°C$. Considerando que os pontos de acoplamento das turbinas são rígidos, determine a força que o tubo exerce sobre elas quando o vapor e, portanto, o tubo, atingem uma temperatura de $T_2 = 135°C$.

4.75. Um tubo de vapor com 1,8 m de comprimento é feito de aço com $\sigma_e = 280$ MPa e está ligado diretamente a duas turbinas *A* e *B*, como mostra a figura. O diâmetro externo do tubo é 100 mm e a espessura da parede é 6 mm. A ligação foi feita a $T_1 = 20°C$. Considerando que a rigidez dos pontos de acoplamento das turbinas é $k = 16$ MN/mm, determine a força que o tubo exerce sobre as turbinas quando o vapor e, portanto, o tubo, atingem uma temperatura de $T_2 = 135°C$.



Problemas 4.74/75

4.76. Os trilhos de aço A-36 de uma ferrovia têm 12 m de comprimento e foram assentados com uma pequena folga entre eles para permitir dilatação térmica. Determine a folga δ exigida para que os trilhos apenas encostem um no outro quando a temperatura aumentar de $T_1 = -30°C$ para $T_2 = 30°C$. Considerando essa folga, qual seria a força axial nos trilhos se a temperatura atingisse $T_3 = 40°C$? A área de seção transversal de cada trilho é 3.200 mm².

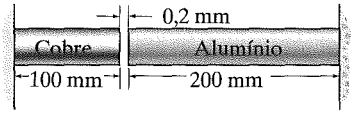


Problema 4.76

4.77. Os dois segmentos de haste circular, um de alumínio e o outro de cobre, estão presos às paredes rígidas de tal modo que há uma folga de 0,2 mm entre eles quando $T_1 = 15°C$.

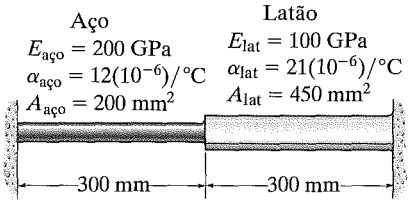
Qual é a maior temperatura T_2 exigida para apenas fechar a folga? Cada haste tem diâmetro de 30 mm, $\alpha_{al} = 24(10^{-6})/°C$, $E_{al} = 70$ GPa, $\alpha_{cobre} = 17(10^{-6})/°C$, $E_{cobre} = 126$ GPa. Determine a tensão normal média em cada haste se $T_2 = 95°C$.

4.78. Os dois segmentos de haste circular, um de alumínio e o outro de cobre, estão presos às paredes rígidas de modo tal que há uma folga de 0,2 mm entre eles quando $T_1 = 15°C$. Cada haste tem diâmetro de 30 mm, $\alpha_{al} = 24(10^{-6})/°C$, $E_{al} = 70$ GPa, $\alpha_{cobre} = 17(10^{-6})/°C$, $E_{cobre} = 126$ GPa. Determine a tensão normal média em cada haste se $T_2 = 150°C$. Calcule também o novo comprimento do segmento de alumínio.



Problemas 4.77/78

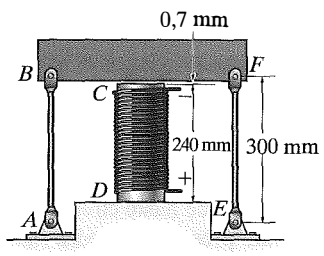
4.79. Duas barras feitas de materiais diferentes são acopladas e instaladas entre duas paredes quando a temperatura é $T_1 = 150°C$. Determine a força exercida nos apoios (rígidos) quando a temperatura for $T_2 = 20°C$. As propriedades dos materiais e as áreas de seção transversal de cada barra são dadas na figura.



Problema 4.79

***4.80.** A haste central CD do conjunto é aquecida de $T_1 = 30°C$ até $T_2 = 180°C$ por resistência elétrica. Na temperatura mais baixa, a folga entre C e a barra rígida é 0,7 mm. Determine a força nas hastes AB e EF provocadas pelo aumento na temperatura. As hastes AB e EF são feitas de aço e cada uma tem área de seção transversal de 125 mm². CD é feita de alumínio e tem área de seção transversal de 375 mm². $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $\alpha_{aço} = 12(10^{-6})/°C$ e $\alpha_{al} = 23(10^{-6})/°C$.

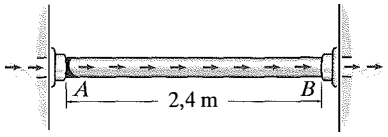
4.81. A haste central CD do conjunto é aquecida de $T_1 = 30°C$ até $T_2 = 180°C$ por resistência elétrica. As duas hastes AB e EF situadas nas extremidades também são aquecidas de $T_1 = 30°C$ até $T_2 = 50°C$. Na temperatura mais baixa, T_1, a folga entre C e a barra rígida é 0,7 mm. Determine a força nas hastes AB e EF provocada pelo aumento na temperatura. As hastes AB e EF são feitas de aço e cada uma tem área de seção transversal de 125 mm². CD é feita de alumínio e tem área de seção transversal de 375 mm². $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $\alpha_{aço} = 12(10^{-6})/°C$ e $\alpha_{al} = 23(10^{-6})/°C$.



Problemas 4.80/81

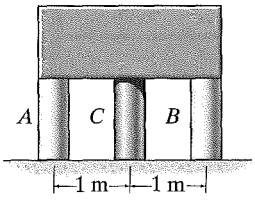
4.82. O tubo de aço A-36 está acoplado aos colares em A e B. Quando a temperatura é 15°C, não há nenhuma carga axial no tubo. Se o gás quente que passa pelo tubo provocar uma elevação de $\Delta T = (20 + 30x)°C$ na temperatura do tubo, onde x é dado em metros, determine a tensão normal média no tubo. O diâmetro interno é 50 mm, e a espessura da parede é 4 mm.

4.83. O tubo de bronze 86100 tem raio interno de 12,5 mm e espessura de parede de 5 mm. Se o gás que passa por ele mudar a temperatura do tubo uniformemente de $T_A = 60°C$ em A para $T_B = 15°C$ em B, determine a força axial que ele exerce sobre as paredes. O tubo foi instalado entre as paredes quando $T = 15°C$.



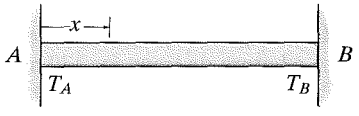
Problemas 4.82/83

***4.84.** O bloco rígido pesa 400 kN e será suportado pelos postes A e B, feitos de aço A-36, e pelo poste C, feito de latão vermelho C83400. Se todos os postes tiverem o mesmo comprimento original antes de serem carregados, determine a tensão normal média desenvolvida em cada um deles, quando o poste C for aquecido de modo que sua temperatura aumente 10°C. Cada poste tem área de seção transversal de 5.000 mm².



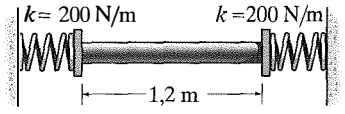
Problema 4.84

4.85. A barra tem área de seção transversal A, comprimento L, módulo de elasticidade E e coeficiente de expansão térmica α. A temperatura da barra muda uniformemente ao longo de seu comprimento de T_A em A para T_B em B de modo que, em qualquer ponto x ao longo da barra, $T = T_A + x(T_B - T_A)/L$. Determine a força que a barra exerce nas paredes rígidas. Inicialmente, não há nenhuma força axial na barra.



Problema 4.85

4.86. A haste é feita de aço A-36 e tem diâmetro de 6 mm. Se as molas forem comprimidas 12 mm quando a temperatura da haste é $T = 10°C$, determine a força na haste quando sua temperatura for $T = 75°C$.



Problema 4.86

4.7 Concentrações de tensão

Na Seção 4.1, mostramos que, quando uma força axial é aplicada a um elemento, ela cria uma distribuição de tensão complexa dentro de uma região localizada do ponto de aplicação da carga. Essas distribuições de tensão típicas são mostradas na Figura 4.1. As distribuições de tensão complexas não surgem somente sob um carregamento concentrado; também aparecem em seções nas quais a área da seção transversal do elemento muda. Por exemplo, considere a barra na Figura 4.21a, que está submetida a uma força axial P. Aqui, podemos ver que as linhas da grade, as quais, antes, eram horizontais e verticais, sofrem deflexão e formam um padrão irregular em torno do furo localizado no centro da barra. A tensão normal máxima na barra ocorre na seção a–a que passa pela *menor* área de seção transversal da mesma. Contanto que o material se comporte de maneira linear elástica, a distribuição de tensão que age sobre essa seção pode ser determinada por análise matemática, usando-se a teoria da elasticidade ou por meios experimentais, medindo a deformação normal na seção a–a e calculando a tensão pela lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Independentemente do método usado, a forma geral da distribuição de tensão será como a mostrada na Figura 4.21b. De maneira semelhante, se a seção transversal sofrer redução com a utilização, por exemplo, de filetes de rebaixo, como na Figura 4.22a, então, novamente, a tensão normal máxima na barra ocorrerá na *menor* área de seção transversal, seção a–a, e a distribuição de tensão será como a mostrada na Figura 4.22b.

Em ambos os casos, o *equilíbrio da força* exige que o valor da *força resultante* desenvolvida pela distribuição de tensão seja igual a P. Em outras palavras,

$$P = \int_A \sigma \, dA \tag{4.6}$$

Como afirmamos na Seção 1.4, essa integral é uma representação *gráfica* do *volume* sob cada um dos diagramas de distribuição de tensão mostrados na Figura 4.21b ou 4.22b. Além do mais, o equilíbrio de momento exige que cada distribuição de tensão seja simétrica por toda a seção transversal, de modo que **P** deve passar pelo *centroide* de cada *volume*.

Entretanto, na prática da engenharia, a distribuição de tensão real *não* precisa ser determinada. Em vez disso, basta saber qual é a *tensão máxima* nessas seções e, então, o elemento é projetado para resistir a essa tensão quando a carga axial **P** for aplicada. Em casos nos quais a área da seção transversal de um elemento muda, como os já discutidos, podem-se determinar valores específicos da tensão normal máxima na seção crítica por métodos experimentais ou por técnicas matemáticas avançadas que utilizam a teoria da elasticidade. Os resultados dessas investigações normalmente são apresentados em gráficos com a utilização de um ***fator de concentração de tensão*** K. Definimos K como a razão entre a tensão máxima e a tensão média que agem sobre a menor seção transversal; isto é,

$$K = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{méd}} \tag{4.7}$$

Contanto que K seja conhecido e a tensão normal média tenha sido calculada por $\sigma_{méd} = P/A$, onde A é a *menor* área de seção transversal (figuras 4.21c e 4.22c), então, pela Equação 4.7, a tensão máxima na seção transversal é $\sigma_{máx} = K(P/A)$.

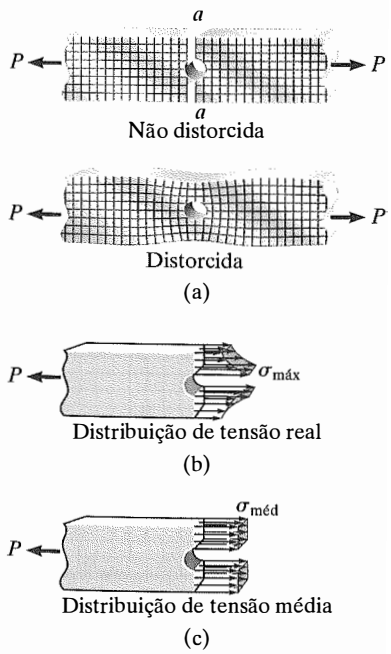


Figura 4.21

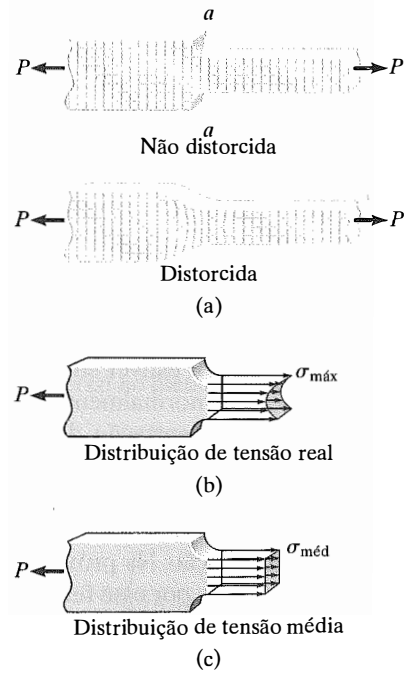


Figura 4.22

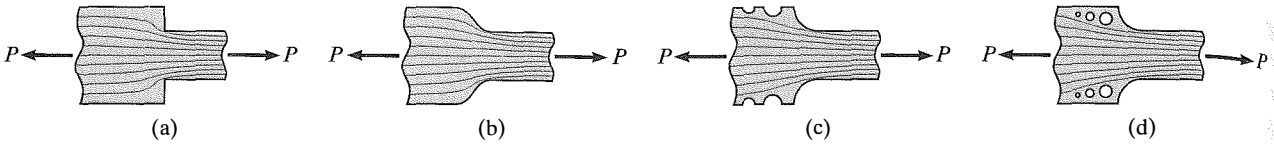


Figura 4.23

Em geral, valores específicos de K são apresentados em gráficos em manuais relacionados à análise de tensão, como os exemplos dados nas figuras 4.24 e 4.25, respectivamente.* Em particular, observe que K é independente das propriedades do material da barra; mais exatamente, ele *depende* somente da *geometria* da barra e do tipo de descontinuidade. À medida que o tamanho r da descontinuidade *diminui*, a concentração de tensão aumenta. Por exemplo, quando há uma mudança na seção transversal de uma barra, determina-se teoricamente que um canto vivo (Figura 4.23a) produz um fator de concentração de tensão maior que 3. Em outras palavras, a tensão normal máxima será três vezes maior do que a tensão normal média na menor seção transversal. Todavia, pode-se reduzir o fator para, digamos, 1,5, introduzindo-se um filete de rebaixo (Figura 4.23b). Uma redução adicional pode ser obtida por meio de pequenas ranhuras ou furos na zona de transição (figuras 4.23c e 4.23d). Em todos esses casos, a configuração do elemento ajuda a reduzir a rigidez do material em torno dos cantos, de modo que a deformação, e também a tensão, sejam distribuídas mais uniformemente por toda a barra.

Os fatores de concentração de tensão dados nas figuras 4.24 e 4.25 foram determinados com base em um carregamento estático, considerando que a tensão no material não ultrapassa o limite de proporcionalidade. Se o material for *muito frágil*, o limite de proporcionalidade pode ser igual à tensão de ruptura e, portanto, para esse material, a falha começará *no* ponto de concentração de tensão quando o limite de proporcionalidade for atingido. Em essência, uma trinca começará a formar-se nesse ponto e uma concentração de tensão mais alta se desenvolverá na *ponta* dessa trinca. Por sua vez, isso provoca a propagação da trinca pela seção transversal, resultando em fratura repentina. Por essa razão, é muito importante que se usem fatores de concentração de tensão em projetos nos quais são utilizados materiais frágeis. Por outro lado, se o material for dúctil e estiver submetido a uma carga estática, os projetistas normalmente desprezam a utilização de fatores de concentração de tensão, visto que nenhuma tensão que ultrapasse o limite de proporcionalidade resultará em uma trinca. Ao contrário, o material terá resistência de reserva devido a escoamento e endurecimento por deformação. Na próxima seção, discutiremos os efeitos causados por esse fenômeno.

* Veja Lipson, C. e Juvinall, R. C., *Handbook of stress and strength*, Macmillan, 1963.

Concentrações de tensão também são responsáveis por muitas falhas de elementos estruturais ou mecânicos sujeitos a *carregamentos de fadiga*. Nesses casos, uma concentração de tensão provocará trincas no material se a tensão ultrapassar o limite de tolerância do material, seja ele dúctil ou frágil. Aqui, o material *localizado* na ponta da trinca permanece em estado *frágil*, e, portanto, a trinca continua a crescer, levando a uma fratura progressiva. Consequentemente, engenheiros envolvidos nos projetos desses elementos devem sempre procurar modos de limitar o dano que pode ser causado por fadiga.

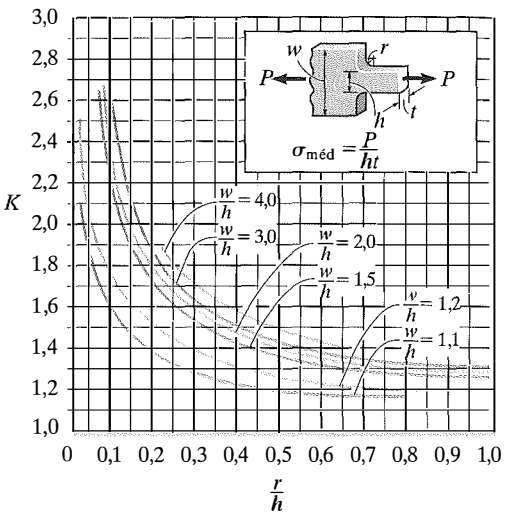


Figura 4.24

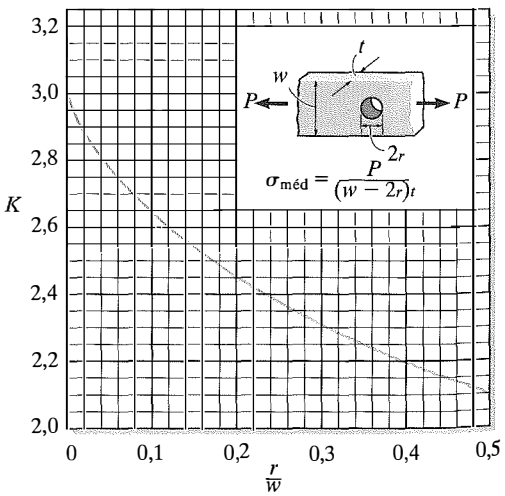


Figura 4.25

PONTOS IMPORTANTES

- *Concentrações de tensão* ocorrem em seções onde a área da seção transversal muda repentinamente. Quanto mais severa a mudança, maior a concentração de tensão.
- Para projeto ou análise, basta determinar a tensão máxima que age sobre a menor área de seção transversal. Para tanto, utiliza-se um *fator de concentração de tensão*, K, que foi determinado por meios experimentais e é função apenas da geometria do corpo de prova.
- Normalmente, a concentração de tensão em um corpo de prova dúctil submetido a um carregamento estático *não* terá de ser considerada no projeto. Todavia, se o material for *frágil* ou estiver sujeito a carregamentos de *fadiga*, as concentrações de tensão se tornarão importantes.

EXEMPLO 4.13

As dimensões da barra de aço são mostradas na Figura 4.26. Se a tensão admissível for $\sigma_{adm} = 115$ MPa, determine a maior força axial P que a barra pode suportar.

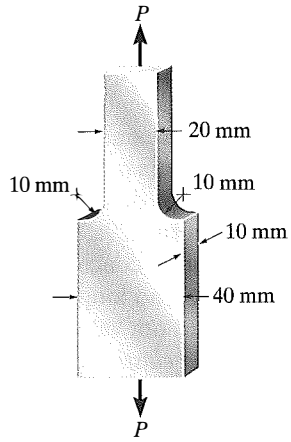


Figura 4.26

SOLUÇÃO

Como há um filete de rebaixo, o fator de concentração de tensão pode ser determinado pelo gráfico na Figura 4.24. O cálculo dos parâmetros geométricos necessários dá

$$\frac{r}{h} = \frac{10 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0,50$$

$$\frac{w}{h} = \frac{40 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 2$$

Portanto, do gráfico

$$k = 1,4$$

O cálculo da tensão normal média na *menor* seção transversal dá

$$\sigma_{méd} = \frac{P}{(20 \text{ mm})(10 \text{ mm})} = 0,005P \text{ N/mm}^2$$

A aplicação da Equação 4.7 com $\sigma_{adm} = \sigma_{máx}$ produz

$$\sigma_{adm} = K\sigma_{méd}$$
$$115 \text{N/mm}^2 = 1,4(0,0005P)$$
$$P = 16,43(10^3) \text{ N}$$
$$= 16,43 \text{ KN} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 4.14

A tira de aço mostrada na Figura 4.27 está sujeita a uma carga axial de 80 kN. Determine a tensão normal máxima desenvolvida na tira e o deslocamento de uma de suas extremidades em relação à outra. A tensão de escoamento do aço é $\sigma_e = 700$ MPa e $E_{aço} = 200$ GPa.

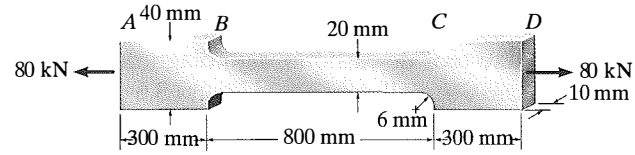


Figura 4.27

SOLUÇÃO

Tensão normal máxima. Por inspeção, a tensão normal máxima ocorre na menor seção transversal, onde o filete de rebaixo começa em B ou C. O fator de concentração de tensão é determinado pela Figura 4.23. Exige-se que

$$\frac{r}{h} = \frac{6 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0,3, \qquad \frac{w}{h} = \frac{40 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 2$$

Assim, $K = 1,6$.

A tensão máxima é, portanto,

$$\sigma_{máx} = K\frac{P}{A} = 1,6\left[\frac{80(10^3)}{(0,02 \text{ m})(0,01 \text{ m})}\right] = 640 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que o material permanece elástico, visto que $640 \text{ MPa} < \sigma_e = 700 \text{ MPa}$.

Deslocamento. Aqui, desprezaremos as deformações localizadas ao redor da carga aplicada e na mudança repentina na seção transversal no filete de rebaixo (princípio de Saint-Venant). Temos

$$\delta_{A/D} = \sum\frac{PL}{AE} = 2\left\{\frac{80(10^3) \text{ N}(0,3 \text{ m})}{(0,04 \text{ m})(0,01 \text{ m})[200(10^9) \text{ N/m}^2]}\right\} + \left\{\frac{80(10^3) \text{ N}(0,8 \text{ m})}{(0,02 \text{ m})(0,01 \text{ m})[200(10^9) \text{ N/m}^2]}\right\}$$

$$\sigma_{A/D} = 2,20 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

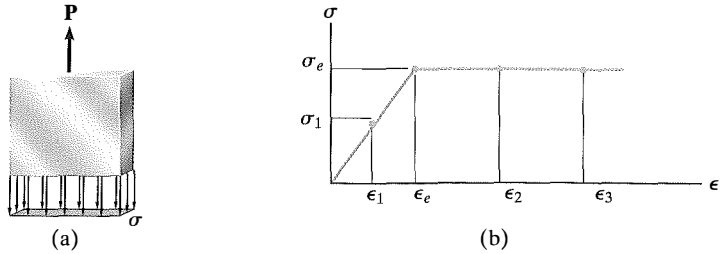


Figura 4.28

*4.8 Deformação axial inelástica

Até aqui, consideramos somente carregamentos que provocam o comportamento elástico do material do elemento. Entretanto, às vezes, acontece de um elemento ser projetado de modo que o carregamento provoca o escoamento do material e, com isso, sua deformação permanente. Esses elementos costumam ser feitos de um metal de alta ductilidade, como aço recozido de baixo teor de carbono, cujo diagrama tensão–deformação é semelhante ao da Figura 3.6 e pode ser *modelado* como mostra a Figura 4.28b. Um material que exiba esse comportamento é denominado ***elástico perfeitamente plástico*** ou ***elastoplástico***.

Para ilustrar fisicamente como tal material se comporta, considere a barra na Figura 4.28a, que está sujeita à carga axial **P**. Se a carga provocar o desenvolvimento de uma *tensão elástica* $\sigma = \sigma_1$ na barra, então, aplicando a Equação 4.6, o *equilíbrio* exige $P = \int \sigma_1 dA = \sigma_1 A$. Além disso, a tensão σ_1 provoca uma deformação ϵ_1 na barra, como indica o diagrama tensão–deformação (Figura 4.28b). Se, agora, P for aumentada para P_p, de tal modo que provoque escoamento do material, isto é, $\sigma = \sigma_e$ então, novamente, $P_p = \int \sigma_e dA = \sigma_e A$. A carga P_p é denominada *carga plástica*, uma vez que representa a carga máxima que pode ser suportada por um material elastoplástico. Para o caso em questão, as deformações *não* são definidas de maneira única. Ao contrário, no instante em que σ_e é atingida, *em primeiro lugar,* a barra é submetida à deformação por escoamento ϵ_e (Figura 4.28b) e, em seguida, a barra *continuará* a *escoar* (ou alongar-se) de modo que serão geradas as deformações ϵ_2, ϵ_3 etc. Visto que nosso "modelo" do material exibe comportamento de material perfeitamente plástico, esse alongamento continuará indefinidamente, mesmo sem nenhum aumento na carga. Contudo, na verdade, após um pouco de escoamento, o material começará a endurecer por deformação, de modo que a resistência extra que ele obtenha *impedirá* qualquer deformação adicional. O resultado é que qualquer projeto baseado nesse comportamento será seguro, pois o endurecimento por deformação proporciona ao material um potencial para suportar uma carga *adicional*, se necessário.

Agora, considere o caso de uma barra que tenha um furo, como mostra a Figura 4.29a. À medida que o valor de **P** aumenta, ocorre uma concentração de tensão no material próximo ao furo, ao longo da seção *a–a*. Nesse ponto, a tensão alcançará um valor máximo $\sigma_{máx} = \sigma_1$ e sofrerá uma *deformação elástica* correspondente ϵ_1 (Figura 4.29b). As tensões e deformações correspondentes em outros pontos ao longo da seção transversal serão menores, como indica a distribuição de tensão mostrada na Figura 4.29c. Como esperado, o equilíbrio exige $P = \int \sigma dA$. Em outras palavras, P é geometricamente equivalente ao "volume" contido no interior da distribuição de tensão. Se, agora, aumentarmos a carga para P', de modo que $\sigma_{máx} = \sigma_e$, o material começará a escoar para fora do furo, até que a condição de equilíbrio $P' = \int \sigma dA$ seja satisfeita (Figura 4.29d). Como a figura mostra, isso produz uma distribuição de tensão cujo "volume" é geometricamente *maior* que o mostrado na Figura 4.29c. Um aumento adicional na carga provocará, a certa altura, o escoamento de *toda a seção transversal*, até que nenhuma *carga maior* possa ser sustentada pela

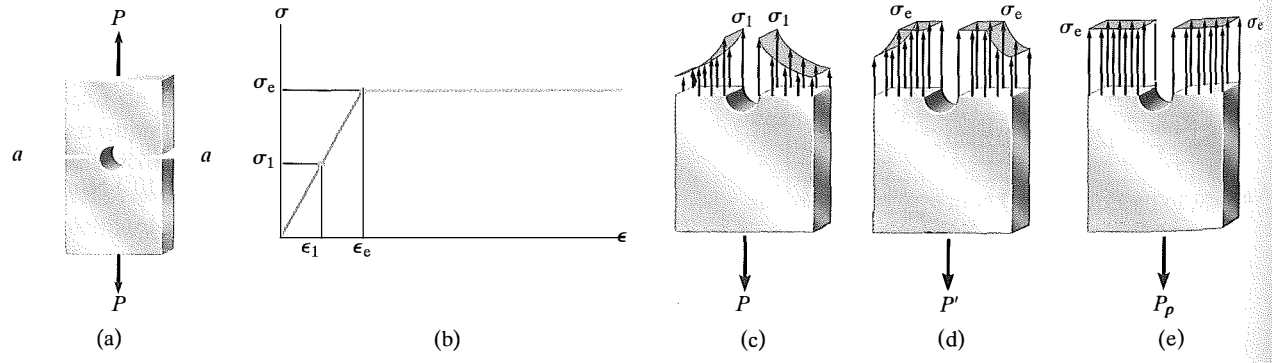


Figura 4.29

barra. Essa *carga plástica* P_p é mostrada na Figura 4.29e e pode ser calculada pela condição de equilíbrio

$$P_p = \int_A \sigma_e \, dA = \sigma_e A$$

Nessa expressão, σ_e é a tensão de escoamento e A é a área de seção transversal da barra na seção *a–a*.

Os exemplos a seguir ilustram numericamente como esses conceitos se aplicam a outros tipos de problemas quando o material apresenta comportamento elastoplástico.

EXEMPLO 4.15

Dois cabos de aço são usados para suspender o peso de 15 kN (≈ 1,5 kg) (Figura 4.30a). O comprimento do cabo AB, quando não alongado, é 5 m, e o comprimento do cabo AC, quando não alongado, é 5,0075 m. Se cada cabo tiver área de seção transversal de 30 mm² e o aço puder ser considerado elástico perfeitamente plástico, como mostra o gráfico σ-ϵ na Figura 4.30b, determine a força em cada cabo e o respectivo alongamento.

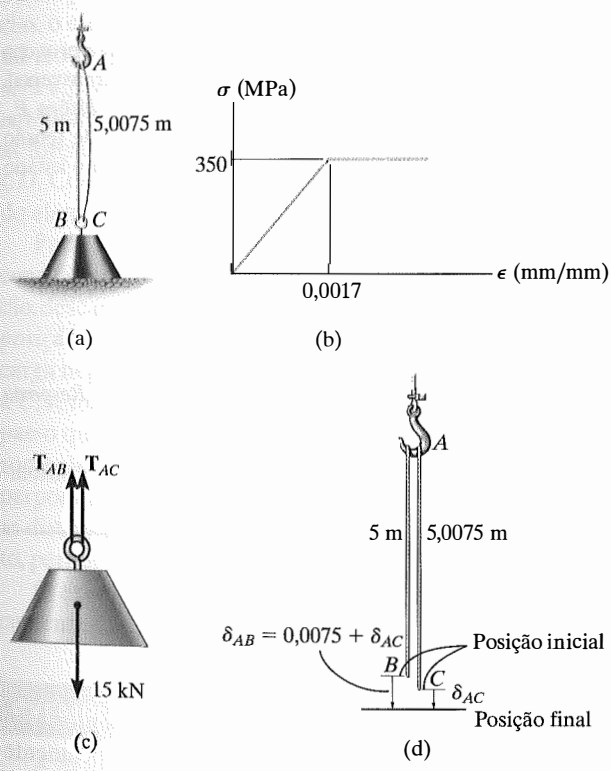


Figura 4.30

SOLUÇÃO

Por inspeção, o cabo AB começa a suportar o peso quando o gancho é levantado. Entretanto, se esse cabo alongar mais do que 0,01 m, a carga será sustentada por ambos os cabos. Para que isso ocorra, a deformação no cabo AB deve ser

$$\epsilon_{AB} = \frac{0{,}0075 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 0{,}0015$$

que é menor que a deformação elástica máxima, $\epsilon_e = 0{,}0017$ (Figura 4.30b). A tensão no cabo AB quando isso acontece pode ser determinada pela Figura 4.30b por cálculo proporcional; isto é,

$$\frac{0{,}0015}{350 \text{ MPa}} = \frac{0{,}0015}{\sigma_{AB}}$$

$$\sigma_{AB} = 308{,}82 \text{ MPa}$$

Assim, a força no cabo é

$$F_{AB} = \sigma_{AB} A = (308{,}82 \text{ N/mm}^2)(30 \text{ mm}^2) = 9.264{,}6 \text{ N} = 9{,}26 \text{ kN}$$

Visto que o peso a ser suportado é 15 kN, podemos concluir que ambos os cabos devem ser usados para suporte.

Uma vez sustentado o peso, a tensão nos cabos depende da deformação correspondente. Há três possibilidades, a saber: as deformações em ambos os cabos são elásticas, o cabo AB é deformado plasticamente enquanto o cabo AC é deformado elasticamente, ou ambos os cabos são deformados plasticamente. Começaremos considerando que ambos os cabos permanecem *elásticos*. O exame do diagrama de corpo livre do peso suspenso (Figura 4.30c) indica que o problema é estaticamente indeterminado. A equação de equilíbrio é

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad T_{AB} + T_{AC} + 15 \text{ kN} = 0 \tag{1}$$

Visto que AC é 0,0075 m mais comprido do que AB, então, pela Figura 4.30d, a compatibilidade do deslocamento das extremidades B e C exige que

$$\delta_{AB} = 0{,}0075 \text{ m} + \delta_{AC} \tag{2}$$

O módulo de elasticidade (Figura 4.30b) é $E_{aço} = 350 \text{ MPa}/0{,}0017 = 205{,}9(10^3)$ MPa. Uma vez que essa é uma análise linear elástica, a relação carga–deslocamento é $\delta = PL/AE$ e, portanto,

$$\frac{T_{AB}(5 \text{ m})}{30(10^{-6})[205{,}9(10^6) \text{ kPa}]} = 0{,}0075 \text{ m} + \frac{T_{AC}(5{,}0075 \text{ m})}{30(10^{-6})[205{,}9(10^6) \text{ kPa}]}$$

$$5T_{AB} = 46{,}3275 + 5{,}0075T_{AC} \tag{3}$$

Resolvendo as equações 1 e 3, temos

$$T_{AB} = 12{,}135 \text{ kN}$$

$$T_{AC} = 2{,}865 \text{ kN}$$

A tensão no cabo AB é, portanto,

$$\sigma_{AB} = \frac{12{,}135(10^3) \text{ N}}{30 \text{ mm}^2} = 404{,}5 \text{ MPa}$$

Essa tensão é maior do que a tensão elástica máxima admissível ($\sigma_e = 350$ MPa) e, portanto, o cabo AB sofre deformação plástica e suporta sua carga máxima de

$$T_{AB} = 350 \text{ MPa } (30 \text{ mm}^2) = 10{,}5 \text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Pela equação 1,

$$T_{AB} = 4{,}5\ \text{kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que o cabo AC permanece elástico, visto que a tensão no cabo é $\sigma_{AC} = 4{,}5(10^3)\text{N}/30\ \text{mm}^3 = 150\ \text{MPa} < 350$ MPa. A deformação elástica correspondente é determinada por cálculo proporcional (Figura 4.30b); isto é,

$$\frac{\epsilon_{AC}}{150\ \text{MPa}} = \frac{0{,}0017}{350\ \text{MPa}}$$
$$\epsilon_{AC} = 0{,}000729$$

Assim, o alongamento de AC é

$$\delta_{AC} = (0{,}000729)(5{,}0075) = 0{,}00365\ \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Então, aplicando a equação 2, o alongamento de AB é

$$\delta_{AB} = 0{,}0075 + 0{,}00365 = 0{,}01115\ \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 4.16

A barra na Figura 4.31a é feita de aço e consideramos que seja elástica perfeitamente plástica, com σ_e =250 Mpa. Determine (a) o valor máximo da carga P que pode ser aplicada sem provocar o escoamento do aço e (b) o valor máximo de P que a barra pode suportar. Faça um rascunho da distribuição de tensão na seção crítica para cada caso.

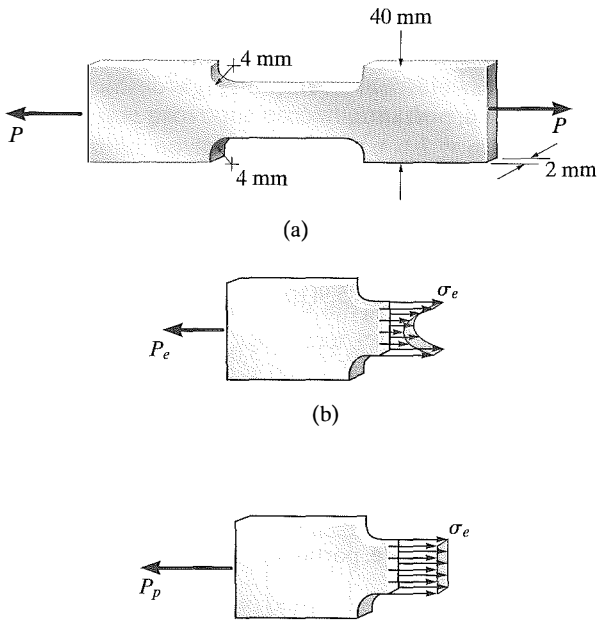


Figura 4.31

SOLUÇÃO

Parte (a). *Quando o material se comporta* elasticamente, temos de usar um fator de concentração de tensão determinado pela Figura 4.23 e que é exclusivo para a geometria da barra em questão. Aqui,

$$\frac{r}{h} = \frac{4\ \text{mm}}{(40\ \text{mm} - 8\ \text{mm})} = 0{,}125$$
$$\frac{w}{h} = \frac{40\ \text{mm}}{(40\ \text{mm} - 8\ \text{mm})} = 1{,}25$$

A carga máxima, sem provocar escoamento, ocorre quando $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_e$. A tensão normal média é $\sigma_{\text{méd}} = P/A$. Usando a Equação 4.7, temos

$$\sigma_{\text{máx}} = K\sigma_{\text{méd}}; \qquad \sigma_e = K\left(\frac{P_e}{A}\right)$$
$$250(10^6)\ \text{Pa} = 1{,}75\left[\frac{P_e}{(0{,}002\ \text{m})(0{,}032\ \text{m})}\right]$$
$$P_e = 9{,}14\ \text{kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa carga foi calculada usando a *menor* seção transversal. A distribuição de tensão resultante é mostrada na Figura 4.31b. Para equilíbrio, o "volume" contido no interior dessa distribuição deve ser igual a 9,14 kN.

Parte (b). A carga máxima sustentada pela barra provoca o escoamento de *todo* o *material* na menor seção transversal. Portanto, à medida que P aumenta até a *carga plástica* P_p, provoca uma mudança gradativa na distribuição de tensão do estado elástico mostrado na Figura 4.31b para o estado plástico mostrado na Figura 4.31c. Exige-se que

$$\sigma_e = \frac{P_p}{A}$$
$$250(10^6)\ \text{Pa} = \frac{P_p}{(0{,}002\ \text{m})(0{,}032\ \text{m})}$$
$$P_p = 16{,}0\ \text{kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Nessa expressão, P_p é igual ao "volume" contido na distribuição de tensão que, nesse caso, é $P_p = \sigma_e A$.

*4.9 Tensão residual

Se um elemento, ou um grupo de elementos, carregado axialmente formar um sistema estaticamente indeterminado capaz de suportar cargas de tração, bem como de compressão, então, carregamentos externos excessivos que provocam escoamento no material criarão *tensões residuais* nos elementos quando as cargas forem removidas. A razão para isso tem a ver com a recuperação elástica do material que ocorre durante o descarregamento. Por exemplo, considere um elemento prismático feito de um material elastoplástico que tenha o diagrama tensão–deformação OAB como mostra a Figura 4.32. Se uma carga axial produzir uma tensão

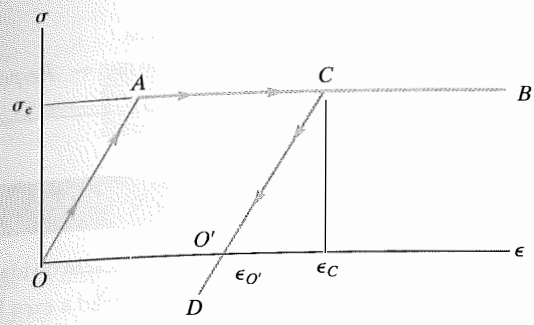


Figura 4.32

σ_e no material e uma deformação plástica correspondente ϵ_C, quando a carga for *removida*, o material responderá elasticamente e seguirá a reta CD de modo a recuperar um pouco da deformação plástica. Uma recuperação total até tensão zero no ponto O' só será possível se o elemento for estaticamente determinado, já que as reações dos apoios para o elemento devem ser nulas quando a carga for removida. Nessas circunstâncias, o elemento será deformado permanentemente, de tal modo que a deformação permanente no elemento será $\epsilon_{O'}$. Todavia, se o elemento for *estaticamente indeterminado*, a remoção da carga externa fará com que as forças dos apoios respondam à recuperação elástica CD. Como essas forças impedirão a total recuperação do elemento, induzirão nele ***tensões residuais***.

Para resolver um problema desse tipo, podemos considerar um ciclo completo de carregamento e, então, descarregamento do elemento como sendo a *superposição* de uma carga positiva (carregamento) a uma carga negativa (descarregamento). O carregamento, O a C, resulta em uma distribuição de tensão plástica, ao passo que o descarregamento, ao longo de CD, resulta somente em uma distribuição de tensão elástica. A superposição exige que as cargas se cancelem; contudo, as distribuições de tensão não se cancelarão e, portanto, permanecerão tensões residuais.

O exemplo a seguir ilustra esses conceitos numericamente.

EXEMPLO 4.17

A haste mostrada na Figura 4.33a tem raio de 5 mm e é feita de um material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_e = 420$ MPa, $E = 70$ GPa (Figura 4.33c). Se uma força $P = 60$ kN for aplicada à haste e, então, retirada, determine a tensão residual na haste e o deslocamento permanente do colar em C.

SOLUÇÃO

O diagrama de corpo livre da haste é mostrado na Figura 4.33b. Por inspeção, a haste é estaticamente indeterminada. A aplicação da carga **P** provocará uma de três possibilidades, a saber:

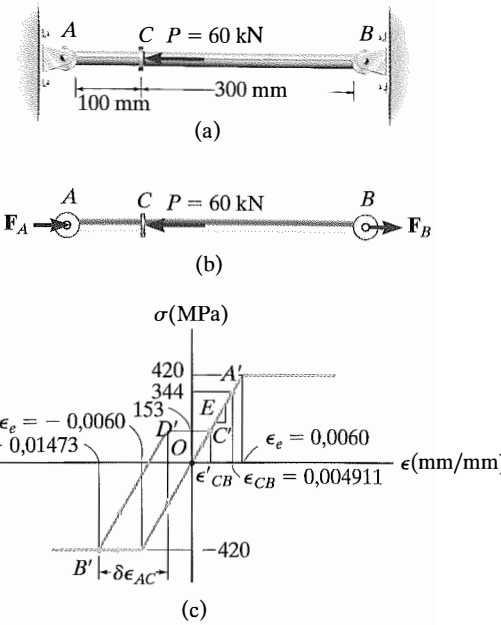


Figura 4.33

ambos os segmentos AC e CB permanecem elásticos, AC é plástico enquanto CB é elástico, ou ambos, AC e CB, são plásticos.*

Uma *análise elástica*, semelhante à discutida na Seção 4.4, produzirá $F_A = 45$ kN e $F_B = 15$ kN nos apoios. Entretanto, isso resulta em uma tensão de

$$\sigma_{AC} = \frac{45\text{ kN}}{\pi(0{,}005\text{ m})^2} = 573\text{ MPa (compressão)} > \sigma_e = 420\text{ MPa}$$

no segmento AC, e

$$\sigma_{CB} = \frac{15\text{ kN}}{\pi(0{,}005\text{ m})^2} = 191\text{ MPa (tração)}$$

no segmento CB. Visto que o material no segmento AC escoará, consideraremos que AC se torna plástico, enquanto CB permanece elástico.

Para esse caso, a máxima força desenvolvida possível em AC é

$$(F_A)_e = \sigma_e A = 420(10^3)\text{ kN/m}^2\,[\pi(0{,}005\text{ m})^2]$$
$$= 33{,}0\text{ kN}$$

e, pelo equilíbrio da haste (Figura 4.33b),

$$F_B = 60\text{ kN} - 33{,}0\text{ kN} = 27{,}0\text{ kN}$$

A tensão em cada segmento da haste é, portanto,

$$\sigma_{AC} = \sigma_e = 420\text{ MPa (compressão)}$$
$$\sigma_{CB} = \frac{27{,}0\text{ kN}}{\pi(0{,}005\text{ m})^2} = 344\text{ MPa (tração)} < 420\text{ MPa (OK)}$$

* A possibilidade de CB se tornar plástica antes de AC não ocorrerá porque, quando o ponto C se deformar, a *deformação* em AC (visto que é mais curta) sempre será maior que a deformação em CB.

Tensão residual. Para obter a tensão residual, também é necessário saber qual é a deformação em cada segmento resultante do carregamento. Visto que CB responde elasticamente,

$$\delta_C = \frac{F_B L_{CB}}{AE} = \frac{(27{,}0\text{ kN})(0{,}300\text{ m})}{\pi(0{,}005\text{ m})^2[70(10^6)\text{ kN/m}^2]} = 0{,}001474\text{ m}$$

Assim,

$$\epsilon_{CB} = \frac{\delta_C}{L_{CB}} = \frac{0{,}001474\text{ m}}{0{,}300\text{ m}} = +0{,}004913$$

Além disso, visto que δ_C é desconhecido, a deformação em AC é

$$\epsilon_{AC} = \frac{\delta_C}{L_{AC}} = -\frac{0{,}001474\text{ m}}{0{,}100\text{ m}} = -0{,}01474$$

Portanto, quando **P** é *aplicada*, o comportamento tensão–deformação para o material no segmento CB passa de O para A' (Figura 4.33c), e o comportamento tensão–deformação para o material no segmento AC passa de O para B'. Se a carga **P** for aplicada na direção oposta, em outras palavras, a carga é removida; ocorre, então, uma resposta elástica e é preciso aplicar uma força contrária $F_A = 45$ kN e uma força contrária $F_B = 15$ kN a cada segmento, respectivamente. Como calculamos antes, essas forças produzem tensões $\sigma_{AC} = 573$ MPa (tração) e $\sigma_{CB} = 191$ MPa (compressão); como resultado, a tensão residual em cada elemento é

$$(\sigma_{AC})_r = -420\text{ MPa} + 573\text{ MPa} = 153\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$(\sigma_{CB})_r = 344\text{ MPa} - 191\text{ MPa} = 153\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa tensão de tração é a *mesma* para ambos os segmentos, o que era esperado. Observe também que o comportamento tensão–deformação para o segmento AC passa de B' para D' na Figura 4.33c, a o passo que o comportamento tensão–deformação para o material no segmento CB passa de A' para C'.

Deslocamento permanente. Pela Figura 4.33c, a deformação residual em CB é

$$\epsilon'_{CB} = \frac{\sigma}{E} = \frac{153(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0{,}002185$$

de modo que o deslocamento permanente de C é

$$\delta_C = \epsilon'_{CB} L_{CB} = 0{,}002185\ (300\text{ mm}) = 0{,}656\text{ mm} \leftarrow \qquad \textit{Resposta}$$

Também podemos obter esse resultado determinando a deformação residual ϵ'_{AC} em AC (Figura 4.33c). Visto que a reta $B'D'$ tem inclinação E, então

$$\delta\epsilon_{AC} = \frac{\delta\sigma}{E} = \frac{(420 + 153)10^6\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0{,}008185$$

Portanto,

$$\epsilon'_{AC} = \epsilon_{AC} + \delta\epsilon_{AC} = -0{,}01474 + 0{,}008185 = -0{,}006555$$

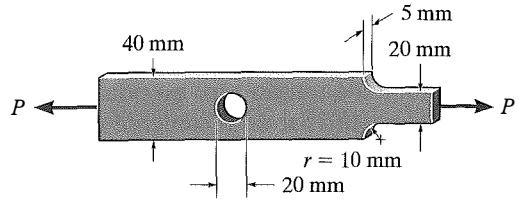
Finalmente,

$$\delta_C = \epsilon'_{AC} L_{AC} = -0{,}006555\ (100\text{ mm}) = 0{,}656\text{ mm} \leftarrow \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

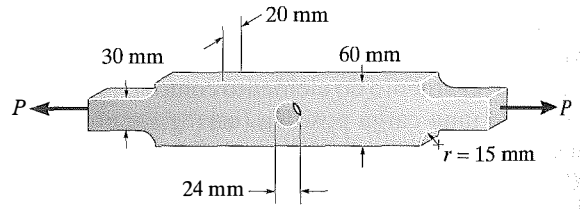
4.87. Determine a tensão normal máxima desenvolvida na barra quando submetida a uma carga $P = 8$ kN.

***4.88.** Se a tensão normal admissível para a barra for $\sigma_{adm} = 120$ MPa, determine a força axial máxima P que pode ser aplicada à barra.



Problemas 4.87/88

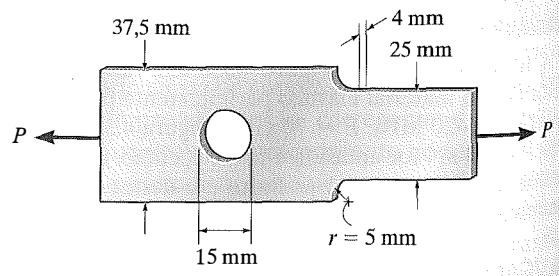
4.89. A barra de aço tem as dimensões mostradas na figura. Determine a força axial máxima P que pode ser aplicada de modo a não ultrapassar uma tensão de tração admissível $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



Problema 4.89

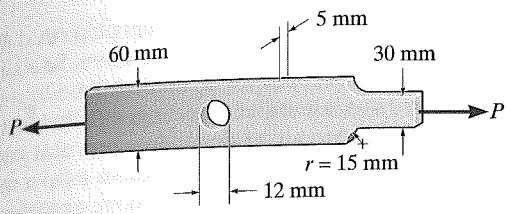
4.90. Determine a força axial máxima P que pode ser aplicada à barra. A barra é feita de aço e tem tensão admissível $\sigma_{adm} = 147$ MPa.

4.91. Determine a tensão normal máxima desenvolvida na barra quando sujeita a uma carga $P = 8$ kN.



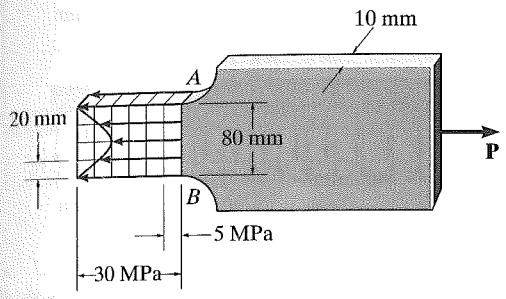
Problemas 4.90/91

***4.92.** Determine a tensão normal máxima desenvolvida na barra quando sujeita a uma carga $P = 8$ kN.



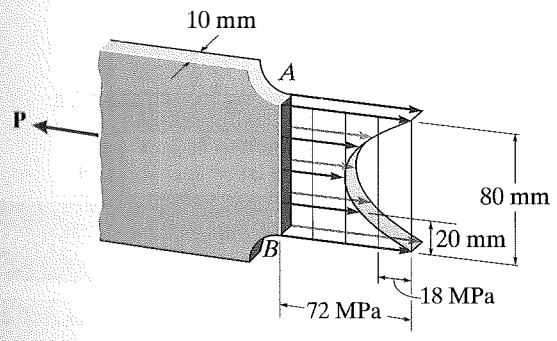
Problema 4.92

4.93. A distribuição de tensão resultante ao longo da seção *AB* para a barra é mostrada na figura. Por essa distribuição, determine o valor aproximado da força axial resultante *P* aplicada à barra. Além disso, qual é o fator de concentração de tensão para essa geometria?



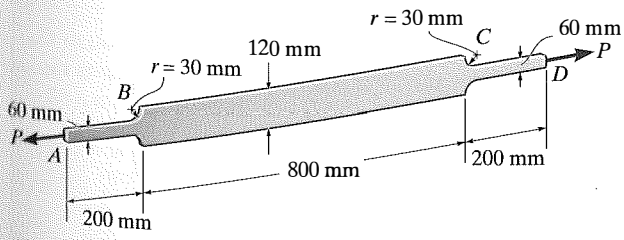
Problema 4.93

4.94. A distribuição de tensão resultante ao longo da seção *AB* para a barra é mostrada na figura. Por essa distribuição, determine o valor aproximado da força axial resultante *P* aplicada à barra. Além disso, qual é o fator de concentração de tensão para essa geometria?



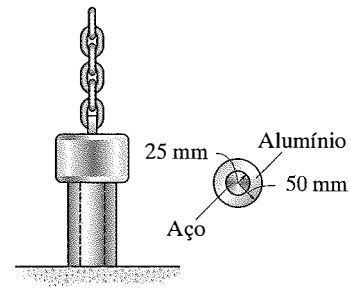
Problema 4.94

4.95. A chapa de aço A-36 tem espessura de 12 mm. Se houver filetes de rebaixo em *B* e *C*, e $\sigma_{adm} = 150$ MPa, determine a carga axial máxima *P* que ela pode suportar. Calcule o alongamento da chapa desprezando o efeito dos filetes.



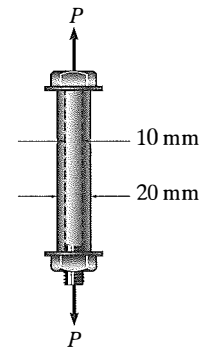
Problema 4.95

***4.96.** O peso de 1.500 kN (≈ 150 t) é assentado lentamente no topo de um poste feito de alumínio 2014-T6 com núcleo de aço A-36. Se ambos os materiais puderem ser considerados elásticos perfeitamente plásticos, determine a tensão em cada um deles.



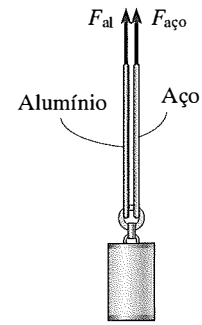
Problema 4.96

4.97. A haste do parafuso de aço com 10 mm de diâmetro está embutida em uma luva de bronze. O diâmetro externo dessa luva é 20 mm. Se a tensão de escoamento for $(\sigma_e)_{aço} = 640$ MPa para o aço e $(\sigma_e)_{br} = 520$ para o bronze, determine o valor da maior carga elástica *P* que pode ser aplicada ao conjunto. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{br} = 100$ GPa.



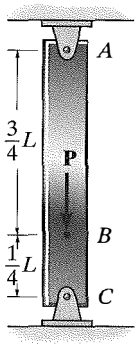
Problema 4.97

4.98. O peso é suspenso por cabos de aço e alumínio, cada um com o mesmo comprimento inicial de 3 m e área de seção transversal de 4 mm². Se considerarmos que os materiais são elásticos perfeitamente plásticos com $(\sigma_e)_{aço} = 120$ Mpa e $(\sigma_e)_{al} = 70$ MPa, determine a força em cada cabo se o peso for (a) 600 N e (b) 720 N. $E_{al} = 70$ GPa, $E_{aço} = 200$ GPa.



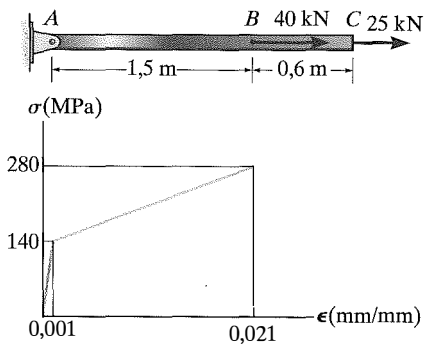
Problema 4.98

4.99. A barra tem área de seção transversal de 625 mm². Se uma força $P = 225$ kN for aplicada em B e, então, removida, determine a tensão residual nas seções AB e BC. $\sigma_e = 210$ MPa.



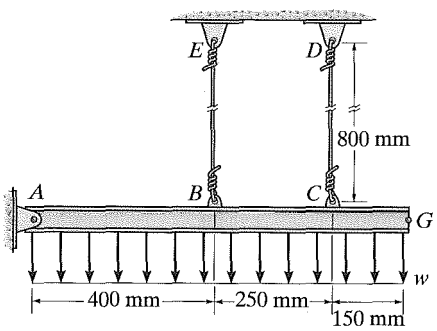
Problema 4.99

*4.100. A barra tem área de seção transversal de 300 mm² e é feita de um material cujo diagrama tensão–deformação pode ser aproximado pelos dois segmentos de reta mostrados na figura. Determine o alongamento da barra resultante do carregamento aplicado.



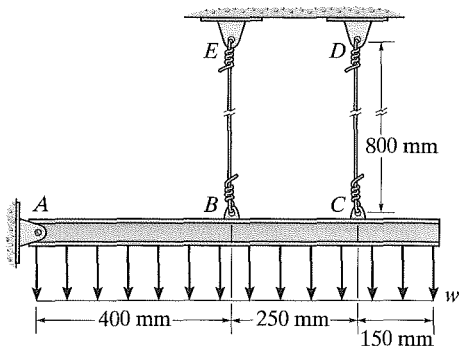
Problema 4.100

4.101. A barra rígida é sustentada por um pino em A e dois cabos de aço, cada um com diâmetro de 4 mm. Se a tensão de escoamento para os cabos for $\sigma_e = 530$ MPa e $E_{aço} = 200$ GPa, determine a intensidade da carga distribuída w que pode ser colocada sobre a viga e provocará um início de escoamento somente no cabo EB. Qual é o deslocamento do ponto G para esse caso? Para o cálculo, considere que o aço é elástico perfeitamente plástico.



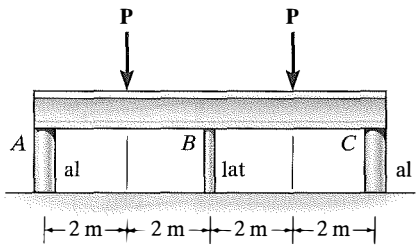
Problema 4.101

4.102. A barra rígida é sustentada por um pino em A e dois cabos de aço, cada um com diâmetro de 4 mm. Se a tensão de escoamento para os cabos for $\sigma_e = 530$ MPa e $E_{aço} = 200$ GPa, determine (a) a intensidade da carga distribuída w que pode ser colocada sobre a viga de modo a provocar um início de escoamento somente em um dos cabos e (b) a menor intensidade da carga distribuída que provoque o escoamento de ambos os cabos. Para o cálculo, considere que o aço é elástico perfeitamente plástico.



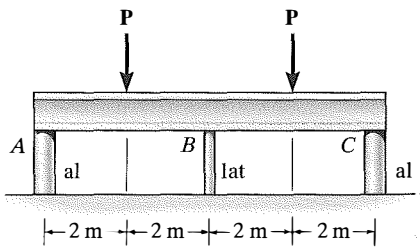
Problema 4.102

4.103. A viga rígida é suportada pelos três postes A, B e C de comprimentos iguais. Os postes A e C têm diâmetro de 75 mm e são feitos de alumínio, para o qual $E_{al} = 70$ GPa e $(\sigma_e)_{al} = 20$ MPa. O poste B tem diâmetro de 20 mm e é feito de latão, para o qual $E_{lat} = 100$ GPa e $(\sigma_e)_{lat} = 590$ MPa. Determine o menor valor de **P** de modo que (a) somente as hastes A e C sofram escoamento e (b) todos os postes sofram escoamento.



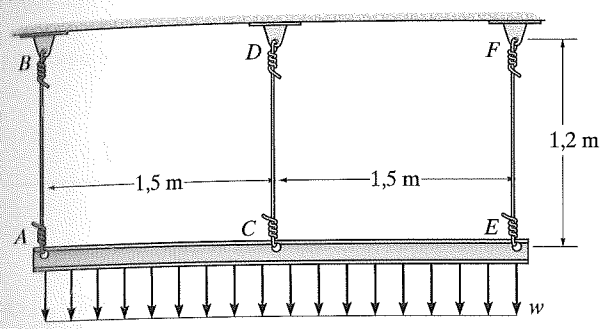
Problema 4.103

*4.104. A viga rígida é suportada pelos três postes A, B e C de comprimentos iguais. Os postes A e C têm diâmetro de 60 mm e são feitos de alumínio, para o qual $E_{al} = 70$ GPa e $(\sigma_e)_{al} = 20$ MPa. O poste B é feito de latão, para o qual $E_{lat} = 100$ GPa e $(\sigma_e)_{lat} = 590$ MPa. Se $P = 130$ kN, determine o maior diâmetro do poste B, de modo que todos os postes sofram escoamento ao mesmo tempo.



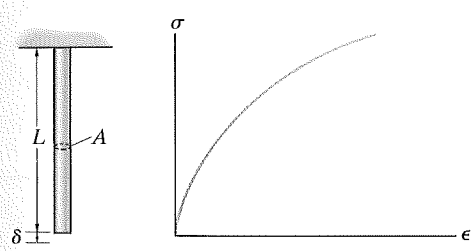
Problema 4.104

4.105. A viga rígida é sustentada por três cabos de aço A-36, cada um com comprimento de 1,2 m. A área da seção transversal de AB e EF é 10 mm², e a área da seção transversal de CD é 4 mm². Determine a maior carga distribuída w que pode ser suportada pela viga antes que qualquer dos cabos comece a escoar. Se considerarmos que o aço é elástico perfeitamente plástico, determine até que distância a viga é deslocada para baixo exatamente antes de todos os cabos começarem a escoar.



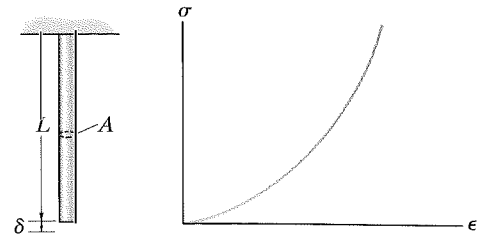
Problema 4.105

4.106. O diagrama tensão–deformação de um material pode ser descrito pela curva $\sigma = c\epsilon^{1/2}$. Determine a deflexão δ da extremidade de uma haste feita desse material se ela tiver comprimento L, área de seção transversal A e peso específico γ.



Problema 4.106

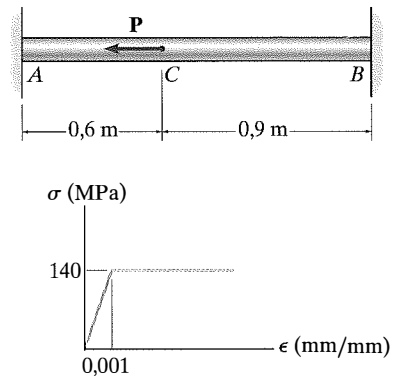
4.107. Resolva o Problema 4.106 se o diagrama tensão–deformação for definido por $\sigma = c\epsilon^{3/2}$.



Problema 4.107

*__4.108.__ A barra com diâmetro de 50 mm está presa em suas extremidades e suporta a carga axial **P**. Se o material for elástico perfeitamente plástico como mostra o diagrama tensão–deformação, determine a menor carga P necessária para provocar o escoamento do segmento AC. Se essa carga for liberada, determine o deslocamento permanente do ponto C.

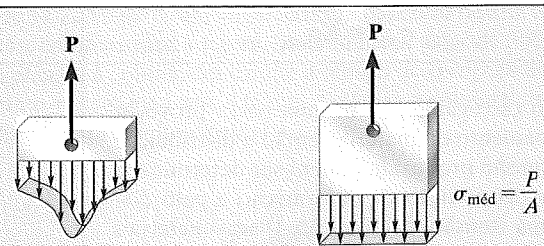
4.109. Determine o alongamento da barra no Problema 4.108 quando são removidos tanto a carga **P** quanto os apoios.



Problemas 4.108/109

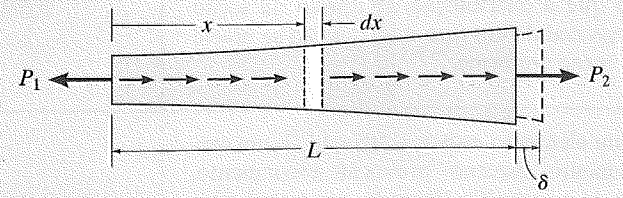
Revisão do capítulo

Quando um carregamento é aplicado em um ponto sobre um corpo, tende a criar uma distribuição de tensão no interior do corpo que se torna mais uniformemente distribuída em regiões afastadas do ponto de aplicação. Isso é denominado princípio de Saint-Venant.



O deslocamento relativo na extrem dade de um elemento carregado axialmente em relação à outra extremidade é determinado por

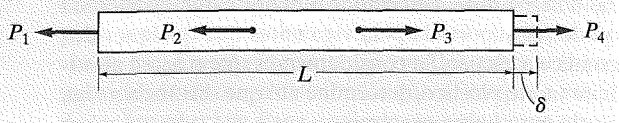
$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{AE}$$



Se uma série de forças axiais externas constantes for aplicada a um elemento e AE também for constante para o elemento, então

$$\delta = \Sigma \frac{PL}{AE}$$

Para aplicação, é necessário usar uma convenção de sinais para a carga interna P e ter certeza de que o material não escoará, mas permanecerá linear elástico.



Superposição de carga e deslocamento é possível desde que o material permaneça linear elástico e não ocorra nenhuma mudança significativa na geometria.

As reações em uma barra estaticamente indeterminada podem ser determinadas tanto por equilíbrio quanto por condições de compatibilidade que especifiquem o deslocamento nos apoios. Esses deslocamentos são relacionados com as cargas por meio das relações carga–deslocamento, isto é, $\delta = PL/AE$.

Uma mudança na temperatura pode provocar uma mudança no comprimento de um elemento feito de um material homogêneo isotrópico correspondente a

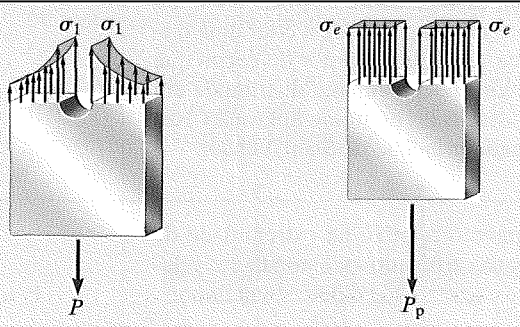
$$\delta = \alpha \delta T L$$

Se o elemento estiver confinado, essa expansão produzirá tensão térmica no elemento.

Furos e transições acentuadas em uma seção transversal criarão concentrações de tensão. Para projeto, obtemos o fator de concentração de tensão K em um gráfico, o qual foi determinado por estudos experimentais. Então, esse valor é multiplicado pela tensão média para obter-se a tensão máxima na seção transversal.

$$\sigma_{máx} = K\sigma_{méd}$$

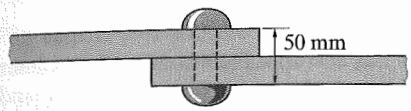
Se o carregamento em uma barra provocar escoamento do material, então a distribuição de tensão produzida poderá ser determinada pela distribuição de deformação e pelo diagrama tensão–deformação. Para materiais perfeitamente plásticos, o escoamento fará com que a distribuição de tensão na seção transversal de um furo ou transição se nivele e se torne uniforme.



Se um elemento estiver restringido e um carregamento externo provocar escoamento, quando a carga for liberada, provocará uma tensão residual no material.

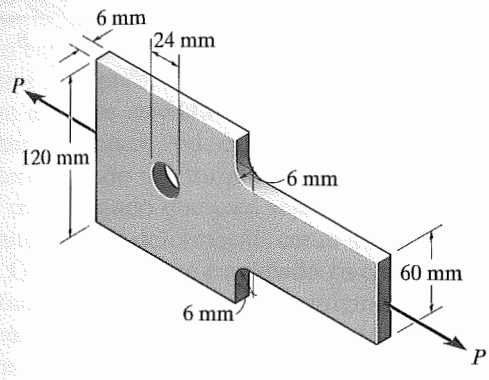
PROBLEMAS DE REVISÃO

4.110. Um rebite de aço com 6 mm de diâmetro a uma temperatura de 800°C está preso entre duas chapas de tal modo que, nessa temperatura, ele tem 50 mm de comprimento e exerce uma força de aperto de 1,25 kN entre as chapas. Determine o valor aproximado da força de aperto entre as chapas quando o rebite esfriar até 5°C. Para o cálculo, considere que as cabeças do rebite e as chapas são rígidas. Considere também $\alpha_{aço} = 14(10^{-6})/°C$, $E_{aço} = 200$ GPa. O resultado é uma estimativa conservadora da resposta real? Justifique sua resposta.



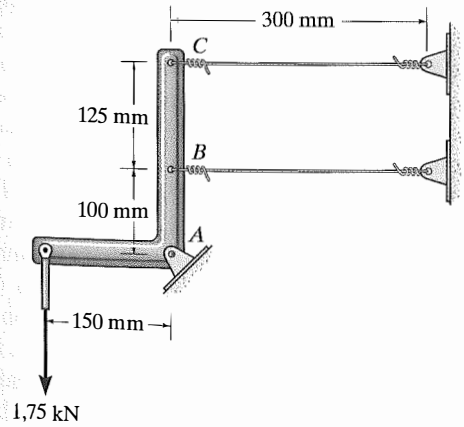
Problema 4.110

4.111. Determine a força axial máxima P que pode ser aplicada à chapa de aço. A tensão admissível é $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



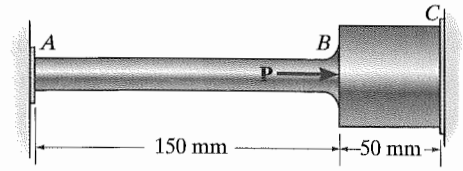
Problema 4.111

***4.112.** O elo rígido é sustentado por um pino em A e dois cabos de aço A-36, cada um com comprimento de 300 mm quando não alongados e área de seção transversal de 7,8 mm². Determine a força desenvolvida nos cabos quando o elo suportar a carga vertical de 1,75 kN.



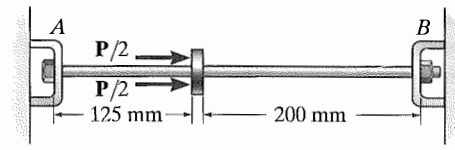
Problema 4.112

4.113. A força **P** é aplicada à barra, a qual é composta por um material elástico perfeitamente plástico. Construa um gráfico para mostrar como a força varia em cada seção AB e BC (ordenadas) à medida que P (abscissa) aumenta. A barra tem áreas de seção transversal de 625 mm² na região AB e 2.500 mm² na região BC e $\sigma_e = 210$ MPa.



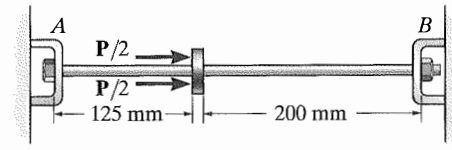
Problema 4.113

4.114. A haste de alumínio 2014-T6 tem diâmetro de 12 mm e está levemente conectada aos apoios rígidos em A e B quando $T_1 = 25°C$. Se a temperatura baixar para $T_2 = -20°C$ e uma força axial $P = 80$ N for aplicada ao colar rígido, como mostra a figura, determine as reações em A e B.



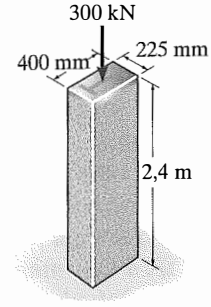
Problema 4.114

4.115. A haste de alumínio 2014-T6 tem diâmetro de 12 mm e está levemente conectada aos apoios rígidos em A e B quando $T_1 = 40°C$. Determine a força P que deve ser aplicada ao colar de modo que, quando $T = 0°C$, a reação em B seja nula.



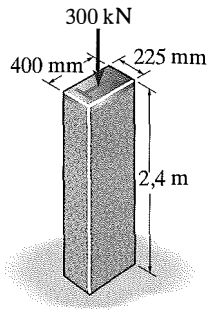
Problema 4.115

***4.116.** A coluna de aço A-36 tem área de seção transversal de 11.250 mm² e está engastada em concreto de alta resistência, como mostra a figura. Se uma força axial de 300 kN for aplicada à coluna, determine a tensão de compressão média no concreto e no aço. Até que distância a coluna se encurta? Seu comprimento original é 2,4 m.



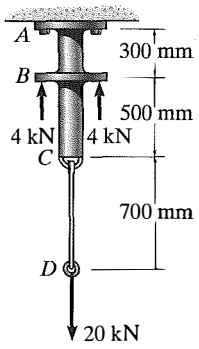
Problema 4.116

4.117. A coluna de aço A-36 está engastada em concreto de alta resistência, como mostra a figura. Se uma força axial de 300 kN for aplicada à coluna, determine a área exigida para o aço de modo que a força seja compartilhada igualmente entre o aço e o concreto. Até que distância a coluna se encurta? Seu comprimento original é 2,4 m.



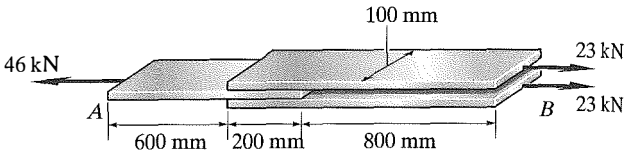
Problema 4.117

4.118. O conjunto é formado por uma barra de alumínio ABC com 30 mm de diâmetro com um colar fixo em B e uma haste de aço CD com 10 mm de diâmetro. Determine o deslocamento do ponto D quando o conjunto for carregado como mostra a figura. Despreze o tamanho do colar em B e o acoplamento em C. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa.



Problema 4.118

4.119. A junta é composta por três chapas de aço A-36 interligadas nas costuras. Determine o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade B quando a junta for submetida às cargas axiais mostradas. Cada chapa tem espessura de 5 mm.



Problema 4.119

5 Torção

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, discutiremos os efeitos da aplicação de um carregamento de torção a um elemento longo e reto, como um eixo ou tubo. Inicialmente, consideraremos que o elemento tem seção transversal circular. Mostraremos como determinar a distribuição da tensão no interior do elemento e o ângulo de torção quando o material se comporta de maneira linear elástica e, ainda, quando é inelástico. Também discutiremos a análise de eixos e tubos estaticamente indeterminados, além de tópicos especiais, entre eles elementos com seções transversais não circulares. Por fim, daremos atenção especial às concentrações de tensão e à tensão residual causada por carregamentos de torção.

5.1 Deformação por torção de um eixo circular

Torque é um momento que tende a torcer um elemento em torno de seu eixo longitudinal. O efeito do torque é uma preocupação primária em projetos de eixos ou eixos de acionamento utilizados em veículos e estruturas diversas. Podemos ilustrar fisicamente o que acontece quando um torque é aplicado a um eixo circular considerando que este seja feito de um material com alto grau de deformação, como a borracha (Figura 5.1a). Quando o torque é aplicado, os círculos e as retas longitudinais da grade, marcados originalmente no eixo, tendem a se distorcer segundo o padrão mostrado na Figura 5.1b. Examinando a figura, vemos que a torção faz que os círculos *continuem como círculos* e cada linha longitudinal da grade se deforme na forma de uma hélice que intercepta os círculos em ângulos iguais. Além disso, as seções transversais nas *extremidades* do eixo continuam *planas*, e as linhas radiais nessas extremidades *continuam retas* durante a deformação (Figura 5.1b). Por essas observações, podemos considerar que, se o ângulo de rotação for *pequeno*, o *comprimento e o raio do eixo permanecerão inalterados*.

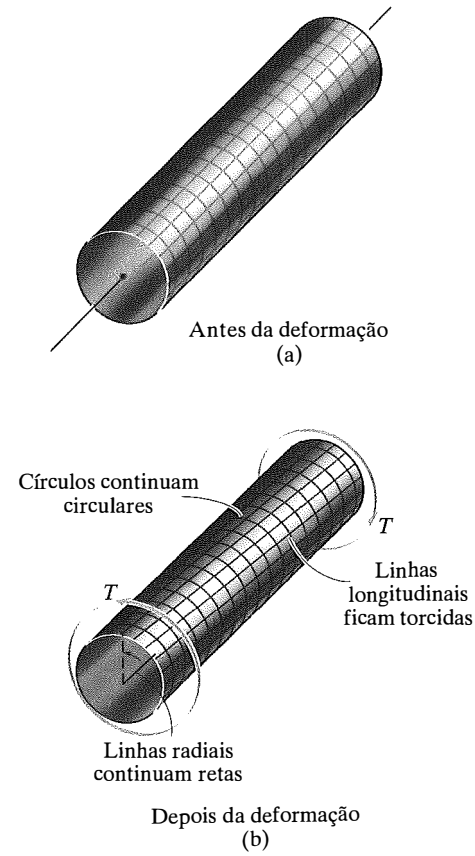
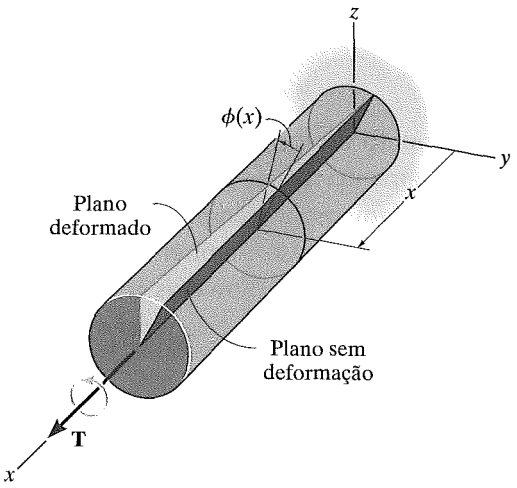


Figura 5.1

Se o eixo estiver preso em uma de suas extremidades e for aplicado um torque à sua outra extremidade, o plano sombreado na Figura 5.2 será distorcido até uma forma oblíqua, como mostra a figura. Aqui, uma linha radial localizada na seção transversal a uma distância x da extremidade fixa do eixo girará de um ângulo $\phi(x)$. O ângulo $\phi(x)$, definido dessa maneira, é denominado *ângulo de torção,* depende da posição x e variará ao longo do eixo como mostra a figura.

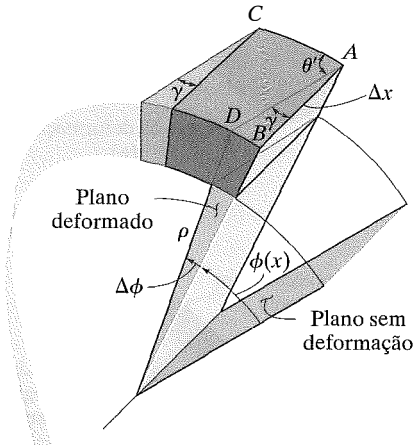
Para entender como essa distorção deforma o material, isolaremos agora um pequeno elemento localizado à distância radial ρ (rô) da linha central do eixo (Figura 5.3). Devido à deformação observada na Figura 5.2, as faces anterior e posterior do elemento sofrerão uma rotação — a face posterior, de $\phi(x)$, e a face anterior, de $\phi(x) + \Delta\phi$. O resultado é que, em razão da *diferença* entre essas rotações, $\Delta\phi$, o elemento é submetido a uma *deformação por cisalhamento.* Para calcular essa deformação, observe que, antes da deformação, o ângulo entre as bordas AB e AC é 90°; todavia, após a deformação, as bordas do elemento se tornam AD e AC e o ângulo entre elas é θ'. Pela definição de deformação por cisalhamento (Equação 2.4), temos

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{C \to A \text{ ao longo de } CA \\ B \to A \text{ ao longo de } BA}} \theta'$$



O ângulo de torção $\phi(x)$ aumenta à medida que x aumenta.

Figura 5.2



Deformação por cisalhamento do elemento

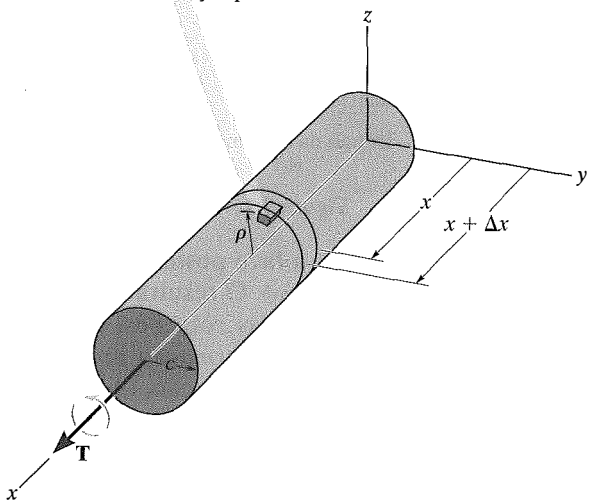
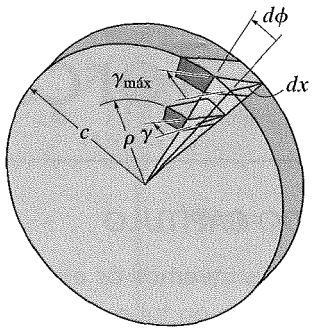


Figura 5.3



A tensão de cisalhamento para o material aumenta linearmente com ρ, isto é, $\gamma = (\rho/c)\gamma_{máx}$.

Figura 5.4

Esse ângulo, γ, é indicado no elemento e pode ser relacionado com o comprimento Δx do elemento e com a diferença no ângulo de rotação, $\Delta\phi$, entre as faces sombreadas. Se $\Delta x \to dx$ e $\Delta\phi \to d\phi$, temos

$$BD = \rho\, d\phi = dx\, \gamma$$

Portanto,

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \tag{5.1}$$

Visto que dx e $d\phi$ são os *mesmos* para *todos os elementos* localizados em pontos da seção transversal em x, então $d\phi/dx$ é constante nesta seção, e a Equação 5.1 indica que o valor da deformação por cisalhamento para qualquer um desses elementos varia somente com sua distância radial ρ em relação à linha central do eixo. Em outras palavras, a deformação por cisalhamento no interior do eixo varia linearmente ao longo de qualquer linha radial, de zero na linha central do eixo até um valor máximo $\gamma_{máx}$ em seu contorno externo (Figura 5.4). Visto que $d\phi/dx = \gamma/\rho = \gamma_{máx}/c$, então,

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{máx} \tag{5.2}$$

Os resultados obtidos aqui também são válidos para tubos circulares. Dependem somente das premissas adotadas em relação às deformações já mencionadas.

5.2 A fórmula da torção

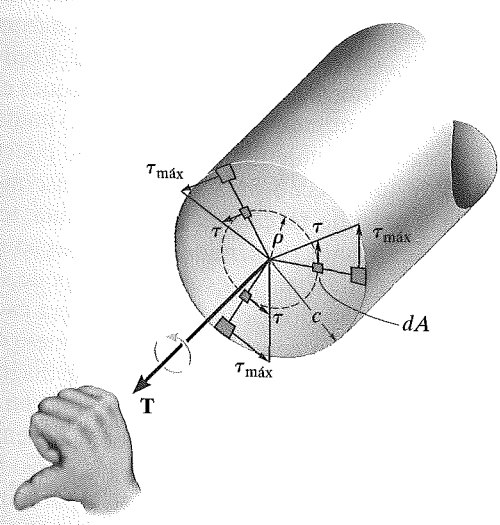
Quando um torque externo é aplicado a um eixo, ele cria um torque interno correspondente no interior do eixo. Nesta seção, desenvolveremos uma equação que relaciona esse torque interno com a distribuição

da tensão de cisalhamento na seção transversal de um eixo ou tubo circular.

Se o material for linear elástico, então a lei de Hooke se aplica, $\tau = G\gamma$, e, por consequência, uma ***variação linear na deformação por cisalhamento***, como observado na seção anterior, resulta em uma ***variação linear na tensão de cisalhamento*** correspondente ao longo de qualquer linha radial na seção transversal. Consequentemente, assim como ocorre com a deformação por cisalhamento para um eixo maciço, τ variará de zero na linha central do eixo longitudinal a um valor máximo $\tau_{máx}$ na superfície externa. Essa variação é mostrada na Figura 5.5, nas faces anteriores de vários elementos selecionados localizados em uma posição radial intermediária ρ e no raio externo c. Pela proporcionalidade de triângulos, ou pela lei de Hooke ($\tau = G\gamma$) e pela Equação 5.2 [$\gamma = (\rho/c)\gamma_{máx}$], podemos escrever

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{máx} \tag{5.3}$$

Essa equação expressa a distribuição da tensão de cisalhamento em *função* da posição radial ρ do elemento; em outras palavras, define a distribuição da tensão na seção transversal em termos da geometria do eixo. Usando essa equação, aplicaremos agora a condição que exige que o torque produzido pela distribuição de tensão por toda a seção transversal seja equivalente ao torque interno resultante T na seção, o que mantém o eixo em equilíbrio (Figura 5.5). Especificamente, cada elemento de área dA, localizado em ρ, está sujeito a uma força $dF = \tau\, dA$. O torque produzido por essa força é $dT = \rho(\tau\, dA)$. Portanto, para toda a seção transversal, temos



A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.

Figura 5.5

$$T = \int_A \rho(\tau\, dA) = \int_A \rho\left(\frac{\rho}{c}\right)\tau_{máx}\, dA \tag{5.4}$$

Visto que $\tau_{máx}/c$ é constante,

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c}\int_A \rho^2\, dA \tag{5.5}$$

A integral nessa equação depende somente da geometria do eixo. Ela representa o ***momento polar de inércia*** da área da seção transversal do eixo calculada em torno da linha central longitudinal do eixo. Esse valor será representado pelo símbolo J e, portanto, a Equação 5.5 pode ser escrita de uma forma mais compacta, a saber,

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \tag{5.6}$$

onde

$\tau_{máx}$ = a tensão de cisalhamento máxima no eixo, que ocorre na superfície externa
T = torque interno resultante que age na seção transversal. Seu valor é determinado pelo método das seções e pela equação de equilíbrio de momento aplicada ao redor da linha central longitudinal do eixo
J = momento polar de inércia da área da seção transversal
c = raio externo do eixo

Pelas equações 5.3 e 5.6, a tensão de cisalhamento na distância intermediária ρ pode ser determinada por uma equação semelhante:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{5.7}$$

Qualquer uma das duas equações citadas é frequentemente denominada ***fórmula da torção.*** Lembre-se de que ela só é usada se o eixo for circular e o material for homogêneo e comportar-se de uma maneira linear elástica, visto que a dedução da fórmula se baseia no fato de a tensão de cisalhamento ser proporcional à deformação por cisalhamento.

Eixo maciço. Se o eixo tiver uma seção transversal circular maciça, o momento polar de inércia J pode ser determinado por meio de um elemento de área na forma de um *anel diferencial*, de espessura $d\rho$ e circunferência $2\pi\rho$ (Figura 5.6). Para esse anel, $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, portanto,

$$J = \int_A \rho^2\, dA = \int_0^c \rho^2(2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi\int_0^c \rho^3\, d\rho = 2\pi\left(\frac{1}{4}\right)\rho^4\Big|_0^c$$

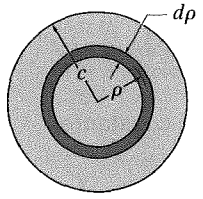
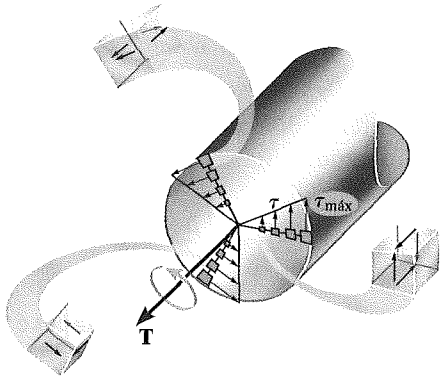


Figura 5.6

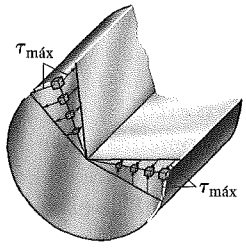
$$J = \frac{\pi}{2}c^4 \tag{5.8}$$

Observe que J é uma *propriedade geométrica* da área circular e é sempre positivo. As unidades de medida comuns para J são mm^4 ou pol^4.

Já demonstramos que a tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal do eixo. Todavia, se isolarmos um elemento de volume do material na seção transversal, então, devido à propriedade complementar do cisalhamento, tensões de cisalhamento iguais também devem agir sobre quatro de suas faces adjacentes, como mostra a Figura 5.7a. Por consequência, ***o torque interno T não somente desenvolve uma distribuição linear da tensão de cisalhamento ao longo de cada linha radial no plano da área de seção transversal, como também uma distribuição de tensão de cisalhamento associada é desenvolvida ao longo de um plano axial*** (Figura 5.7b).

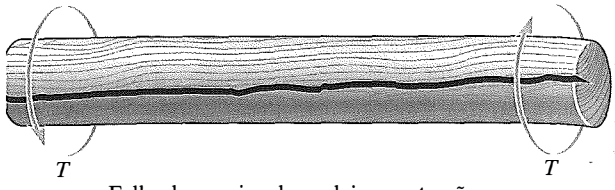


(a)



Tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.
(b)

Figura 5.7



Falha de um eixo de madeira por torção.

Figura 5.8

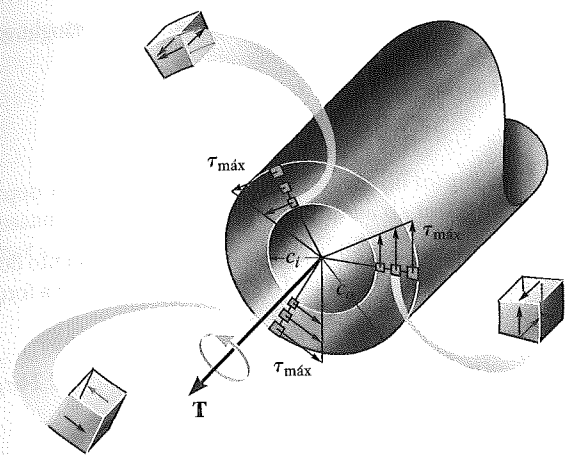
É interessante observar que, em razão dessa distribuição axial da tensão de cisalhamento, eixos feitos de madeira tendem a *rachar* ao longo do plano axial quando sujeitos a um torque excessivo (Figura 5.8). Isso acontece porque a madeira é um material anisotrópico. A resistência ao cisalhamento desse material, paralela a seus grãos ou fibras, direcionada ao longo da linha central do eixo, é muito menor do que a resistência perpendicular às fibras, direcionada no plano da seção transversal.

Eixo tubular. Se um eixo tiver uma seção transversal tubular, com raio interno c_i e raio externo c_o, então, pela Equação 5.8, podemos determinar seu momento polar de inércia subtraindo J para um eixo de raio c_i daquele determinado para um eixo de raio c_o. O resultado é

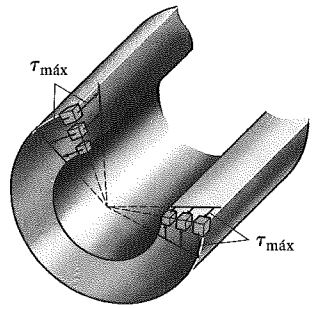
$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) \tag{5.9}$$

Como ocorre no eixo maciço, a tensão de cisalhamento distribuída pela área da seção transversal do tubo varia linearmente ao longo de qualquer linha radial (Figura 5.9a). Além do mais, a tensão de cisalhamento varia ao longo de um plano axial dessa mesma maneira (Figura 5.9b). A Figura 5.9a mostra exemplos da tensão de cisalhamento agindo sobre elementos de volume típicos.

Tensão de torção máxima absoluta. Em qualquer seção transversal do eixo, a tensão máxima de cisalhamento ocorre na superfície externa. Contudo, se o eixo for submetido a uma série de torques externos, ou se o raio (momento polar de inércia) mudar, a tensão de torção máxima no interior do eixo poderá ser diferente de uma seção para outra. Se quisermos determinar a tensão de torção máxima absoluta, torna-se, então, importante determinar a localização na qual a razão Tc/J é máxima. A esse respeito, pode ser útil mostrar a variação do torque interno T em cada seção ao longo da linha central do eixo por meio de um ***diagrama de torque***. Especificamente, esse diagrama é uma representação gráfica do torque interno T em relação à sua posição x ao longo do comprimento do eixo. Como convenção de sinal, T será positivo se, pela regra da mão direita, o polegar se dirigir para fora do eixo quando os dedos se curvarem na direção da torção causada pelo torque (Figura 5.5). Uma vez determinado o torque interno em todo o eixo, podemos identificar a razão máxima Tc/J.



(a)



A tensão de cisalhamento varia linearmente ao longo de cada linha radial da seção transversal.
(b)

Figura 5.9

PONTOS IMPORTANTES

- Quando um eixo com *seção transversal circular* é submetido a um torque, a seção transversal *permanece plana*, enquanto as linhas radiais giram. Isso provoca uma *deformação por cisalhamento* no interior do material, a qual *varia linearmente,* ao longo de qualquer linha radial, de zero na linha central do eixo a um máximo em seu contorno externo.
- Pela lei de Hooke, para um material homogêneo com comportamento linear elástico, a *tensão de cisalhamento* ao longo de qualquer linha radial do eixo também *varia linearmente,* de zero na linha central do eixo até um valor máximo em seu contorno externo. Essa tensão de cisalhamento máxima *não deve* ultrapassar o limite de proporcionalidade do material.
- Em razão da propriedade complementar do cisalhamento, a distribuição da tensão de cisalhamento linear no interior do plano da seção transversal também é distribuída ao longo de um plano axial adjacente do eixo.
- A fórmula da torção é baseada no requisito de que o torque resultante na seção transversal seja igual ao torque produzido pela distribuição linear da tensão de cisalhamento em torno da linha central longitudinal do eixo. É necessário que o eixo ou tubo tenha *seção transversal circular* e que seja feito de material *homogêneo* de comportamento *linear elástico*.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A fórmula da torção pode ser aplicada conforme o procedimento descrito a seguir.

Carregamento interno.

- Secione o eixo perpendicularmente à sua linha central no ponto onde a tensão de cisalhamento deve ser determinada e use os diagramas de corpo livre e as equações de equilíbrio necessárias para obter o torque interno na seção.

Propriedade da seção.

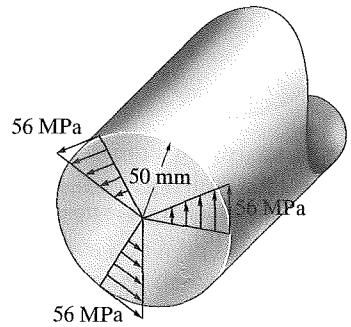
- Calcule o momento polar de inércia da área de seção transversal. Para uma seção maciça de raio c, $J = \pi c^4/2$, e, para um tubo de raio externo c_o e raio interno c_i, $J = \pi(c_o^4 - c_i^4)/2$.

Tensão de cisalhamento.

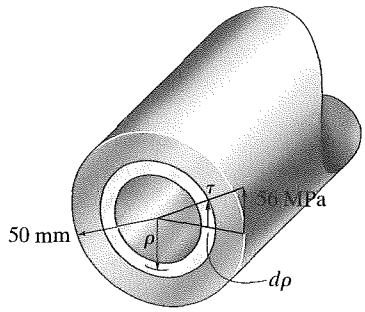
- Especifique a distância radial ρ, medida do centro da seção transversal até o ponto onde a tensão de cisalhamento deve ser determinada. Então, aplique a f rmula da torção $\tau = T\rho/J$ ou, se quiser determinar a tensão de cisalhamento máxima, use $\tau_{máx} = Tc/J$. Quando substituir os dados, não se es ueça de usar um conjunto consistente de unidades.
- A tensão de cisalhamento age na seção transversal em uma direção que é sempre perpendicular a ρ. A força que ela cria deve contribuir com um torque em torno da linha central do eixo orientado na *mesma direção* que o torque interno resultante **T** que age na seção. Uma vez estabelecida essa direção, pode-se isolar um elemento de volume localizado no ponto onde τ é determinada e, assim, pode-se mostrar a direção na qual τ age nas três faces restantes do elemento.

EXEMPLO 5.1

A distribuição de tensão em um eixo maciço foi representada em gráfico ao longo de três linhas radiais arbitrárias, como mostra a Figura 5.10a. Determine o torque interno resultante na seção.



(a)



(b)

Figura 5.10

SOLUÇÃO I

O momento polar de inércia para a área da seção transversal é

$$J = \frac{\pi}{2}(50\text{ mm})^4 = 9{,}82 \times 10^6\text{ mm}^4$$

Aplicando a fórmula da torção com $\tau_{máx} = 56\text{ MPa} = 56\text{ N/mm}^2$ (Figura 5.10a), temos

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}; \qquad 56\text{ N/mm}^2 = \frac{T(50\text{ mm})}{9{,}82 \times 10^6\text{ mm}^4}$$

$$T = 11{,}0\text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

O mesmo resultado pode ser obtido determinando-se o torque produzido pela distribuição de tensão ao redor da linha central (centroide) do eixo. Em primeiro lugar, temos de expressar $\tau = f(\rho)$. Usando semelhança de triângulos (Figura 5.10b), temos

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{56\text{ N/mm}^2}{50\text{ mm}}$$

$$\tau = 1{,}12\rho\text{ N/mm}^2$$

Essa tensão age em todas as porções do elemento do anel diferencial que tem área $dA = 2\pi\rho\, d\rho$. Visto que a força criada por τ é $dF = \tau\, dA$, o torque é

$$dT = \rho dF = \rho(\pi dA) = \rho(1{,}12\rho)2\pi\rho d\rho = 2{,}24\pi\rho^3 d\rho$$

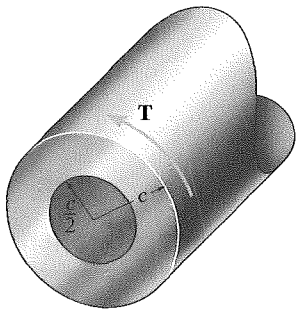
Para a área inteira na qual τ age, exige-se

$$T = \int_0^{50} 2{,}24\pi\rho^3\, d\rho = 2{,}24\pi\left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big|_0^{50} = 11{,}0 \times 10^6\text{ N}\cdot\text{mm}$$

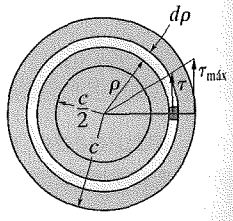
$$= 11{,}0\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 5.2

O eixo *maciço* de raio c é submetido a um torque **T** (Figura 5.11a). Determine a fração de T à qual resiste o material contido no interior da região externa do eixo, que tem raio interno $c/2$ e raio externo c.



(a)



(b)

Figura 5.11

SOLUÇÃO

A tensão no eixo varia linearmente, tal que $\tau = (\rho/c)\tau_{máx}$ (Equação 5.3). Portanto, o torque dT' no anel (área) localizado no interior da região sombreada mais clara (Figura 5.11b) é

$$dT' = \rho(\tau\, dA) = \rho(\rho/c)\tau_{máx}(2\pi\rho\, d\rho)$$

Para toda a área sombreada mais clara, o torque é

$$T' = \frac{2\pi\tau_{máx}}{c}\int_{c/2}^{c}\rho^3\, d\rho$$

$$= \frac{2\pi\tau_{máx}}{c}\frac{1}{4}\rho^4\Big|_{c/2}^{c}$$

De modo que

$$T' = \frac{15\pi}{32}\tau_{máx}c^3 \qquad (1)$$

Esse torque T' pode ser expresso em termos do torque aplicado T usando, em primeiro lugar, a fórmula da torção para determinar a tensão máxima no eixo. Temos

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{(\pi/2)c^4}$$

ou

$$\tau_{máx} = \frac{2T}{\pi c^3}$$

Substituindo essa expressão na Equação 1, obtemos

$$T' = \frac{15}{16}T \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Aqui, a região sombreada mais clara resiste a aproximadamente 94% do torque, e o "núcleo" interno do eixo, $\rho = 0$ a $\rho = c/2$, resiste aos restantes 6% de T (ou 1/16). O resultado é que o material localizado na *região externa* do eixo é altamente efetivo na resistência ao torque, o que justifica a utilização de eixos tubulares como um meio eficiente para transmitir torque e, com isso, economizar material.

EXEMPLO 5.3

O eixo mostrado na Figura 5.12a está apoiado em dois mancais e sujeito a três torques. Determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos A e B localizados na seção a–a do eixo (Figura 5.12c).

SOLUÇÃO

Torque interno. As reações dos mancais sobre o eixo são nulas contanto que o peso do eixo seja desprezado. Além disso, os torques aplicados satisfazem o equilíbrio de momento em torno da linha central do eixo.

O torque interno na seção a–a será determinado pelo diagrama de corpo livre do segmento esquerdo (Figura 5.12b). Temos

$\Sigma M_x = 0;$
$4.250\ \text{kN·mm} - 3.000\ \text{kN·mm} - T = 0\ \ T = 1.250\ \text{kN·mm}$

Propriedade da seção. O momento polar de inércia para o eixo é

$$J = \frac{\pi}{2}(75\ \text{mm})^4 = 4{,}97 \times 10^7\ \text{mm}^4$$

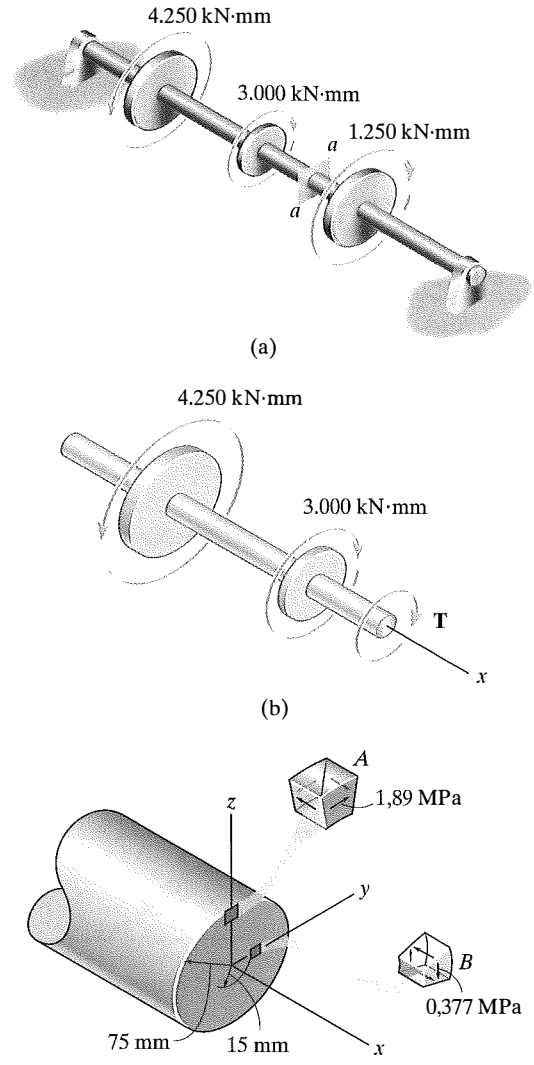


Figura 5.12

Tensão de cisalhamento. Visto que o ponto A se encontra em $\rho = c = 75$ mm,

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{1250\ \text{kN·mm} \times 75\ \text{mm}}{4{,}97 \times 10^7\ \text{mm}^4} = 1{,}89\ \text{N/mm}^2 = 1{,}89\ \text{MPa}$$

Resposta

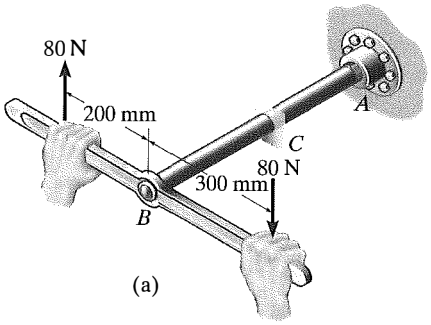
Da mesma forma, para o ponto B, em $\rho = 15$ mm, temos

$$\tau_B = \frac{T\rho}{J} = \frac{1.250\text{kN·mm} \times 15\ \text{mm}}{4{,}97 \times 10^7\ \text{mm}^4} = 0{,}377\ \text{MPa} \quad \textit{Resposta}$$

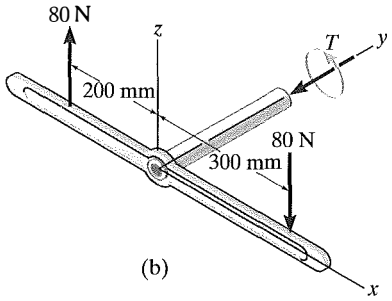
OBSERVAÇÃO: As direções dessas tensões em cada elemento em A e B (Figura 5.12c) são estabelecidas pela direção do torque interno resultante **T**, mostrado na Figura 5.12b. Observe cuidadosamente como a tensão de cisalhamento age nos planos de cada um desses elementos.

EXEMPLO 5.4

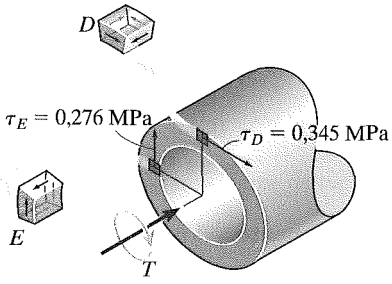
O tubo mostrado na Figura 5.13a tem diâmetro interno de 80 mm e diâmetro externo de 100 mm. Se sua extremidade for apertada contra o apoio em A usando-se uma chave em B, determine a tensão de cisalhamento desenvolvida no material nas paredes interna e externa ao longo da porção central do tubo quando são aplicadas forças de 80 N à chave.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.13

SOLUÇÃO

Torque interno. Toma-se uma seção em uma localização intermediária C ao longo da linha central do tubo (Figura 5.13b). A única incógnita na seção é o torque interno **T**. O equilíbrio de força e o equilíbrio de momento em torno dos eixos x e z são satisfeitos. Exige-se

$$\Sigma M_y = 0; \quad 80\,\text{N}(0{,}3\,\text{m}) + 80\,\text{N}(0{,}2\,\text{m}) - T = 0 \quad T = 40\,\text{N}\cdot\text{m}$$

Propriedade da seção. O momento polar de inércia para a área da seção transversal do tubo é

$$J = \frac{\pi}{2}[(0{,}05\,\text{m})^4 - (0{,}04\,\text{m})^4] = 5{,}80(10^{-6})\,\text{m}^4$$

Tensão de cisalhamento. Para qualquer ponto localizado na superfície externa do tubo, $\rho = c_o = 0{,}05$ m, temos

$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40\,\text{N}\cdot\text{m}\,(0{,}05\,\text{m})}{5{,}80(10^{-6})\,\text{m}^4} = 0{,}345\,\text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

E para qualquer ponto localizado na superfície interna, $\rho = c_i = 0{,}04$ m, de modo que

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40\,\text{N}\cdot\text{m}\,(0{,}04\,\text{m})}{5{,}80(10^{-6})\,\text{m}^4} = 0{,}276\,\text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Para mostrar como essas tensões agem nos pontos representativos D e E na área da seção transversal, em primeiro lugar, observamos a seção transversal da parte anterior do segmento CA do tubo (Figura 5.13a). Nessa seção (Figura 5.13c), o torque interno resultante é igual, mas oposto, ao mostrado na Figura 5.13b. As tensões de cisalhamento em D e E contribuem para esse torque e, portanto, agem nas faces sombreadas dos elementos nas direções mostradas. Como consequência, observe como as componentes da tensão de cisalhamento agem nas outras três faces. Além disso, visto que a face superior de D e a face interna de E estão em regiões livres de tensão tomadas nas paredes externa e interna do tubo, não pode existir nenhuma tensão de cisalhamento nessas faces ou nas outras faces correspondentes dos elementos.

5.3 Transmissão de potência

Eixos e tubos de seções transversais circulares são frequentemente usados para transmitir potência desenvolvida por uma máquina. Quando usados para essa finalidade, estão sujeitos a torques que dependem da potência gerada pela máquina e da velocidade angular do eixo. ***Potência*** é definida como o trabalho realizado por unidade de tempo. O trabalho transmitido por um eixo rotativo é igual ao produto entre o torque aplicado e o ângulo de rotação. Portanto, se durante um instante dt um torque aplicado **T** provocar a rotação $d\theta$ no eixo, então a potência instantânea será

$$P = \frac{T\,d\theta}{dt}$$

Visto que a velocidade angular do eixo $\omega = d\theta/dt$, também podemos expressar a potência como

$$\boxed{P = T\omega} \qquad (5.10)$$

No SI (Sistema Internacional de Unidades de Medida), a potência é expressa em *watts* quando o torque

é medido em newtons-metro (1 N · m) e ω é expressa em radianos por segundo (rad/s) (1 W = 1 N · m/s).

Quando se trata de máquinas rotativas, costuma-se informar a *frequência* de rotação de um eixo, f. Frequência é a medida do número de revoluções ou ciclos que o eixo faz por segundo e é expressa em hertz (1 Hz = 1 ciclo/s). Visto que 1 ciclo = 2 π rad, então $\omega = 2\pi f$, e a Equação 5.10 para a potência torna-se

$$\boxed{P = 2\pi f T} \tag{5.11}$$

Projeto do eixo. Quando a potência transmitida por um eixo e sua frequência de rotação são conhecidas, o torque desenvolvido no eixo pode ser determinado pela Equação 5.11, isto é, $T = P/2\pi f$. Se T e a tensão de cisalhamento admissível, τ_{adm}, para o material forem conhecidos, podemos determinar as dimensões da seção transversal do eixo pela fórmula da torção, contanto que o comportamento do material seja linear elástico. Especificamente, o parâmetro de projeto ou parâmetro geométrico J/c torna-se

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}} \tag{5.12}$$

Para um *eixo maciço*, $J = (\pi/2)c^4$, portanto, pode-se determinar, por substituição, um *valor único* para o raio c do eixo. Se o eixo for *tubular*, de modo que $J = (\pi/2)(c_o^4 - c_i^4)$, o projeto permite uma ampla faixa de possibilidades para a solução. Isso porque se pode *escolher um valor arbitrário* para c_o ou c_i e, então, calcular o outro raio pela Equação 5.12.

EXEMPLO 5.5

Um eixo maciço de aço AB mostrado na Figura 5.14 será usado para transmitir 3.750 W do motor M ao qual está acoplado. Se o eixo girar a $\omega = 175$ rpm e o aço tiver uma tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 100$ MPa, determine o diâmetro exigido para o eixo com precisão de mm.

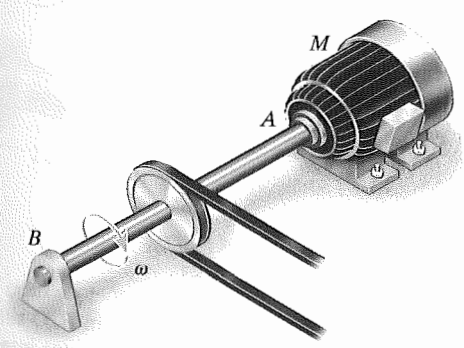


Figura 5.14

SOLUÇÃO

O torque no eixo é determinado pela Equação 5.10, isto é, $P = T\omega$. Expressando P em newtons-metro por segundo e ω em radianos/segundo, temos

$$P = 3.750 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

$$\omega = \frac{175 \text{ rev}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 18{,}33 \text{ rad/s}$$

Assim,

$$P = T\omega; \quad 3.750 \text{ N} \cdot \text{m/s} = T(18{,}33) \text{ rad/s}$$

$$T = 204{,}6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Aplicando a Equação 5.12, obtemos

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}\frac{c^4}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}}$$

$$c = \left(\frac{2T}{\pi\tau_{adm}}\right)^{1/3} = \left[\frac{2(204{,}6 \text{ N} \cdot \text{m})(1.000 \text{mm/m})}{\pi(100 \text{ N} \cdot \text{mm}^2)}\right]^{1/3}$$

$$c = 10{,}92 \text{ mm}$$

Visto que $2c = 21{,}84$ mm, selecione um eixo com diâmetro

$$d = 22 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 5.6

Um eixo tubular com diâmetro interno de 30 mm e diâmetro externo de 42 mm será usado para transmitir 90 kW de potência. Determine a frequência de rotação do eixo de modo que a tensão de cisalhamento não ultrapasse 50 MPa.

SOLUÇÃO

O torque máximo que pode ser aplicado ao eixo é determinado pela fórmula da torção.

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$$

$$50(10^6) \text{ N/m}^2 = \frac{T(0{,}021 \text{ m})}{(\pi/2)[(0{,}021 \text{ m})^4 - (0{,}015 \text{ m})^4]}$$

$$T = 538 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Aplicando a Equação 5.11, a frequência de rotação é

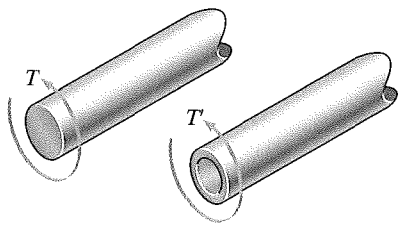
$$P = 2\pi f T$$

$$90(10^3) \text{ N} \cdot \text{m/s} = 2\pi f(538 \text{ N} \cdot \text{m})$$

$$f = 26{,}6 \text{ Hz} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

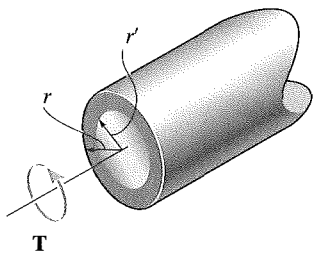
5.1. Um eixo é feito de uma liga de aço com tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 84$ MPa. Se o diâmetro do eixo for 37,5 mm, determine o torque máximo **T** que pode ser transmitido. Qual seria o torque máximo **T'** se fosse feito um furo de 25 mm de diâmetro no eixo? Faça um rascunho da distribuição da tensão de cisalhamento ao longo de uma linha radial em cada caso.



Problema 5.1

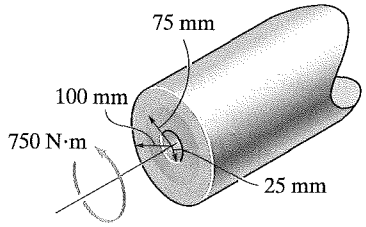
5.2. O eixo maciço de raio r está sujeito a um torque **T**. Determine o raio r' do núcleo interno do eixo que resista à metade do torque aplicado ($T/2$). Resolva o problema de duas maneiras: (a) usando a fórmula da torção e (b) determinando a resultante da distribuição da tensão de cisalhamento.

5.3. O eixo maciço de raio r está sujeito a um torque **T**. Determine o raio r' do núcleo interno do eixo que resista a 1/4 do torque aplicado ($T/4$). Resolva o problema de duas maneiras: (a) usando a fórmula da torção e (b) determinando a resultante da distribuição da tensão de cisalhamento.



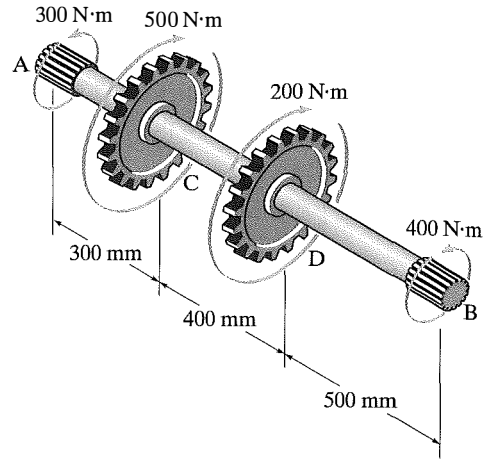
Problemas 5.2/3

***5.4.** O tubo é submetido a um torque de 750 N · m. Determine a parcela desse torque à qual a seção sombreada cinza resiste. Resolva o problema de duas maneiras: (a) usando a fórmula da torção e (b) determinando a resultante da distribuição da tensão de cisalhamento.



Problema 5.4

5.5. O eixo maciço de 30 mm de diâmetro é usado para transmitir os torques aplicados às engrenagens. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo.

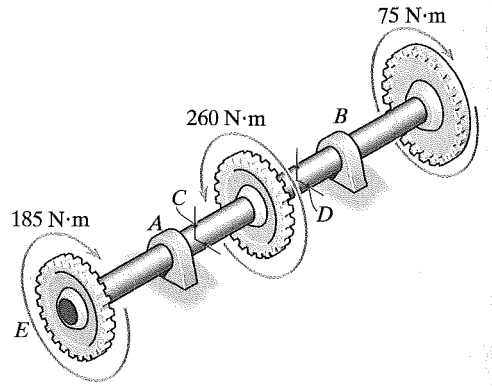


Problema 5.5

5.6. O eixo maciço de 32 mm de diâmetro é usado para transmitir os torques aplicados às engrenagens. Se o eixo estiver apoiado em mancais lisos em A e B, que não resistem a torque, determine a tensão de cisalhamento desenvolvida no eixo nos pontos C e D. Indique a tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.

5.7. O eixo tem diâmetro externo de 32 mm e diâmetro interno de 25 mm. Se for submetido aos torques aplicados mostrados na figura, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta desenvolvida no eixo. Os mancais lisos em A e B não resistem a torque.

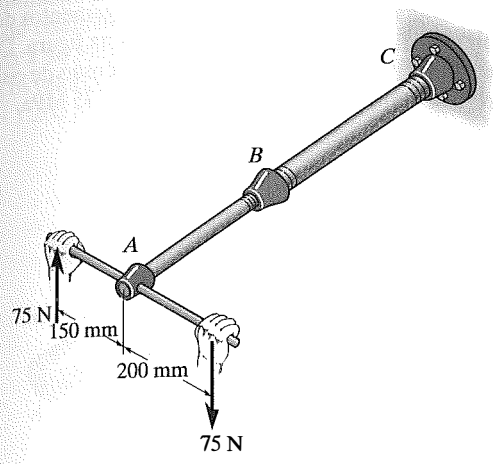
***5.8.** O eixo tem diâmetro externo de 32 mm e diâmetro interno de 25 mm. Se for submetido aos torques aplicados mostrados na figura, faça o gráfico da distribuição da tensão de cisalhamento que age ao longo de uma linha radial que se encontra no interior da região EA do eixo. Os mancais lisos em A e B não resistem a torque.



Problemas 5.6/7/8

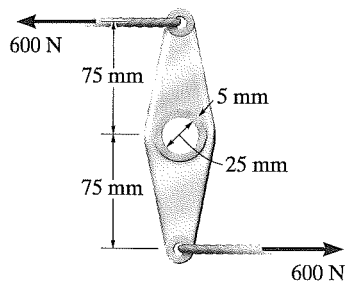
5.9. O conjunto é composto por duas seções de tubo de aço galvanizado interligadas por uma redução em B. O tubo menor tem diâmetro externo de 18,75 mm e diâmetro interno de 17 mm, enquanto o tubo maior tem diâmetro externo de 25 mm e diâmetro interno de 21,5 mm. Se o tubo estiver firmemente

preso à parede em C, determine a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida em cada seção do tubo quando o conjugado mostrado na figura for aplicado ao cabo da chave.



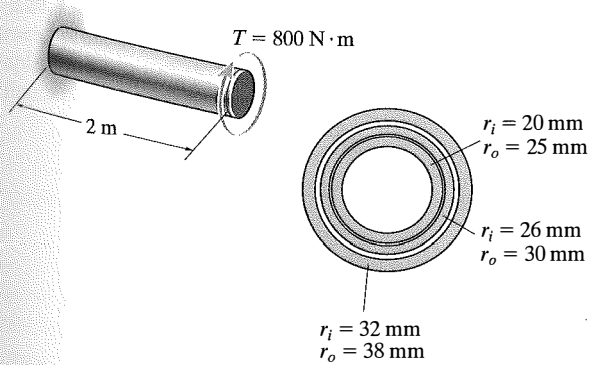
Problema 5.9

5.10. O elo funciona como parte do controle do elevador de um pequeno avião. Se o tubo de alumínio conectado tiver 25 mm de diâmetro interno e parede de 5 mm de espessura, determine a tensão de cisalhamento máxima no tubo quando a força de 600 N for aplicada aos cabos. Além disso, trace um rascunho da distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal.



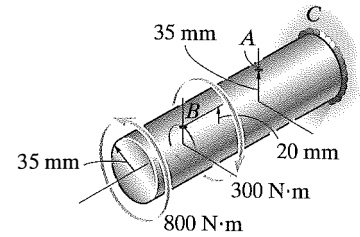
Problema 5.10

5.11. O eixo é composto por três tubos concêntricos, todos do mesmo material, e cada um com os raios internos e externos mostrados na figura. Se for aplicado um torque $T = 800\ \text{N} \cdot \text{m}$ ao disco rígido preso à sua extremidade, determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo.



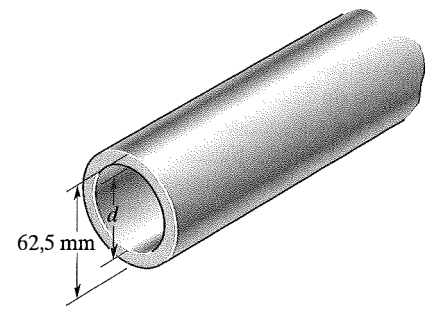
Problema 5.11

***5.12.** O eixo maciço está preso ao suporte em C e sujeito aos carregamentos de torção mostrados. Determine a tensão de cisalhamento nos pontos A e B e faça um rascunho da tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.



Problema 5.12

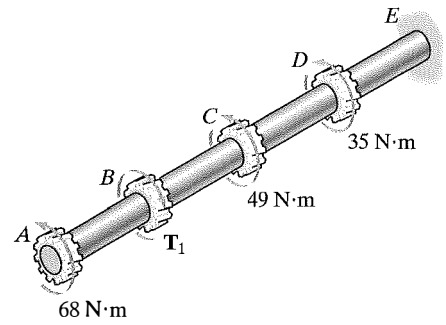
5.13. Um tubo de aço com diâmetro externo de 62,5 mm é usado para transmitir 3 kW quando gira a 27 rev/minuto. Determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro interno d do tubo se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 70$ MPa.



Problema 5.13

5.14. O eixo maciço de alumínio tem diâmetro de 50 mm e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 6$ MPa. Determine o maior torque T_1 que pode ser aplicado ao eixo se ele também estiver sujeito a outros carregamentos de torção. Exige-se que $\mathbf{T}_1$ aja na direção mostrada. Determine também a tensão de cisalhamento máxima no interior das regiões CD e DE.

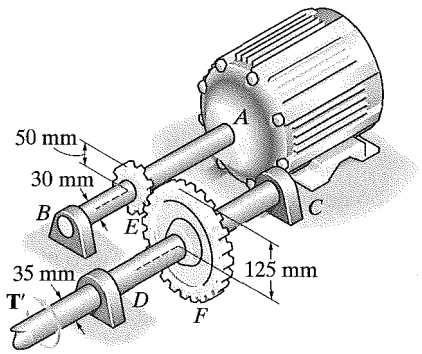
5.15. O eixo maciço de alumínio tem diâmetro de 50 mm. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e trace um rascunho da distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da linha radial do eixo onde a tensão de cisalhamento é máxima. Considere $T_1 = 20\ \text{N} \cdot \text{m}$.



Problemas 5.14/15

*5.16. O motor transmite um torque de 50 N · m ao eixo *AB*. Esse torque é transmitido ao eixo *CD* pelas engrenagens em *E* e *F*. Determine o torque de equilíbrio **T'** no eixo *CD* e a tensão de cisalhamento máxima em cada eixo. Os mancais *B*, *C* e *D* permitem a livre rotação dos eixos.

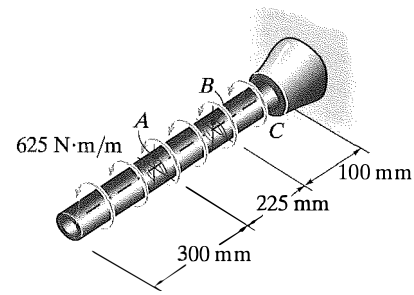
5.17. Se o torque aplicado ao eixo *CD* for $T' = 75$ N · m, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta em cada eixo. Os mancais *B*, *C* e *D* permitem a livre rotação dos eixos, e o motor impede a rotação dos eixos.



Problemas. 5.16/17

5.18. O tubo de cobre tem diâmetro externo de 62,5 mm e diâmetro interno de 57,5 mm. Se estiver firmemente preso à parede em *C* e for submetido a um torque uniformemente distribuído, como mostra a figura, determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nos pontos *A* e *B*. Esses pontos se encontram na superfície externa do tubo. Faça um rascunho da tensão de cisalhamento sobre os elementos de volume localizados em *A* e *B*.

5.19. O tubo de cobre tem diâmetro externo de 62,5 mm e diâmetro interno de 57,5 mm. Se estiver firmemente preso à parede em *C* e for submetido ao torque uniformemente distribuído ao longo de todo o seu comprimento, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no tubo. Discuta a validade desse resultado.

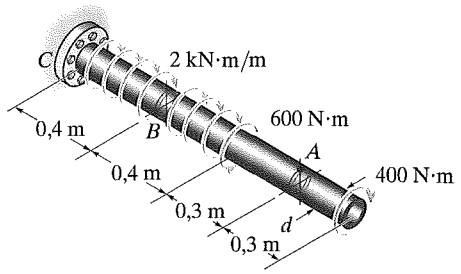


Problemas 5.18/19

*5.20. O eixo maciço com 60 mm de diâmetro está sujeito aos carregamentos de torção distribuídos e concentrados mostrados na figura. Determine a tensão de cisalhamento nos pontos *A* e *B* e trace um rascunho da tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.

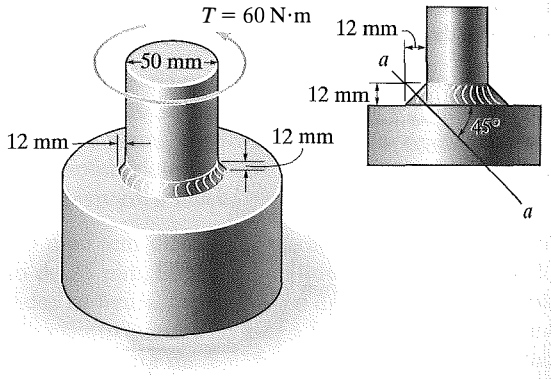
5.21. O eixo maciço com 60 mm de diâmetro está sujeito aos carregamentos de torção distribuídos e concentrados mostrados na figura. Determine as tensões de cisalhamento máxima e mínima no eixo e especifique suas localizações, medidas em relação à extremidade fixa.

5.22. O eixo maciço é submetido aos carregamentos de torção distribuídos e concentrados mostrados na figura. Determine o diâmetro *d* exigido para o eixo se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 175$ MPa.



Problemas 5.20/21/22

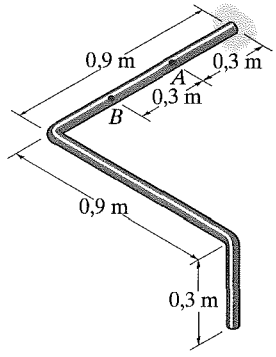
5.23. Os eixos de aço estão interligados por um filete de solda como mostra a figura. Determine a tensão de cisalhamento média na solda ao longo da seção *a–a* se o torque aplicado aos eixos for $T = 60$ N · m. *Observação*: *A* seção crítica onde a solda falha encontra-se ao longo da seção *a–a*.



Problema 5.23

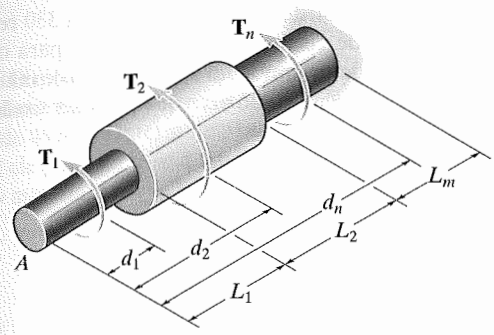
*5.24. A haste tem diâmetro de 12 mm e peso de 80 N/m. Determine a tensão de torção máxima provocada na haste pelo seu peso em uma seção localizada em *A*.

5.25. Resolva o Problema 5.24 para a tensão de torção máxima em *B*.



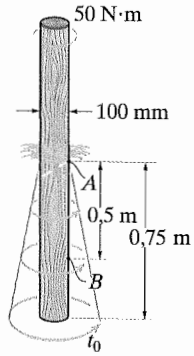
Problemas 5.24/25

5.26. Considere o problema geral de um eixo circular composto por m segmentos, cada um com raio c_m. Se houver n torques no eixo, como mostra a figura, escreva um código computacional que possa ser usado para determinar a tensão de cisalhamento máxima em qualquer posição especificada x ao longo do eixo. Mostre uma aplicação do código para os valores $L_1 = 0{,}6\text{ m}, c_1 = 50\text{ mm}, L_2 = 1{,}2\text{ m}, c_2 = 25\text{ mm}, T_1 = 1.200\text{ N} \cdot \text{m}, d_1 = 0, T_2 = -900\text{ N} \cdot \text{m}, d_2 = 1{,}5\text{ m}$.



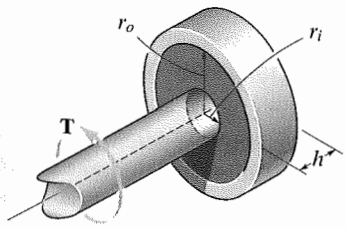
Problema 5.26

5.27. O poste de madeira, o qual está enterrado no solo até a metade de seu comprimento, é submetido a um momento de torção de 50 N · m que o faz girar a uma velocidade angular constante. Esse momento enfrenta a resistência de uma *distribuição linear* de torque desenvolvida pelo atrito com o solo, que varia de zero no solo a t_0 N · m/m na base do poste. Determine o valor de equilíbrio para t_0 e, então, calcule a tensão de cisalhamento nos pontos A e B que se encontram na superfície externa do poste.



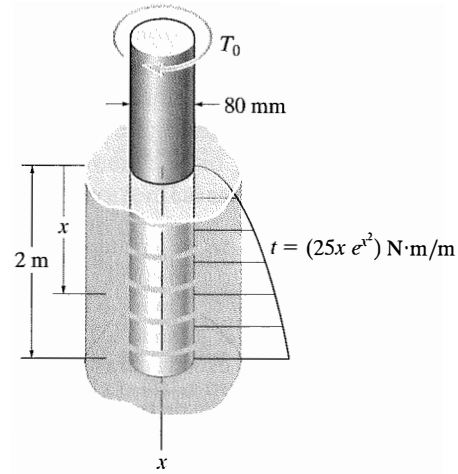
Problema 5.27

5.28. Uma mola cilíndrica é composta por um anel de borracha preso a um anel e eixo rígidos. Mantendo o anel fixo e aplicando um torque **T** ao eixo, determine a tensão de cisalhamento máxima na borracha.



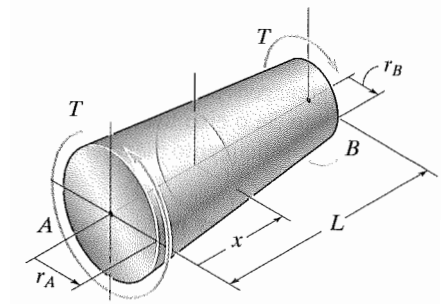
Problema 5.28

5.29. O eixo tem diâmetro de 80 mm e, devido ao atrito na superfície no interior do furo, está sujeito a um torque variável descrito pela função $t = (25xe^{x^2})$ N · m/m, onde x é dado em metros. Determine o torque mínimo T_0 necessário para vencer o atrito e fazer o eixo girar. Determine também a tensão máxima absoluta no eixo.



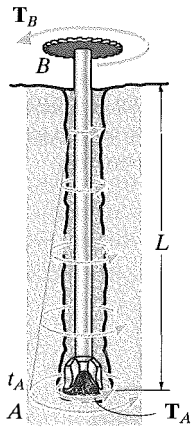
Problema 5.29

5.30. O eixo maciço tem conicidade linear de r_A em uma extremidade e r_B na outra extremidade. Deduza uma equação que dê a tensão de cisalhamento máxima no eixo em uma localização x ao longo da linha central do eixo.



Problema 5.30

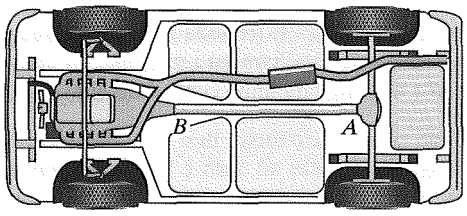
5.31. Ao perfurar um poço à velocidade angular constante, a extremidade inferior do tubo de perfuração encontra uma resistência à torção T_A. Além disso, o solo ao longo das laterais do tubo cria um torque de atrito distribuído ao longo do comprimento do tubo, que varia uniformemente de zero na superfície B a t_A em A. Determine o torque mínimo T_B que deve ser transmitido pela unidade de acionamento para se vencerem os torques de resistência e calcule a tensão de cisalhamento máxima no tubo. O tubo tem raio externo r_o e raio interno r_i.



Problema 5.31

***5.32.** O eixo de transmissão AB de um automóvel é feito de aço com tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 56$ MPa. Se o diâmetro externo do eixo for 62,5 mm e o motor transmitir 165 kW ao eixo quando estiver girando a 1.140 rev/minuto, determine a espessura mínima exigida para a parede do eixo.

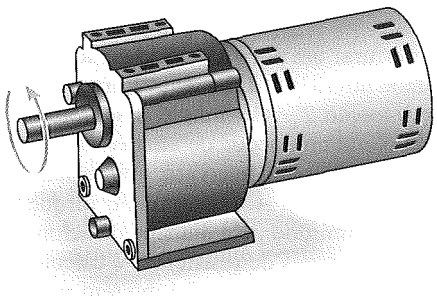
5.33. O projeto prevê que o eixo de transmissão AB de um automóvel será um tubo de parede fina. O motor transmite 125 kW quando o eixo está girando a 1.500 rev/minuto. Determine a espessura mínima da parede do eixo se o diâmetro externo for 62,5 mm. A tensão de cisalhamento admissível do material é $\tau_{adm} = 50$ MPa.



Problemas 5.32/33

5.34. O motor de engrenagens pode desenvolver 100 W quando gira a 300 rev/minuto. Se o eixo tiver diâmetro de 12 mm, determine a tensão de cisalhamento máxima que será desenvolvida no eixo.

5.35. O motor de engrenagens pode desenvolver 100 W quando gira a 80 rev/minuto. Se a tensão de cisalhamento admissível para o eixo for $\tau_{adm} = 28$ MPa, determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o menor diâmetro do eixo que pode ser usado.

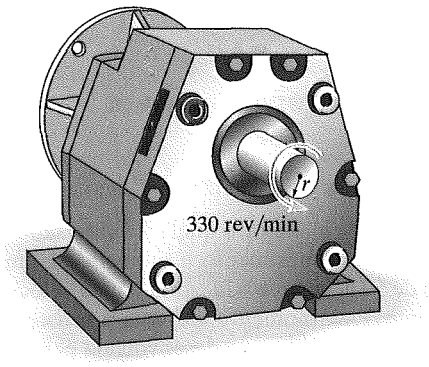


Problemas 5.34/35

***5.36.** O eixo de transmissão de um trator é feito de um tubo de aço com tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 42$ MPa. Se o diâmetro externo for 75 mm e o motor transmitir 145 kW ao eixo quando estiver girando a 1.250 rev/minuto, determine a espessura mínima exigida para a parede do eixo.

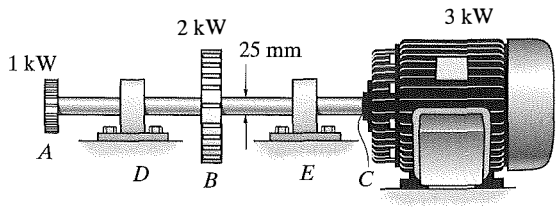
5.37. O moto-redutor de 2,5 kW pode girar a 330 rev/minuto. Se o diâmetro do eixo for 20 mm, determine a tensão de cisalhamento máxima que será desenvolvida no eixo.

5.38. O moto-redutor de 2,5 kW pode girar a 330 rev/minuto. Se a tensão de cisalhamento admissível para o eixo for $\tau_{adm} = 56$ MPa, determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o menor diâmetro do eixo que pode ser usado.



Problemas 5.37/38

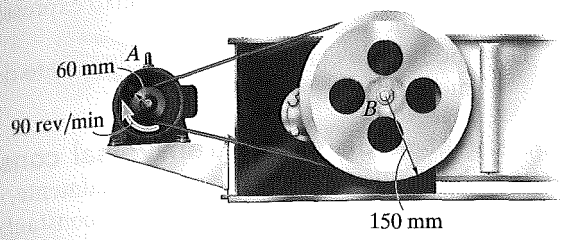
5.39. O eixo maciço de aço AC tem diâmetro de 25 mm e está apoiado nos mancais lisos em D e E. O eixo está acoplado a um motor em C, que transmite 3 kW de potência ao eixo quando está girando a 50 rev/s. Se as engrenagens A e B absorverem 1 kW e 2 kW, respectivamente, determine a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo no interior das regiões AB e BC. O eixo é livre para girar em seus mancais de apoio D e E.



Problema 5.39

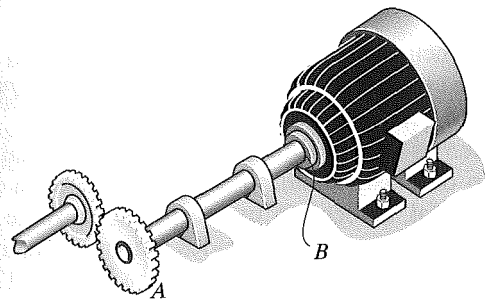
***5.40.** Um navio tem um eixo de transmissão da hélice que gira a 1.500 rev/minuto quando está desenvolvendo 1.500 kW. Se o eixo tiver 2,4 m de comprimento e 100 mm de diâmetro, determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo causada por torção.

5.41. O motor A desenvolve potência de 300 W e gira a polia acoplada a 90 rev/minuto. Determine os diâmetros exigidos para os eixos de aço nas polias em A e B se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 85$ MPa.



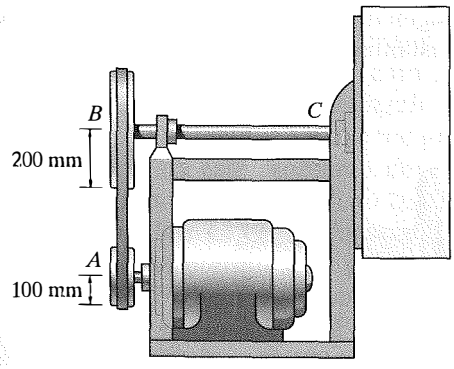
Problema 5.41

5.42. O motor transmite 400 kW ao eixo de aço AB, o qual é tubular e tem diâmetro externo de 50 mm e diâmetro interno de 46 mm. Determine a *menor* velocidade angular com a qual ele pode girar se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 175$ MPa.



Problema 5.42

5.43. O motor transmite 40 kW quando está girando a taxa constante de 1.350 rpm em A. Esse carregamento é transmitido ao eixo de aço BC do ventilador pelo sistema de correia e polia mostrado na figura. Determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o menor diâmetro desse eixo se a tensão de cisalhamento admissível para o aço for $\tau_{adm} = 84$ MPa.



Problema 5.43

5.4 Ângulo de torção

Às vezes, o projeto de um eixo depende de restrições à quantidade de rotação ou torção que pode ocorrer quando o eixo é submetido a um torque. Além do mais, saber calcular o ângulo de torção para um eixo é importante quando analisamos as reações em eixos estaticamente indeterminados.

Nesta seção, desenvolveremos uma fórmula para determinar o ***ângulo de torção*** ϕ (fi) de uma extremidade de um eixo em relação à sua outra extremidade. Consideraremos que o eixo tem seção transversal circular que pode variar gradativamente ao longo de seu comprimento (Figura 5.15a) e que o material é homogêneo e se comporta de maneira linear elástica quando o torque é aplicado. Como ocorreu no caso de uma barra carregada axialmente, desprezaremos as deformações localizadas que ocorrem nos pontos de aplicação dos torques e em locais onde a seção transversal muda abruptamente. Pelo princípio de Saint-Venant, esses efeitos ocorrem no interior de pequenas regiões do comprimento do eixo e, em geral, provocam apenas um leve efeito no resultado final.

Usando o método das seções, isolamos do eixo um disco diferencial de espessura dx localizado na posição x (Figura 5.15b). O torque interno resultante é representado por $T(x)$, visto que o carregamento externo

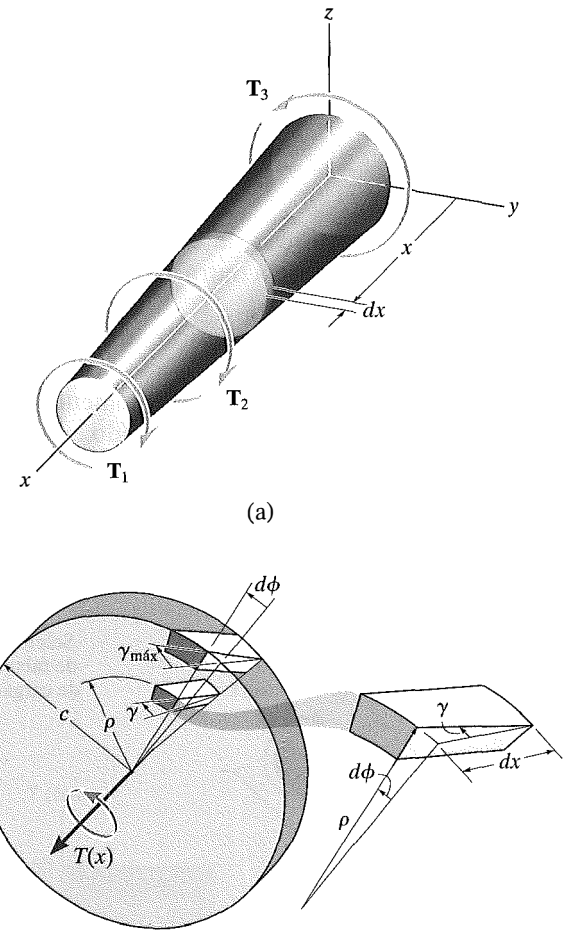


Figura 5.15

pode acarretar variação no torque interno ao longo da linha central do eixo. A ação de $T(x)$ provocará uma torção no disco, de tal modo que a *rotação relativa* de uma de suas faces em relação à outra será $d\phi$ (Figura 5.15b). O resultado é que um elemento de material localizado em um raio arbitrário ρ *no* interior do disco sofrerá uma deformação por cisalhamento γ. Os valores de γ e $d\phi$ são relacionados pela Equação 5.1, a saber,

$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho} \tag{5.13}$$

Visto que a lei de Hooke ($\tau = G\gamma$) se aplica e que a tensão de cisalhamento pode ser expressa em termos do torque aplicado pela fórmula da torção $\tau = T(x)\rho/J(x)$, então $\gamma = T(x)\rho/J(x)G$. Substituindo essa expressão na Equação 5.13, o ângulo de torção para o disco é

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G}\,dx$$

Integrando em todo o comprimento L do eixo, obtemos o ângulo de torção para o eixo inteiro, a saber,

$$\boxed{\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{J(x)G}} \tag{5.14}$$

Nessa expressão,

ϕ = ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra extremidade, medido em radianos

$T(x)$ = torque interno na posição arbitrária x, determinado pelo método das seções e pela equação de equilíbrio de momento aplicada em torno da linha central do eixo

$J(x)$ = momento polar de inércia do eixo expresso em função da posição x

G = módulo de elasticidade ao cisalhamento do material

Torque e área de seção transversal constantes. Na prática da engenharia, normalmente, o material é homogêneo, de modo que G é constante. Além disso, a área da seção transversal do eixo e o torque aplicado são constantes ao longo do comprimento do eixo (Figura 5.16). Se for esse o caso, o torque interno $T(x) = T$, o momento polar de inércia $J(x) = J$ e a Equação 5.14 podem ser integrados, o que resulta

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{JG}} \tag{5.15}$$

As semelhanças entre estas duas equações e as equações para uma barra carregada axialmente ($\delta = \int P(x)dx/A(x)E$ e $\delta = PL/AE$) devem ser notadas.

Podemos usar a Equação 5.15 para determinar o módulo de elasticidade ao cisalhamento G do material. Para tal, colocamos um corpo de prova de comprimento e diâmetro conhecidos em uma máquina de ensaio de torção como a mostrada na Figura 5.17. Então, o torque aplicado T e o ângulo de torção ϕ são medidos entre um comprimento de referência L. Pela Equação 5.15, $G = TL/J\phi$. Em geral, para se obter um valor mais confiável de G, realizam-se diversos desses ensaios e utiliza-se o valor médio.

Se o eixo for submetido a vários torques diferentes ou se a área da seção transversal ou o módulo de cisalhamento mudar abruptamente de uma região do eixo para a seguinte, a Equação 5.15 poderá ser aplicada a cada segmento do eixo onde essas quantidades são todas constantes. Então, o ângulo de torção de uma ex-

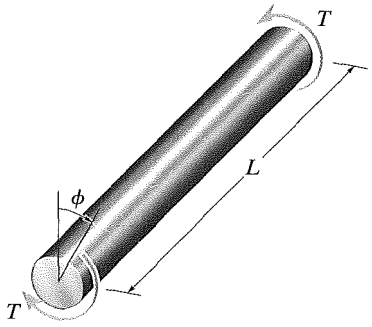


Figura 5.16

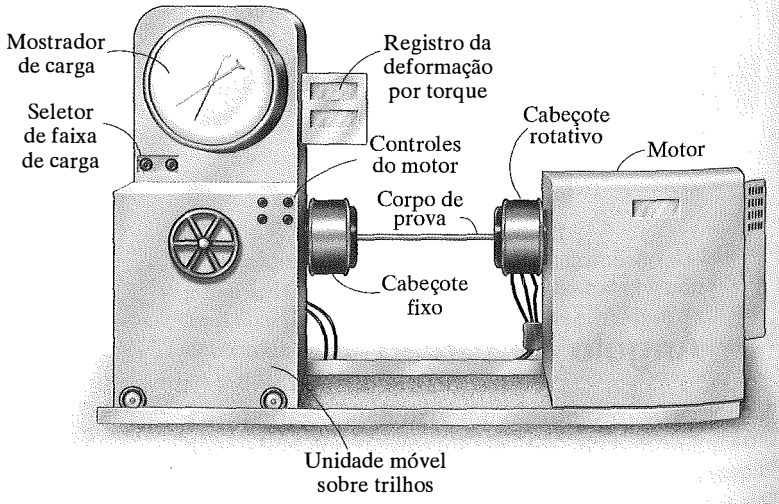
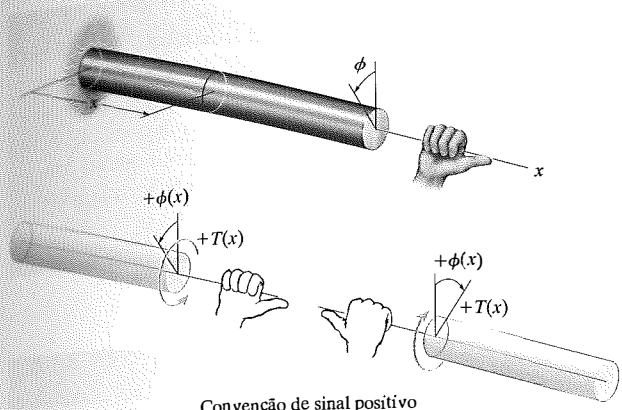


Figura 5.17



Convenção de sinal positivo para T e ϕ.

Figura 5.18

tremidade do eixo em relação à outra é determinado pela soma vetorial dos ângulos de torção de cada segmento. Para esse caso,

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG} \tag{5.16}$$

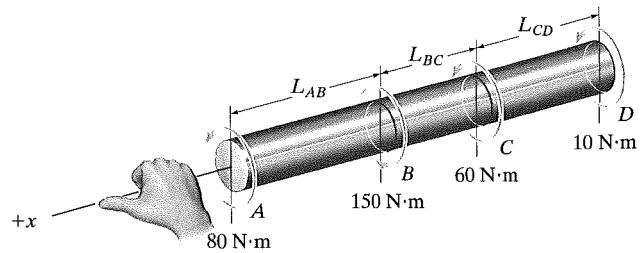
Convenção de sinal. Para aplicar a Equação 5.16, temos de desenvolver uma convenção de sinal para o torque interno e para o ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra extremidade. Para tal, usaremos a regra da mão direita, pela qual o torque e o ângulo serão *positivos* desde que o *polegar* esteja direcionado *para fora* do eixo quando os dedos o envolverem para dar a tendência da rotação (Figura 5.18).

Para ilustrar a utilização dessa convenção de sinal, considere o eixo mostrado na Figura 5.19a, que está submetido a quatro torques. O ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade D deve ser determinado. Para este problema, devemos considerar três segmentos do eixo, visto que o torque interno muda em B e C. Os torques internos para cada segmento são determinados pelo método das seções (Figura 5.19b). Pela regra da mão direita, com torques positivos direcionados para longe da *extremidade secionada* do eixo, temos $T_{AB} = +80\ \text{N} \cdot \text{m}$, $T_{BC} = -70\ \text{N} \cdot \text{m}$ e $T_{CD} = -10\ \text{N} \cdot \text{m}$. Esses resultados também são mostrados no *diagrama de torque* para o eixo (Figura 5.19c). Pela Equação 5.16, temos

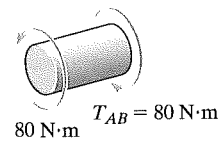
$$\phi_{A/D} = \frac{(+80\ \text{N} \cdot \text{m})\, L_{AB}}{JG} + \frac{(-70\ \text{N} \cdot \text{m})\, L_{BC}}{JG}$$

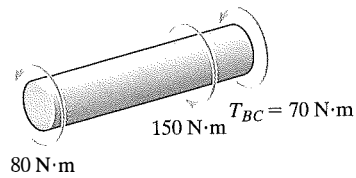
$$+ \frac{(-10\ \text{N} \cdot \text{m})\, L_{CD}}{JG}$$

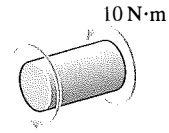
Se substituirmos os outros dados e encontrarmos uma resposta *positiva*, significa que a extremidade A girará na direção indicada pelos dedos da mão direita quando o polegar estiver direcionado *para fora* do eixo (Figura 5.19a). A notação de índice duplo é usada para indicar esse ângulo de torção relativo ($\phi_{A/D}$); entretanto, se o ângulo de torção tiver de ser determinado em relação a um *ponto fixo*, será usado apenas um índice. Por exemplo, se D estiver localizado em um apoio fixo, então o ângulo de torção calculado será representado por ϕ_A.



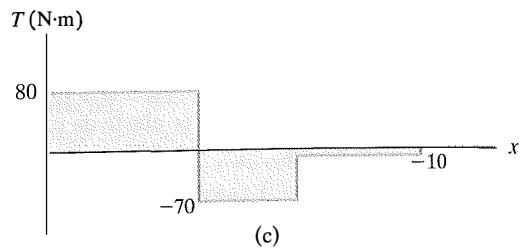
(a)







(b)



(c)

Figura 5.19

PONTOS IMPORTANTES

- O ângulo de torção é determinado pela relação entre o torque aplicado e a tensão de cisalhamento dada pela fórmula da torção, $\tau = T\rho/J$, e pela relação entre a rotação relativa e a deformação por cisalhamento dada pela equação $d\phi = \gamma\, dx/\rho$. Por fim, essas equações são combinadas pela lei de Hooke, $\tau = G\gamma$, o que dá como resultado a Equação 5.14.
- Visto que a lei de Hooke é usada no desenvolvimento da fórmula para o ângulo de torção, é importante que os torques aplicados não provoquem escoamento do material e que o material seja homogêneo e se comporte de maneira linear elástica.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O ângulo de torção de uma extremidade de um eixo ou tubo em relação à outra extremidade pode ser determinado pela aplicação das equações 5.14 a 5.16.

Torque interno.

- O torque interno é determinado em um ponto sobre a linha central do eixo pelo método das seções e pela equação de equilíbrio de momento aplicada ao longo da linha central do eixo.
- Se o torque variar ao longo do comprimento do eixo, deve-se fazer um corte (seção) na posição arbitrária x ao longo do eixo, e o torque é representado como função de x, isto é, $T(x)$.
- Se vários torques externos constantes agirem sobre o eixo entre suas extremidades, deve-se determinar, então, o torque interno em cada *segmento* do eixo, entre quaisquer dois torques externos. Os resultados podem ser representados como um diagrama de torque.

Ângulo de torção.

- Quando a área da seção transversal circular variar ao longo da linha central do eixo, o momento polar de inércia deve ser expresso em função de sua posição x ao longo do eixo, $J(x)$.
- Se o momento polar de inércia ou o torque interno *mudarem repentinamente* entre as extremidades do eixo, então $\phi = (T(x)/J(x)\, G)\, dx$ ou $\phi = TL/JG$ deve ser aplicada a *cada segmento* para o qual J, G e T são contínuos ou constantes.
- Ao determinar o torque interno em cada segmento, não se esqueça de utilizar uma convenção de sinal consistente, tal como a que discutimos na Figura 5.18. Além disso, não se esqueça de usar um conjunto consistente de unidades quando substituir dados numéricos nas equações.

EXEMPLO 5.7

As engrenagens acopladas à extremidade fixa do eixo de aço estão sujeitas aos torques mostrados na Figura 5.20a. Se o módulo de elasticidade ao cisalhamento for 80 GPa e o eixo tiver diâmetro de 14 mm, determine o deslocamento do dente P da engrenagem A. O eixo gira livremente dentro do mancal em B.

SOLUÇÃO

Torque interno. Examinando a figura, vemos que os torques nos segmentos AC, CD e DE são diferentes, porém *constantes* em cada segmento. A Figura 5.20b mostra diagramas de corpo livre de segmentos adequados do eixo juntamente com os torques internos calculados. Pela regra da mão direita e pela convenção de sinal estabelecida, a qual afirma que a direção de um torque positivo se afasta da extremidade secionada do eixo, temos

$$T_{AC} = +150\ \text{N}\cdot\text{m}\quad T_{CD} = -130\ \text{N}\cdot\text{m}\quad T_{DE} = -170\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Esses resultados também são mostrados no diagrama de torque (Figura 5.20c).

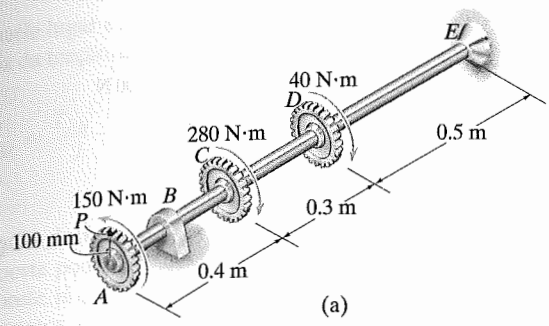
Ângulo de torção. O momento polar de inércia para o eixo é

$$J = \frac{\pi}{2}(0{,}007\ \text{m})^4 = 3{,}77(10^{-9})\ \text{m}^4$$

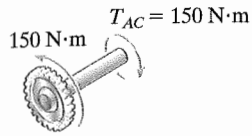
Aplicando a Equação 5.16 a cada segmento e fazendo a soma algébrica dos resultados, temos

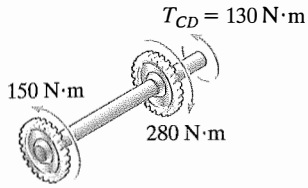
$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{(+150\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}4\ \text{m})}{3{,}77(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} + \frac{(-130\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}3\ \text{m})}{3{,}77(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2)]}$$

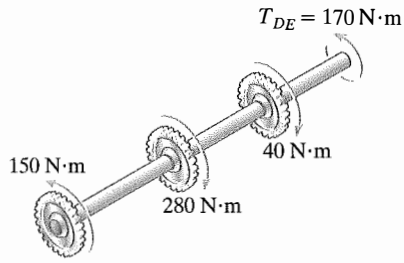
$$+ \frac{(-170\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}5\ \text{m})}{3{,}77(10^{-9})\ \text{m}^4\,[80(10^9)\ \text{N/m}^2)]} = -0{,}212\ \text{rad}$$



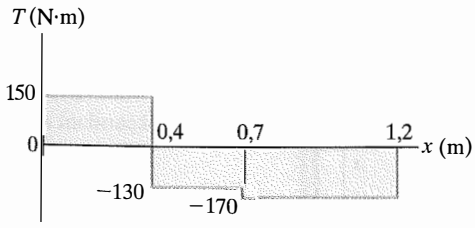
(a)



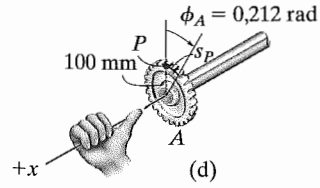




(b)



(c)



(d)

Figura 5.20

Visto que a resposta é negativa, pela regra da mão direita, o polegar está orientado na *direção* da extremidade E do eixo e, portanto, a engrenagem A girará conforme mostra a Figura 5.20d.

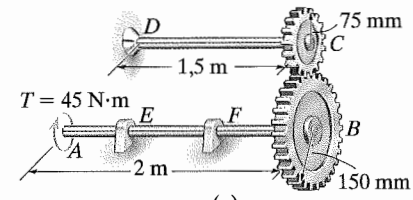
O deslocamento do dente P na engrenagem A é

$$S_P = \phi_A r = (0{,}212 \text{ rad})(100 \text{ mm}) = 21{,}2 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

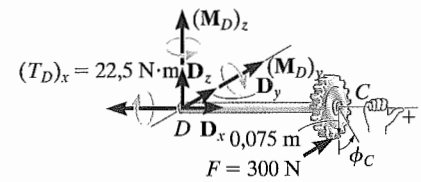
OBSERVAÇÃO: Lembre-se de que essa análise só é válida se a tensão de cisalhamento não ultrapassar o limite de proporcionalidade do material.

EXEMPLO 5.8

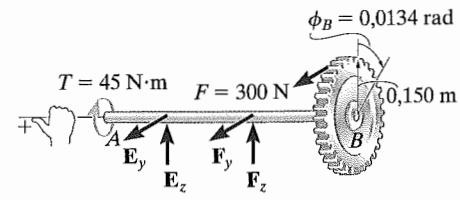
Os dois eixos maciços de aço mostrados na Figura 5.21a estão interligados por meio das engrenagens engrenadas. Determine o ângulo de torção da extremidade A do eixo AB quando é aplicado o torque $T = 45$ N · m. Considere $G = 80$ GPa. O eixo AB é livre para girar dentro dos mancais E e F, enquanto o eixo DC é fixo em D. Cada eixo tem diâmetro de 20 mm.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.21

SOLUÇÃO

Torque interno. As figuras 5.21b e 5.21c mostram diagramas de corpo livre para cada eixo. A soma dos momentos ao longo da linha central x do eixo AB produz a reação tangencial entre as engrenagens $F = 45$ N · m/0,15 m = 300 N. Então, somando-se os momentos em torno da linha central x do eixo DC, essa força cria um torque $(T_D)_x = 300$ N (0,075 m) = 22,5 N · m no eixo DC.

Ângulo de torção. Para resolver o problema, em primeiro lugar, calcularemos a rotação da engrenagem C devido ao torque de 22,5 N · m no eixo DC (Figura 5.21b). Esse ângulo de torção é

$$\phi_C = \frac{TL_{DC}}{JG} = \frac{(+22{,}5\ \text{N}\cdot\text{m})(1{,}5\ \text{m})}{(\pi/2)(0{,}010\ \text{m})^4[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} = +0{,}0269\ \text{rad}$$

Visto que as engrenagens na extremidade do eixo estão engrenadas, a rotação ϕ_C da engrenagem C provoca a rotação ϕ_B da engrenagem B (Figura 5.21c), onde

$$\phi_B(0{,}15\ \text{m}) = (0{,}0269\ \text{rad})(0{,}075\ \text{m})$$

$$\phi_B = 0{,}0134\ \text{rad}$$

Agora, determinaremos o ângulo de torção da extremidade A em relação à extremidade B do eixo AB causada pelo torque de 45 N · m (Figura 5.21c). Temos

$$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} =$$

$$= \frac{(+45\ \text{N}\cdot\text{m})(2\ \text{m})}{(\pi/2)(0{,}010\ \text{m})^4[80(10^9)\ \text{N/m}^2]} = +0{,}0716\ \text{rad}$$

Portanto, a rotação da extremidade A é determinada pela soma de ϕ_B e $\phi_{A/B}$, visto que ambos os ângulos estão na *mesma direção* (Figura 5.21c). Temos

$$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B} = 0{,}0134\ \text{rad} + 0{,}0716\ \text{rad} = +0{,}0850\ \text{rad}$$

Resposta

EXEMPLO 5.9

O poste maciço de ferro fundido com 50 mm de diâmetro mostrado na Figura 5.22a está enterrado no solo até 600 mm de seu comprimento total. Se for aplicado um torque em sua parte superior com uma chave de torque rígida, determine a tensão de cisalhamento máxima no poste e o ângulo de torção na parte superior. Considere que o torque estaria prestes a girar o poste e que o solo exerce uma resistência uniforme à torção t N · mm/mm ao longo dos 600 mm de comprimento que estão enterrados. $G = 40(10^3)$ MPa.

SOLUÇÃO

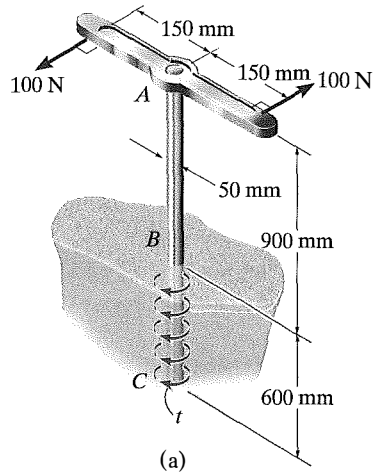
Torque interno. O torque interno no segmento AB do poste é constante. Pelo diagrama de corpo livre (Figura 5.22b), temos

$$\Sigma M_z = 0; \quad T_{AB} = 100\ \text{N}(300\ \text{mm}) = 30 \times 10^3\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

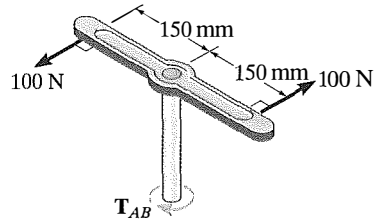
O valor da distribuição uniforme do torque ao longo do segmento BC que está enterrado pode ser determinada pelo equilíbrio do poste inteiro (Figura 5.22c). Aqui,

$$\Sigma M_z = 0 \qquad 100\ \text{N}(300\ \text{mm}) - t(600\ \text{mm}) = 0$$

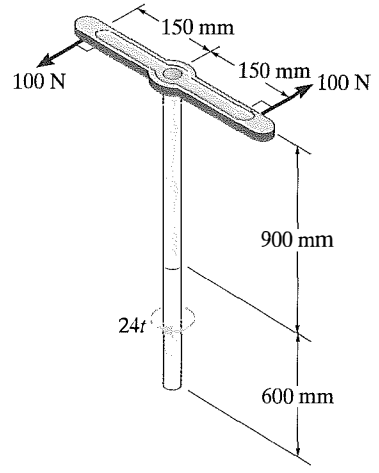
$$t = 50\ \text{N}\cdot\text{m}$$



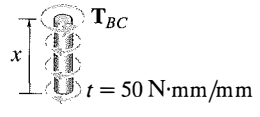
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.22

Por consequência, pelo diagrama de corpo livre de uma seção do poste localizada na posição x no interior da região BC (Figura 5.22d), temos

$$\Sigma M_z = 0; \qquad T_{BC} - 50x = 0$$

$$T_{BC} = 50x$$

Tensão de cisalhamento máxima. A maior tensão de cisalhamento ocorre na região AB, visto que o torque é maior

naquele lugar e J é constante para o poste. Aplicando a fórmula da torção, temos

$$\tau_{máx} = \frac{T_{AB}\,c}{J} = \frac{30 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{mm}\,(25 \text{ mm})}{(\pi/2)(25 \text{ mm})^4} = 1{,}22 \text{ N/mm}^2$$

Resposta

Ângulo de torção. O ângulo de torção na parte superior do poste pode ser determinado em relação à parte inferior do poste, já que ela é fixa, mas está prestes a girar. Ambos os segmentos AB e BC sofrem torção e, portanto, nesse caso, temos

$$\begin{aligned}\phi_A &= \frac{T_{AB}L_{AB}}{JG} + \int_0^{L_{BC}} \frac{T_{BC}\,dx}{JG} \\ &= \frac{(30 \times 10^3 \text{ N·mm})(900 \text{ mm})}{JG} + \int_0^{600} \frac{50x\,dx}{JG} \\ &= \frac{27 \times 10^6 \text{ N·mm}^2}{JG} + \frac{50[(600)^2/2] \text{ N·mm}^2}{JG} \\ &= \frac{30 \times 10^6 \text{ N·mm}^2}{(\pi/2)(25 \text{ mm})^4 40(10^3) \text{ N·mm}^2} = 0{,}00147 \text{ rad}\end{aligned}$$

Resposta

EXEMPLO 5.10

O eixo cônico mostrado na Figura 5.23a é feito de um material com módulo de cisalhamento G. Determine o ângulo de torção de sua extremidade B quando submetido ao torque.

SOLUÇÃO

Torque interno. Examinando a figura ou o diagrama de corpo livre da seção localizada na posição arbitrária x (Figura 5.23b), o torque interno é T.

Ângulo de torção. Aqui, o momento polar de inércia varia ao longo da linha central do eixo e, portanto, devemos expressá-lo em termos da coordenada x. O raio c do eixo em x pode ser determinado em termos de x por cálculo proporcional usando a inclinação da reta AB na Figura 5.23c. Temos

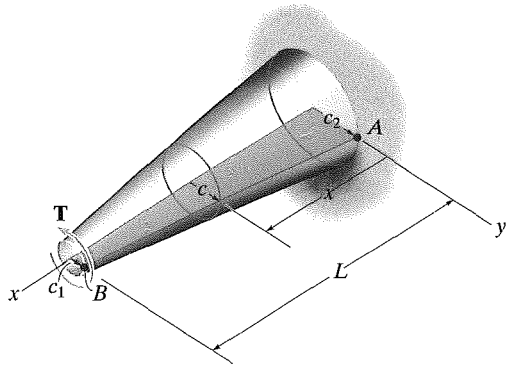
$$\frac{c_2 - c_1}{L} = \frac{c_2 - c}{x}$$

$$c = c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)$$

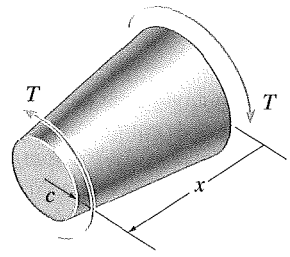
Assim, em x,

$$J(x) = \frac{\pi}{2}\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4$$

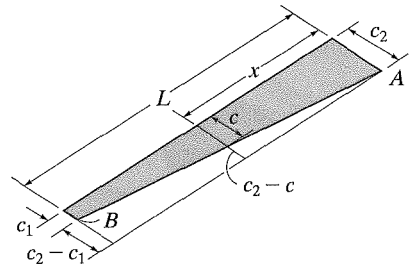
Aplicando a Equação 5.14, temos



(a)



(b)



(c)

Figura 5.23

$$\phi = \int_0^L \frac{T\,dx}{\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4 G}$$

$$= \frac{2T}{\pi G}\int_0^L \frac{dx}{\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^4}$$

Executando-se a integração por meio de uma tabela de integrais, o resultado torna-se

$$\phi = \left(\frac{2T}{\pi G}\right)\frac{1}{3\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\left[c_2 - x\left(\frac{c_2 - c_1}{L}\right)\right]^3}\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2T}{\pi G}\left(\frac{L}{3(c_2 - c_1)}\right)\left(\frac{1}{c_1^3} - \frac{1}{c_2^3}\right)$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$\phi = \frac{2TL}{3\pi G}\left(\frac{c_2^2 + c_1c_2 + c_1^2}{c_1^3c_2^3}\right) \qquad \textit{Resposta}$$

Para fazer uma verificação parcial deste resultado, observe que, quando $c_1 = c_2 = c$, então,

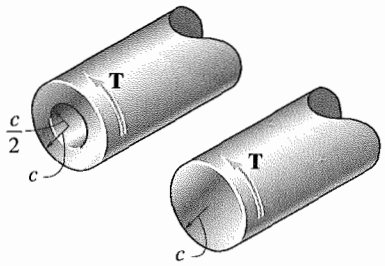
$$\phi = \frac{TL}{[(\pi/2)c^4]G} = \frac{TL}{JG}$$

que é a Equação 5.15.

PROBLEMAS

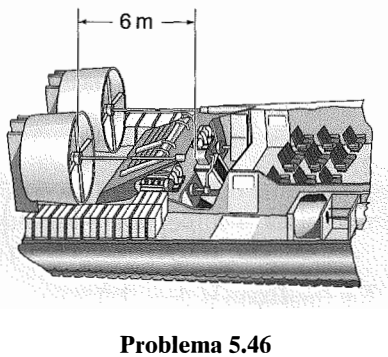
***5.44.** As hélices de um navio estão acopladas a um eixo maciço de aço A-36 com 60 m de comprimento, diâmetro externo de 340 mm e diâmetro interno de 260 mm. Se a potência de saída for 4,5 MW quando o eixo gira a 20 rad/s, determine a tensão de torção máxima no eixo e seu ângulo de torção.

5.45. Um eixo é submetido a um torque **T**. Compare a efetividade da utilização do tubo mostrado na figura com a de uma seção maciça de raio c. Para isso, calcule o aumento percentual na tensão de torção e no ângulo de torção por unidade de comprimento para o tubo em comparação com o da seção maciça.



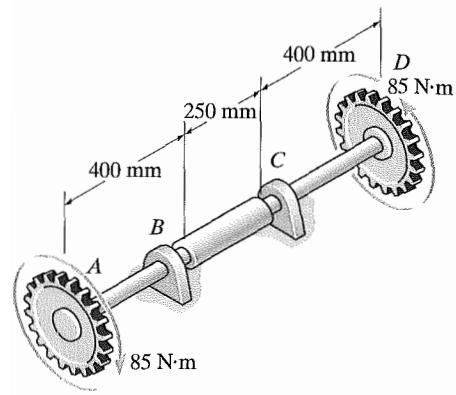
Problema 5.45

5.46. O eixo de transmissão tubular para a hélice de um aerodeslizador tem 6 m de comprimento. Se o motor transmitir 4 MW de potência ao eixo quando as hélices giram a 25 rad/s, determine o diâmetro interno exigido para o eixo, considerando que o diâmetro externo seja 250 mm. Qual é o ângulo de torção do eixo quando ele está em operação? Considere $\tau_{adm} = 90$ MPa e $G = 75$ GPa.



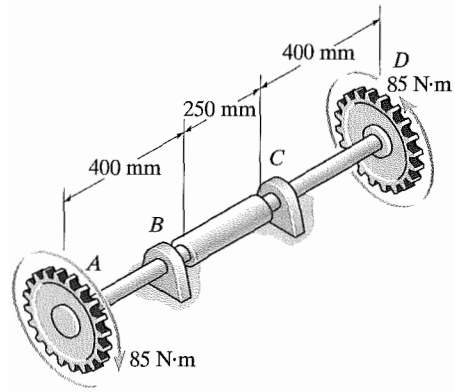
Problema 5.46

5.47. O eixo de aço A-36 é composto pelos tubos AB e CD e uma seção maciça BC. Está apoiado em mancais lisos que permitem que ele gire livremente. Se as engrenagens, presas às extremidades do eixo, forem submetidas a torques de 85 N · m, determine o ângulo de torção da engrenagem A em relação à engrenagem D. Os tubos têm diâmetro externo de 30 mm e diâmetro interno de 20 mm. A seção maciça tem diâmetro de 40 mm.



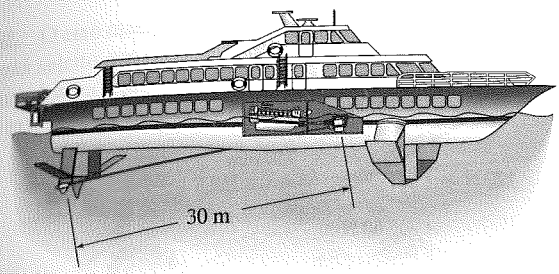
Problema 5.47

***5.48.** O eixo de aço A-36 é composto pelos tubos AB e CD e uma seção maciça BC. Está apoiado em mancais lisos que permitem que ele gire livremente. Se as engrenagens, presas às extremidades do eixo, forem submetidas a torques de 85 N · m, determine o ângulo de torção da extremidade B da seção maciça em relação à extremidade C. Os tubos têm diâmetro externo de 30 mm e diâmetro interno de 20 mm. A seção maciça tem diâmetro de 40 mm.



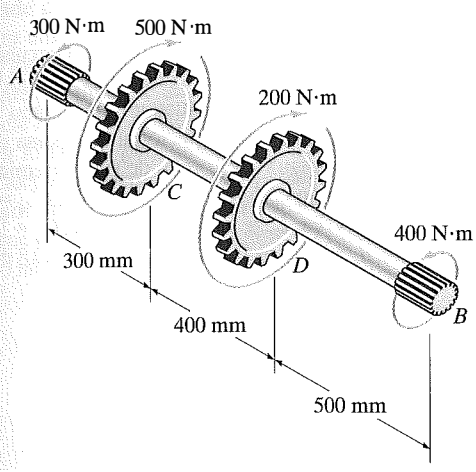
Problema 5.48

5.49. O eixo da hélice do hidrofólio é de aço A-36 e tem 30 m de comprimento. Está acoplado a um motor diesel em linha, o qual transmite uma potência máxima de 2.000 kW e provoca rotação de 1.700 rpm no eixo. Se o diâmetro externo do eixo for 200 mm e a espessura da parede for 10 mm, determine a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida no eixo. Determine também o ângulo de torção no eixo à potência total.



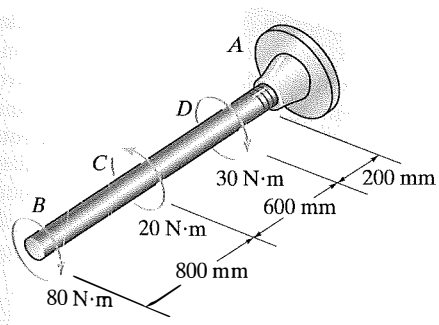
Problema 5.49

5.50. As extremidades estriadas e engrenagens acopladas ao eixo de aço A-36 estão sujeitas aos torques mostrados. Determine o ângulo de torção da engrenagem *C* em relação à engrenagem *D*. O eixo tem diâmetro de 40 mm.



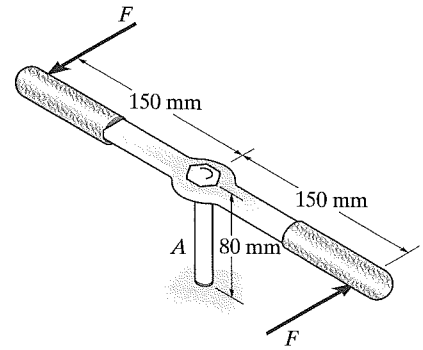
Problema 5.50

5.51. O eixo de aço A-36 de 20 mm de diâmetro é submetido aos torques mostrados. Determine o ângulo de torção da extremidade *B*.



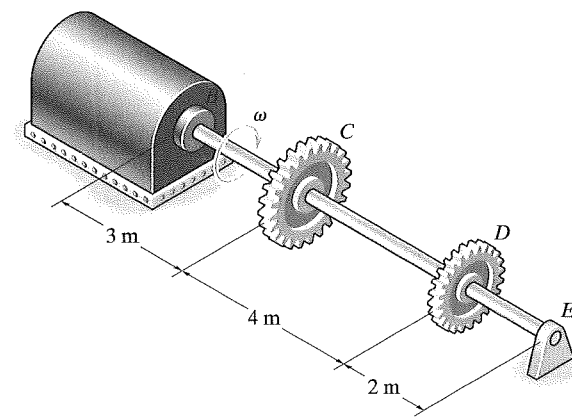
Problema 5.51

5.52. O parafuso de aço A-36 com 8 mm de diâmetro está parafusado firmemente ao bloco em *A*. Determine as forças conjugadas *F* que devem ser aplicadas à chave de torque de modo que a tensão de cisalhamento máxima no parafuso seja de 18 MPa. Calcule também o deslocamento correspondente de cada força *F* necessário para causar essa tensão. Considere que a chave de torque seja rígida.



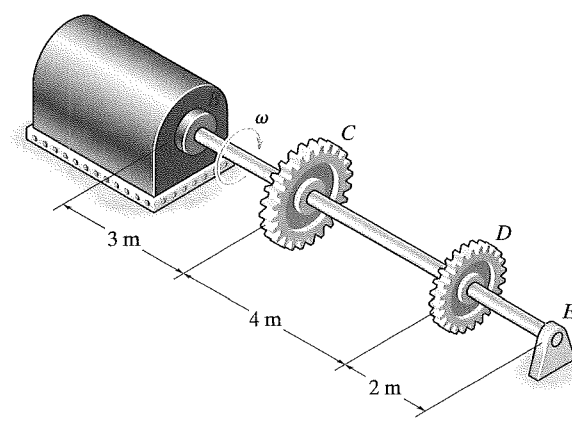
Problema 5.52

5.53. A turbina desenvolve 150 kW de potência, que é transmitida às engrenagens de tal modo que *C* recebe 70% e *D* recebe 30%. Se a rotação do eixo de aço A-36 de 100 mm de diâmetro for $\omega = 800$ rev/minuto, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e o ângulo de torção da extremidade *E* do eixo em relação a *B*. O mancal em *E* permite que o eixo gire livremente em torno de seu eixo.



Problema 5.53

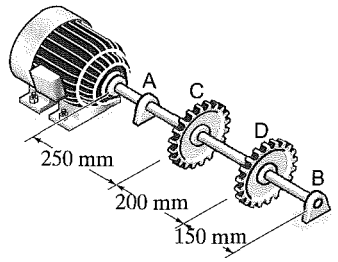
5.54. A turbina desenvolve 150 kW de potência, que é transmitida às engrenagens de tal modo que *C* e *D* recebem quantidades iguais. Se a rotação do eixo de aço A-36 de 100 mm de diâmetro for $\omega = 500$ rev/minuto, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e a rotação da extremidade *B* do eixo em relação a *E*. O mancal em *C* permite que o eixo gire livremente em torno de seu eixo.



Problema 5.54

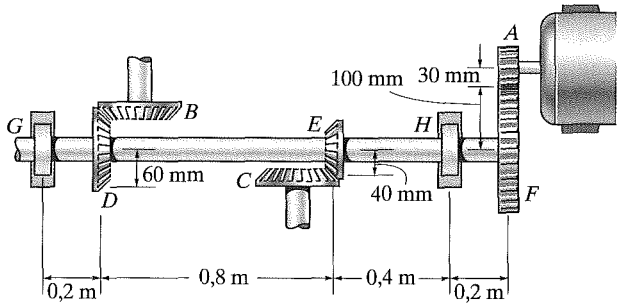
5.55. O motor transmite 33 kW ao eixo de aço inoxidável 304 quando gira a 20 Hz. O eixo é apoiado em mancais lisos em *A* e *B,* que permitem a livre rotação do eixo. As engrenagens *C* e *D* presas ao eixo absorvem 20 kW e 12 kW, respectivamente. Determine o diâmetro do eixo com aproximação de mm se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 56$ MPa e o ângulo de torção admissível de *C* em relação a *D* for 0,20°.

***5.56.** O motor transmite 33 kW ao eixo de aço inoxidável 304 quando gira a 20 Hz. O eixo tem diâmetro de 37,5 mm e está apoiado em mancais lisos em *A* e *B*, que permitem a livre rotação do eixo. As engrenagens *C* e *D* presas ao eixo absorvem 20 kW e 12 kW, respectivamente. Determine a tensão máxima absoluta no eixo e o ângulo de torção da engrenagem *C* em relação à engrenagem *D*.



Problemas 5.55/56

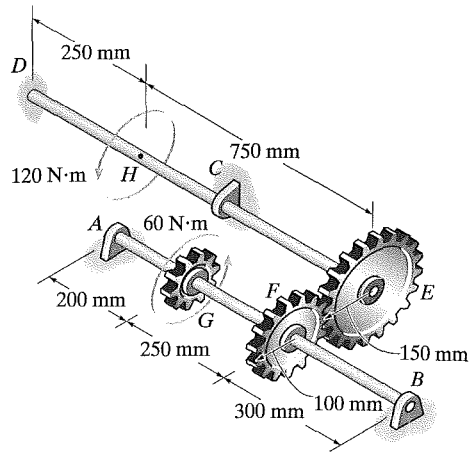
5.57. O motor produz um torque $T = 20$ N · m na engrenagem *A*. Se a engrenagem *C* travar repentinamente e parar de girar, mas *B* puder girar livremente, determine o ângulo de torção de *F* em relação a *E* e de *F* em relação a *D* do eixo de aço L2 cujo diâmetro interno é 30 mm e diâmetro externo é 50 mm. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo. O eixo está apoiado em mancais em *G* e *H*.



Problema 5.57

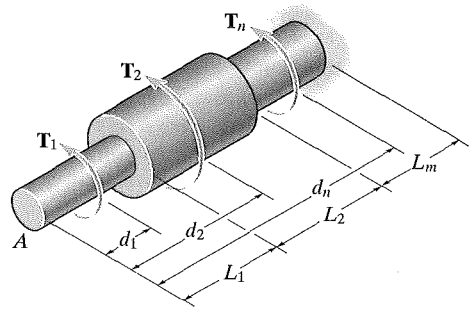
5.58. Os dois eixos são feitos de aço A-36. Cada um tem diâmetro de 25 mm e ambos estão apoiados em mancais em *A*, *B* e *C* que permitem livre rotação. Se o apoio em *D* for fixo, determine o ângulo de torção da extremidade *B* quando os torques são aplicados ao conjunto como mostra a figura.

5.59. Os dois eixos são feitos de aço A-36. Cada um tem diâmetro de 25 mm e ambos estão apoiados em mancais em *A*, *B* e *C* que permitem livre rotação. Se o apoio em *D* for fixo, determine o ângulo de torção da extremidade *A* quando os torques são aplicados ao conjunto como mostra a figura.



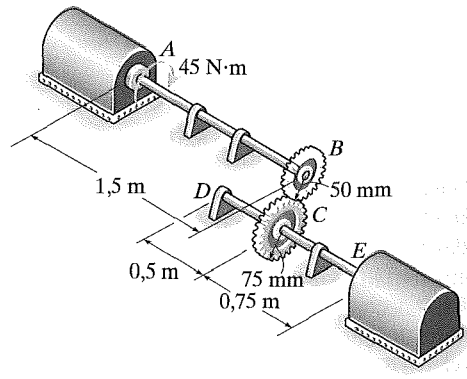
Problemas 5.58/59

***5.60.** Considere o problema geral de um eixo circular composto por m segmentos, cada qual com raio c_m e módulo de cisalhamento G_m. Se houver n torques no eixo, como mostra a figura, escreva um código computacional que possa ser usado para determinar o ângulo de torção de sua extremidade *A*. Mostre uma aplicação do código usando os valores $L_1 = 0{,}5$ m, $c_1 = 0{,}02$ m, $G_1 = 30$ GPa, $L_2 = 1{,}5$ m, $c_2 = 0{,}05$ m, $G_2 = 15$ GPa, $T_1 = -450$ N · m, $d_1 = 0{,}25$ m, $T_2 = 600$ N · m, $d_2 = 0{,}8$ m.



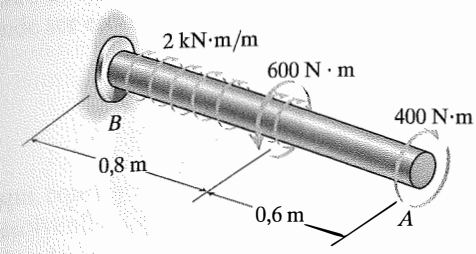
Problema 5.60

5.61. Os eixos de 30 mm de diâmetro são feitos de aço-ferramenta L2 e estão apoiados em mancais que permitem aos eixos girarem livremente. Se o motor em *A* desenvolver um torque $T = 45$ N · m no eixo *AB*, enquanto a turbina em *E* é fixa e não pode girar, determine a quantidade de rotação das engrenagens *B* e *C*.



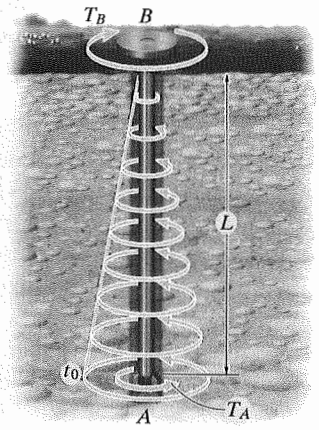
Problema 5.61

5.62. O eixo maciço de 60 mm de diâmetro é feito de aço A-36 e está sujeito aos carregamentos de torção distribuídos e concentrados mostrados na figura. Determine o ângulo de torção na extremidade livre A do eixo devido a esses carregamentos.



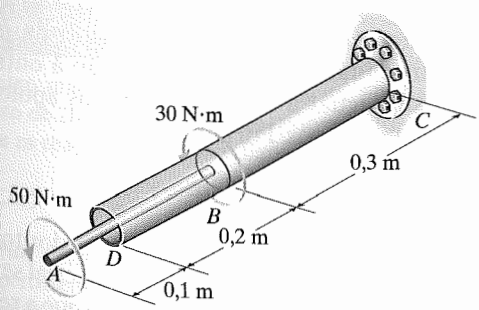
Problema 5.62

5.63. Quando um poço é perfurado, considera-se que a extremidade do tubo da perfuratriz que se aprofunda no solo encontra uma resistência à torção T_A. Além disso, o atrito do solo ao longo das laterais do tubo cria uma distribuição linear de torque por unidade de comprimento que varia de zero na superfície B a t_0 em A. Determine o torque necessário T_B que deve ser fornecido pela unidade de acionamento para girar o tubo. Calcule também o ângulo de torção relativo de uma extremidade do tubo em relação à outra extremidade no instante em que o tubo está prestes a girar. O tubo tem raio externo r_o e raio interno r_i. O módulo de cisalhamento é G.



Problema 5.63

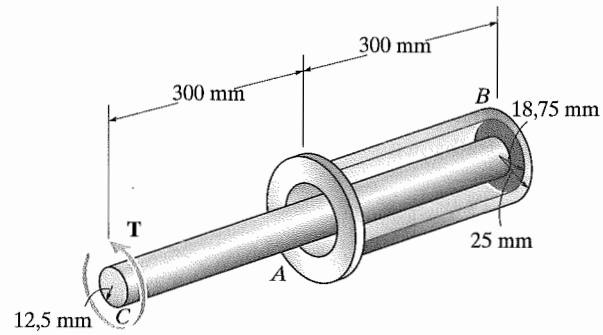
***5.64.** O conjunto é feito de aço A-36 e é composto por uma haste maciça de 15 mm de diâmetro conectada ao interior de um tubo por meio de um disco rígido em B. Determine o ângulo de torção em A. O tubo tem diâmetro externo de 30 mm e espessura de parede de 3 mm.



Problema 5.64

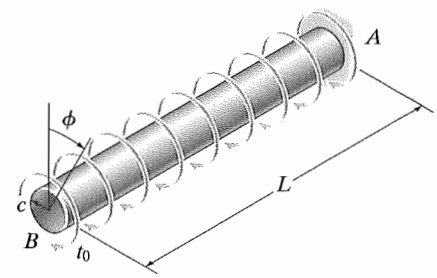
5.65. O dispositivo serve como uma mola de torção compacta. É feito de aço A-36 e composto por um eixo interno maciço CB embutido em um tubo AB e acoplado a esse tubo por um anel rígido em B. Podemos considerar que o anel em A também é rígido e está preso de modo que não pode girar. Se um torque $T = 0{,}25$ N · m for aplicado ao eixo, determine o ângulo de torção na extremidade C e a tensão de cisalhamento máxima no tubo e eixo.

5.66. O dispositivo serve como uma mola de torção compacta. É feito de aço A-36 e composto por um eixo interno maciço CB embutido em um tubo AB e acoplado a esse tubo por um anel rígido em B. Podemos considerar que o anel em A também é rígido e está preso de modo que não pode girar. Se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 84$ MPa e o ângulo de torção em C estiver limitado a $\phi_{adm} = 3°$, determine o torque máximo T que pode ser aplicado na extremidade C.



Problemas 5.65/66

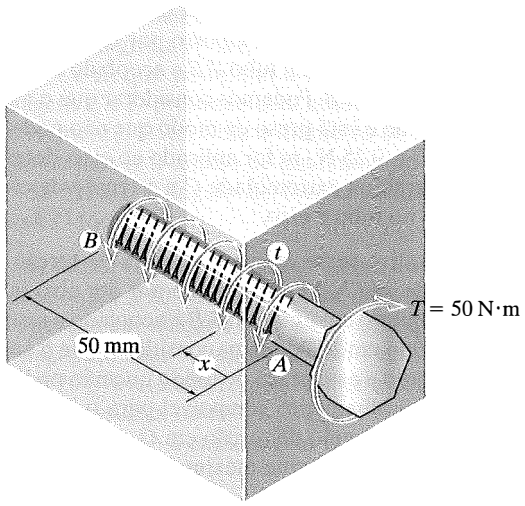
5.67. O eixo tem raio c e está sujeito a um torque por unidade de comprimento t_0 distribuído uniformemente por todo o comprimento L do eixo. Se ele estiver preso em sua extremidade distante A, determine o ângulo de torção ϕ na extremidade B. O módulo de cisalhamento é G.



Problema 5.67

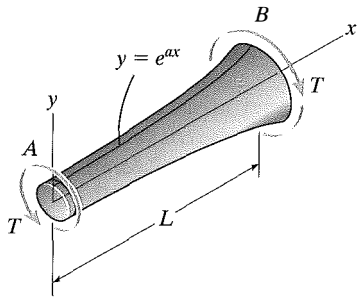
***5.68.** O parafuso de aço A-36 é apertado dentro de um furo de modo que o torque de reação na haste AB pode ser expresso pela equação $t = (kx^2)$ N · m/m, onde x é dado em metros. Se um torque $T = 50$ N · m for aplicado à cabeça do parafuso, determine a constante k e a quantidade de torção nos 50 mm de comprimento da haste. Considere que a haste tem um raio constante de 4 mm.

5.69. Resolva o Problema 5.68 se o torque distribuído for $t = (kx^{2/3})$ N · m/m.



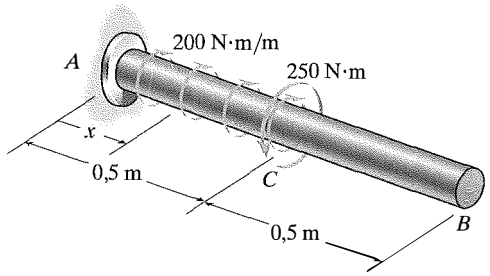
Problemas 5.68/69

5.70. O contorno da superfície do eixo é definido pela equação $y = e^{ax}$, onde a é uma constante. Se o eixo for submetido a um torque T em suas extremidades, determine o ângulo de torção na extremidade A em relação à extremidade B. O módulo de cisalhamento é G.



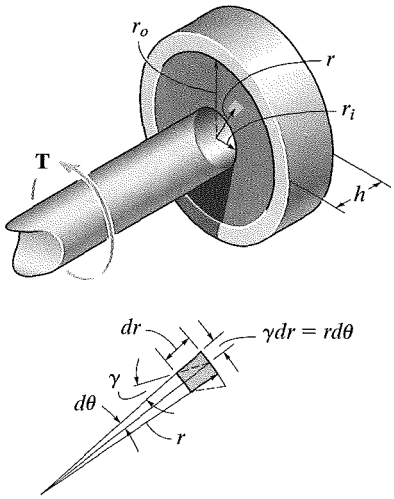
Problema 5.70

5.71. O eixo de aço A-36 tem diâmetro de 50 mm e está sujeito aos carregamentos distribuídos e concentrados mostrados. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo e construa um gráfico para o ângulo de torção do eixo em radianos em relação a x.



Problema 5.71

*__5.72.__ Uma mola cilíndrica é composta por um anel de borracha preso a um anel e eixo rígidos. Se o anel for mantido fixo e um torque T for aplicado ao eixo rígido, determine o ângulo de torção do eixo. O módulo de cisalhamento da borracha é G. *Dica:* Como mostrado na figura, a deformação do elemento no raio r pode ser determinada por $r d\theta = dr\gamma$. Use essa expressão juntamente com $\tau = T/(2\pi r^2 h)$ do Problema 5.28 para obter o resultado.



Problema 5.72

5.5 Elementos estaticamente indeterminados carregados com torque

Um eixo carregado com torque pode ser classificado como estaticamente indeterminado se a equação de equilíbrio de momento aplicada em torno da linha central do eixo não for adequada para determinar os torques desconhecidos que agem no eixo. Um exemplo dessa situação é mostrado na Figura 5.24a. Como mostra o diagrama de corpo livre (Figura 5.24b), os torques de reação nos apoios A e B são desconhecidos. Exige-se que

$$\Sigma M_x = 0; \qquad T - TA - TB = 0$$

Visto que há somente uma equação de equilíbrio relevante, porém duas incógnitas, esse problema é estaticamente indeterminado. Para obter uma solução, utilizaremos o método de análise discutido na Seção 4.4.

A condição de compatibilidade necessária, ou a condição cinemática, exige que o ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra extremidade seja igual a zero, visto que os apoios nas extremidades são fixos. Portanto,

$$\phi_{A/B} = 0$$

Para escrever essa equação em termos dos torques desconhecidos, consideraremos que o material se comporta de maneira linear elástica, de modo que a relação

entre carga e deslocamento é expressa por $\phi = TL/JG$. Como sabemos que o torque interno no segmento AC é $+T_A$ e que no segmento CB o torque interno é $-T_B$ (Figura 5.24c), a equação de compatibilidade em questão pode ser escrita como

$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0$$

Aqui, consideramos que JG é constante.

Resolvendo as duas equações para as reações e percebendo que $L = L_{AC} + L_{BC}$, obtemos

$$T_A = T\left(\frac{L_{BC}}{L}\right)$$

e

$$T_B = T\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

Observe que cada um desses torques de reação aumenta ou diminui linearmente com a localização L_{AC} ou L_{BC} do torque aplicado.

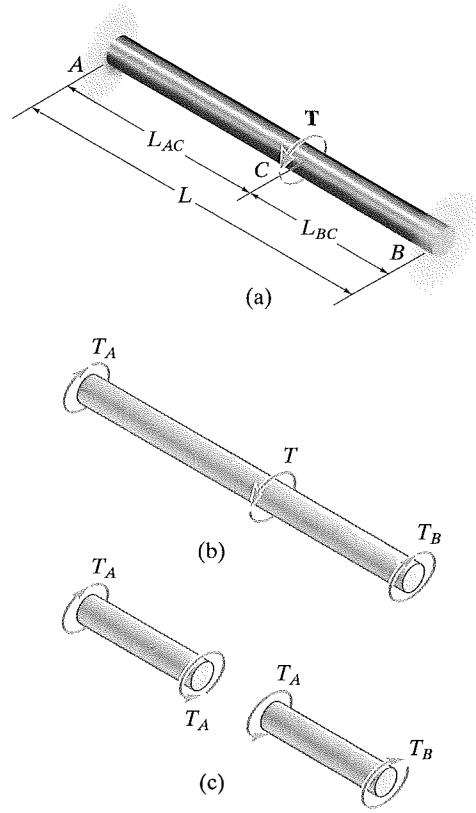


Figura 5.24

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Os torques desconhecidos em eixos estaticamente indeterminados são determinados por meio do cumprimento dos requisitos de equilíbrio, compatibilidade e relação torque–deslocamento para o eixo.

Equilíbrio.

- Desenhe um diagrama de corpo livre do eixo para identificar todos os torques que agem sobre ele. Então, escreva as equações de equilíbrio de momento em torno da linha central do eixo.

Compatibilidade.

- Para escrever a equação de compatibilidade, investigue o modo como o eixo sofrerá torção quando submetido às cargas externas e considere como os apoios restringem o eixo quando ele sofre a torção.
- Expresse a condição de compatibilidade em termos dos deslocamentos rotacionais causados pelos torques de reação e, então, use uma relação torque–deslocamento, como $\phi = TL/JG$, para relacionar os torques desconhecidos com os deslocamentos desconhecidos.
- Resolva as equações de equilíbrio e compatibilidade para os tor ues de reação desconhecidos. Se qualquer dos valores numéricos for negativo, isso indica que o torque age no sentido oposto ao da direção indicada no diagrama de corpo livre.

EXEMPLO 5.11

O eixo maciço de aço mostrado na Figura 5.25a tem diâmetro de 20 mm. Se for submetido aos dois torques, determine as reações nos apoios fixos A e B.

SOLUÇÃO

Equilíbrio. Examinando o diagrama de corpo livre (Figura 5.25b), percebemos que o problema é estaticamente indeterminado, já que há somente *uma* equação de equilíbrio disponível, ao passo que os valores de $\mathbf{T}_A$ e $\mathbf{T}_B$ são desconhecidos. Exige-se

$$\Sigma M_x = 0; \qquad -T_B + 800\ \text{N}\cdot\text{m} - 500\ \text{N}\cdot\text{m} - T_A = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidade. Visto que as extremidades do eixo são fixas, o ângulo de torção de uma extremidade do eixo em relação à outra deve ser zero. Por consequência, a equação de compatibilidade pode ser escrita como

$$\phi_{A/B} = 0$$

Essa condição pode ser expressa em termos dos torques desconhecidos pela relação carga–deslocamento, $\phi = TL/JG$.

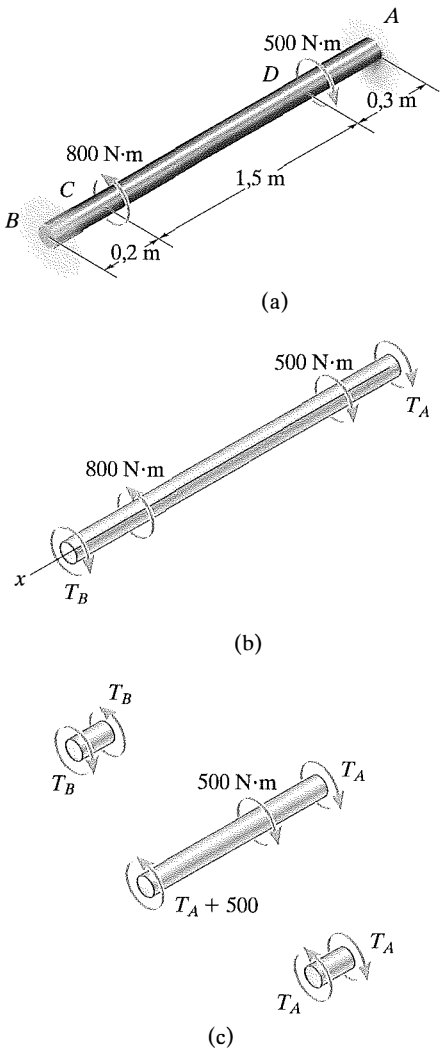


Figura 5.25

Aqui, há três regiões do eixo nas quais o torque interno é constante, *BC*, *CD* e *DA*. Nos diagramas de corpo livre na Figura 5.25c, mostramos os torques internos que agem em segmentos do eixo por meio de cortes em cada uma dessas regiões. Pela convenção de sinal estabelecida na Seção 5.4, temos

$$\frac{-T_B(0{,}2\text{ m})}{JG} + \frac{(T_A + 500\text{ N}\cdot\text{m})(1{,}5\text{ m})}{JG} + \frac{T_A(0{,}3\text{ m})}{JG} = 0$$

ou

$$1{,}8T_A - 0{,}2T_B = -750 \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2, obtemos

$$T_A = -345\text{ N}\cdot\text{m} \quad T_B = 645\text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que $\mathbf{T}_A$ age na direção oposta da mostrada na Figura 5.25b.

EXEMPLO 5.12

O eixo mostrado na Figura 5.26a é composto por um tubo de aço unido a um núcleo de latão. Se um torque de $T = 250\text{ N}\cdot\text{m}$ for aplicado em sua extremidade, faça uma representação gráfica da distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da linha radial de sua área de seção transversal. Considere $G_{aço} = 80$ GPa, $G_{lat} = 36$ GPa.

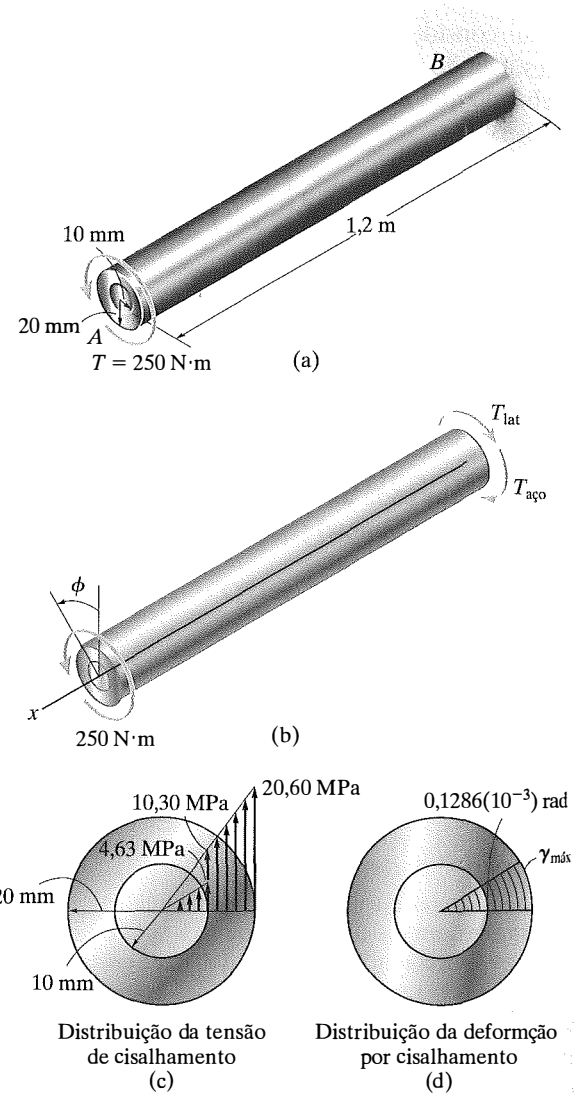


Figura 5.26

SOLUÇÃO

Equilíbrio. A Figura 5.26b apresenta um diagrama de corpo livre do eixo. A reação na parede é representada pelas quantidades desconhecidas de torque às quais resistem o aço, $T_{aço}$, e o latão, T_{lat}. O equilíbrio exige

$$-T_{aço} - T_{lat} + 250\text{ N}\cdot\text{m} = 0 \qquad (1)$$

Compatibilidade. Exige-se que o ângulo de torção na extremidade *A* seja o mesmo para o aço e para o latão, visto que eles estão unidos. Assim,

$$\phi = \phi_{aço} = \phi_{lat}$$

Aplicando a relação carga–deslocamento, $\phi = TL/JG$, temos

$$\frac{T_{aço}\,L}{(\pi/2)[(20\text{ mm})^4 - (10\text{ mm})^4]80(10^3)\text{ N/mm}^2} =$$

$$= \frac{T_{lat}\,L}{(\pi/2)(10\text{ mm})^4 36(10^3)\text{ N/mm}^2}$$

$$T_{aço} = 33{,}33\,T_{lat} \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2, obtemos

$$T_{aço} = 242{,}72\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{lat} = 7{,}28\text{ N} \cdot \text{m}$$

Esses torques agem em todo o comprimento do eixo, visto que nenhum torque externo age em pontos intermediários ao longo da linha central do eixo. A tensão de cisalhamento no núcleo de latão varia de zero em seu centro a máxima na interface onde ele está em contato com o tubo de aço. Pela fórmula da torção,

$$(\tau_{lat})_{máx} = \frac{7{,}28\text{ N} \cdot \text{mm} \cdot (10^3)\text{ mm/m} \cdot 10\text{ mm}}{(\pi/2)(10\text{ mm})^4}$$

$$= 4{,}63\text{ N/mm}^2 = 4{,}63\text{ MPa}$$

Para o aço, a tensão de cisalhamento mínima também ocorre nessa interface

$$(\tau_{aço})_{mín} = \frac{242{,}72\text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 10^3\text{ mm/m} \cdot 10\text{ mm}}{(\pi/2)[(20\text{ mm})^4 - (10\text{ mm})^4]}$$

$$= 10{,}30\text{ N/mm}^2 = 10{,}30\text{ MPa}$$

e a tensão de cisalhamento máxima ocorre na superfície externa,

$$(\tau_{aço})_{máx} = \frac{242{,}72\text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 10^3\text{ mm/m} \cdot 20\text{ mm}}{(\pi/2)[(20\text{ mm})^4 - (10\text{ mm})^4]}$$

$$= 20{,}60\text{ N/mm}^2 = 20{,}60\text{ MPa}$$

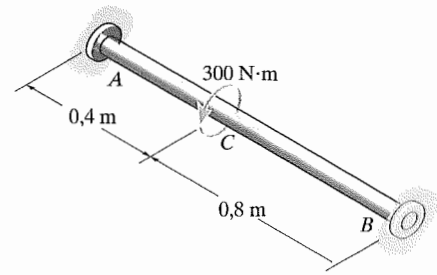
Os resultados são apresentados no gráfico da Figura 5.26c. Observe a descontinuidade da *tensão de cisalhamento* na interface latão–aço. Isso era esperado, já que os materiais têm módulos de rigidez diferentes; isto é, o aço é mais rígido do que o latão ($G_{aço} > G_{lat}$) e, portanto, suporta mais tensão de cisalhamento na interface.

OBSERVAÇÃO: Embora, neste caso, a tensão de cisalhamento seja descontínua, a *deformação por cisalhamento* não é. Mais exatamente, a deformação por cisalhamento é a *mesma* para ambos, latão e aço, o que pode ser demonstrado pela lei de Hooke, $\gamma = \tau/G$. Na interface (Figura 5.26d), a deformação por cisalhamento é

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{4{,}63\text{ N/mm}^2}{36(10^3)\text{ N/mm}^2} = 0{,}1286(10^{-3})\text{ rad}$$

PROBLEMAS

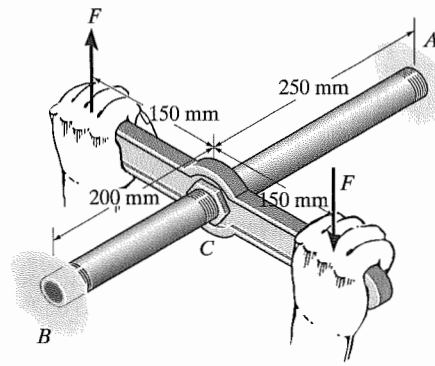
5.73. O eixo de aço A-36 tem diâmetro de 50 mm e está preso nas extremidades A e B. Se for submetido ao momento, determine a tensão de cisalhamento máxima nas regiões AC e CB do eixo.



Problema 5.73

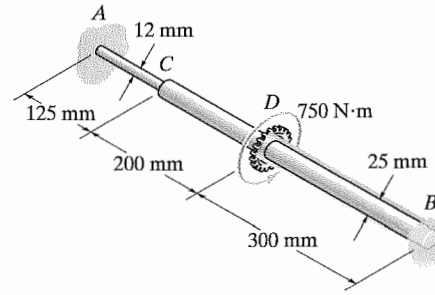
5.74. O tubo de bronze C86100 tem diâmetro externo de 37,5 mm e espessura de 0,3 mm. A conexão C está sendo apertada com uma chave de torque. Se o torque desenvolvido em A for 16 N · m, determine o valor F das forças conjugadas. O tubo está engastado na extremidade B.

5.75. O tubo de bronze C86100 tem diâmetro externo de 37,5 mm e espessura de 0,3 mm. A conexão em C está sendo apertada com uma chave de torque. Se for aplicada uma força $F = 100$ N, determine a tensão de cisalhamento máxima no tubo.



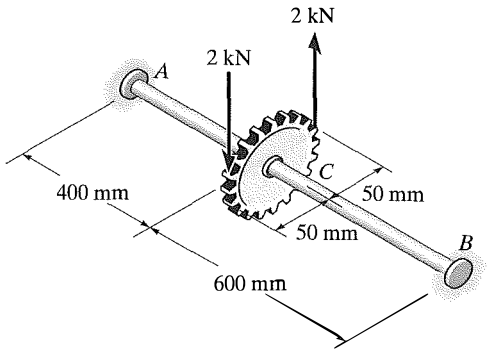
Problemas 5.74/75

*__5.76.__ O eixo de aço é composto por dois segmentos: AC, com diâmetro de 12 mm e CB, com diâmetro de 25 mm. Se estiver preso em suas extremidades A e B e for submetido a um torque de 750 N · m, determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo. $G_{aço} = 75$ GPa.



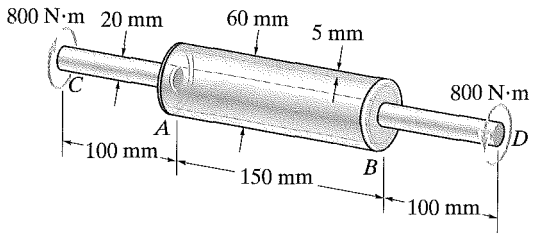
Problema 5.76

5.77. O eixo é feito de aço-ferramenta L2, tem diâmetro de 40 mm e está preso em suas extremidades *A* e *B*. Se for submetido ao conjugado, determine a tensão de cisalhamento máxima nas regiões *AC* e *CB*.



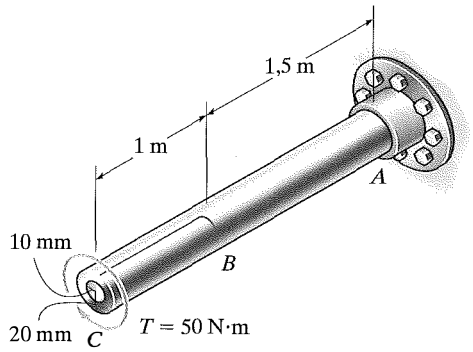
Problema 5.77

5.78. O eixo composto tem uma seção média que inclui o eixo maciço de 20 mm de diâmetro e um tubo soldado a flanges rígidas em *A* e *B*. Despreze a espessura das flanges e determine o ângulo de torção da extremidade *C* do eixo em relação à extremidade *D*. O eixo é submetido a um torque de 800 N · m. O material é aço A-36.



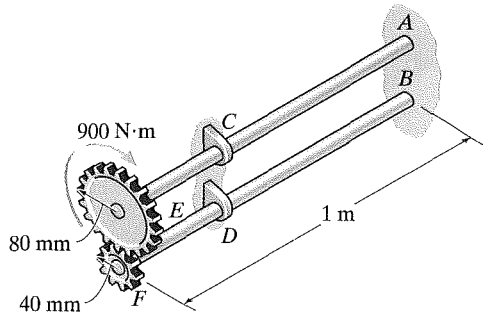
Problema 5.78

5.79. O eixo é composto por uma seção maciça de aço *AB* e uma porção tubular feita de aço com núcleo de latão. Se o eixo estiver preso a um apoio rígido *A* e for aplicado um torque $T = 50$ N · m a ele em *C*, determine o ângulo de torção que ocorre em *C* e calcule a tensão de cisalhamento máxima e a deformação por cisalhamento máxima no latão e no aço. Considere $G_{aço} = 80$ GPa, $G_{lat} = 40$ GPa.



Problema 5.79

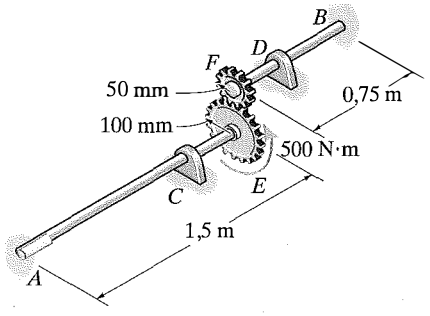
***5.80.** Os dois eixos de 1 m de comprimento são feitos de alumínio 2014-T6. Cada eixo tem diâmetro de 30 mm e os dois estão acoplados pelas engrenagens presas a uma das extremidades de cada um deles. As outras extremidades de cada um dos eixos estão engastadas em apoios fixos em *A* e *B*. Além disso, os eixos estão apoiados em mancais em *C* e *D*, que permitem que eles girem livremente ao longo de suas linhas centrais. Se um torque de 900 N · m for aplicado à engrenagem que está mais acima, como mostra a figura, determine a tensão de cisalhamento máxima em cada eixo.



Problema 5.80

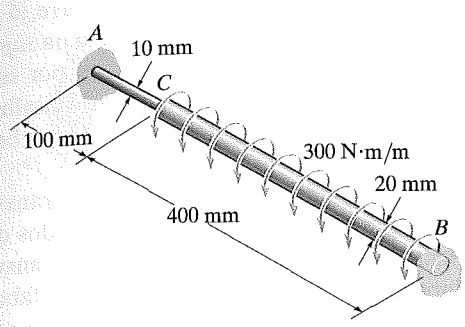
5.81. Os dois eixos são feitos de aço A-36. Cada eixo tem diâmetro de 25 mm e os dois estão acoplados pelas engrenagens presas a uma das extremidades de cada um deles. As outras extremidades de cada um dos eixos estão engastadas em apoios fixos em *A* e *B*. Além disso, os eixos estão apoiados em mancais em *C* e *D*, que permitem que eles girem livremente ao longo de suas linhas centrais. Se for aplicado um torque de 500 N · m à engrenagem em E, como mostra a figura, determine as reações em *A* e *B*.

5.82. Determine a rotação da engrenagem em *E* no Problema 5.81.



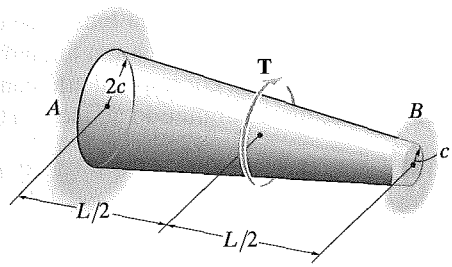
Problemas 5.81/82

5.83. O eixo de aço A-36 é composto por dois segmentos: *AC*, com diâmetro de 10 mm e *CB*, com diâmetro de 20 mm. Se o eixo estiver engastado em suas extremidades *A* e *B* e for submetido a um torque distribuído uniforme de 300 N · m/m ao longo do segmento *CB*, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo.



Problema 5.83

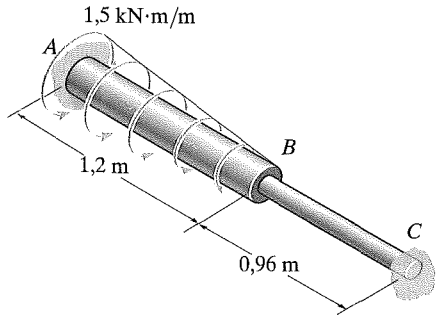
***5.84.** O eixo cônico está confinado pelos apoios fixos em A e B. Se for aplicado um torque $\mathbf{T}$ em seu ponto médio, determine as reações nos apoios.



Problema 5.84

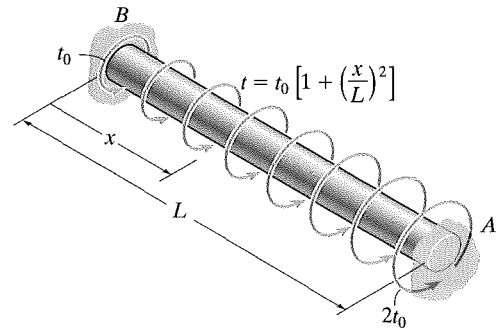
5.85. Uma porção do eixo de aço A-36 é submetida a um carregamento de torção distribuído linearmente. Se o eixo tiver as dimensões mostradas na figura, determine as reações nos apoios fixos A e C. O segmento AB tem diâmetro de 30 mm, e o segmento BC tem diâmetro de 15 mm.

5.86. Determine a rotação da junção B e a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo do Problema 5.85.



Problemas 5.85/86

5.87. O eixo de raio c é submetido a um torque distribuído t, medido como torque/comprimento do eixo. Determine as reações nos apoios fixos A e B.



Problema 5.87

*5.6 Eixos maciços não circulares

Na Seção 5.1, demonstramos que, quando um torque é aplicado a um eixo de seção transversal circular — isto é, um eixo simétrico em relação à sua linha central — as deformações por cisalhamento variam linearmente de zero na linha central a máxima na superfície externa. Além disso, devido à uniformidade da deformação por cisalhamento em todos os pontos de mesmo raio, a seção transversal não se deforma; mais exatamente, ela permanece plana após a torção do eixo. Todavia, eixos cujas seções transversais não são circulares *não* são simétricos em relação às respectivas linhas centrais e, como a tensão de cisalhamento é distribuída de um modo muito complexo nas seções transversais, elas ficarão ***abauladas*** ou ***entortarão*** quando o eixo sofrer torção. Evidência disso pode ser observada no modo como as linhas de grade se deformam em um eixo de seção transversal quadrada quando ele sofre esforço de torção (Figura 5.27). Uma consequência dessa deformação é que a análise da torção de *eixos não circulares* se torna consideravelmente complicada e não será estudada neste livro.

Entretanto, por análise matemática baseada na teoria da elasticidade, é possível determinar a distribuição da tensão de cisalhamento no interior de um eixo de seção transversal quadrada. Exemplos da variação da tensão de cisalhamento ao longo de duas linhas radiais do eixo são mostrados na Figura 5.28a. Como a variação dessas distribuições de tensão de cisalhamento é complexa, as deformações por cisalhamento que elas criam *entortarão* a seção transversal como mostra a Figura 5.28b. Observe que os pontos nos cantos do eixo estão submetidos a tensão de cisalhamento nula e, portanto, também a uma deformação por cisalhamento nula. A razão para isso pode ser mostrada considerando-se um elemento de material localizado em um desses pontos (Figura 5.28c). Seria de esperar que a face superior desse elemento estivesse submetida a uma tensão de cisalhamento para auxiliar na resistência

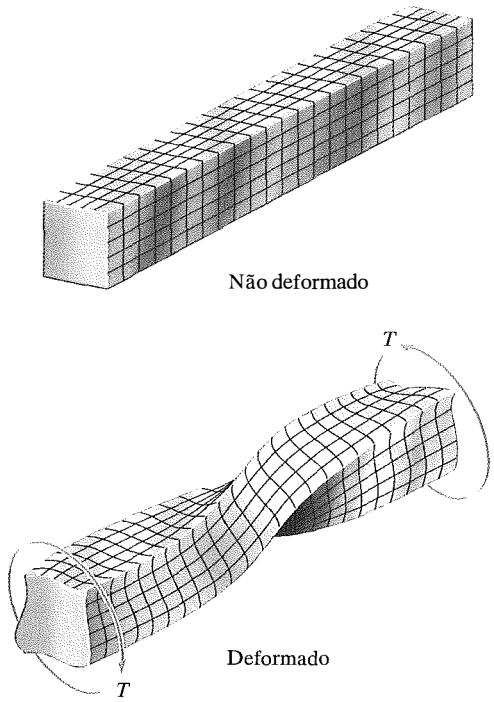


Figura 5.27

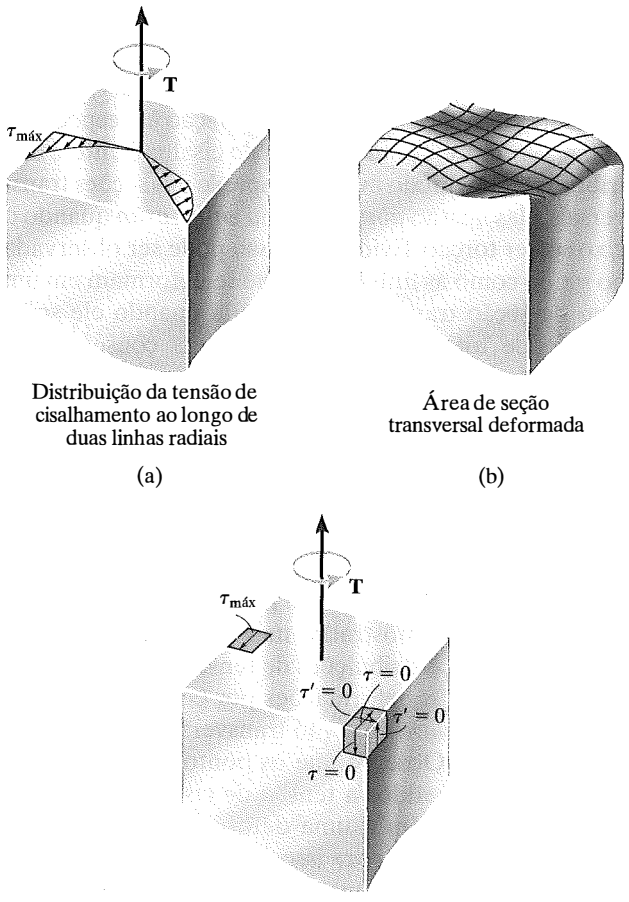


Figura 5.28

ao torque aplicado **T**. Porém, isso *não* ocorre, já que as tensões de cisalhamento τ e τ', que agem na *superfície externa* do eixo, devem ser nulas, o que, por sua vez, implica que as componentes da tensão de cisalhamento correspondentes τ e τ' na face superior também devem ser iguais a zero.

Os resultados da análise para seções transversais quadradas, juntamente com outros resultados da teoria da elasticidade para eixos com seções transversais triangulares e elípticas são apresentados na Tabela 5.1. Em todos os casos, a *tensão de cisalhamento máxima* ocorre em um ponto na borda da seção transversal *mais próxima* da linha central do eixo. Na Tabela 5.1, esses pontos são indicados como "pontos" em negrito e bem visíveis nas seções transversais. A tabela também dá fórmulas para o ângulo de torção de cada eixo. Se estendermos esses resultados para um eixo de seção transversal *arbitrária*, também poderemos demonstrar que um eixo com *seção transversal circular* é o mais eficiente, pois está submetido a uma tensão de cisalhamento máxima *menor*, bem como a um ângulo de torção *menor* do que um eixo correspondente com seção transversal não circular e submetido ao mesmo torque.

TABELA 5.1

Forma da seção transversal	$\tau_{máx}$	ϕ
Quadrada	$\frac{4{,}81\,T}{a^3}$	$\frac{7{,}10\,T}{a^4G}$
Triângulo equilátero	$\frac{20\,T}{a^3}$	$\frac{46\,TL}{a^4G}$
Elipse	$\frac{2\,T}{\pi ab^2}$	$\frac{(a^2+b^2)TL}{\pi a^3b^3G}$

EXEMPLO 5.13

O eixo de alumínio 6061-T6 mostrado na Figura 5.29 tem área de seção transversal na forma de um triângulo equilátero. Determine o maior torque **T** que pode ser aplicado à extremidade do eixo se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 56$ MPa e o ângulo de torção na extremidade estiver restrito a $\phi_{adm} = 0{,}02$ rad. Qual é a intensidade do torque que pode ser aplicado a um eixo de seção transversal circular feito com a mesma quantidade de material? $G_{al} = 26$ GPa.

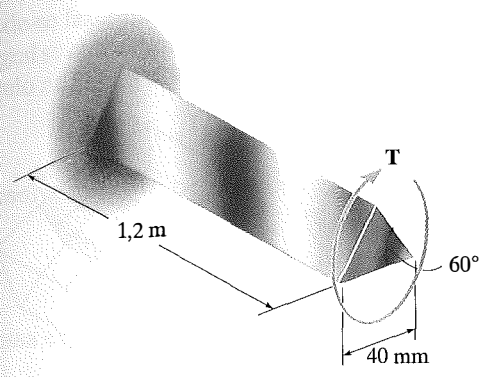


Figura 5.29

SOLUÇÃO

Por inspeção, o torque interno resultante em qualquer seção transversal ao longo da linha central do eixo também é **T**. Pelas fórmulas para $\tau_{máx}$ e ϕ dadas na Tabela 5.1, exige-se que

$$\tau_{adm} = \frac{20T}{a^3}; \qquad 56\ \text{N/mm}^2 = \frac{20T}{(40\ \text{mm})^3}$$

$$T = 179{,}2(10^3)\ \text{N} \cdot \text{mm} = 1.779{,}2\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Também,

$$\phi_{adm} = \frac{46TL}{a^4 G_{al}}; \quad 0{,}02\ \text{rad} = \frac{46T\ (1{,}2\text{m})(10)^3\ \text{mm/m}}{(40\ \text{mm})^4[26(10^3)\ \text{N/mm}^2]}$$

$$T = 24{,}12(10^3)\ \text{N} \cdot \text{mm} = 24{,}12\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Resposta

Por comparação, o torque é limitado devido ao ângulo de torção.

Seção transversal circular. Se quisermos utilizar a mesma quantidade de alumínio para fabricar um eixo do mesmo comprimento com seção transversal circular, em primeiro lugar, devemos calcular o raio da seção transversal. Temos

$$A_{círculo} = A_{triângulo};\ \pi c^2 = \frac{1}{2}(40\ \text{mm})(40\ \text{sen}\,60°)$$

$$c = 14{,}850\ \text{mm}$$

Então, as limitações de tensão e ângulo de torção exigem

$$\tau_{adm} = \frac{Tc}{J}; \qquad 56\ \text{N/mm}^2 = \frac{T(14{,}850\ \text{mm})}{(\pi/2)(14{,}850\ \text{mm})^4}$$

$$T = 288{,}06(10^3)\ \text{N} \cdot \text{mm} = 288{,}06\ \text{N} \cdot \text{m}$$

$$\phi_{adm} = \frac{TL}{JG_{al}}; \quad 0{,}02\ \text{rad} = \frac{T(1{,}2\ \text{m})(10^3)\ \text{mm/m}}{(\pi/2)(14{,}85\ \text{mm})^4[26(10^3)\ \text{N/mm}^2}$$

$$T = 33{,}10(10^3)\ \text{N} \cdot \text{mm} = 33{,}10\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Resposta

Novamente, o ângulo de torção limita o torque aplicado.

OBSERVAÇÃO: Comparando esse resultado (33,10 N · m) com o obtido na primeira parte da solução (24,12 N · m), vemos que um eixo de seção transversal circular pode suportar 37% mais torque do que um eixo com seção transversal triangular.

*5.7 Tubos de parede fina com seções transversais fechadas

Tubos de parede fina de forma não circular são usados frequentemente para construir estruturas leves como as utilizadas em aviões. Em algumas aplicações, elas podem ser submetidas a um carregamento de torção. Nesta seção, analisaremos os efeitos da aplicação de um torque a um tubo de parede fina de seção transversal *fechada*, isto é, um tubo sem qualquer fratura ou fenda ao longo de seu comprimento. Um tubo desse tipo, com área de seção transversal constante, porém arbitrária, é mostrado na Figura 5.30a. Para a análise, consideraremos que as paredes têm espessura variável t. Como elas são finas, poderemos obter uma solução aproximada para a tensão de cisalhamento considerando que essa tensão é *uniformemente distribuída* pela espessura do tubo. Em outras palavras, poderemos determinar a *tensão de cisalhamento média* no tubo em qualquer ponto dado. Antes, porém, discutiremos alguns conceitos preliminares relacionados com a ação da tensão de cisalhamento sobre a seção transversal.

Fluxo de cisalhamento. As figuras 5.30a e 5.30b mostram um pequeno elemento do tubo de comprimento finito s e largura diferencial dx. Em uma extremidade, o elemento tem espessura t_A e na outra extremidade, a espessura é t_B. Devido ao torque aplicado **T**, uma tensão de cisalhamento é desenvolvida na face frontal do elemento. Especificamente, na extremidade A, a tensão de cisalhamento é t_A, e na extremidade B, é t_B. Essas tensões podem ser relacionadas observando-se que tensões de cisalhamento equivalentes t_A e t_B também devem agir sobre as laterais longitudinais do elemento, sombreadas na Figura 5.30b. Visto que essas laterais têm espessuras *constantes*, t_A e t_B, as forças que agem sobre elas são $dF_A = \tau A(t_A\,dx)$ e $dF_B = \tau_B(t_B\,dx)$. O equilíbrio de força exige que essas forças sejam de igual valor, mas em direções opostas, de modo que

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B$$

Esse importante resultado afirma que ***o produto entre a tensão de cisalhamento longitudinal média e a espessura do tubo é a mesma em cada ponto na área de seção transversal do tubo.*** Esse produto é denomi-

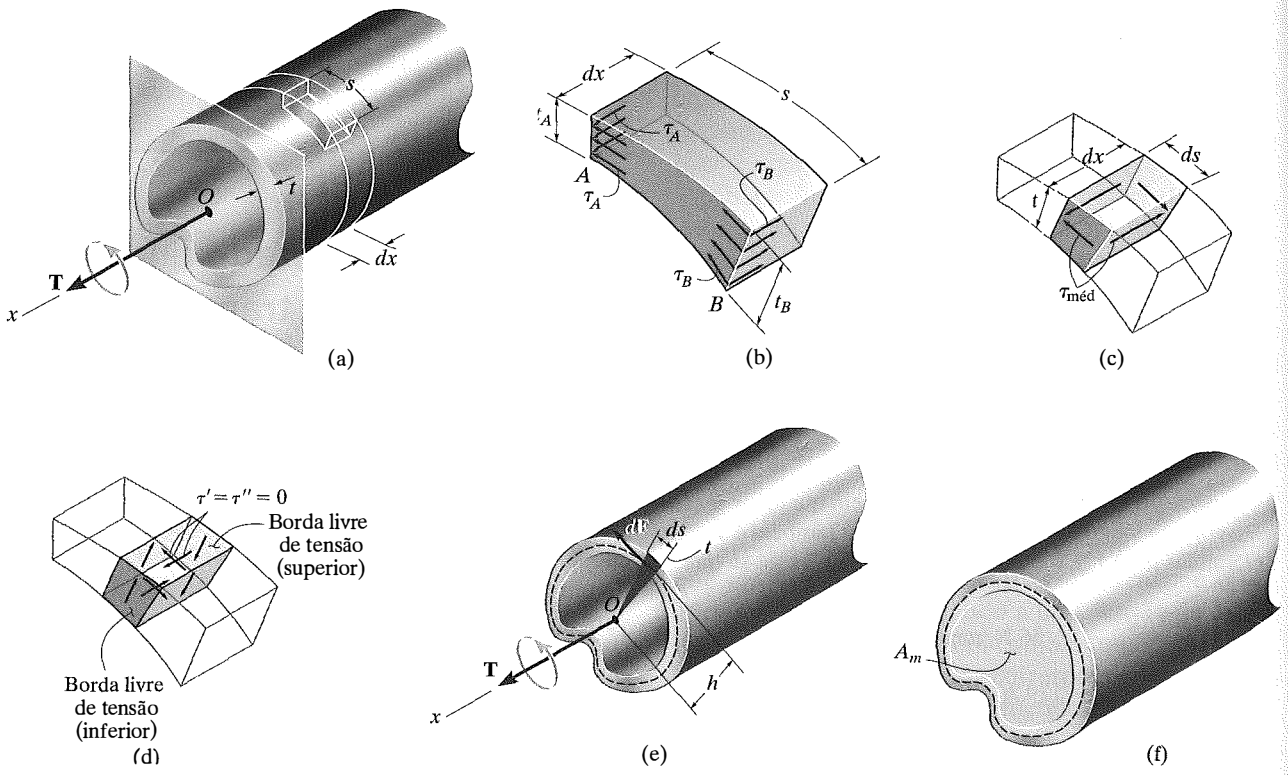


Figura 5.30

nado ***fluxo de cisalhamento***,* q, e, em termos gerais, podemos expressá-lo como

$$q = \tau_{méd} t \tag{5.17}$$

Uma vez que q é constante na seção transversal, a *maior* tensão de cisalhamento média ocorrerá no local em que a espessura do tubo for a *menor*.

Se um elemento diferencial com espessura t, comprimento ds e largura dx for isolado do tubo (Figura 5.30c), vemos que a área colorida sobre a qual a tensão de cisalhamento média age é $dA = t\,ds$. Por consequência, $dF = \tau_{méd}\,t\,ds = q\,ds$ ou $q = dF/ds$. Em outras palavras, *o fluxo de cisalhamento, que é constante na área da seção transversal, mede a força por unidade de comprimento ao longo da área de seção transversal do tubo.*

É importante observar que as componentes da tensão de cisalhamento mostradas na Figura 5.30c são as únicas que agem no tubo. Componentes que agem na outra direção, como mostra a Figura 5.30d, não podem existir. Isso porque as faces superior e inferior do elemento se encontram nas paredes interna e externa do tubo, e essas bordas devem estar livres de tensão. Em vez disso, como já observamos, o torque aplicado faz com que *o fluxo de cisalhamento e a tensão média estejam sempre direcionados tangencialmente à parede do tubo, de modo que contribuem para o torque resultante* **T**.

Tensão de cisalhamento média. A tensão de cisalhamento média, $\tau_{méd}$, que age sobre a área sombreada $dA = t\,ds$ do elemento diferencial, mostrado na Figura 5.30c, pode ser relacionada com o torque T considerando-se o torque produzido pela tensão de cisalhamento em torno de um ponto selecionado O no interior do limite do tubo (Figura 5.30e). Como mostrado, a tensão de cisalhamento desenvolve uma força $dF = \tau_{méd}\,dA = \tau_{méd}(t\,ds)$ sobre o elemento. Essa força age tangencialmente à linha central da parede do tubo e, visto que o braço de momento é h, o torque é

$$dT = h(DF) = h(\tau_{méd}\,t\,ds)$$

Para a seção transversal inteira, exige-se

$$T = \oint h\tau_{méd}\,t\,ds$$

Aqui, a "integral de linha" indica que a integração é executada *ao redor* de toda a borda da área. Visto que o fluxo de cisalhamento $q = \tau_{méd}\,t$ é *constante*, esses termos que estão juntos saem da integral, de modo que

$$T = \tau_{méd}\,t \oint h\,ds$$

* A terminologia "fluxo" é usada, pois q é análogo à água que flui por um canal aberto de seção transversal retangular com profundidade constante e largura variável w. Embora a velocidade da água v em cada ponto ao longo do canal seja diferente (como $\tau_{méd}$), o fluxo $q = vw$ será constante.

Pode-se fazer uma simplificação gráfica para calcular a integral se observarmos que a *área média*, indicada pelo triângulo na Figura 5.30e, é $dA_m = (1/2)\, h\, ds$. Assim,

$$T = 2\tau_{méd}\, t \int dA_m = 2\tau_{méd}\, tA_m$$

Resolvendo para $\tau_{méd}$, temos

$$\boxed{\tau_{méd} = \frac{T}{2tA_m}} \tag{5.18}$$

Nessa expressão,

$\tau_{méd}$ = tensão de cisalhamento média que age sobre a espessura do tubo
T = torque interno resultante na seção transversal, determinado pelo método das seções e equações de equilíbrio
t = espessura do tubo no local onde $\tau_{méd}$ deve ser determinada
A_m = área média contida no contorno da *linha central* da espessura do tubo. A_m aparece sombreada na Figura 5.30f.

Visto que $q = \tau_{méd}\, t$, podemos determinar o fluxo de cisalhamento em toda a seção transversal pela equação

$$\boxed{q = \frac{T}{2A_m}} \tag{5.19}$$

Ângulo de torção. O ângulo de torção de um tubo de parede fina de comprimento L pode ser determinado pelos métodos de energia, e o desenvolvimento da equação necessária é apresentado como um problema mais adiante no texto.* Se o material se comportar de modo linear elástico e G for o módulo de cisalhamento, então esse ângulo ϕ, dado em radianos, pode ser expresso como

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} \tag{5.20}$$

Nessa expressão, a integração deve ser executada em todo o contorno da área de seção transversal do tubo.

PONTOS IMPORTANTES

- Fluxo de cisalhamento q é o produto entre a espessura do tubo e a tensão de cisalhamento média. Esse valor é *constante* em todos os pontos ao longo da seção transversal do tubo. O resultado é que a *maior* tensão de cisalhamento média na seção transversal ocorre no local onde a espessura do tubo é *a menor*.
- O fluxo de cisalhamento e a tensão de cisalhamento média agem *tangencialmente* à parede do tubo em todos os pontos e em uma direção tal que contribuem para o torque resultante.

EXEMPLO 5.14

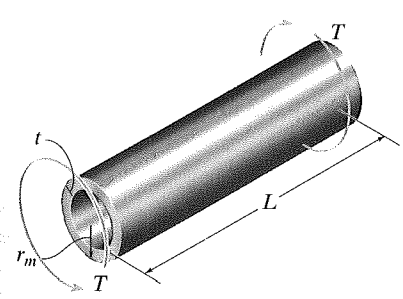
Calcule a tensão de cisalhamento média em um tubo de parede fina com seção transversal circular de raio médio r_m e espessura t, submetido a um torque T (Figura 5.31a). Calcule também o ângulo de torção relativo se o tubo tiver comprimento L.

SOLUÇÃO

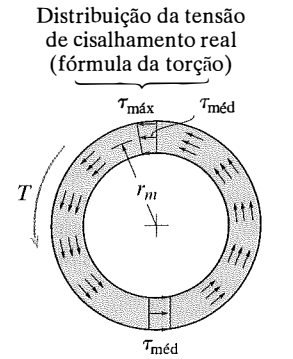
Tensão de cisalhamento média. A área média para o tubo é $A_m = \pi r_m^2$. Aplicando a Equação 5.18 temos

$$\tau_{méd} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{T}{2\pi t r_m^2} \qquad \textit{Resposta}$$

Podemos verificar a validade desse resultado pela aplicação da fórmula da torção. Neste caso, pela Equação 5.9, temos



(a)



(b)

Figura 5.31

* Veja o Problema 14.19.

$$J = \frac{\pi}{2}(r_o^4 - r_i^4)$$
$$= \frac{\pi}{2}(r_o^2 + r_i^2)(r_o^2 - r_i^2)$$
$$= \frac{\pi}{2}(r_o^2 + r_i^2)(r_o + r_i)(r_o - r_i)$$

Visto que $r_m \approx r_o \approx r_i$ e $t = r_o - r_i$, $J = \frac{\pi}{2}(2r_m^2)(2r_m)t = 2\pi r_m^3 t$

de modo que

$$\tau_{méd} = \frac{Tr_m}{J} = \frac{Tr_m}{2\pi r_m^3 t} = \frac{T}{2\pi t r_m^2} \qquad \textit{Resposta}$$

que está de acordo com o resultado anterior.

A distribuição da tensão de cisalhamento média que age em toda a seção transversal do tubo é mostrada na Figura 5.31b. A figura também mostra a distribuição da tensão de cisalhamento que age em uma linha radial calculada pela fórmula da torção. Observe como cada $\tau_{méd}$ age em uma direção tal que contribui para o torque resultante **T** na seção. À medida que a espessura do tubo diminui, a tensão de cisalhamento em todo o tubo torna-se mais uniforme.

Ângulo de torção. Aplicando a Equação 5.20, temos

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t} = \frac{TL}{4(\pi r_m^2)^2 Gt}\oint ds$$

A integral representa o comprimento em torno da linha central, que é $2\pi r_m$. Substituindo, o resultado final é

$$\phi = \frac{TL}{2\pi r_m^3 Gt} \qquad \textit{Resposta}$$

Mostre que obtemos o mesmo resultado se usarmos a Equação 5.15.

EXEMPLO 5.15

O tubo é feito de bronze C86100 e tem seção transversal retangular, como mostrado na Figura 5.32a. Se for submetido aos dois torques, determine a tensão de cisalhamento média no tubo nos pontos A e B. Determine também o ângulo de torção da extremidade C. O tubo é fixo em E.

SOLUÇÃO

Tensão de cisalhamento média. Se tomarmos as seções do tubo nos pontos A e B, o diagrama de corpo livre resultante é o mostrado na Figura 5.32b. O torque interno é 35 N · m. Como mostra a Figura 5.32d, a área A_m é

$$A_m = (0{,}035\text{ m})(0{,}057\text{ m}) = 0{,}00200\text{ m}^2$$

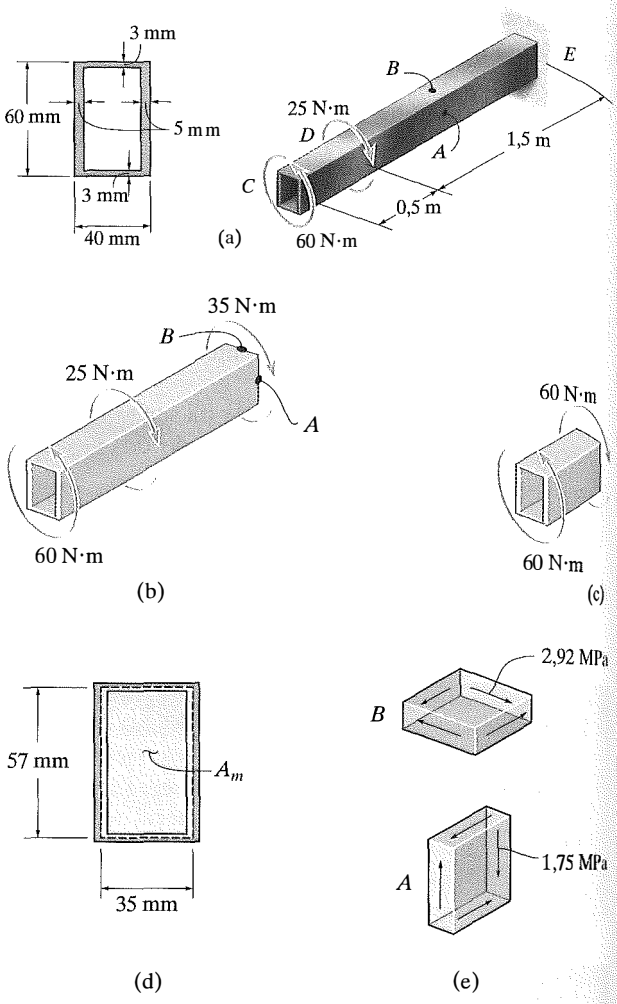


Figura 5.32

Aplicando a Equação 5.18 para o ponto A, $t_A = 5$ mm, de modo que

$$\tau_A = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35\text{ N}\cdot\text{m}}{2(0{,}005\text{ m})(0{,}00200\text{ m}^2)} = 1{,}75\text{ MPa}$$

Resposta

E, para o ponto B, $t_B = 3$ mm, portanto,

$$\tau_B = \frac{T}{2tA_m} = \frac{35\text{ N}\cdot\text{m}}{2(0{,}003\text{ m})(0{,}00200\text{ m}^2)} = 2{,}92\text{ MPa}$$

Resposta

Esses resultados são mostrados em elementos de material localizados nos pontos A e B (Figura 5.32e). Observe cuidadosamente como o torque de 35 N · m na Figura 5.32b cria essas tensões nas faces sombreadas de cada elemento.

Ângulo de torção. Pelos diagramas de corpo livre nas figuras 5.32b e 5.32c, os torques internos nas regiões DE e CD são 35 N · m e 60 N · m, respectivamente. Pela convenção de

sinal descrita na Seção 5.4, esses torques são ambos positivos. Assim, a Equação 5.20 torna-se

$$\phi = \sum \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

$$= \frac{60\ \text{N} \cdot \text{m}\ (0{,}5\ \text{m})}{4(0{,}00200\ \text{m}^2)^2(38(10^9)\ \text{N/m}^2)}\left[2\left(\frac{57\ \text{mm}}{5\ \text{mm}}\right) + 2\left(\frac{35\ \text{mm}}{3\ \text{mm}}\right)\right]$$

$$+ \frac{35\ \text{N} \cdot \text{m}\ (1{,}5\ \text{m})}{4(0{,}00200\ \text{m}^2)^2(38(10^9)\ \text{N/m}^2)}\left[2\left(\frac{57\ \text{mm}}{5\ \text{mm}}\right) + 2\left(\frac{35\ \text{mm}}{3\ \text{mm}}\right)\right]$$

$$= 6{,}29(10^{-3})\ \text{rad}$$

$$= 6{,}29(10^{-3})\ \text{rad}$$ *Resposta*

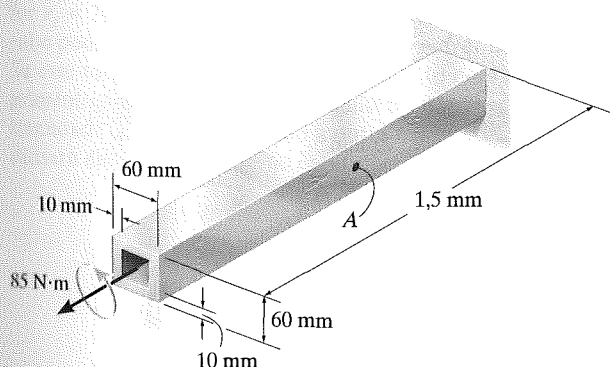
EXEMPLO 5.16

Um tubo quadrado de alumínio tem as dimensões mostradas na Figura 5.33a. Determine a tensão de cisalhamento média no tubo no ponto A se ele for submetido a um torque de 85 N · m. Calcule também o ângulo de torção devido a esse carregamento. Considere $G_{al} = 26$ GPa.

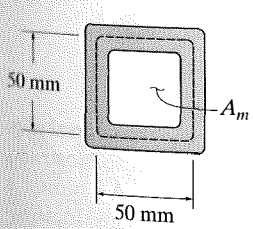
SOLUÇÃO

Tensão de cisalhamento média. Por inspeção, o torque interno resultante na seção transversal onde está localizado o ponto A é $T = 85$ N · m. Pela Figura 5.33b, a área sombreada A_m, é

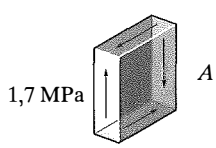
$$A_m = (50\ \text{mm})(50\ \text{mm}) = 2.500\ \text{mm}^2$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.33

Aplicando a Equação 5.18,

$$\tau_{méd} = \frac{T}{2tA_m} = \frac{85\ \text{N} \cdot \text{m}\ (10^3)\ \text{mm/m}}{2(10\ \text{mm})(2.500\ \text{mm}^2)} = 1{,}7\ \text{N/mm}^2$$

Resposta

Visto que t é constante exceto nos cantos, a tensão de cisalhamento média é a mesma em todos os pontos da seção transversal. A Figura 5.33c mostra essa tensão agindo sobre um elemento localizado no ponto A na Figura 5.33c. Observe que $\tau_{méd}$ age para cima na face sombreada, visto que ela contribui para o torque interno resultante **T** na seção.

Ângulo de torção. O ângulo de torção provocado por T é determinado pela Equação 5.20; isto é,

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t} =$$

$$= \frac{85\ \text{N} \cdot \text{m}(10^3\ \text{mm/m})(1{,}5\ \text{m})(10^3\ \text{mm/m})}{4(2.500\ \text{mm}^2)^2[26(10^3)\ \text{N/mm}^2]} \oint \frac{ds}{(10\,\text{mm})}$$

$$= 0{,}196(10^{-4})\ \text{mm}^{-1} \oint ds$$

Nesta expressão, a integral representa o *comprimento* em torno da linha central do contorno do tubo (Figura 5.33b). Assim,

$$\phi = 0{,}196(10^{-4})\ \text{mm}^{-1}[4(50\ \text{mm})] = 3{,}92(10^{-3})\ \text{rad}$$

Resposta

EXEMPLO 5.17

Um tubo fino é composto por três chapas de aço A-36 de 5 mm de espessura, de tal modo que sua seção transversal é triangular, como mostra a Figura 5.34a. Determine o torque máximo T ao qual ele pode ser submetido se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 90$ MPa e a torção no tubo estiver restrita a não mais do que $\phi = 2(10^{-3})$ rad.

SOLUÇÃO

A área A_m aparece sombreada na Figura 5.34b e é

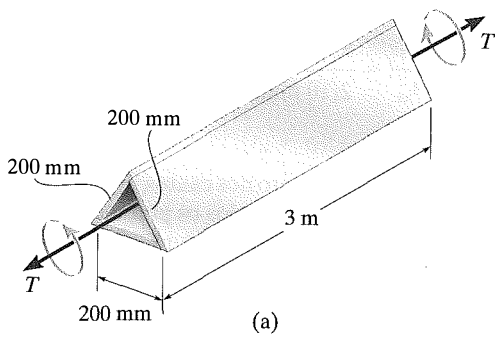
$$A_m = \frac{1}{2}(200\ \text{mm})(200\ \text{mm sen}\ 60°)$$

$$= 17{,}32(10^3)\ \text{mm}^2(10^{-6}\ \text{m}^2/\text{mm}^2) = 17{,}32(10^{-3})\ \text{m}^2$$

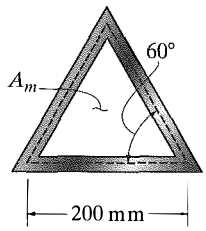
A maior tensão de cisalhamento média ocorre em pontos onde a espessura do tubo é a menor, ou seja, ao longo das laterais, e não nos cantos. Aplicando a Equação 5.18, com $t = 0{,}005$ m, obtemos

$$\tau_{méd} = \frac{T}{2tA_m};\ 90(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{T}{2(0{,}005\ \text{m})(17{,}32(10^{-3})\ \text{m}^2)}$$

$$T = 15{,}6\ \text{kN} \cdot \text{m}$$



(a)



(b)

Figura 5.34

Também pela Equação 5.20, temos

$$\phi = \frac{TL}{4A_m^2 G}\oint \frac{ds}{t}$$

$$0{,}002 \text{ rad} = \frac{T(3 \text{ m})}{4(17{,}32(10^{-3}) \text{ m})^2[75(10^9) \text{ N/m}^2]}\oint \frac{ds}{(0{,}005 \text{ m})}$$

$$300{,}0 = T\oint ds$$

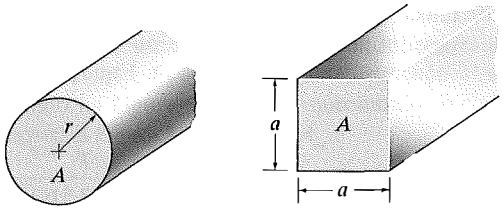
A integral representa a soma das dimensões ao longo dos três lados do contorno da linha central. Assim,

$$300{,}0 = \text{T}[3(0{,}20 \text{ m})]T = 500 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Por comparação, a aplicação do torque é restrita devido ao ângulo de torção.

PROBLEMAS

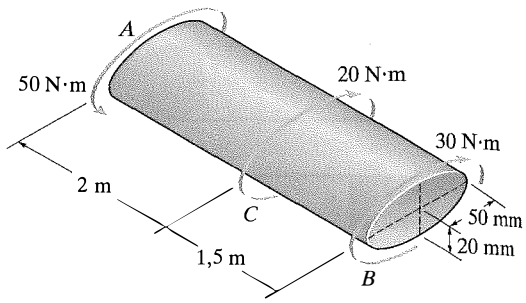
***5.88.** Compare os valores da tensão de cisalhamento elástica máxima e do ângulo de torção desenvolvidos em eixos de aço inoxidável 304 com seções transversais circular e quadrada. Cada eixo tem a mesma área de seção transversal de 5.600 mm², comprimento de 900 mm e está submetido a um torque de 500 N · m.



Problema 5.88

5.89. O eixo é feito de latão vermelho C83400 e tem seção transversal elíptica. Se for submetido ao carregamento de torção mostrado, determine a tensão de cisalhamento máxima no interior das regiões AC e BC e o ângulo de torção ϕ da extremidade B em relação à extremidade A.

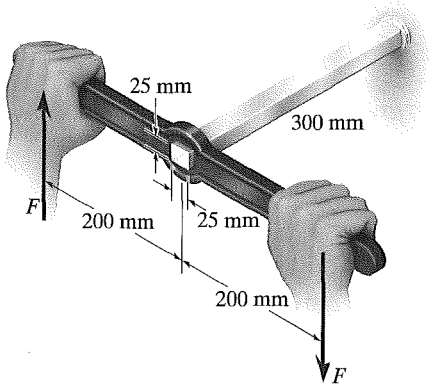
5.90. Resolva o Problema 5.89 para a tensão de cisalhamento máxima no interior das regiões AC e BC e ângulo de torção ϕ da extremidade B em relação à C.



Problemas 5.89/90

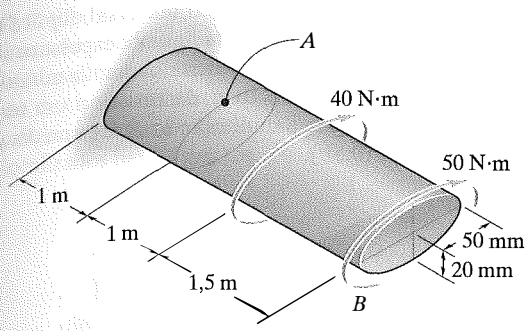
5.91. O eixo de aço tem 300 mm de comprimento e é parafusado em uma parede com uma chave de torque. Determine as maiores forças conjugadas F que podem ser aplicadas ao eixo sem provocar o escoamento do aço. $\tau_e = 56$ MPa.

***5.92.** O eixo de aço tem 300 mm de comprimento e é parafusado em uma parede com uma chave de torque. Determine a máxima tensão de cisalhamento no eixo e o deslocamento que cada força conjugada sofre se o valor das forças conjugadas for $F = 150$ N. $G_{aço} = 75$ GPa.



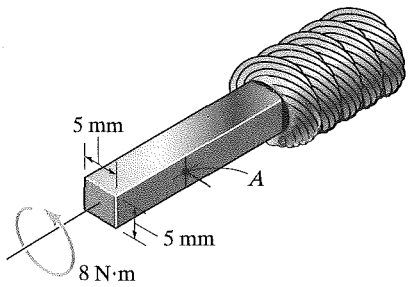
Problemas 5.91/92

5.93. O eixo é feito de plástico e tem seção transversal elíptica. Se for submetido ao carregamento de torção mostrado, determine a tensão de cisalhamento no ponto A e mostre a tensão de cisalhamento em um elemento de volume localizado nesse ponto. Determine também o ângulo de torção ϕ na extremidade B. $G_p = 15$ GPa.



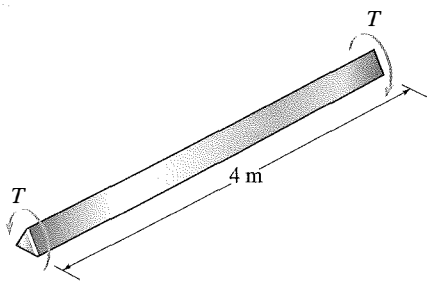
Problema 5.93

5.94. O eixo quadrado é usado na extremidade de um cabo de acionamento para registrar a rotação do cabo em um medidor. Se tiver as dimensões mostradas na figura e for submetido a um torque de 8 N · m, determine a tensão de cisalhamento no eixo no ponto A. Faça um rascunho da tensão de cisalhamento sobre um elemento de volume localizada nesse ponto.



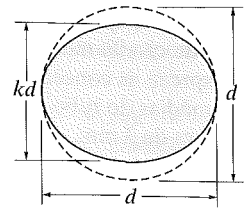
Problema 5.94

5.95. O cabo de latão tem seção transversal triangular de 2 mm em um lado. Se a tensão de escoamento para o latão for τ_e = 205 MPa, determine o torque máximo T ao qual o cabo pode ser submetido de modo a não sofrer escoamento. Se esse torque for aplicado a um segmento de 4 m de comprimento, determine o maior ângulo de torção de uma extremidade do cabo em relação à outra extremidade que não causará dano permanente ao cabo. G_{lat} = 37 GPa.



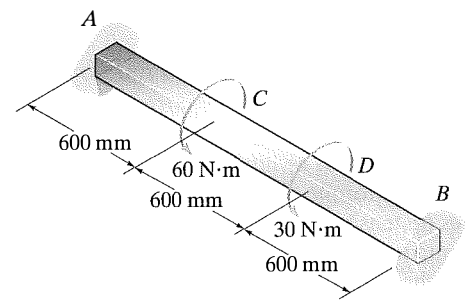
Problema 5.95

*5.96. Pretende-se fabricar uma barra circular para resistir a torque; todavia, durante o processo de fabricação, a barra ficou elíptica, sendo que uma dimensão ficou menor que a outra por um fator k, como mostra a figura. Determine o fator k que causará aumento da tensão de cisalhamento máxima.



Problema 5.96

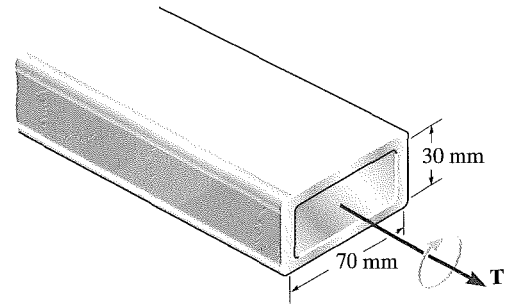
5.97. Uma escora de alumínio 2014-T6 está presa entre as duas paredes em A e B. Se tiver seção transversal quadrada de 50 mm por 50 mm e for submetida ao carregamento de torção mostrado, determine as reações nos apoios fixos. Determine também o ângulo de torção em C.



Problema 5.97

5.98. O tubo de aço inoxidável 304 tem espessura de 10 mm. Se a tensão de cisalhamento admissível for τ_{adm} = 80 MPa, determine o torque máximo T que ele pode transmitir. Calcule também o ângulo de torção de uma extremidade do tubo em relação à outra se o tubo tiver 4 m de comprimento. Despreze as concentrações de tensão nos cantos. As dimensões médias são mostradas na figura.

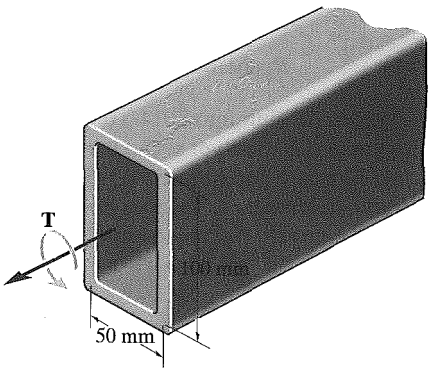
5.99. O tubo de aço inoxidável 304 tem espessura de 10 mm. Se o torque aplicado for T = 50 N · m, determine a tensão de cisalhamento média no tubo. Despreze as concentrações de tensão nos cantos. As dimensões médias são mostradas na figura.



Problemas 5.98/99

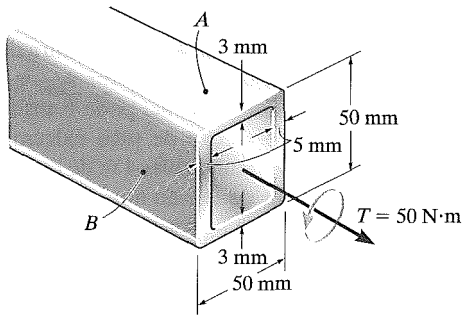
*5.100. Determine a espessura constante do tubo retangular se a tensão de cisalhamento média não pode ultrapassar 84 MPa quando um torque T = 2,5 kN · m for aplicado ao tubo. Despreze as concentrações de tensão nos cantos. As dimensões médias do tubo são mostradas na figura.

5.101. Determine o torque T que pode ser aplicado ao tubo retangular se a tensão de cisalhamento média não pode ultrapassar 84 MPa. Despreze as concentrações de tensão nos cantos. As dimensões médias do tubo são mostradas na figura e o tubo tem espessura de 3 mm.



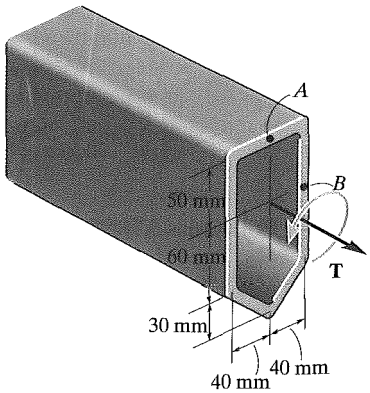
Problemas 5.100/101

5.102. Um tubo com as dimensões mostradas na figura é submetido a um torque $T = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$. Desprezando as concentrações de tensão em seus cantos, determine a tensão de cisalhamento média no tubo nos pontos A e B. Mostre a tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.



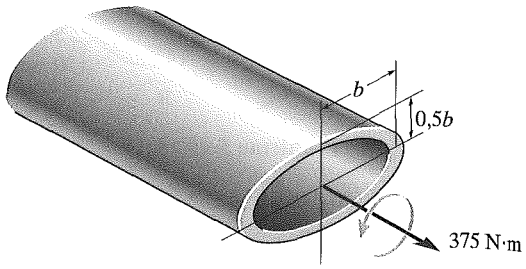
Problema 5.102

5.103. O tubo é feito de plástico, tem 5 mm de espessura, e as dimensões médias mostradas na figura. Determine a tensão de cisalhamento média nos pontos A e B se ele for submetido ao torque $T = 5\ \text{N} \cdot \text{m}$. Mostre a tensão de cisalhamento nos elementos de volume localizados nesses pontos.



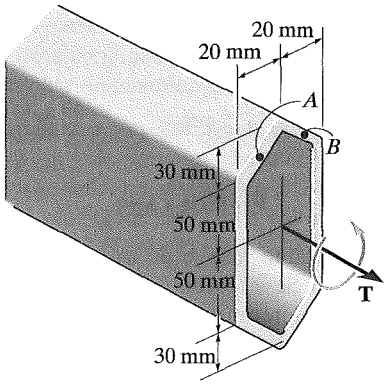
Problema 5.103

***5.104.** O tubo de aço tem seção transversal elíptica com as dimensões médias mostradas na figura e espessura constante $t = 5$ mm. Se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 56$ MPa e o tubo tiver de resistir a um torque $T = 375\ \text{N} \cdot \text{m}$, determine a dimensão b. A área média para a elipse é $A_m = \pi b(0{,}5b)$.



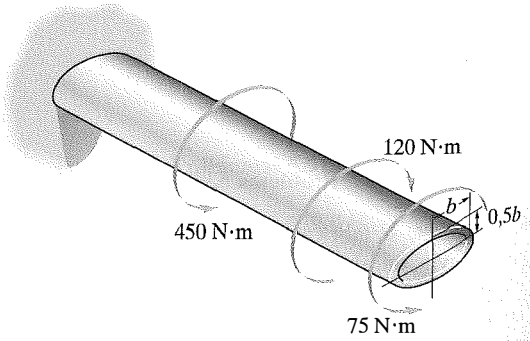
Problema 5.104

5.105. O tubo é feito de plástico, tem 5 mm de espessura e as dimensões médias são mostradas na figura. Determine a tensão de cisalhamento média nos pontos A e B se o tubo for submetido a um torque $T = 500\ \text{N} \cdot \text{m}$. Mostre a tensão de cisalhamento em elementos de volume localizados nesses pontos. Despreze as concentrações de tensão nos cantos.



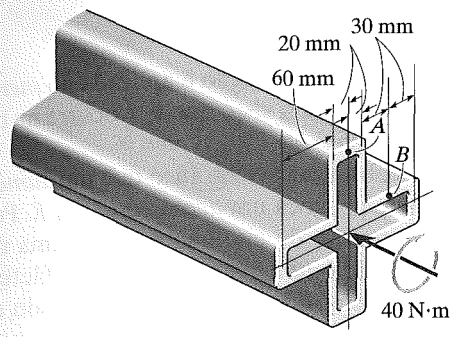
Problema 5.105

5.106. O tubo de aço tem seção transversal elíptica de dimensões médias mostradas na figura e espessura constante $t = 5$ mm. Se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 56$ MPa, determine a dimensão b necessária para resistir ao torque mostrado. A área média para a elipse é $A_m = \pi b(0{,}5b)$.



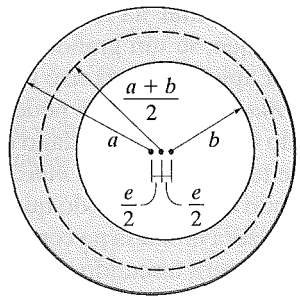
Problema 5.106

5.107. O tubo simétrico é feito de aço de alta resistência, tem as dimensões médias mostradas na figura e 5 mm de espessura. Se for submetido a um torque $T = 40\ \text{N} \cdot \text{m}$, determine a tensão de cisalhamento média desenvolvida nos pontos A e B. Indique a tensão de cisalhamento em elementos de volume localizados nesses pontos.



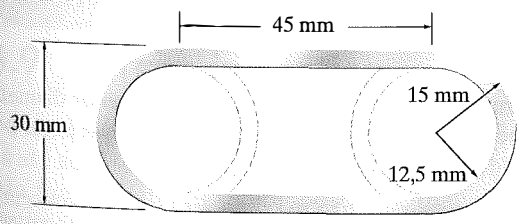
Problema 5.107

5.108. Devido a um erro de fabricação, o círculo interno do tubo é excêntrico em relação ao círculo externo. Qual é a porcentagem de redução da resistência à torção quando a excentricidade e for igual a 1/4 da diferença entre os raios?



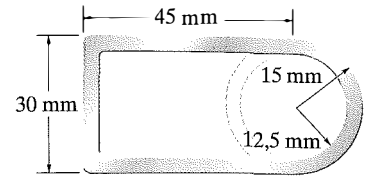
Problema 5.108

5.109. Para uma tensão de cisalhamento média dada, determine o fator de elevação da capacidade de resistência ao torque se as seções semicirculares forem invertidas das posições indicadas pelas linhas tracejadas para as posições da seção mostrada na figura. O tubo tem 2,5 mm de espessura.



Problema 5.109

5.110. Para uma dada tensão de cisalhamento máxima, determine o fator de elevação da capacidade de resistência ao torque se a seção semicircular for invertida da posição indicada pelas linhas tracejadas para a posição da seção mostrada na figura. O tubo tem 2,5 mm de espessura.



Problema 5.110

5.8 Concentração de tensão

A fórmula da torção, $\tau_{máx} = Tc/J$, pode ser aplicada a regiões de um eixo que tenham seção transversal circular constante ou ligeiramente cônica. Quando surgem mudanças repentinas na seção transversal, a distribuição da tensão de cisalhamento e da deformação por cisalhamento no eixo tornam-se complexas e só podem ser obtidas por meios experimentais ou, possivelmente, por análise matemática baseada na teoria da elasticidade. Três descontinuidades comuns em seções transversais que ocorrem na prática são mostradas na Figura 5.35. Elas aparecem em *acoplamentos*, que são utilizados para interligar dois eixos colineares (Figura 5.35a), em *rasgos de chaveta*, usados para conectar engrenagens ou polias a um eixo (Figura 5.35b), e *filetes de* redução, utilizados para fabricar um único eixo colinear de dois eixos com diâmetros diferentes (Figura 5.35c).

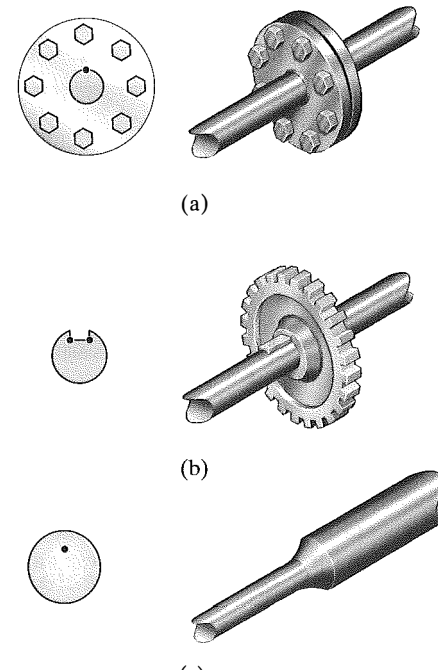


Figura 5.35

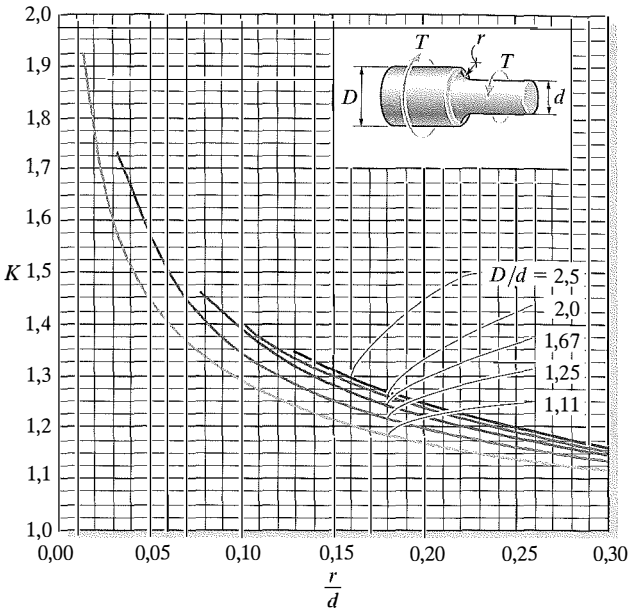


Figura 5.36

Em cada caso, a tensão de cisalhamento máxima ocorrerá no ponto (em negrito) indicado na seção transversal.

Para que o engenheiro não precise executar uma análise complexa da tensão em uma descontinuidade do eixo, a tensão de cisalhamento máxima pode ser determinada para uma geometria específica com a utilização de um ***fator de concentração de tensão por torção***, K. Como vimos no caso de elementos carregados axialmente (Seção 4.7), K é normalmente obtido de um gráfico. Um exemplo para o filete de rebaixo é mostrado na Figura 5.36. Para usar esse gráfico, em primeiro lugar, temos de determinar a razão geométrica D/d para definir a curva adequada e, então, uma vez calculada a abscissa r/d, o valor de K é determinado ao longo da ordenada. Em seguida, a tensão de cisalhamento máxima é determinada pela equação

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J} \tag{5.21}$$

Aqui, a fórmula da torção é aplicada ao *menor* dos dois eixos interligados, visto que $\tau_{máx}$ ocorre na base do filete (Figura 5.35c).

Podemos observar pelo gráfico que um *aumento* no raio r do filete provoca um *decréscimo* em K. Por consequência, a tensão de cisalhamento máxima no eixo pode ser reduzida *aumentando* o raio do filete. Além disso, se o diâmetro do eixo maior for reduzido, a razão D/d será menor, assim como o valor de K e, portanto, $\tau_{máx}$ será mais baixa.

Como no caso de elementos carregados axialmente, os fatores de concentração de tensão por torção *sempre* devem ser utilizados no projeto de eixos feitos de *materiais frágeis* ou que serão submetidos a *carregamentos de fadiga* ou *de torção cíclica*. Essas condições dão origem à formação de trincas na concentração de tensão, o que muitas vezes pode resultar na falha repentina do eixo. Entenda também que, se um grande carregamento de torção *estático* for aplicado a um eixo feito de um *material dúctil, deformações inelásticas* podem-se desenvolver no interior do eixo. Como resultado do escoamento, a distribuição de tensão se tornará *mais uniformemente distribuída* em todo o eixo, de modo que a tensão máxima resultante não será limitada na concentração de tensão. Esse fenômeno será discutido na próxima seção.

PONTOS IMPORTANTES

- *Concentrações de tensão* em eixos ocorrem em pontos de mudança repentina na área da seção transversal, tal como acoplamentos, rasgos de chaveta e filetes de rebaixo. Quanto mais severa a mudança, maior a concentração de tensão.
- Para projeto ou análise, não é necessário conhecer a exata distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal. Em vez disso, é possível obter a tensão de cisalhamento máxima com a utilização do fator de concentração de tensão, K, determinado por meios experimentais e função somente da geometria do eixo.
- Em geral, a concentração de tensão em um eixo dúctil submetido a torque estático *não* terá de ser considerada no projeto; todavia, se o material for *frágil* ou sujeito a carregamentos de *fadiga*, as concentrações de tensão tornam-se importantes.

EXEMPLO 5.18

O eixo em degrau mostrado na Figura 5.37a está apoiado nos mancais em A e B. Determine a tensão máxima no eixo resultante dos torques aplicados. O filete na junção de cada eixo tem raio $r = 6$ mm.

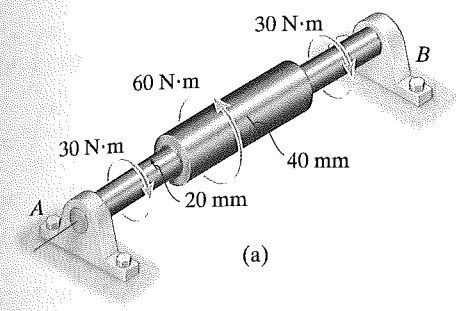
SOLUÇÃO

Torque interno. Examinando a figura, vemos que o equilíbrio de momento em torno da linha central do eixo é satisfeito. Uma vez que a tensão de cisalhamento máxima ocorre nas extremidades engastadas dos eixos de *menor* diâmetro, o torque interno pode ser determinado naquele lugar pelo método das seções (Figura 5.37b).

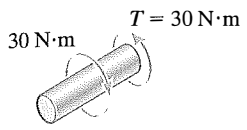
Tensão de cisalhamento máxima. O fator de concentração de tensão pode ser determinado pela Figura 5.36. Pela geometria do eixo, temos

$$\frac{D}{d} = \frac{2(40\,\text{mm})}{2(20\,\text{mm})} = 2$$

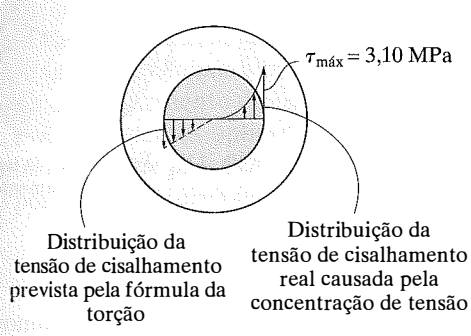
$$\frac{r}{d} = \frac{6\,\text{mm}}{2(20\,\text{mm})} = 0{,}15$$



(a)



(b)



(c)

Figura 5.37

Assim, obtemos o valor de $K = 1{,}3$.
Aplicando a Equação 5.21, temos

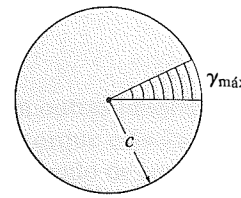
$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{J};\quad \tau_{máx} = 1{,}3\left[\frac{30\text{ N}\cdot\text{m}\ (0{,}020\text{ m})}{(\pi/2)(0{,}020\text{ m})^4}\right] = 3{,}10\text{ MPa}$$

Resposta

OBSERVAÇÃO: Por evidências experimentais, a distribuição de tensão real ao longo de uma linha radial da seção transversal na seção crítica é semelhante à mostrada na Figura 5.37c. Compare com a distribuição de tensão linear obtida pela fórmula da torção.

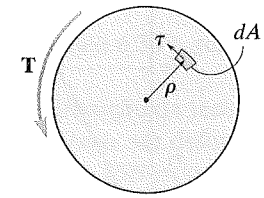
*5.9 Torção inelástica

As equações de tensão e deformação desenvolvidas até aqui só são válidas se o esforço de torção aplicado fizer o material se comportar de maneira linear elástica. Todavia, se os carregamentos de torção forem excessivos, o material pode escoar e, por consequência, teremos de fazer uma "análise plástica" para determinarmos a distribuição da tensão de cisalhamento e o ângulo de torção. Para fazer essa análise, é necessário cumprir as condições de deformação e equilíbrio para o eixo.

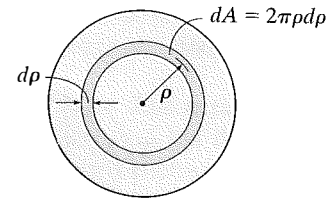


Distribuição linear da deformação por cisalhamento

(a)



(b)



(c)

Figura 5.38

Mostramos na Seção 5.1 que as deformações por cisalhamento que se desenvolvem no material devem variar *linearmente* de zero no centro do eixo ao valor máximo em seu contorno externo (Figura 5.38a). Essa conclusão foi baseada inteiramente em considerações geométricas, e não no comportamento do material. Além disso, o torque resultante na seção deve ser equivalente ao torque provocado por toda a distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal analisada. Essa condição pode ser expressa matematicamente, considerando-se a ação da tensão de cisalhamento τ sobre um elemento de área dA localizado à distância do ρ do centro do eixo (Figura 5.38b). A força produzida por essa tensão é $dF = \tau\, dA$, e o torque produzido é $dT = \rho\, dF = \rho\tau\, dA$. Para o eixo inteiro, exige-se

$$T = \int_A \rho\tau\, dA \tag{5.22}$$

Se a área dA sobre a qual τ age puder ser definida como um *anel diferencial* com área $dA = 2\pi\rho\, \mathrm{d}\,\rho$ (Figura 5.38c), então a Equação 5.22 poderá ser escrita como

$$T = 2\pi \int_A \tau\rho^2\, d\rho \tag{5.23}$$

Essas condições de geometria e carregamento serão usadas agora para determinar a distribuição da tensão de cisalhamento em um eixo quando este for submetido a três tipos de torque.

Torque elástico máximo. Se o torque produzir uma deformação por cisalhamento elástica máxima γ_e no contorno externo do eixo, então a distribuição da tensão de cisalhamento ao longo da linha radial do eixo será semelhante à mostrada na Figura 5.39b. Para determinar a distribuição da tensão de cisalhamento,

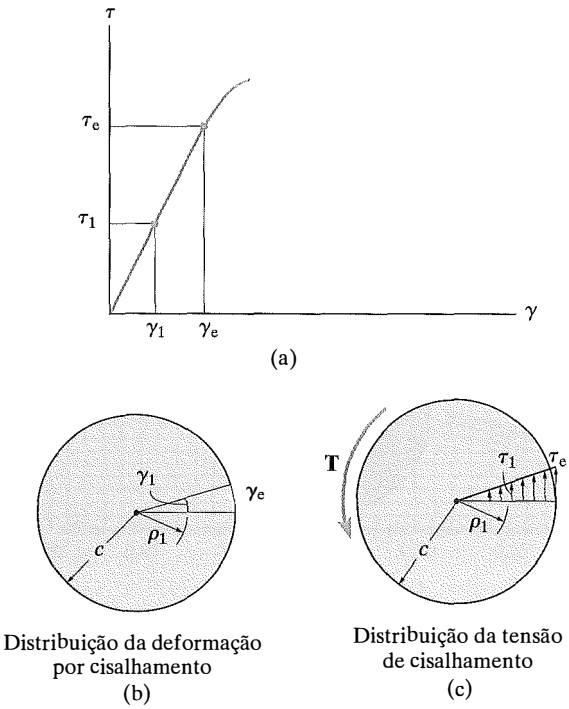


Figura 5.39

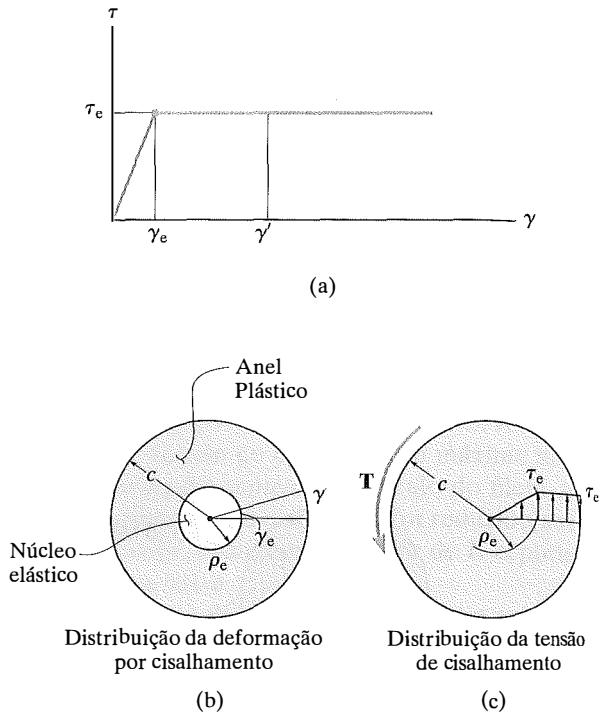


Figura 5.40

devemos usar a lei de Hooke ou determinar os valores correspondentes da tensão de cisalhamento pelo diagrama τ–γ do material (Figura 5.39a). Por exemplo, uma deformação por cisalhamento γ_e produz a tensão de cisalhamento τ_e em $\rho = c$. Da mesma maneira, em $\rho = \rho_1$, a deformação por cisalhamento é $\gamma_1 = (\rho_1/c)\gamma_e$. Pelo diagrama τ–γ, γ_1 produz τ_1. Quando essas tensões e outras semelhantes são representadas graficamente em $\rho = c$, $\rho = \rho_1$ etc., o resultado esperado é a distribuição de tensão de cisalhamento *linear* dada na Figura 5.39c. Visto que essa distribuição da tensão de cisalhamento pode ser descrita matematicamente como $\tau = \tau_e(\rho/c)$, o torque elástico máximo pode ser determinado pela Equação 5.23; isto é,

$$T_e = 2\pi \int_0^c \tau_e \left(\frac{\rho}{c}\right) \rho^2 \, d\rho$$

ou

$$T_e = \frac{\pi}{2} \tau_e c^3 \tag{5.24}$$

É claro que esse mesmo resultado pode ser obtido de uma maneira mais direta, usando-se a fórmula da torção, $\tau_e = T_e c/[(\pi/2)c^4]$. Além do mais, o ângulo de torção pode ser determinado pela Equação 5.13, a saber,

$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho} \tag{5.25}$$

Como observamos na Seção 5.4, essa equação resulta em $\phi = TL/JG$ quando o eixo é submetido a um torque constante e tem uma área de seção transversal constante.

Torque elástico–plástico. Agora, vamos considerar que o material no eixo exibe comportamento elástico perfeitamente plástico. Como mostra a Figura 5.40a, isso é caracterizado por um diagrama da tensão de deformação por cisalhamento pelo qual o material sofre uma quantidade crescente de deformação por cisalhamento quando a tensão de cisalhamento no material atinge o ponto de escoamento, τ_e. Assim, à medida que o torque aplicado aumentar de intensidade após ultrapassar T_e, começará a provocar escoamento. Em primeiro lugar, no contorno externo do eixo, $\rho = c$ e então, à medida que a deformação por cisalhamento máxima aumenta até, digamos, γ', o escoamento do contorno progredirá para dentro na direção do centro do eixo (Figura 5.40b). Como mostra a figura, isso produz um *núcleo elástico* no qual, por cálculo proporcional, o raio externo do núcleo é $\rho_e = (\gamma_e/\gamma')c$. Além disso, a porção externa do eixo forma um *anel plástico,* visto que as deformações por cisalhamento γ são maiores do que γ_y no interior dessa região. A distribuição da tensão de cisalhamento correspondente ao longo de uma linha radial do eixo é mostrada na Figura 5.40c. Ela foi determinada tomando-se pontos sucessivos na distribuição da deformação por cisalhamento e determinando-se o valor correspondente da tensão de cisalhamento pelo diagrama τ–γ. Por exemplo, em $\rho = c$, γ' dá τ_e, e em $\rho = \rho_e$, γ_e também dá τ_e etc.

Uma vez que agora podemos determinar τ como função de ρ, podemos aplicar a Equação 5.23 para determinar o torque. Como fórmula geral para o comportamento elástico–plástico do material, temos

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi \int_0^c \tau \rho^2 \, d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\rho_e} \left(\tau_e \frac{\rho}{\rho_e} \right) \rho^2 \, d\rho + 2\pi \int_{\rho_e}^c \tau_e \rho^2 \, d\rho \\
&= \frac{2\pi}{\rho_e} \tau_e \int_0^{\rho_e} \rho^3 \, d\rho + 2\pi \tau_e \int_{\rho_e}^c \rho^2 \, d\rho \\
&= \frac{\pi}{2\rho_e} \tau_e \rho_e^4 + \frac{2\pi}{3} \tau_e (c^3 - \rho_e^3) \\
&= \frac{\pi \tau_e}{6} (4c^3 - \rho_e^3)
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Torque plástico. Aumentos adicionais em T tendem a reduzir o raio do núcleo elástico até provocar o escoamento de todo o material, isto é, $\rho_e \to 0$ (Figura 5.40c). Então, o material do eixo é submetido a um *comportamento perfeitamente plástico*, e a distribuição da tensão de cisalhamento é constante (Figura 5.40c). Como $\tau = \tau_e$, podemos aplicar a Equação 5.23 para determinar o ***torque plástico*** que representa o maior torque possível que o eixo suportará.

$$
\begin{aligned}
T_p &= 2\pi \int_0^c \tau_e \rho^2 \, d\rho \\
&= \frac{2\pi}{3} \tau_e c^3
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

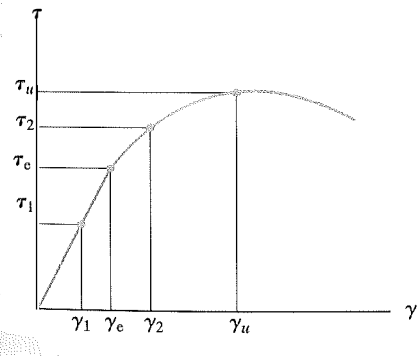
Comparando com o torque elástico máximo T_e, Equação 5.24, podemos ver que

$$T_p = \frac{4}{3} T_e$$

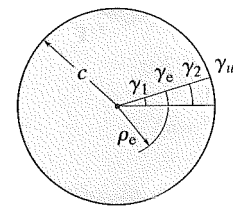
Em outras palavras, o torque plástico é 33% maior que o torque elástico máximo.

O ângulo de torção ρ para a distribuição da tensão de cisalhamento na Figura 5.40c *não pode* ser definido exclusivamente. Isso porque $\tau = \tau_e$ não corresponde a nenhum valor único de deformação por cisalhamento $\gamma \geq \gamma_e$. O resultado é que, uma vez aplicado $\mathbf{T}_p$, o eixo continuará a deformar-se ou torcer-se sem nenhum aumento correspondente na tensão de cisalhamento.

Torque máximo. Em geral, a maioria dos materiais de engenharia terá um diagrama da tensão de deformação por cisalhamento como mostra a Figura 5.41a. Por consequência, se T aumentar de modo que a deformação por cisalhamento máxima no eixo se torne $\gamma = \gamma_u$ (Figura 5.41b), então, por cálculo proporcional, γ_e ocorre em $\rho_e = (\gamma_e/\gamma_u)c$. Da mesma maneira, as deformações por cisalhamento em $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$, podem ser determinadas por cálculo proporcional, isto é, $\gamma_1 = (\rho_1/c)\gamma_u$ e $\gamma_2 = (\rho_2/c)\gamma_u$. Se os valores correspondentes de τ_1, τ_e, τ_2 e τ_u forem lidos no diagrama τ–γ e, então, representados em gráfico, obtemos a distribuição da tensão de cisalhamento que age na linha radial na seção transversal (Figura 5.41c). O torque produzido por essa distribuição de tensão é denominado ***torque máximo***, $\mathrm{T}_{\text{máx}}$.

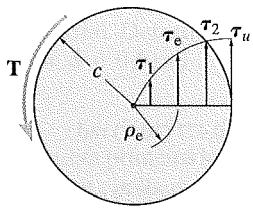


(a)



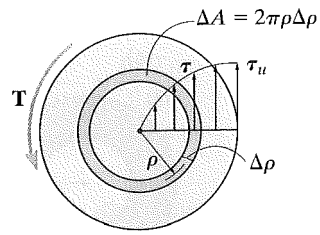
Distribuição da deformação por cisalhamento máxima

(b)



Distribuição da tensão de cisalhamento máxima

(c)



(d)

Figura 5.41

O valor de $\mathbf{T}_{máx}$ pode ser determinado por integração "gráfica" da Equação 5.23. Para tanto, a área da seção transversal do eixo é subdividida em um número finito de anéis, como o que aparece sombreado na Figura 5.41d. A área desse anel, $\gamma A = 2\pi\rho\,\Delta\rho$, é multiplicada pela tensão de cisalhamento τ que age sobre ele, de modo que a força $\Delta F = \tau\,\Delta A$ pode ser determinada. Então, o torque criado por essa força é $\Delta T = \rho\,\Delta F = \rho(\tau\,\Delta A)$. A soma de todos os torques na seção transversal inteira, determinados desse modo, dá o torque máximo, $T_{máx}$; isto é, a Equação 5.23 torna-se $T_{máx} \approx 2\pi\Sigma\tau\rho^2\Delta\rho$. Por outro lado, se a distribuição de tensão puder ser expressa como uma função analítica, $\tau = f(\rho)$, como nos casos do torque elástico e do torque plástico, então a integração da Equação 5.23 poderá ser executada diretamente.

PONTOS IMPORTANTES

- A *distribuição da deformação por cisalhamento* em uma linha radial de um eixo é baseada em considerações geométricas e constatou-se que ela *permanece sempre linear*. A distribuição da tensão de cisalhamento, todavia, depende do torque aplicado e, portanto, deve ser determinada pelo comportamento do material ou pelo diagrama da tensão de deformação por cisalhamento.
- Uma vez determinada a distribuição da tensão de cisalhamento para o eixo, ela produz um torque em torno da linha central do eixo que é equivalente ao torque resultante que age na seção transversal.
- *Comportamento perfeitamente plástico* considera que a distribuição da tensão de cisalhamento seja *constante* e que o eixo continuará a torcer sem nenhum aumento no valor do torque. Esse torque é denominado *torque plástico*.

EXEMPLO 5.19

O eixo tubular na Figura 5.42a é feito de uma liga de alumínio que se supõe tenha um diagrama elástico–plástico τ–γ, como mostra a figura. Determine (*a*) o torque máximo que pode ser aplicado ao eixo sem provocar o escoamento do material e (*b*) o torque máximo ou torque plástico que pode ser aplicado ao eixo. Qual deve ser a deformação por cisalhamento mínima no raio externo para desenvolver um torque totalmente plástico?

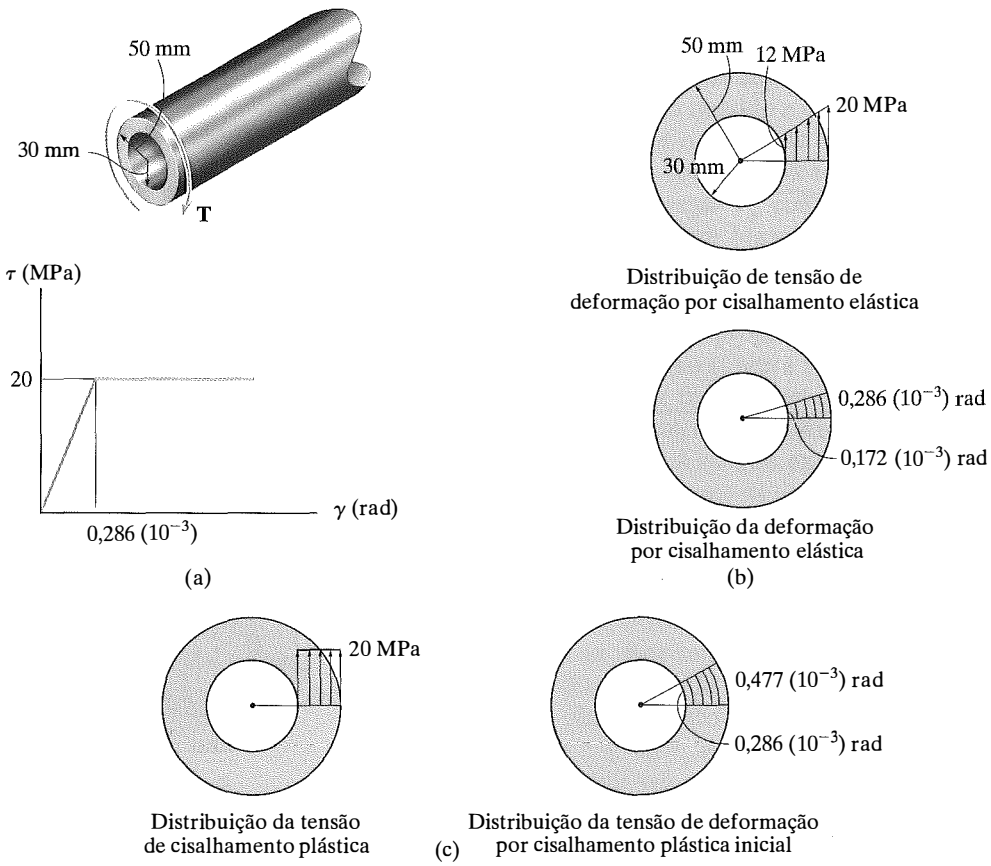


Figura 5.42

SOLUÇÃO

Torque elástico máximo. Exige-se que a tensão de cisalhamento na fibra externa seja 20 MPa. Pela fórmula da torção, temos

$$\tau_e = \frac{T_e c}{J};$$

$$20(10^6)\ \text{N/m}^2 = \frac{T_e\,(0{,}05\ \text{m})}{(\pi/2)[(0{,}05\ \text{m})^4 - (0{,}03\ \text{m})^4]}$$

$$T_e = 3{,}42\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

As distribuições da tensão de cisalhamento e da tensão de deformação por cisalhamento para esse caso são mostradas na Figura 5.42b. Os valores na parede interna do tubo são obtidos por cálculo proporcional.

Torque plástico. A distribuição da tensão de cisalhamento para esse caso é mostrada na Figura 5.42c. A aplicação da Equação 5.23 exige $\tau = \tau_e$. Assim

$$T_p = 2\pi \int_{0{,}03\ \text{m}}^{0{,}05\ \text{m}} [20(10^6)\ \text{N/m}^2]\rho^2\, d\rho = 125{,}66(10^6)\frac{1}{3}\rho^3\Big|_{0{,}03\ \text{m}}^{0{,}05\ \text{m}}$$
$$= 4{,}10\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Para esse tubo, T_p representa um aumento de 20% na capacidade de torque em comparação com o torque elástico T_e.

Deformação por cisalhamento do raio externo. O tubo torna-se totalmente plástico quando a deformação por cisalhamento na *parede interna* se torna $0{,}286(10^{-3})$ rad, como mostra a Figura 5.42c. Visto que a deformação por cisalhamento *permanece linear* na seção transversal, a deformação plástica nas fibras externas do tubo na Figura 5.42c é determinada por cálculo proporcional:

$$\frac{\gamma_o}{50\ \text{mm}} = \frac{0{,}286(10^{-3})\ \text{rad}}{30\ \text{mm}}$$
$$\gamma_o = 0{,}477(10^{-3})\ \text{rad} \qquad \textit{Resposta}$$

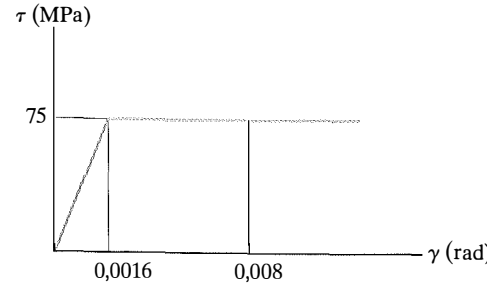
EXEMPLO 5.20

Um eixo maciço circular tem raio de 20 mm e comprimento de 1,5 m. A Figura 5.43a mostra um diagrama τ–γ elástico–plástico do material. Determine o torque necessário para torcer o eixo de $\phi = 0{,}6$ rad.

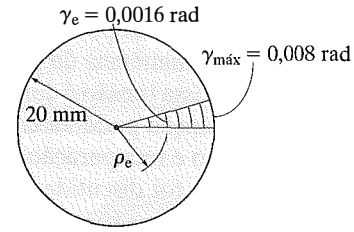
SOLUÇÃO

Para resolver o problema, em primeiro lugar, obteremos a distribuição da deformação por cisalhamento. Uma vez conhecida essa distribuição, o torque aplicado pode ser determinado.

A máxima deformação por cisalhamento ocorre na superfície do eixo, $\rho = c$. Visto que o ângulo de torção é $\phi = 0{,}6$ rad para todo o comprimento de 1,5 m do eixo, então, usando a Equação 5.25 para o comprimento total, temos

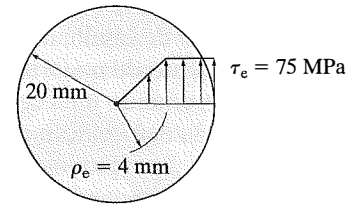


(a)



Distribuição da deformação por cisalhamento

(b)



Distribuição da tensão de cisalhamento

(c)

Figura 5.43

$$\phi = \gamma\frac{L}{\rho}; \qquad 0{,}6 = \frac{\gamma_{\text{máx}}(1{,}5\ \text{m})}{(0{,}02\ \text{m})}$$
$$\gamma_{\text{máx}} = 0{,}008\ \text{rad}$$

A distribuição da tensão de deformação por cisalhamento, que sempre varia linearmente, é mostrada na Figura 5.43b. Observe que ocorre escoamento do material, já que $\gamma_{\text{máx}} > \gamma_e = 0{,}0016$ rad na Figura 5.43a. O raio do núcleo elástico, ρ_e, pode ser obtido por cálculo proporcional. Pela Figura 5.43b,

$$\frac{\rho_e}{0{,}0016} = \frac{0{,}02\ \text{m}}{0{,}008}$$
$$\rho_e = 0{,}004\ \text{m} = 4\ \text{mm}$$

Tendo como base a distribuição da deformação por cisalhamento, a Figura 5.43c mostra a distribuição da tensão de cisalhamento, que é representada no gráfico sobre um segmento da linha radial. Agora, o torque pode ser obtido pela Equação 5.26. Substituindo os valores numéricos obtemos

$$T = \frac{\pi\tau_e}{6}(4c^3 - \rho_e^3)$$
$$= \frac{\pi[75(10^6)\ \text{N/m}^2]}{6}[4(0{,}02\ \text{m})^3 - (0{,}004\ \text{m})^3]$$
$$= 1{,}25\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

*5.10 Tensão residual

Quando um eixo é submetido a deformações por cisalhamento plásticas provocadas por torção, a remoção do torque acarretará a permanência de parte da tensão de cisalhamento no eixo. Essa tensão é denominada ***tensão residual***, e sua distribuição pode ser calculada pelos princípios de superposição e recuperação elástica.

A recuperação elástica foi discutida na Seção 3.4 e refere-se ao fato de que, sempre que um material é deformado plasticamente, parte da deformação no material é recuperada quando a carga é retirada. Por exemplo, se um material for deformado até γ_1, mostrada como o ponto C na curva τ–γ na Figura 5.44, a retirada da carga provocará uma tensão de cisalhamento inversa, de modo que o comportamento do material acompanhará o segmento de reta CD, criando uma certa quantidade de *recuperação elástica* da deformação por cisalhamento γ_1. Essa reta é paralela à porção inicial em linha reta AB do diagrama τ–γ e, assim, ambas as retas terão a mesma inclinação G, como indicado na figura.

Para ilustrar como a distribuição de tensão residual pode ser determinada em um eixo, em primeiro lugar, consideraremos que o eixo está submetido a um torque plástico $\mathbf{T}_p$. Como explicamos na Seção 5.9, $\mathbf{T}_p$ cria uma distribuição de tensão de cisalhamento mostrada na Figura 5.45a. Consideraremos que essa distribuição é consequência da deformação do material γ_1 no contorno externo do eixo, Figura 5.44. Consideraremos também que γ_1 é grande o suficiente para admitirmos que o raio do núcleo elástico aproxima-se de zero, isto é, $\gamma_1 >> \gamma_e$. Se $\mathbf{T}_p$ for removido, o material tende a recuperar-se *elasticamente,* acompanhando a reta CD.

Visto que ocorre comportamento elástico, podemos sobrepor à distribuição de tensão na Figura 5.45a uma *distribuição linear de tensão* causada pela aplicação do

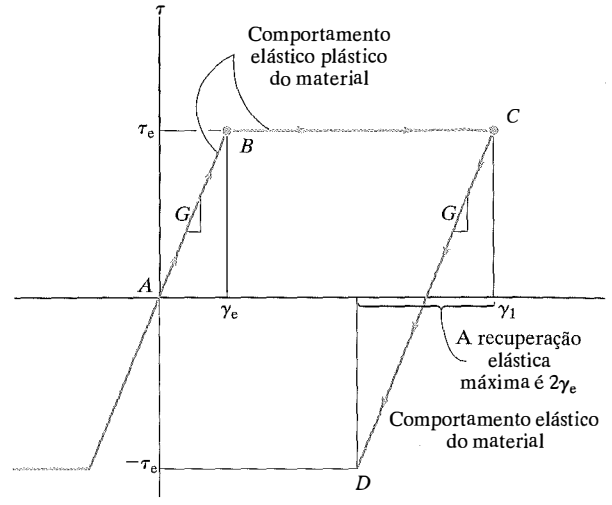
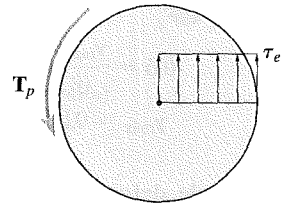
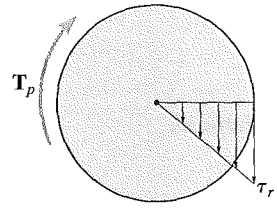


Figura 5.44



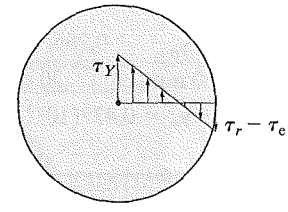
Torque plástico aplicado que causa deformações plásticas por cisalhamento em todo o eixo

(a)



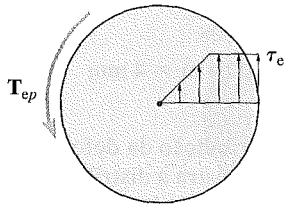
Torque plástico inverso que provoca deformações elásticas por cisalhamento em todo o eixo

(b)

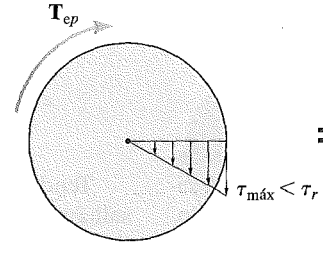


Distribuição de tensão de cisalhamento residual no eixo

(c)

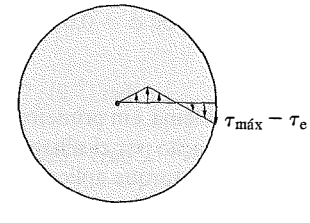


Torque elástico — plástico aplicado



Torque elástico — plástico inverso

(d)



Distribuição de tensão de cisalhamento residual no eixo

Figura 5.45

torque plástico $\mathbf{T}_p$ na direção *oposta* (Figura 5.45b). Aqui, a tensão de cisalhamento máxima τ_r, calculada por essa distribuição de tensão, é denominada *módulo de ruptura* por torção e é determinada pela fórmula da torção,* que dá

$$\tau_r = \frac{T_p c}{J} = \frac{T_p c}{(\pi/2)c^4}$$

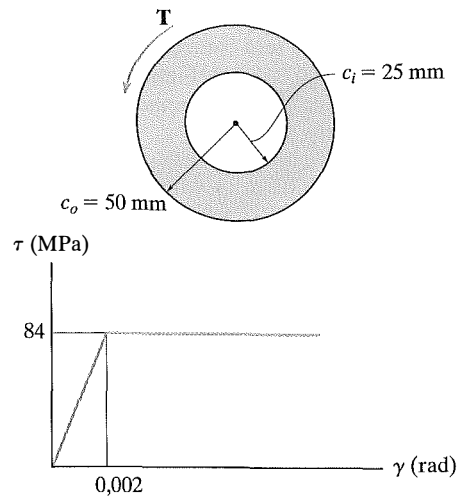
Pela Equação 5.27,

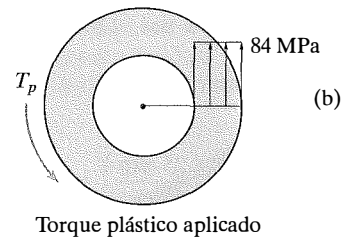
$$\tau_r = \frac{[(2/3)\pi\tau_e c^3]c}{(\pi/2)c^4} = \frac{4}{3}\tau_e$$

Observe que, nesse caso, a aplicação inversa de $\mathbf{T}_p$ usando a distribuição linear da tensão de cisalhamento na Figura 5.45b é possível, visto que a recuperação máxima para a deformação por cisalhamento elástica é $2\tau_e$, como observamos na Figura 5.44. Isso corresponde a uma tensão de cisalhamento máxima aplicada de $2\tau_e$, que é *maior* do que a tensão de cisalhamento máxima de $4/3\tau_e$ calculada antes. Por consequência, a superposição de distribuições de tensão que envolva a aplicação e, então, a remoção de torque plástico resulta na distribuição de tensão de cisalhamento residual no eixo como mostra a Figura 5.45c. Devemos notar, por esse diagrama, que a tensão de cisalhamento no centro do eixo, τ_e, deve ser, na realidade, *nula,* visto que o material ao longo da linha central do eixo não sofre deformação. O motivo de ela não ser nula é que consideramos anteriormente que *todo* o material do eixo sofreu deformação após atingir o ponto de escoamento para podermos determinar o torque plástico (Figura 5.45a). Em situações reais, temos de considerar um torque elástico–plástico na modelagem do comportamento do material, o que resulta na superposição da distribuição de tensão mostrada na Figura 5.45d.

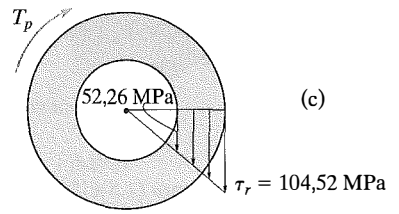
EXEMPLO 5.21

Um tubo é feito de uma liga de latão e tem 1,5 m de comprimento e área da seção transversal mostrada na Figura 5.46a. O diagrama τ-γ elástico–plástico do material também é mostrado na Figura 5.46a. Determine o torque plástico T_p. Quais são a distribuição da tensão de cisalhamento residual e a torção permanente remanescente no tubo se $\mathbf{T}_p$ for removido *logo após* o tubo se tornar totalmente plástico? $G = 42$ GPa.

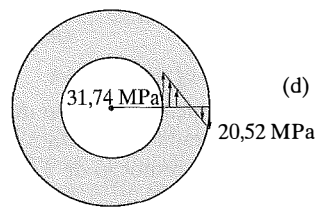




Torque plástico aplicado



Torque plástico inverso



Distribuição da tensão de cisalhamento residual

Figura 5.46

SOLUÇÃO

Torque plástico. O torque plástico $\mathbf{T}_p$ deformará o tubo de tal modo que todo o material sofre escoamento. Por consequência, a distribuição de tensão será a mostrada na Figura 5.46b. Aplicando a Equação 5.23, temos

$$T_p = 2\pi\int_{c_i}^{c_o} \tau_e \rho^2 \, d\rho = \frac{2\pi}{3}\tau_e (c_o^3 - c_i^3)$$

$$= \frac{2\pi}{3}(84 \text{ N/mm}^2)[(50 \text{ mm})^3 - (25\text{mm})^3] = 19{,}24(10^6) \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Resposta

* A fórmula da torção só é válida quando o material se comporta de maneira elástica linear; todavia, o módulo de ruptura tem esse nome porque presume que o material se comporte elasticamente e, então, *sofre ruptura* repentina no limite de proporcionalidade.

No instante exato em que o tubo se torna totalmente plástico, o escoamento já terá começado no raio interno, isto é, em $c_i = 25$ mm, $\gamma_e = 0{,}002$ rad (Figura 5.46a). O ângulo de torção que ocorre pode ser determinado pela Equação 5.25 que, para o tubo inteiro, se torna

$$\phi_p = \gamma_e \frac{L}{c_i} = \frac{(0{,}002)(1{,}5\text{ m})(10^3\text{ mm/m})}{(25\text{ mm})} = 0{,}120\text{ rad} \curvearrowleft$$

Quando $\mathbf{T}_p$ é *removido* ou, na verdade, reaplicado na direção oposta, então a distribuição da tensão de cisalhamento linear "fictícia" mostrada na Figura 5.46c deve ser sobreposta à mostrada na Figura 5.46b. Na Figura 5.46c, a tensão de cisalhamento máxima ou o módulo de ruptura é calculado pela fórmula da torção

$$\tau_r = \frac{T_p c_o}{J} = \frac{19{,}24(10)^6\text{ N}\cdot\text{mm} - (50\text{ mm})}{(\pi/2)[(50\text{ mm})^4 - (25\text{ mm})^4]}$$

$$= 104{,}52\text{ N mm}^2 = 104{,}52\text{ MPa}$$

Além disso, na parede interna do tubo, a tensão de cisalhamento é

$$\tau_i = (104{,}52\text{ MPa})\left(\frac{25\text{ mm}}{50\text{ mm}}\right) = 52{,}26\text{ MPa}$$

Pela Figura 5.46a, $G = \tau_e/\gamma_e = 84\text{ N/mm}^2/(0{,}002\text{ rad}) = 42(10^3)$ MPa, de modo que, quando $\mathbf{T}_p$ é removido, o ângulo de torção correspondente ϕ' é

$$\phi'_p = \frac{T_p L}{JG} =$$

$$= \frac{19{,}24(10)^6\text{ N}\cdot\text{mm}\,(1{,}5)(10^3\text{ mm/m})}{(\pi/2)[(50\text{ mm})^4 - (25\text{ mm})^4]42(10^3)\text{ N/mm}^2}$$

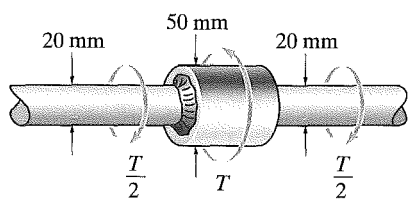
$$= 0{,}0747\text{ rad} \curvearrowright$$

Portanto, a *distribuição da tensão de cisalhamento residual* resultante é mostrada na Figura 5.46d. A rotação permanente do tubo após a remoção de $\mathbf{T}_p$ é

$$\curvearrowright + \quad \phi = 0{,}120 - 0{,}0747 = 0{,}0453\text{ rad} \curvearrowleft \quad \textit{Resposta}$$

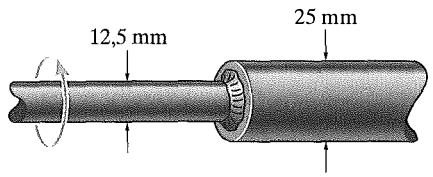
PROBLEMAS

5.111. A tensão de cisalhamento admissível para o aço usada no eixo é $\tau_{adm} = 8$ MPa. Se os elementos forem interligados por um filete de solda de raio $r = 4$ mm, determine o torque máximo T que pode ser aplicado.



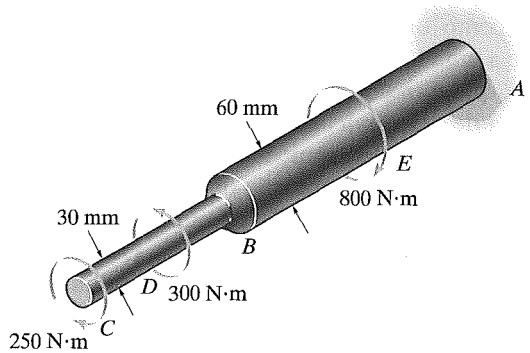
Problema 5.111

***5.112.** O eixo é usado para transmitir 660 W ao girar a 450 rpm. Determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo. Os segmentos são interligados por um filete de solda de raio 1,875 mm.



Problema 5.112

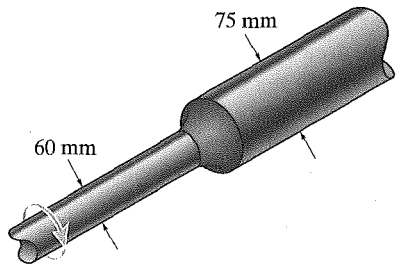
5.113. O eixo está preso à parede em A e é submetido aos torques mostrados na figura. Determine a tensão de cisalhamento máxima no eixo. Um filete de solda de raio 4,5 mm é usado para interligar os eixos em B.



Problema 5.113

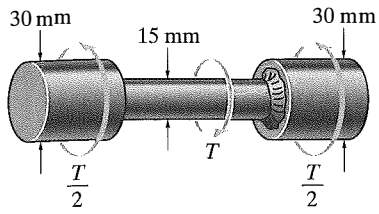
5.114. O eixo aumentado foi projetado para girar a 720 rpm enquanto transmite 30 kW de potência. Isso é possível? A tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 12$ MPa.

5.115. O eixo aumentado foi projetado para girar a 540 rpm. Se o raio do filete de solda que interliga os eixos for $r = 7{,}20$ mm e a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 55$ MPa, determine a potência máxima que o eixo pode transmitir.



Problemas 5.114/115

***5.116.** A tensão de cisalhamento admissível para o aço usado na fabricação do eixo é $\tau_{adm} = 8$ MPa. Se os elementos forem interligados por um filete de solda de raio $r = 2{,}25$ mm, determine o torque máximo T que pode ser aplicado.



Problema 5.116

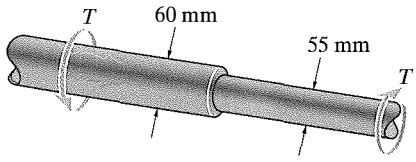
5.117. Um eixo maciço é submetido ao torque T, que provoca o escoamento do material. Se o material for elástico–plástico, mostre que o torque pode ser expresso em termos do ângulo de torção ϕ do eixo como $T = 4/3\ T_e(1 - \phi^3_e/4\phi^3)$, onde T_e e ϕ_e são o torque e o ângulo de torção quando o material começa a escoar.

5.118. Um eixo maciço com diâmetro de 50 mm é feito de material elástico–plástico com tensão de escoamento τ_e = 112 MPa e módulo de cisalhamento G = 84 GPa. Determine o torque exigido para desenvolver um núcleo elástico no eixo com diâmetro de 25 mm. Calcule também o torque plástico.

5.119. Determine o torque necessário para torcer um cabo de aço curto de 3 mm de diâmetro por várias revoluções se ele for feito de um aço que se presume ser elástico–plástico com tensão de escoamento τ_e = 80 MPa. Considere que o material se torna totalmente plástico.

***5.120.** Um eixo maciço tem diâmetro de 40 mm e comprimento de 1 m e é feito de um material elástico–plástico com tensão de escoamento τ_e = 100 MPa. Determine o torque elástico máximo T_e e o ângulo de torção correspondente. Qual é o ângulo de torção se o torque for aumentado para $T = 1{,}2T_e$? G = 80 GPa.

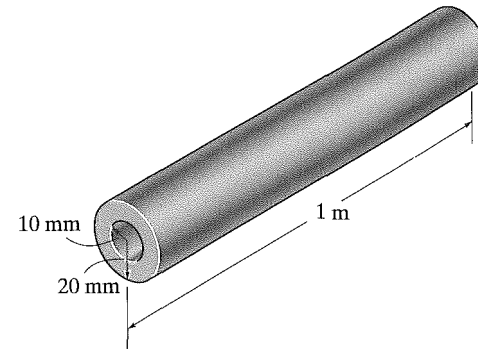
5.121. O eixo é submetido a um torque **T** que produz escoamento na superfície do segmento de maior diâmetro. Determine o raio do núcleo elástico produzido no segmento de menor diâmetro. Despreze a concentração de tensão no filete.



Problema 5.121

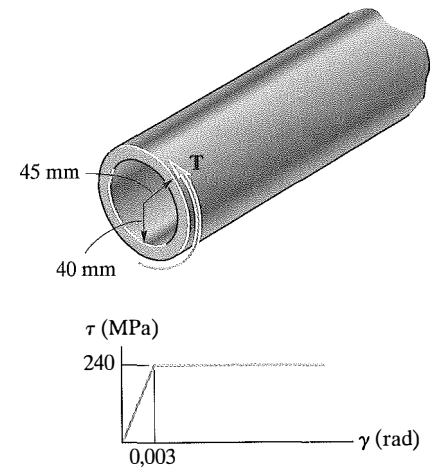
5.122. Uma barra com seção transversal circular de 75 mm de diâmetro é submetida a um torque de 12,5 kN · m. Se o material for elástico–plástico, com τ_e = 112 MPa, determine o raio do núcleo elástico.

5.123. Um eixo tubular tem diâmetro interno de 20 mm, diâmetro externo de 40 mm e comprimento de 1 m. É feito de um material elástico perfeitamente plástico com tensão de escoamento τ_e = 100 MPa. Determine o torque máximo que ele pode transmitir. Qual é o ângulo de torção de uma extremidade em relação à outra extremidade se a deformação por cisalhamento na superfície interna do tubo estiver prestes a escoar? G = 80 GPa.



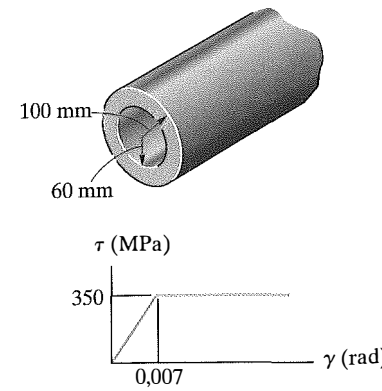
Problema 5.123

***5.124.** O tubo de 2 m de comprimento é feito de um material elástico–plástico como mostra a figura. Determine o torque aplicado T que submete o material da borda externa do tubo a uma deformação por cisalhamento de $\gamma_{máx}$ = 0,008 rad. Qual seria o ângulo de torção permanente do tubo quando o torque for removido? Faça um rascunho da distribuição da tensão residual no tubo.



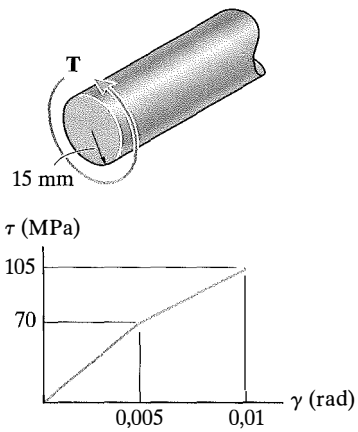
Problema 5.124

5.125. O tubo tem comprimento de 2 m e é feito de um material elástico–plástico material como mostra a figura. Determine o torque necessário só para tornar o material totalmente plástico. Qual é o ângulo de torção permanente do tubo quando esse torque é removido?



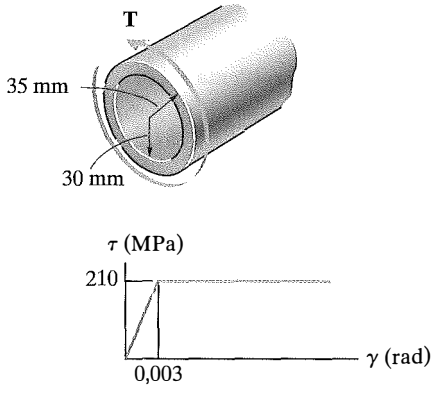
Problema 5.125

5.126. O eixo é feito de um material endurecido por deformação cujo diagrama τ–γ é mostrado na figura. Determine o torque T que deve ser aplicado ao eixo de modo a criar um núcleo elástico no eixo com raio $\rho_c = 12{,}5$ mm.



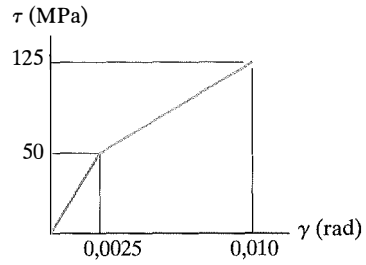
Problema 5.126

5.127. O tubo de 2 m de comprimento é feito de um material elástico perfeitamente plástico como mostra a figura. Determine o torque aplicado T que submete o material da borda externa do tubo à deformação por cisalhamento $\gamma_{máx} = 0{,}006$ rad. Qual será o ângulo de torção permanente do tubo quando esse torque for removido? Faça um rascunho da distribuição de tensão residual no tubo.



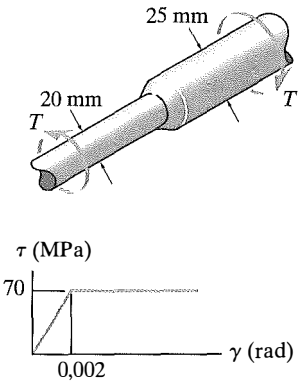
Problema 5.127

***5.128.** O diagrama tensão–deformação por cisalhamento para um eixo maciço de 50 mm de diâmetro pode ser aproximado como mostra a figura. Determine o torque exigido para provocar uma tensão de cisalhamento máxima de 125 MPa no eixo. Se o eixo tiver 3 m de comprimento, qual será o ângulo de torção correspondente?



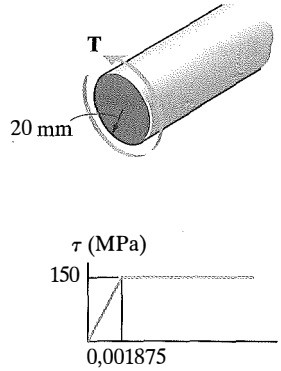
Problema 5.128

5.129. O eixo é composto por duas seções rigidamente acopladas. Se o material for elástico perfeitamente plástico como mostra a figura, determine o maior torque T que pode ser aplicado ao eixo. Além disso, desenhe a distribuição da tensão de cisalhamento na linha radial para cada seção. Despreze o efeito da concentração de tensão.



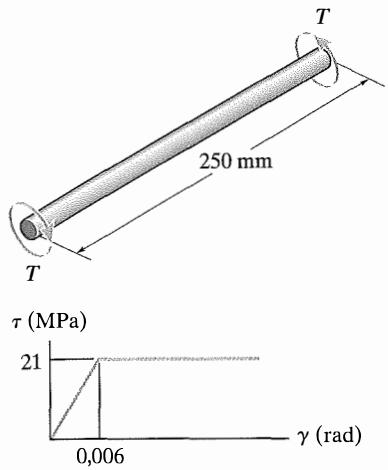
Problema 5.129

5.130. O eixo é feito de um material elástico perfeitamente plástico como mostra a figura. Faça um gráfico da distribuição da tensão de cisalhamento que age ao longo de uma linha radial se o eixo for submetido a um torque $T = 2$ kN · m. Qual será a distribuição da tensão residual no eixo quando o torque for removido?



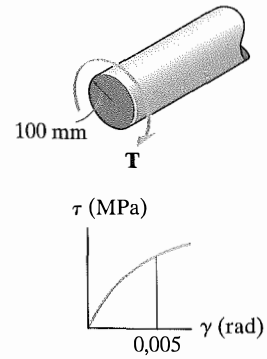
Problema 5.130

5.131. Um eixo de 37,5 mm de diâmetro é feito de um material elástico–plástico como mostra a figura. Determine o raio de seu núcleo elástico se ele for submetido a um torque $T = 300\ \text{N} \cdot \text{m}$. Se o eixo tiver 250 mm de comprimento, determine o ângulo de torção.



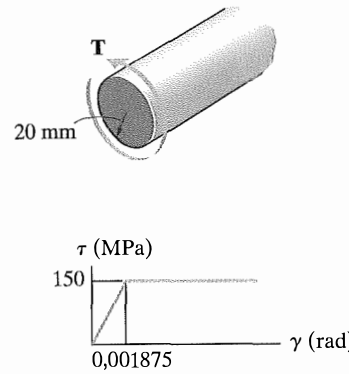
Problema 5.131

5.132. Um torque é aplicado ao eixo que tem raio de 100 mm. Se o material obedecer a uma relação tensão–deformação por cisalhamento de $\tau = 20\gamma^{1/3}$ MPa, determine o torque que deve ser aplicado ao eixo de modo que a máxima deformação por cisalhamento se torne 0,005 rad.



Problema 5.132

5.133. O eixo é feito de um material elástico perfeitamente plástico como mostra a figura. Determine o torque que o eixo pode transmitir se o ângulo de torção admissível for 0,375 rad. Determine também o ângulo de torção permanente, uma vez removido o torque. O eixo tem 2 m de comprimento.



Problema 5.133

Revisão do capítulo

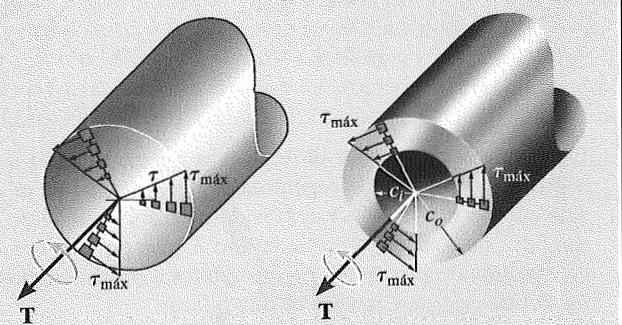
Torque provoca torção em um eixo com seção transversal circular, de modo que a deformação por cisalhamento no eixo é proporcional à sua distância radial do centro do eixo. Contanto que o material seja homogêneo e a lei de Hooke se aplique, a tensão de cisalhamento é determinada pela fórmula da torção,

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

O projeto de um eixo exige a determinação de um parâmetro geométrico,

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{adm}}$$

Muitas vezes, a potência gerada por um eixo rotativo é informada, caso em que o torque é determinado por $P = T\omega$.



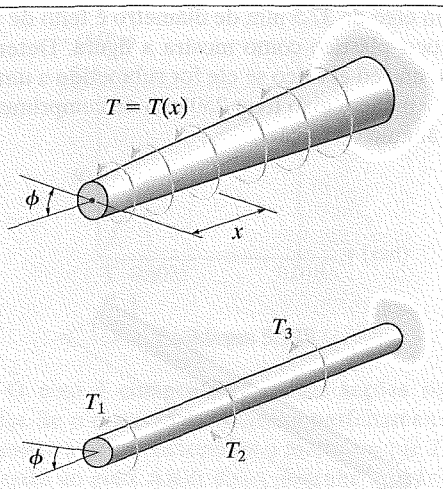
O ângulo de torção de um eixo circular é determinado por

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)\,dx}{JG}$$

Se o torque e JG forem constantes, então

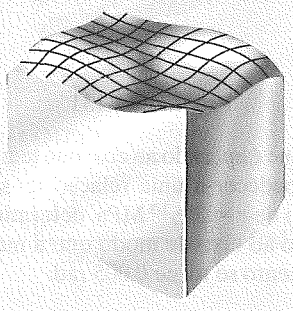
$$\phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

Para aplicação e para termos certeza de que o material não escoará, mas permanecerá linear elástico, é necessário usar uma convenção de sinal para o torque interno.



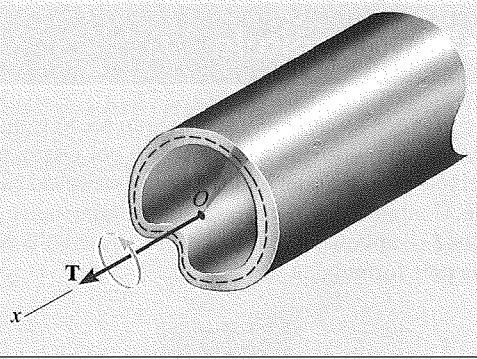
Se o eixo for estaticamente indeterminado, então os torques de reação são determinados por equilíbrio, compatibilidade de torção e relação torque–torção, tal como $\phi = TL/JG$.

Eixos maciços não circulares tendem a entortar para fora do plano quando submetidos a um torque. Há fórmulas disponíveis para determinar a tensão de cisalhamento elástica e a torção para esses casos.



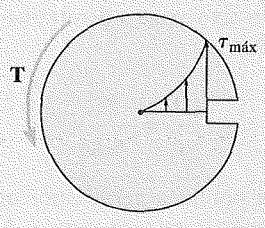
A tensão de cisalhamento em tubos é determinada considerando-se o fluxo de cisalhamento no tubo. Considera-se que a tensão de cisalhamento em cada espessura t do tubo seja constante. Seu valor é determinado por

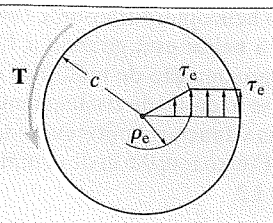
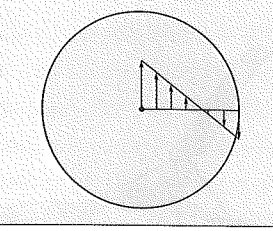
$$\tau_{méd} = \frac{T}{2tA_m}$$



Ocorrem concentrações de tensão em eixos quando a seção transversal muda repentinamente. A tensão de cisalhamento máxima é determinada com a utilização de um fator de concentração de tensão K que, por sua vez, é determinado por meios experimentais e representado em forma gráfica. Uma vez obtido o fator,

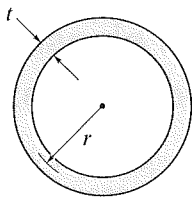
$$\tau_{máx} = K\left(\frac{Tc}{J}\right)$$



Se o torque ap icado fizer o material ultrapassar o limite elástico, então a distribuição de tensão não será proporcional à distância radial em relação à linha central do eixo. Em vez disso, o torque estará relac onado à distribuição de tensão pelo diagrama tensão de cisalhamento–deformação por cisalhamento e equilíbrio.	
Se um eixo for submetido a um torque plástico que depois é removido, o torque provocará reação elástica no material, o que causará o desenvolvimento de tensão de cisalhamento residual no eixo.	

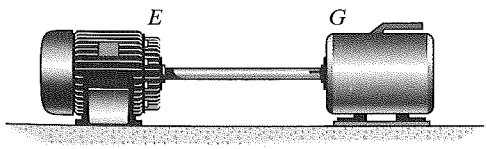
PROBLEMAS DE REVISÃO

5.134. Considere um tubo de parede fina de raio médio r e espessura t. Mostre que a tensão de cisalhamento máxima no tubo devido a um torque aplicado T se aproxima da tensão de cisa hamento média calculada pela Equação 5.18 quando $r/t \to \infty$.



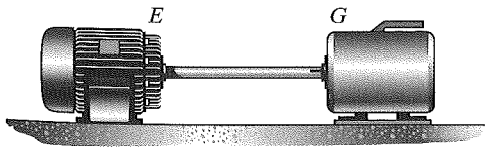
Problema 5.134

5.135. O eixo de aço inoxidável 304 tem 3 m de comprimento e diâmetro externo de 60 mm. Quando está girando a 60 rad/s, transmite 30 kW de potência do motor E para o gerador G. Determine a menor espessura do eixo se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 150$ MPa e o eixo estiver restrito a uma torção não maior do que 0,08 rad.



Problema 5.135

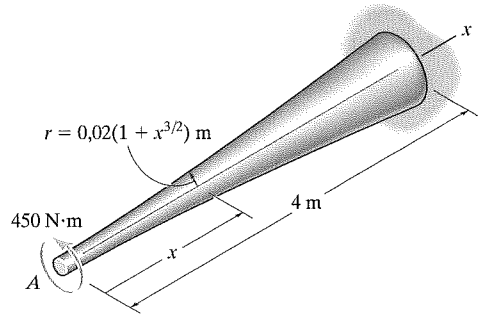
5.136. O eixo maciço de aço inoxidável 304 tem 3 m de comprimento e diâmetro de 50 mm. Ele deve transmitir 40 kW de potência do motor E para o gerador G. Determine a menor velocidade angular que o eixo pode ter se estiver restrito a uma torção não maior do que 1,5°.



Problema 5.136

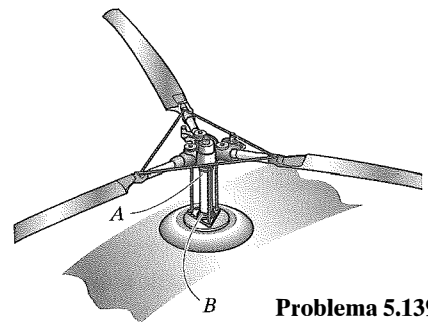
5.137. O tubo de uma perfuratriz de poço de petróleo é feito de aço e tem diâmetro externo de 112 mm e espessura de 6 mm. Se o tubo estiver girando a 650 rev/minuto enquanto recebe potência de um motor de 12 kW, determine a tensão de cisalhamento máxima no tubo.

5.138. O eixo cônico é feito de liga de alumínio 2014-T6 e seu raio pode ser descrito pela função $r = 0{,}02(1 + x^{3/2})$ m, onde x é dado em metros. Determine o ângulo de torção de sua extremidade A se ele for submetido a um torque de 450 N · m.



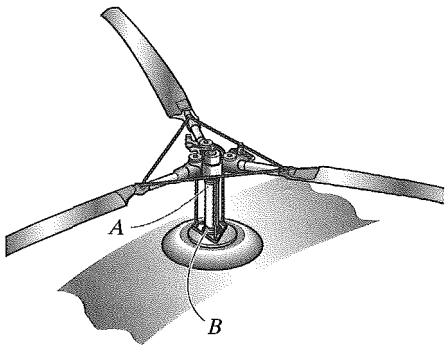
Problema 5.138

5.139. O motor do helicóptero transmite 660 kW ao eixo do rotor AB quando a hélice está girando a 1.500 rev/minuto. Determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro do eixo AB se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 56$ MPa e as vibrações limitarem o ângulo de torção do eixo a 0,05 rad. O eixo tem 0,6 m de comprimento e é feito de aço-ferramenta L2.



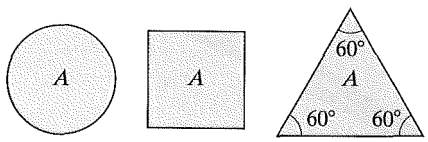
Problema 5.139

*5.140. O motor do helicóptero transmite 660 kW ao eixo do rotor AB quando a hélice está girando a 1.500 rev/minuto. Determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro do eixo AB se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 75$ MPa e as vibrações limitarem o ângulo de torção do eixo a 0,03 rad. O eixo tem 0,6 m de comprimento e é feito de aço-ferramenta L2.



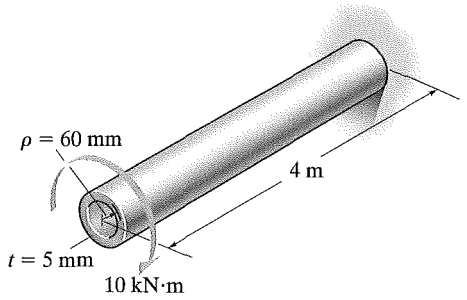
Problema 5.140

5.141. O material de fabricação de cada um dos três eixos tem tensão de escoamento τ_e a módulo de cisalhamento G. Determine qual das geometrias resistirá ao maior torque sem escoamento. Qual porcentagem desse torque pode ser suportada pelos outros dois eixos? Considere que cada eixo é feito com a mesma quantidade de material e tem a mesma área de seção transversal A.



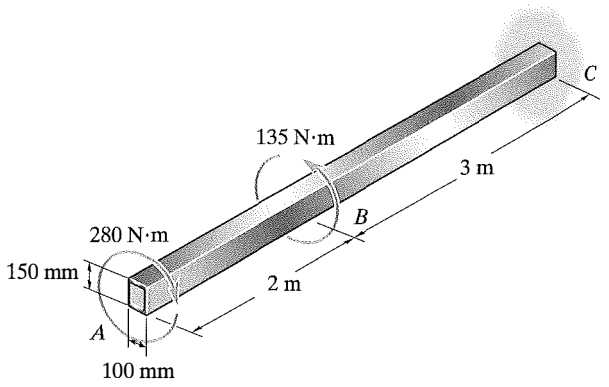
Problema 5.141

5.142. O tubo circular de aço A-36 é submetido a um torque de 10 kN · m. Determine a tensão de cisalhamento no raio médio $\rho = 60$ mm e calcule o ângulo de torção do tubo se ele tiver 4 m de comprimento e estiver preso em sua extremidade mais distante. Resolva o problema usando as equações 5.7, 5.15, 5.18 e 5.20.



Problema 5.142

5.143. O tubo de alumínio tem 5 mm de espessura e dimensões da seção transversal externa mostradas na figura. Determine a máxima tensão de cisalhamento média no tubo. Se o tubo tiver comprimento de 5 m, determine o ângulo de torção. $G_{al} = 28$ GPa.



Problema 5.143

6 Flexão

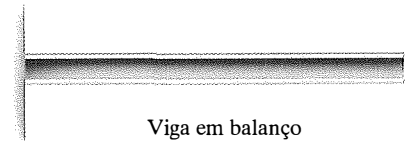
OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Vigas e eixos são importantes elementos estruturais e mecânicos usados em projetos de engenharia. Neste capítulo, determinaremos a tensão provocada nesses elementos por conta da flexão. O capítulo começa com uma discussão sobre como construir os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga ou eixo. Assim como os diagramas de força normal e de torque, os diagramas de força cortante e momento fletor proporcionam um meio útil para determinar a maior força de cisalhamento e o maior momento em um elemento e especificam onde esses máximos ocorrem. Uma vez determinado o momento interno em uma seção, a tensão de flexão pode ser calculada. Em primeiro lugar, consideraremos elementos retos, com seção transversal simétrica e feitos de materiais homogêneos lineares elásticos. Em seguida, discutiremos casos especiais que envolvem flexão assimétrica e elementos feitos de materiais compósitos. Também consideraremos elementos curvos, concentrações de tensão, flexão inelástica e tensões residuais.

6.1 Diagramas de força cortante e momento fletor

Elementos delgados que suportam carregamentos aplicados perpendicularmente a seu eixo longitudinal são denominados ***vigas***. Em geral, vigas são barras longas e retas com área de seção transversal constante e classificadas conforme o modo como são apoiadas. Por exemplo, uma *viga simplesmente apoiada* é suportada por um apoio fixo em uma extremidade e um apoio móvel (ou rolete) na outra extremidade (Figura 6.1), uma *viga em balanço* é engastada em uma extremidade e livre na outra, e uma *viga apoiada com extremidade em balanço* é uma viga na qual uma ou ambas as extremidades ultrapassam livremente os apoios. As vigas certamente podem ser consideradas entre os mais importantes de todos os elementos estruturais. Citamos como exemplo elementos utilizados para suportar o piso de um edifício, a plataforma de uma ponte ou a asa de um avião. Além disso, o eixo de um automóvel, a lança de um guindaste e até mesmo muitos dos ossos do corpo humano agem como vigas.

Viga simplesmente apoiada



Viga em balanço

Viga apoiada com uma extremidade em balanço

Figura 6.1

Por conta dos carregamentos aplicados, as vigas desenvolvem uma força de cisalhamento interna (força cortante) e momento fletor que, em geral, variam de ponto para ponto ao longo do eixo da viga. Para projetar uma viga corretamente, em primeiro lugar, é necessário determinar a força de cisalhamento e o momento máximos que agem na viga. Um modo de fazer isso é expressar V e M em função de uma posição arbitrária x ao longo do eixo da viga. Então, essas funções de *cisalhamento e momento* podem ser representadas em gráficos denominados ***diagramas de força cortante e momento fletor***. Os valores máximos tanto de V quanto de M podem ser obtidos desses gráficos. Além disso, uma vez que fornecem informações detalhadas sobre a *variação* do cisalhamento e do momento ao longo do eixo da viga, os diagramas de força cortante e momento fletor são frequentemente usados pelos engenheiros para decidir onde colocar materiais de reforço no interior da viga ou como calcular as dimensões da viga em vários pontos ao longo de seu comprimento.

Na Seção 1.2, utilizamos o método das seções para determinar o carregamento interno de um elemento em um *ponto específico*. Todavia, se tivermos de determinar V e M internos em função de x ao longo de uma viga, então será necessário localizar a seção ou corte imaginário a uma *distância arbitrária* x da extremidade da viga e formular V e M em termos de x. Nesse

sentido, a escolha da origem e da direção positiva para qualquer distância x selecionada é *arbitrária*. Entretanto, na maioria das vezes, a origem é localizada na extremidade esquerda da viga e a direção positiva é da esquerda para a direita.

Em geral, as funções de cisalhamento interno e momento fletor obtidas em função de x serão *descontínuas*, ou seja, suas inclinações serão descontínuas em pontos nos quais uma carga distribuída muda ou onde são aplicadas forças concentradas ou conjugados. Por essa razão, as funções de cisalhamento e momento fletor devem ser determinadas para *cada região* da viga localizada *entre* quaisquer duas descontinuidades de carregamento. Por exemplo, as coordenadas x_1, x_2 e x_3 terão de ser usadas para descrever a variação de V e M em todo o comprimento da viga na Figura 6.2. Essas coordenadas serão válidas *somente* dentro das regiões de A a B para x_1, de B a C para x_2 e de C a D para e x_3.

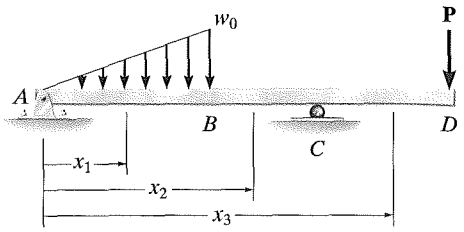
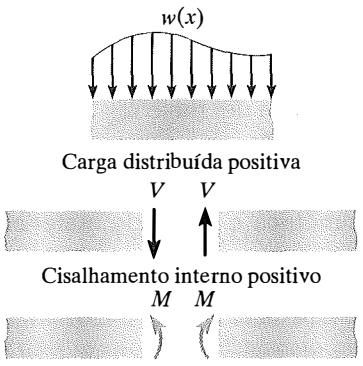


Figura 6.2



Convenção de sinal para a viga

Figura 6.3

Convenção de sinal para vigas. Antes de apresentar um método para determinar o cisalhamento e o momento em função de x e, então, construir um gráfico dessas funções (diagramas de força cortante e momento fletor), é necessário estabelecer uma *convenção de sinal* de modo a definir força cortante interna e momento fletor como "positivos" e "negativos". Embora a escolha de uma convenção de sinal seja arbitrária, aqui adotaremos a convenção frequentemente utilizada na prática da engenharia e mostrada na Figura 6.3. As *direções positivas* são as seguintes: a *carga distribuída* age *para baixo* na viga; a *força cortante interna* provoca uma rotação em *sentido horário* no segmento da viga sobre o qual age; e o momento interno causa *compressão* nas *fibras superiores* do segmento de forma que a flexão deste faz com que ele retenha água. Carregamentos opostos a esses são considerados negativos.

PONTOS IMPORTANTES

- *Vigas* são elementos longos e retos que suportam cargas perpendiculares a seu eixo longitudinal. Elas são classificadas de acordo com o modo como são apoiadas, por exemplo, simplesmente apoiadas, em balanço ou apoiadas com uma extremidade em balanço.
- Para projetar adequadamente uma viga, é importante conhecer a *variação* do cisalhamento e do momento fletor ao longo de seu eixo, de modo a determinar os pontos onde esses valores são máximos.
- Com a determinação de uma convenção de sinal para cisalhamento e momento positivos, o cisalhamento e o momento na viga podem ser determinados em função de sua posição x, e esses valores podem ser representados em gráficos denominados diagramas de força cortante e momento fletor.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga podem ser construídos por meio dos procedimentos descritos a seguir.

Reações nos apoios

- Determine todas as forças de reação e momentos conjugados que agem na viga e decomponha todas as forças em componentes que agem perpendicular e paralelamente ao eixo da viga.

Funções de cisalhamento e momento

- Especifique coordenadas separadas x com origem na *extremidade esquerda* da viga e que se estendam até as regiões da viga entre forças concentradas e/ou momentos, ou até onde não existir nenhuma descontinuidade do carregamento distribuído.

- Secione a viga perpendicularmente a seu eixo em cada distância x e faça o diagrama de corpo livre de um dos segmentos. Não esqueça que as ações de **V** e **M** devem ser mostradas no sentido positivo, de acordo com a convenção de sinal dada na Figura 6.3.
- O cisalhamento é obtido pela soma das forças perpendiculares ao eixo da viga.
- O momento é obtido pela soma dos momentos em torno da extremidade secionada do segmento.

Diagramas de força cortante e momento fletor

- Construa o diagrama de força cortante (V *versus* x) e o diagrama de momento fletor (M *versus* x). Se os valores numéricos das unções que descrevem V e M forem *positivos*, serão marcados acima do eixo x, ao passo que valores negativos serão marcados abaixo do eixo.
- Em geral, é conveniente mostrar os diagramas de força cortante e momento fletor diretamente abaixo do diagrama de corpo livre da viga.

EXEMPLO 6.1

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.4a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações nos apoios foram determinadas como mostra a Figura 6.4d.

Funções de cisalhamento e momento fletor. A viga foi secionada a uma distância arbitrária x do apoio A, estendendo-se pelo interior da região AB; o diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é mostrado na Figura 6.4b. As ações das incógnitas **V** e **M** são indicadas no *sentido positivo* na face direita do segmento de acordo com a convenção de sinal pré-estabelecida. A aplicação das equações de equilíbrio produz

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = \frac{P}{2} \tag{1}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M = \frac{P}{2}x \tag{2}$$

Um diagrama de corpo livre para um segmento esquerdo da viga que se estende até a distância x no interior da região BC é mostrado na Figura 6.4c. Como sempre, as ações de **V** e **M** são mostradas no sentido positivo. Por consequência,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{P}{2} - P - V = 0$$

$$V = -\frac{P}{2} \tag{3}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad M + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}x = 0$$

$$M = \frac{P}{2}(L - x) \tag{4}$$

O diagrama de força cortante é uma representação gráfica das equações 1 e 3, e o diagrama de momento fletor é uma representação gráfica das equações 2 e 4 (Figura 6.4d).

OBSERVAÇÃO: Essas equações podem ser verificadas em parte, observando-se que $dV/dx = -w$ e $dM/dx = V$ em cada caso. (Essas relações serão desenvolvidas na próxima seção como equações 6.1 e 6.2.)

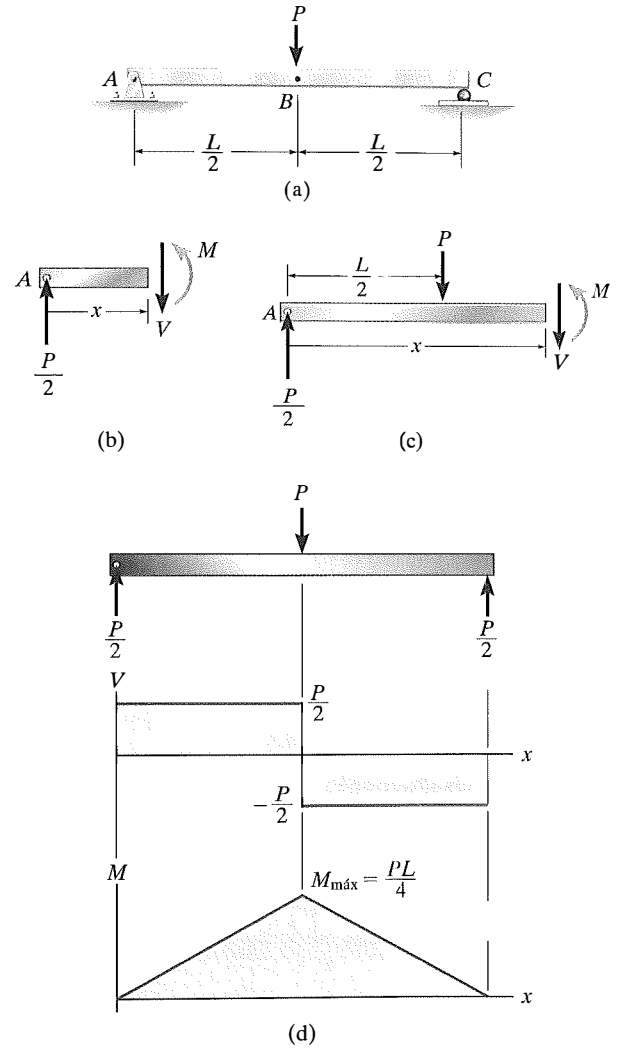


Figura 6.4

EXEMPLO 6.2

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.5a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações nos apoios foram determinadas na Figura 6.5d.

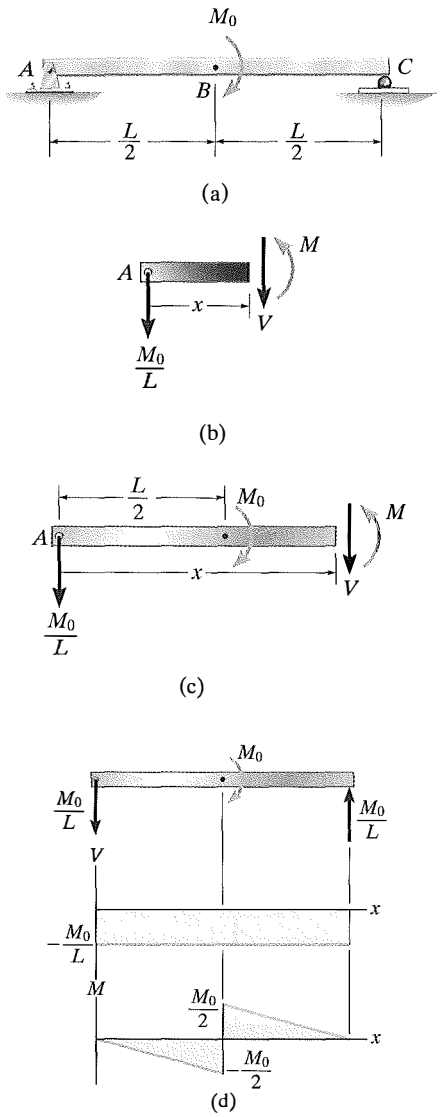


Figura 6.5

Funções de cisalhamento e momento fletor. Esse problema é semelhante ao exemplo anterior, no qual duas coordenadas x devem ser usadas para expressar o cisalhamento e o momento em todo o comprimento da viga. Para o segmento no interior da região AB (Figura 6.5b), temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = -\frac{M_0}{L}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M = 0; \qquad M = -\frac{M_0}{L}x$$

Para o segmento no interior da região BC (Figura 6.5c),

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V = -\frac{M_0}{L}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M = 0; \qquad M = M_0 - \frac{M_0}{L}x$$

$$M = M_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Diagramas de força cortante e momento fletor. Quando as funções acima são representadas em gráfico, obtemos os diagramas de força cortante e momento fletor mostrados na Figura 6.5d.

OBSERVAÇÃO: O cisalhamento é constante em todo o comprimento da viga, isto é, não é afetado pelo momento conjugado $\mathbf{M}_0$ que age no centro da viga. Exatamente como uma força cria um salto no diagrama de força cortante (Exemplo 6.1), um momento conjugado cria um salto no diagrama de momento fletor.

EXEMPLO 6.3

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.6a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações nos apoios foram calculadas na Figura 6.6c.

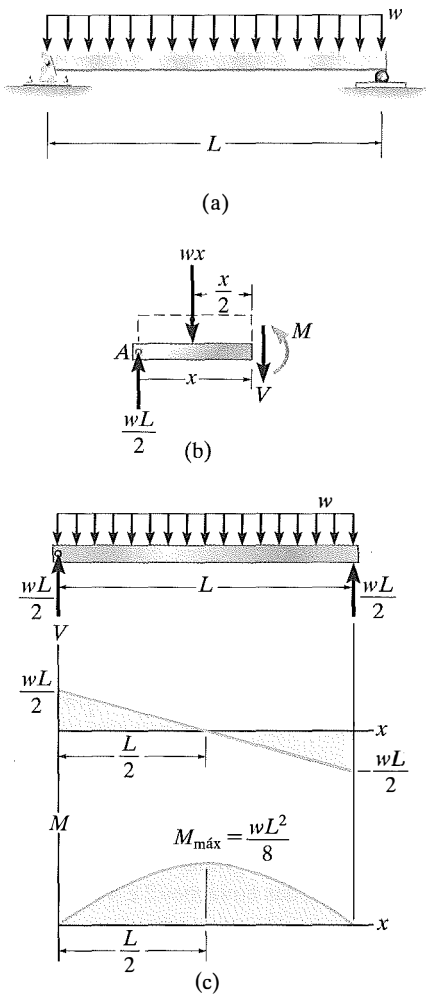


Figura 6.6

Funções de cisalhamento e momento fletor. Um diagrama de corpo livre do segmento esquerdo da viga é mostrado na Figura 6.6b. O carregamento distribuído neste segmento é representado por sua força resultante somente *depois* que o segmento é isolado como um diagrama de corpo livre. Visto que o segmento tem comprimento x, o valor da força *resultante* é wx. Essa força age no centroide da área que compreende o carregamento distribuído, à distância $x/2$ da extremidade direita. A aplicação das duas equações de equilíbrio produz

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{wL}{2} - wx - V = 0$$

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) \tag{1}$$

$$\text{(}+\Sigma M = 0; \qquad -\left(\frac{wL}{2}\right)x + (wx)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w}{2}(Lx - x^2) \tag{2}$$

Esses resultados para V e M podem ser verificados observando que $dV/dx = -w$. De fato, essa expressão está correta, já que w positiva age para baixo. Observe também que $dM/dx = V$.

Diagramas de força cortante e momento fletor. Os diagramas de força cortante e momento fletor mostrados na Figura 6.6c são obtidos pela representação gráfica das equações 1 e 2. O ponto de *cisalhamento zero* pode ser determinado pela Equação 1:

$$V = w\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

OBSERVAÇÃO: Pelo diagrama de momento fletor esse valor de x representa o ponto na viga onde ocorre o *momento máximo*, já que, pela Equação 6.2, a inclinação $V = 0 = dM/dx$. Pela Equação 2, temos

$$M_{\text{máx}} = \frac{w}{2}\left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{wL^2}{8}$$

EXEMPLO 6.4

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.7a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. A carga distribuída é substituída por sua força resultante, e as reações foram determinadas como mostra a Figura 6.7b.

Funções de cisalhamento e momento fletor. Um diagrama de corpo livre de um segmento da viga de comprimento x é mostrado na Figura 6.7c. Observe que a intensidade da carga triangular na seção é determinada por cálculo proporcional, isto é, $w/x = w_0/L$ ou $w = w_0x/L$. Como a intensidade da carga é conhecida, a resultante do carregamento distribuído é determinada pela área sob o diagrama (Figura 6.7c). Assim,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad \frac{w_0L}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{w_0x}{L}\right)x - V = 0$$

$$V = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2) \tag{1}$$

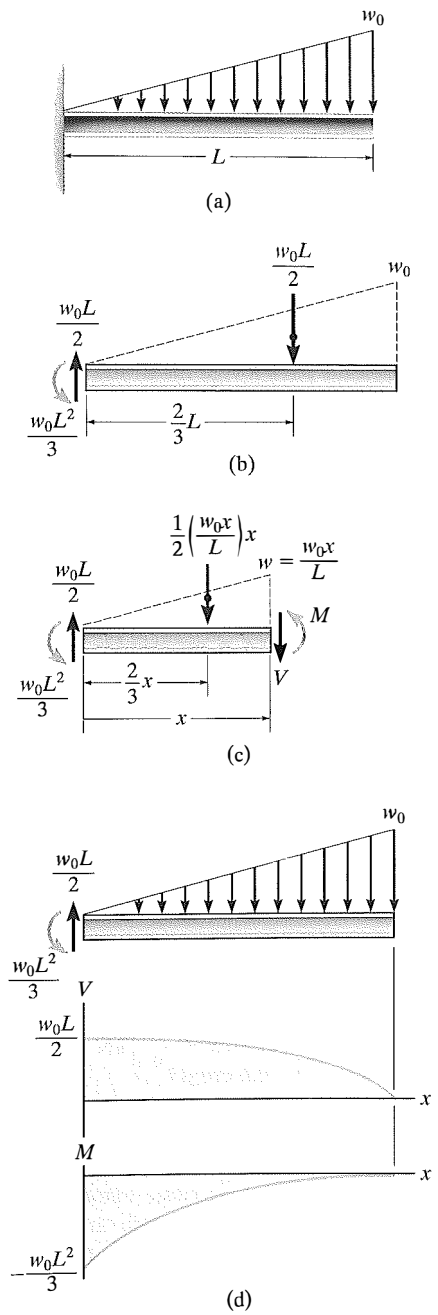


Figura 6.7

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$\frac{w_0 L^2}{3} - \frac{w_0 L}{2}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0 x}{L}\right)x\left(\frac{1}{3}x\right) + M = 0$$

$$M = \frac{w_0}{6L}(-2L^3 + 3L^2 x - x^3) \qquad (2)$$

Esses resultados podem ser verificados pela aplicação das equações 6.1 e 6.2, isto é,

$$w = -\frac{dV}{dx} = -\frac{w_0}{2L}(0 - 2x) = \frac{w_0 x}{L} \qquad \text{OK}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{w_0}{6L}(0 + 3L^2 - 3x^2) = \frac{w_0}{2L}(L^2 - x^2) \qquad \text{OK}$$

Diagramas de força cortante e momento fletor. Os gráficos das equações 1 e 2 são mostrados na Figura 6.7d.

EXEMPLO 6.5

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.8a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. A carga distribuída é dividida em dois carregamentos, sendo um triangular e outro retangular e, então, esses carregamentos são substituídos por suas forças resultantes. As reações foram determinadas como mostra o diagrama de corpo livre da viga (Figura 6.8b).

Funções de cisalhamento e momento fletor. Um diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é mostrado na Figura 6.8c. Como fizemos para a reação nos apoios, o carregamento trapezoidal é substituído por uma distribuição retangular e outra triangular. Observe que a intensidade da carga triangular na seção é determinada por cálculo proporcional. A força resultante e a localização de cada carregamento distribuído também são mostradas. Aplicando as equações de equilíbrio, temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 30\ \text{kN} - (2\ \text{kN/m})x - \frac{1}{2}(4\ \text{kN/m})\left(\frac{x}{18\ \text{m}}\right)x - V = 0$$

$$V = \left(30 - 2x - \frac{x^2}{9}\right)\text{kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$-30\ \text{kN} - x(2\ \text{kN/m})x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(4\ \text{kN/m})\left(\frac{x}{18\ \text{m}}\right)x\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = \left(30x - x^2 - \frac{x^3}{27}\right)\text{kN} \cdot \text{m} \qquad (2)$$

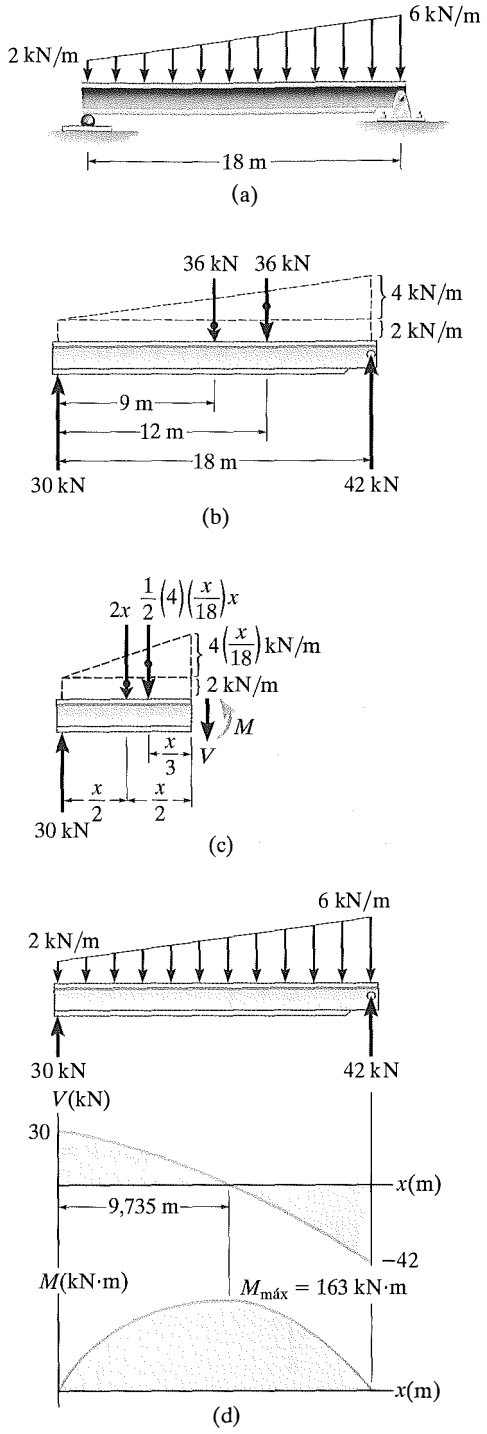


Figura 6.8

A Equação 2 pode ser verificada observando-se que $dM/dx = V$, isto é, Equação 1. Além disso, $w = -dV/dx = 2 + 2/9x$. Essa equação está de acordo, visto que, quando $x = 0$, $w = 2$ kN/m, e quando $x = 18$ m, $w = 6$ kN/m (Figura 6.8a).

Diagramas de força cortante e momento fletor. As Equações 1 e 2 são representadas em gráfico na Figura 6.8d. Visto que o ponto de momento máximo ocorre quando $dM/dx = V = 0$, então, pela Equação 1,

$$V = 0 = 30 - 2x - \frac{x^2}{9}$$

Escolhendo a raiz positiva,

$$x = 9{,}735 \text{ m}$$

Assim, pela Equação 2,

$$M_{máx} = 30(9{,}735) - (9{,}735)^2 - \frac{(9{,}735)^3}{27}$$
$$= 163 \text{ kN·m}$$

EXEMPLO 6.6

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.9a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações nos apoios foram determinadas e são mostradas no diagrama de corpo livre da viga (Figura 6.9d).

Funções de cisalhamento e momento fletor. Visto que há uma descontinuidade na carga distribuída e também uma carga concentrada no centro da viga, duas regiões de x devem ser consideradas para se descreverem as funções de cisalhamento e momento para a viga inteira.

$0 \le x_1 < 5$ m (Figura 6.9b):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 5{,}75 \text{ kN} - V = 0$$
$$V = 5{,}75 \text{ kN} \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \qquad -80 \text{ kN·m} - 5{,}75 \text{ kN}\, x_1 + M = 0$$
$$M = (5{,}75x_1 + 80) \text{ kN·m} \qquad (2)$$

$5 \text{ m} < x_2 \le 10$ m (Figura 6.9c):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$5{,}75 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m}(x_2 - 5 \text{ m}) - V = 0$$
$$V = (15{,}75 - 5x_2) \text{ kN} \qquad (3)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad -80 \text{ kN·m} - 5{,}75 \text{ kN}\, x_2 + 15 \text{ kN}(x_2 - 5 \text{ m})$$
$$+ 5 \text{ kN/m}(x_2 - 5 \text{ m})\left(\frac{x_2 - 5 \text{ m}}{2}\right) + M = 0$$
$$M = (-2{,}5x_2^2 + 15{,}75x_2 + 92{,}5) \text{ kN·m} \qquad (4)$$

Esses resultados podem ser verificados, em parte, observando-se que, aplicando $w = -dV/dx$ e $V = dM/dx$. Além disso, quando $x_1 = 0$, as equações 1 e 2 dão $V = 5{,}75$ kN e $M = 80$ kN·m; quando $x_2 = 10$ m, as Equações 3 e 4 dão $V = -34{,}25$ kN e $M = 0$. Esses valores estão de acordo com as reações nos apoios mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.9d).

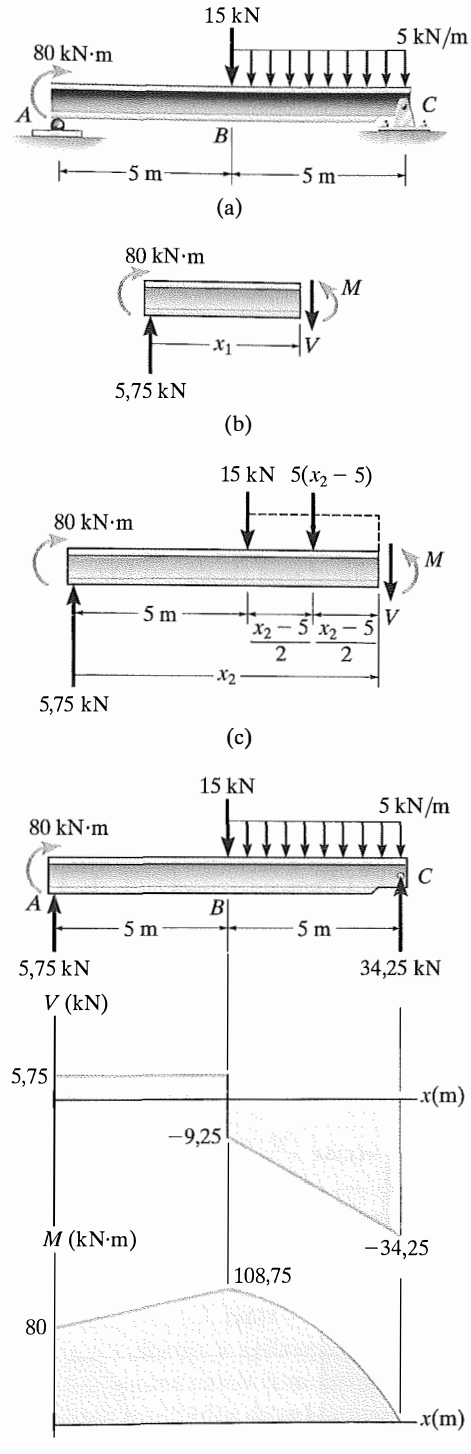


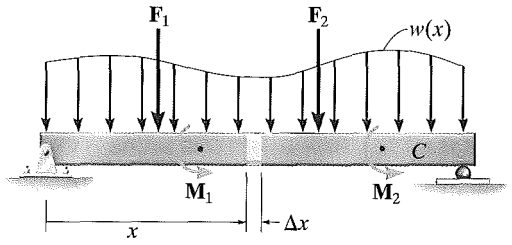
Figura 6.9

Diagramas de força cortante e momento fletor. As Equações 1 a 4 são apresentadas nos gráficos da Figura 6.9d.

6.2 Método gráfico para construir diagramas de força cortante e momento fletor

Quando uma viga está sujeita a *vários* carregamentos diferentes, determinar V e M em função de x e representar essas equações em gráfico pode ser bastante tedioso. Nesta seção, discutiremos um método mais simples para construir os diagramas de força cortante e momento fletor — um método baseado em duas relações diferenciais que existem entre carga distribuída, cisalhamento e momento.

Regiões de carga distribuída. Com a finalidade de generalizar, considere a viga mostrada na Figura 6.10a, que está sujeita a um carregamento arbitrário. Um diagrama de corpo livre para um pequeno segmento Δx da viga é mostrado na Figura 6.10b. Visto que esse segmento foi escolhido em uma posição x onde não há nenhuma força concentrada nem momento conjugado, os resultados que serão obtidos *não* se aplicarão a esses pontos de carregamento concentrado.



(a)

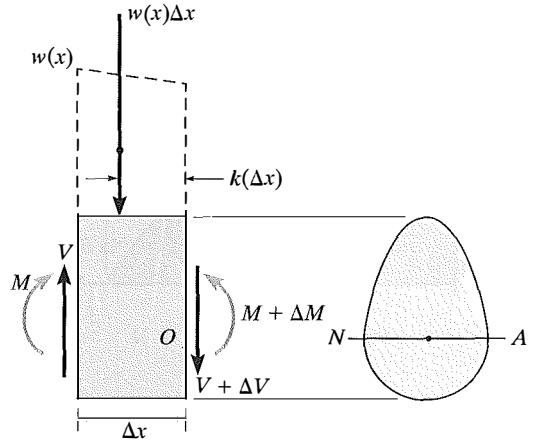


Diagrama de corpo livre do segmento Δx | Área da seção transversal do segmento

(b)

Figura 6.10

Observe que todos os carregamentos mostrados no segmento agem em suas direções positivas, de acordo com a convenção de sinal estabelecida (Figura 6.3). Além disso, ambos, cisalhamento e momento internos resultantes, que agem na face direita do segmento, devem sofrer uma pequena mudança finita para manter o segmento em equilíbrio. A carga distribuída foi substituída por uma força resultante $w(x)\Delta x$ que age a uma distância fracionária $k(\Delta x)$ da extremidade direita, onde $0 < k < 1$ [por exemplo, se $w(x)$ for *uniforme*, $k = 1/2$].

Aplicando as duas equações de equilíbrio ao segmento, temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V - w(x)\,\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -w(x)\,\Delta x$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0;$$

$$-V\,\Delta x - M + w(x)\,\Delta x[k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - w(x)\,k(\Delta x)^2$$

Dividindo por Δx e calculando o limite quando $\Delta x \to 0$, essas duas equações tornam-se

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \tag{6.1}$$

inclinação do diagrama de força cortante em cada ponto = −intensidade da carga distribuída em cada ponto

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{6.2}$$

inclinação do diagrama de momento em cada ponto = cisalhamento (força cortante) em cada ponto

Essas duas equações proporcionam um meio conveniente para se obter rapidamente os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga. A Equação 6.1 afirma que, em um ponto, a *inclinação* do diagrama de força cortante é igual à intensidade negativa do carregamento distribuído. Por exemplo, considere a viga na Figura 6.11a. O carregamento distribuído é positivo e aumenta de zero até w_B. Portanto, o diagrama de força cortante será uma curva com *inclinação negativa*, que decresce de zero até $-w_B$. Inclinações específicas $w_A = 0$, $-w_C$, $-w_D$ e $-w_B$ são mostradas na Figura 6.11b.

De maneira semelhante, a Equação 6.2 afirma que, em um ponto, a *inclinação* do diagrama de momento é igual ao cisalhamento (força cortante). Observe que o diagrama de força cortante na Figura 6.11b começa em $+V_A$,

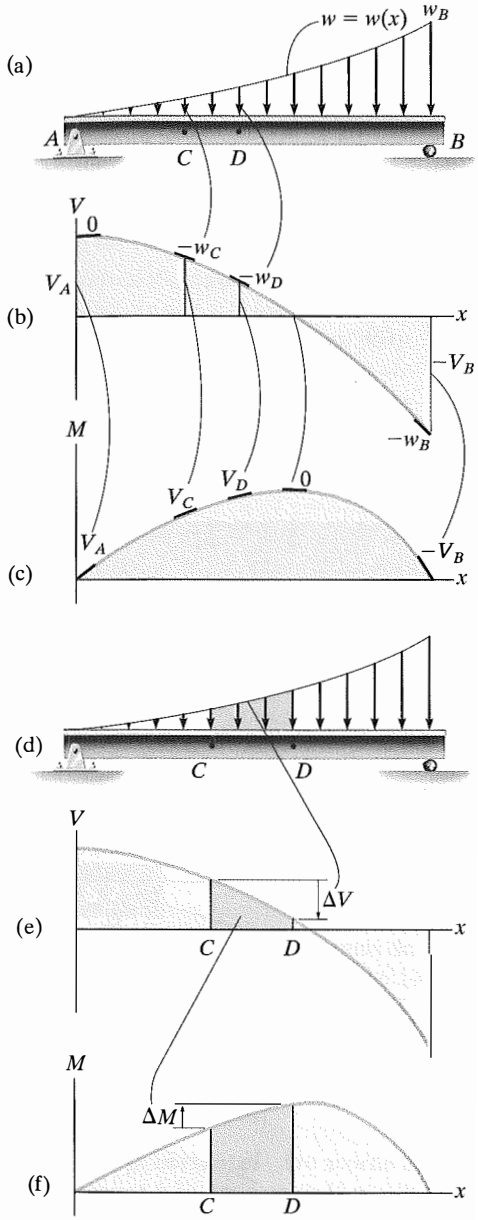


Figura 6.11

decresce até zero e, então, torna-se negativo e decresce até $-V_B$. Então, o diagrama de momento terá uma inclinação inicial de $+V_A$, que decresce até zero e, em seguida, torna-se negativa e decresce até $-V_B$. Inclinações específicas V_A, V_C, V_D, 0 e $-V_B$ são mostradas na Figura 6.11c.

As equações 6.1 e 6.2 também podem ser reescritas na forma $dV = -w(x)\,dx$ e $dM = V\,dx$. Observando que $w(x)\,dx$ e $V\,dx$ representam áreas diferenciais sob o diagrama de carga distribuída e força cortante, respectivamente, podemos integrar essas áreas entre quaisquer dois pontos C e D na viga (Figura 6.11d), e escrever

$$\Delta V = -\int w(x)dx \qquad (6.3)$$

Mudança na força cortante = − área sob a carga distribuída

$$\Delta M = \int V(x)dx \qquad (6.4)$$

Mudança no momento = − área sob o diagrama de força cortante

A Equação 6.3 afirma que a *mudança na força cortante* entre os pontos C e D é igual à *área* (negativa) sob a curva de carga distribuída entre esses dois pontos (Figura 6.11d). De maneira semelhante, pela Equação 6.4, a mudança no momento entre C e D (Figura 6.11f) é igual à área sob o diagrama de força cortante dentro da região entre C a D.

Como dissemos antes, essas duas equações não se aplicam a pontos onde age uma força concentrada ou um binário.

Regiões de força e momento concentrados. Um diagrama de corpo livre de um pequeno segmento da viga na Figura 6.10a tomado sob uma das forças é mostrado na Figura 6.12a. Aqui, podemos ver que o equilíbrio de forças exige

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad V - F - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -F \qquad (6.5)$$

Assim, quando **F** age *para baixo* na viga, ΔV é *negativo*, de modo que a força cortante "saltará" *para baixo*. De maneira semelhante, se **F** agir *para cima*, o salto (ΔV) será *para cima*.

Pela Figura 6.12b, o equilíbrio de momento exige que a mudança no momento seja

$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0; \qquad M + \Delta M - M_0 - V\,\Delta x - M = 0$$

Fazendo $\Delta x \to 0$, obtemos

$$\Delta M = M_0 \qquad (6.6)$$

Nesse caso, se $\mathbf{M}_0$ for aplicado *em sentido horário*, ΔM é *positivo*, de modo que o diagrama de momento "saltará" *para cima*. De maneira semelhante, quando $\mathbf{M}_0$ for aplicado *em sentido anti-horário*, o salto (ΔM) será *para baixo*.

A Tabela 6.1 ilustra a aplicação das equações 6.1, 6.2, 6.5 e 6.6 a alguns casos comuns de carregamento. Nenhum desses resultados deve ser memorizado; mais exatamente, cada um deles deve ser *cuidadosamente estudado* de modo que fique perfeitamente claro como os diagramas de força cortante e momento fletor podem ser construídos com base no conhecimento da *inclinação* nos diagramas de carga e força cortante, respectivamente. Valeria muito a pena dedicar tempo e esforço para testar o seu grau de entendimento desses conceitos analisando as colunas de diagramas de força cortante e momento apresentados na Tabela 6.1 e tentando reconstruir esses diagramas com base no conhecimento do carregamento.

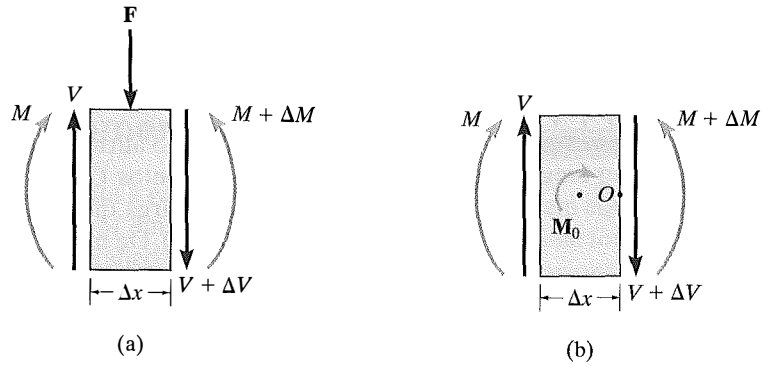
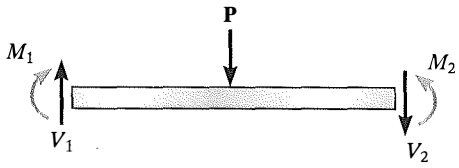
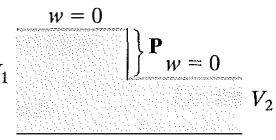
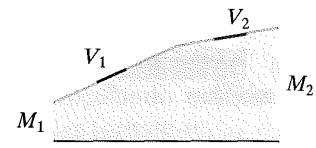
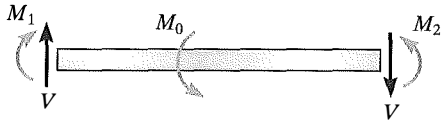
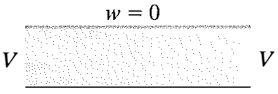
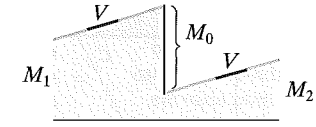
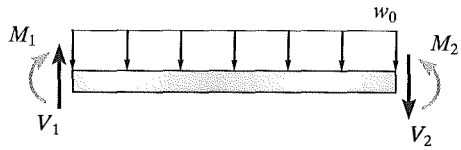
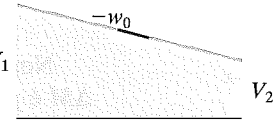
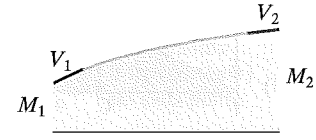
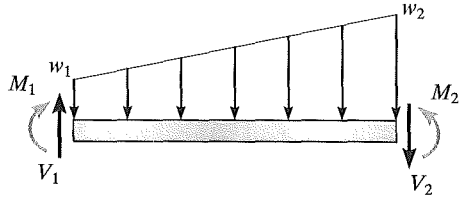
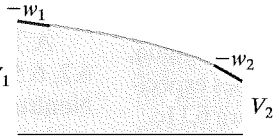
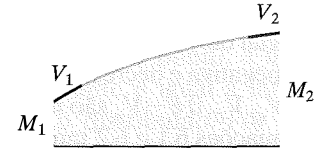
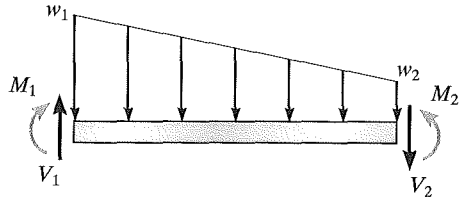
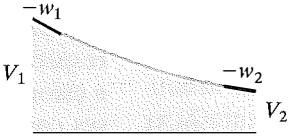
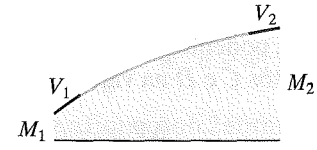


Figura 6.12

TABELA 6.1

Carregamento	Diagrama de força cortante $\frac{dV}{dx} = -w$	Diagrama de momento $\frac{dM}{dx} = V$
	 Força **P** para baixo faz V saltar para baixo de V_1 para V_2.	 Inclinação constante muda de V_1 para V_2.
	 Nenhuma mudança na força cortante, já que a inclinação $w = 0$.	 Inclinação positiva constante. $\mathbf{M}_0$ em sentido anti-horário faz M saltar para baixo.
	 Inclinação negativa constante.	 Inclinação positiva que decresce de V_1 para V_2.
	 Inclinação negativa que aumenta de $-w_1$ a $-w_2$.	 Inclinação positiva que decresce de V_1 para V_2.
	 Inclinação negativa que decresce de $-w_1$ a $-w_2$.	 Inclinação positiva que decresce de V_1 para V_2.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O procedimento descrito a seguir proporciona um método para construir os diagramas de força cortante e momento para uma viga com base nas relações entre carga distribuída, cisalhamento e momento.

Reações nos apoios

- Determine as reações nos apoios e decomponha as forças que agem na viga em componentes perpendiculares e paralelas ao eixo da viga.

Diagrama de força cortante

- Defina os eixos V e x e construa um gráfico com os valores conhecidos da força cortante nas duas *extremidades* da viga.
- Visto que $dV/dx = -w$, a *inclinação* do *diagrama de força cortante* em qualquer ponto é igual à intensidade (negativa) do *carregamento distribuído* no ponto. Observe que w é positiva quando age para baixo.
- Se tivermos de determinar um valor numérico do cisalhamento em um ponto, podemos utilizar o método das seções e a equação de equilíbrio de força, ou $\Delta V = -\int w(x)\,dx$, que indica que a *mudança no cisalhamento* entre dois pontos quaisquer é igual à *área (negativa) sob o diagrama de carga* entre os dois pontos.
- Visto que $w(x)$ deve ser *integrada* para obter ΔV, então, se $w(x)$ for uma curva de grau n, $V(x)$ será uma curva de grau $n + 1$; por exemplo, se $w(x)$ for uniforme, $V(x)$ será linear.

Diagrama de momento

- Defina os eixos M e x e construa um gráfico com os valores conhecidos do momento nas *extremidades* da viga.
- Visto que $dM/dx = V$, a *inclinação* do diagrama de momento em qualquer ponto é igual ao *cisalhamento* no ponto.
- No ponto onde o cisalhamento é nulo, $dM/dx = 0$ e, portanto, esse seria um ponto de momento máximo ou mínimo.
- Se tivermos de determinar um valor numérico do momento no ponto, podemos usar o método das seções e a equação de equilíbrio de momento, ou usar $\Delta M = \int V(x)\,dx$, que indica que a *mudança no momento* entre dois pontos quaisquer é igual à *área sob o diagrama de força cortante* entre os dois pontos.
- Visto que $V(x)$ deve ser *integrada* para obter ΔM, então, se $V(x)$ for uma curva de grau n, $M(x)$ será uma curva de grau $n + 1$; por exemplo, se $V(x)$ for linear, $M(x)$ será parabólica.

EXEMPLO 6.7

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga na Figura 6.13a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações são mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.13b).

Diagrama de força cortante. De acordo com a convenção de sinal (Figura 6.3), em $x = 0$, $V = +P$ e em $x = L$, $V = +P$. Esses pontos estão representados na Figura 6.13b. Visto que $w = 0$ (Figura 6.13a), a *inclinação* do diagrama de força cortante será zero ($dV/dx = -w = 0$) em todos os pontos e, portanto, uma linha reta horizontal liga os pontos das extremidades.

Diagrama de momento. Em $x = 0$, $M = -PL$ e em $x = L$, $M = 0$ (Figura 6.13d). O diagrama de força cortante indica que o cisalhamento é positivo constante e, portanto, a *inclinação* do diagrama de momento será *positiva constante*, $dM/dx = V = +P$ em todos os pontos. Por consequência, os pontos nas extremidades são ligados por uma linha reta com inclinação positiva, como mostra a Figura 6.13d.

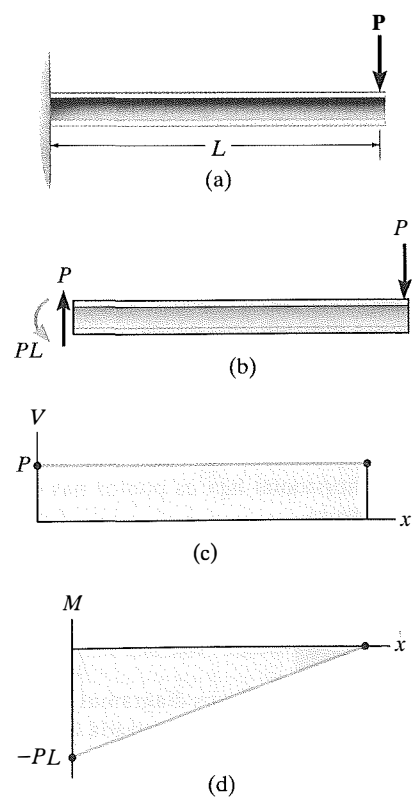


Figura 6.13

EXEMPLO 6.8

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.14a.

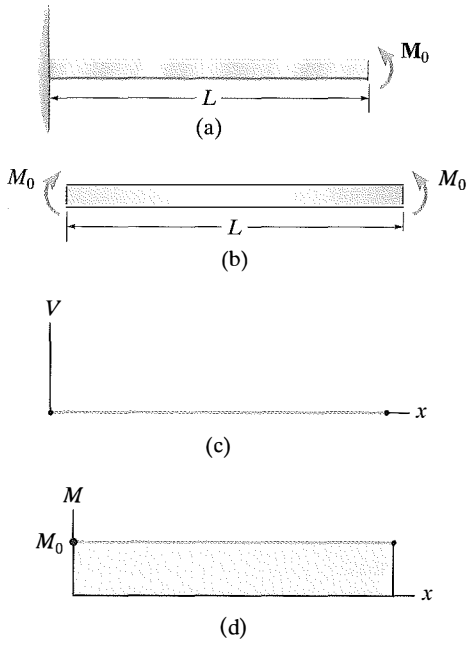


Figura 6.14

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. A reação no apoio fixo é mostrada no diagrama de corpo livre (Figura 6.14b).

Diagrama de força cortante. O cisalhamento ou a força cortante $V = 0$ em cada extremidade é representado em primeiro lugar (Figura 6.14c). Visto que não existe nenhuma carga distribuída na viga, o diagrama de força cortante terá *inclinação* nula em todos os pontos. Portanto, uma linha reta horizontal liga os pontos nas extremidades, o que indica que o cisalhamento é nulo em toda a viga.

Diagrama de momento. O momento M_0 nos pontos das extremidades da viga é representado em primeiro lugar (Figura 6.14d). Pelo diagrama de força cortante, a *inclinação* do diagrama de momento será nula, visto que $V = 0$. Portanto, uma linha reta horizontal liga os pontos nas extremidades como mostra a figura.

EXEMPLO 6.9

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.15a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações no apoio fixo são mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.15b).

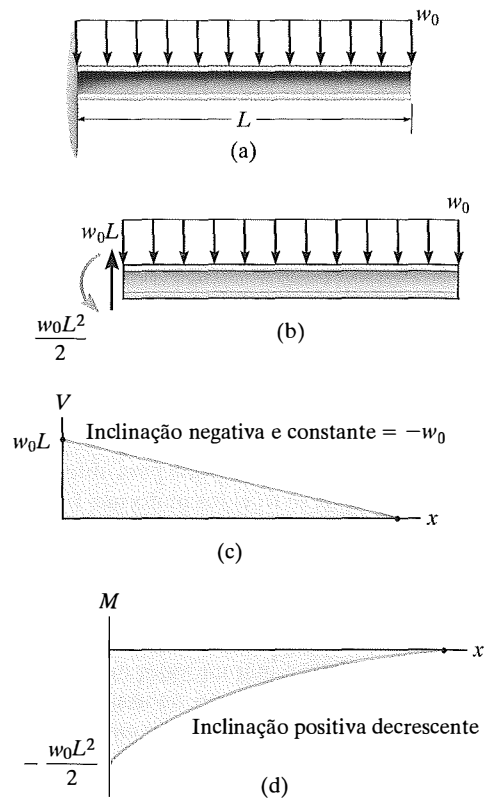


Figura 6.15

Diagrama de força cortante. O cisalhamento em cada ponto da extremidade é representado em primeiro lugar (Figura 6.15c). A carga distribuída na viga é positiva constante e, portanto, a *inclinação* do diagrama de força cortante será constante e negativa ($dV/dx = -w_0$). Isso significa uma linha reta com inclinação negativa que liga os pontos nas extremidades.

Diagrama de momento. O momento em cada ponto da extremidade é representado em primeiro lugar (Figura 6.15d). O diagrama de força cortante indica que V é positiva e decresce de w_0L a zero e, portanto, o diagrama de momento deve começar com uma inclinação positiva de w_0L e decrescer até zero. Especificamente, visto que o diagrama de força cortante é uma reta inclinada, o diagrama de momento será *parabólico*, com inclinação decrescente, como mostra a figura.

EXEMPLO 6.10

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.16a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações no apoio fixo foram calculadas e são mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.16b).

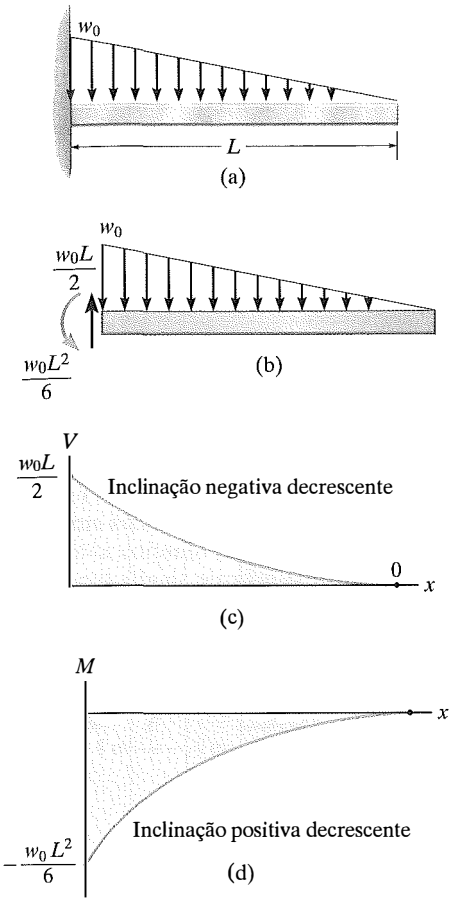


Figura 6.16

Diagrama de força cortante. O cisalhamento em cada ponto da extremidade é representado em primeiro lugar (Figura 6.16c). A carga distribuída na viga é positiva, porém decrescente. Portanto, a *inclinação* do diagrama de força cortante será *negativa decrescente*. Em $x = 0$, a inclinação começa em $-w_0$ e vai até zero em $x = L$. Visto que o carregamento é *linear*, o diagrama de força cortante é uma *parábola* com inclinação negativa decrescente.

Diagrama de momento. O momento em cada extremidade é representado em primeiro lugar (Figura 6.16d). Pelo diagrama de força cortante, V é positiva, mas decresce de $w_0L/2$ em $x = 0$ até zero em $x = L$. A curva do diagrama de momento que apresenta esse comportamento de inclinação é uma função *cúbica* de x, como mostra a figura.

EXEMPLO 6.11

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga na Figura 6.17a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações foram determinadas e são mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 6.17b).

Diagrama de força cortante. Os pontos nas extremidades $x = 0$, $V = +1,5$ e $x = 4,5$, $V = -3$, são representados em primeiro lugar (Figura 6.17c). Pelo comportamento da carga distribuída, a *inclinação* do diagrama de força cortante variará de zero em $x = 0$ a -2 em $x = 4,5$. O resultado é que

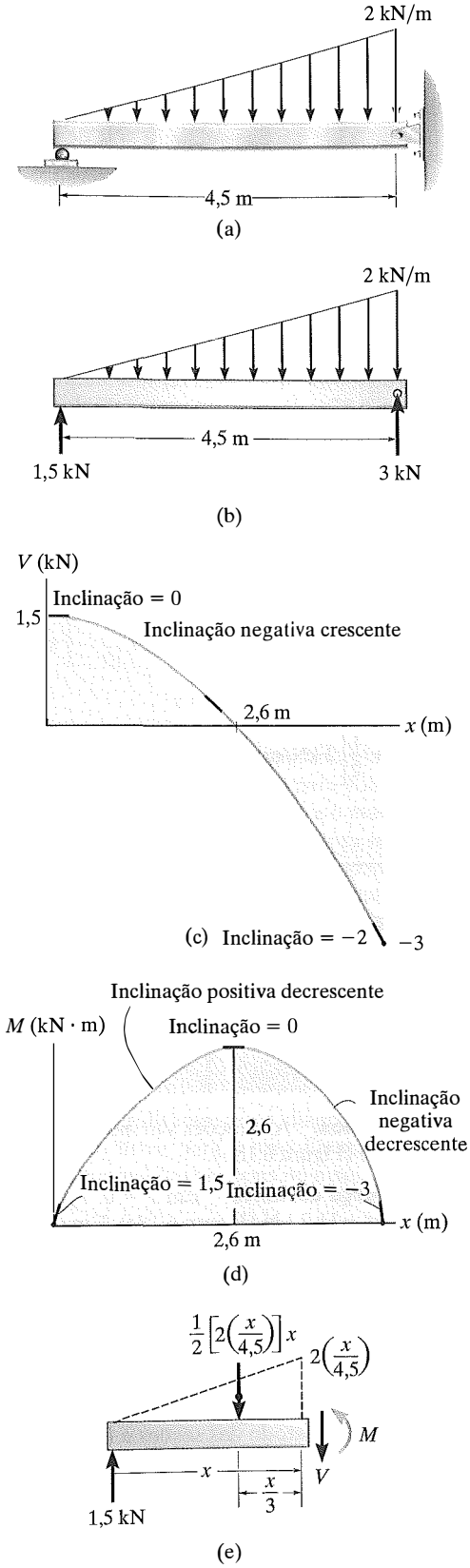


Figura 6.17

o diagrama de força cortante é uma parábola com a forma mostrada na figura.

O ponto de cisalhamento nulo pode ser determinado pelo método das seções para um segmento da viga de comprimento x (Figura 6.17e). Exige-se que $V = 0$, de modo que

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$1{,}5\ \text{kN} - \frac{1}{2}\left[2\ \text{kN/m}\left(\frac{x}{4{,}5\ \text{m}}\right)\right]x = 0; \qquad x = 2{,}6\ \text{m}$$

Diagrama de momento. Os pontos nas extremidades $x = 0, M = 0$ e $x = 4{,}5, M = 0$, são representados em primeiro lugar (Figura 6.17d). Pelo comportamento do diagrama de força cortante, a inclinação do diagrama de momento começará em +1,5 e, então, torna-se *positiva decrescente* até chegar a zero em 2,6 m. Em seguida, torna-se *negativa crescente* e alcança -3 em $x = 4{,}5$ m. Aqui, o diagrama de momento é uma função cúbica de x. Por quê?

OBSERVAÇÃO: O momento máximo ocorre em $x = 2{,}6$, visto que $dM/dx = V = 0$ nesse ponto. Pelo diagrama de corpo livre na Figura 6.17e, temos

$$\circlearrowleft +\Sigma M = 0;$$

$$-1{,}5\ \text{kN}(2{,}6\ \text{m}) + \frac{1}{2}\left[2\ \text{kN/m}\left(\frac{2{,}6\ \text{m}}{4{,}5\ \text{m}}\right)\right](2{,}6\ \text{m})\left(\frac{2{,}6\ \text{m}}{3}\right) + M = 0$$

$$M = 2{,}6\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

EXEMPLO 6.12

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na Figura 6.18a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. As reações são indicadas no diagrama de corpo livre (Figura 6.18b).

Diagrama de força cortante. Em $x = 0, V_A = +4{,}8$ kN e em $x = 10, V_D = -11{,}2$ kN (Figura 6.18c). Em pontos intermediários entre cada força, a *inclinação* do diagrama de força cortante será zero. Por quê? Por consequência, o cisalhamento conserva seu valor de +4,8 até o ponto B. Em B, o cisalhamento é *descontínuo*, visto que há uma *força concentrada* de 8 kN naquele lugar. O valor do cisalhamento imediatamente à direita de B pode ser determinado fazendo-se um corte na viga nesse ponto (Figura 6.18e), onde, para equilíbrio, $V = -3{,}2$ kN. Use o método das seções e mostre que o diagrama "salta" novamente em C, como mostra a figura e, em seguida, fecha no valor de $-11{,}2$ kN em D.

Devemos observar que, com base na Equação 6.5, $\Delta V = -F$, o diagrama de força cortante também pode ser construído "seguindo a carga" no diagrama de corpo livre. Começando em A, a força de 4,8 kN age para cima, portanto $V_A = +4{,}8$ kN. Não há nenhuma carga distribuída agindo entre A e B, assim, o cisalhamento permanece constante ($dV/dx = 0$). Em B, a força

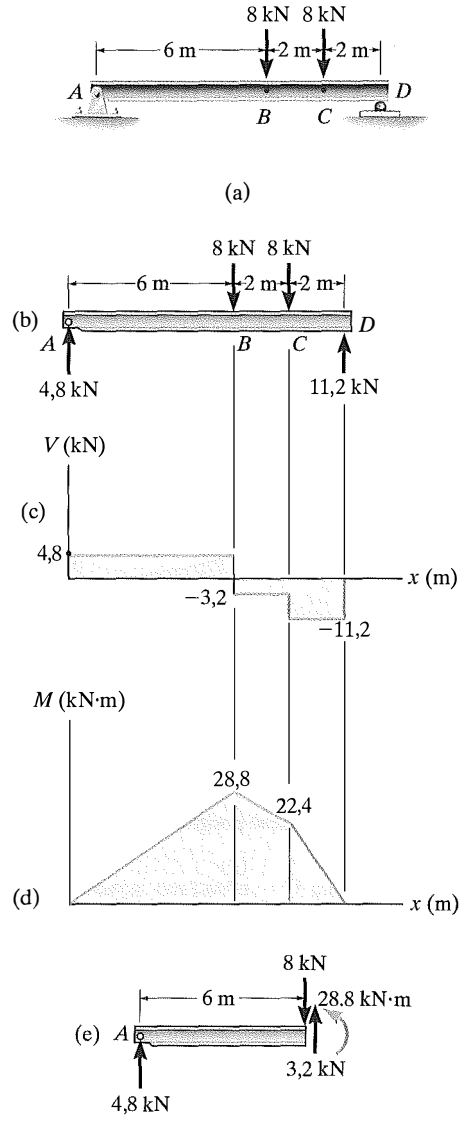


Figura 6.18

de 8 kN age para baixo, então o cisalhamento salta 8 kN para baixo, de +4,8 kN para $-3{,}2$ kN. Novamente, o cisalhamento é constante de B a C (nenhuma carga distribuída); então, em C, desce mais 8 kN, até $-11{,}2$ kN. Por fim, sem nenhuma carga distribuída entre C e D, termina em $-11{,}2$ kN.

Diagrama de momento. O momento em cada extremidade da viga é zero (Figura 6.18d). A *inclinação* do diagrama de momento de A a B é constante em +4,8. Por quê? O valor do momento em B pode ser determinado usando a estática (Figura 6.18c) ou pela determinação da área sob o diagrama de força cortante entre A e B, isto é, $\Delta M_{AB} = (4{,}8\ \text{kN})(6\ \text{m}) = 28{,}8\ \text{kN} \cdot \text{m}$. Visto que $M_A = 0$, então $M_B = M_A + \Delta M_{AB} = 0 + 28{,}8\ \text{kN} \cdot \text{m} = 28{,}8\ \text{kN} \cdot \text{m}$. Partindo do ponto B, a inclinação do diagrama de momento é $-3{,}2$ até alcançar o ponto C. Novamente, o valor do momento pode ser obtido pela estática ou pela determinação da área sob o diagrama de força cortante de B a C, isto é, $\Delta M_{BC} = (-3{,}2\ \text{kN})(2\ \text{m}) = -6{,}4\ \text{kN} \cdot \text{m}$, de modo que $M_C = 28{,}8\ \text{kN} \cdot \text{m} - 6{,}4\ \text{kN} \cdot \text{m} = 22{,}4\ \text{kN} \cdot \text{m}$. Continuando dessa maneira, verifique que o fechamento ocorre em D.

EXEMPLO 6.13

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga apoiada com uma extremidade em balanço mostrada na Figura 6.19a.

SOLUÇÃO

Reações nos apoios. O diagrama de corpo livre com as reações nos apoios calculadas é mostrado na Figura 6.19b.

Diagrama de força cortante. Como sempre, começamos pela representação das forças cortantes nas extremidades $V_A = +4{,}40$ kN, e $V_D = 0$ (Figura 6.19c). O diagrama de força cortante terá inclinação *nula* de A a B. Então, saltará para baixo 8 kN até $-3{,}60$ kN. Em seguida, a inclinação é *negativa crescente*. A força cortante em C pode ser determinada pela área sob o diagrama de carga, $V_C = V_B + \Delta V_{BC} = -3{,}60$ kN $- (1/2)(6\text{ m})(2\text{ kN/m}) = -9{,}60$ kN. Então, o diagrama salta 17,6 kN para cima até 8 kN. Por fim, de C a D, a inclinação do diagrama de força cortante será *constante, porém negativa*, até o cisalhamento atingir zero em D.

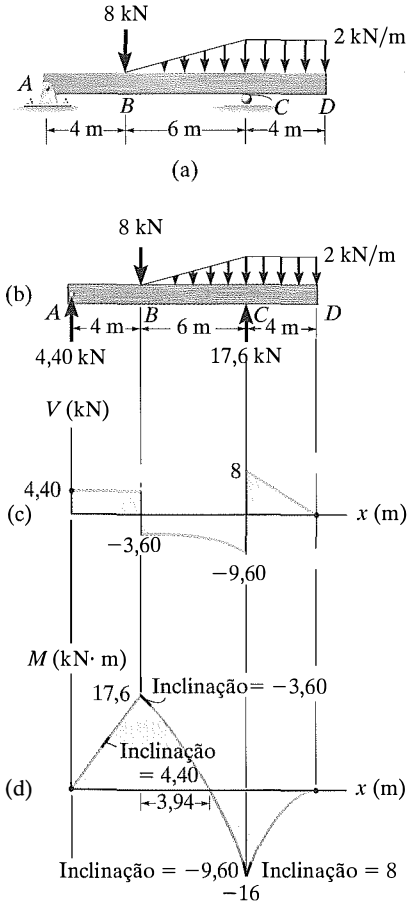


Figura 6.19

Diagrama de momento. Os momentos nas extremidades $M_A = 0$ e $M_D = 0$ são representados em primeiro lugar (Figura 6.19d). Estude o diagrama e observe como as inclinações e, portanto, as várias curvas, são definidas pelo diagrama de força cortante usando $dM/dx = V$. Verifique os valores numéricos para os picos pelo método das seções e pela estática ou pelo cálculo das áreas adequadas sob o diagrama de força cortante para determinar a mudança no momento entre dois pontos. Em particular, o ponto de momento nulo pode ser determinado definindo-se M em função de x, onde, por conveniência, x estende-se *do* ponto B e entra na região BC (Figura 6.19e). Por consequência,

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$-4{,}40\text{ kN}(4\text{ m} + x) + 8\text{ kN}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\text{ kN/m}}{6\text{ m}}\right)x(x)\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

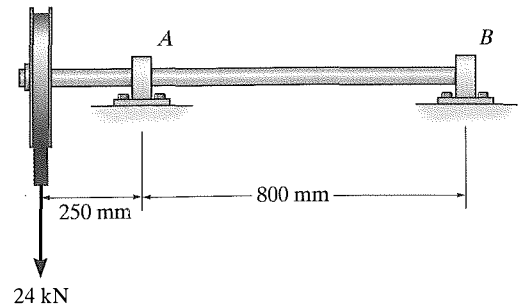
$$M = \left(-\frac{1}{18}x^3 - 3{,}60x + 17{,}6\right)\text{kN}\cdot\text{m} = 0$$

$$x = 3{,}94\text{ m}$$

OBSERVAÇÃO: Revendo esses diagramas, observamos que, em razão do processo de integração para a região AB, a carga é nula, a força cortante é constante e o momento é linear; para a região BC, a carga é linear, a força cortante é parabólica e o momento é cúbico; e, para a região CD, a carga é constante, a força cortante é linear e o momento é parabólico. Recomendamos que os exemplos 6.1 a 6.6 também sejam resolvidos por esse método.

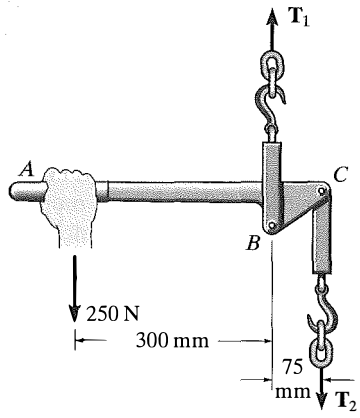
PROBLEMAS

6.1. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais no eixo.



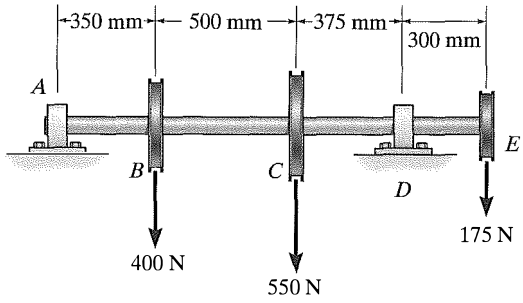
Problema 6.1

6.2. Um dispositivo é usado para suportar uma carga. Se a força aplicada ao cabo for 250 N, determine as tensões T_1 e T_2 em cada extremidade da corrente e, então, represente graficamente os diagramas de força cortante e momento para o braço ABC.



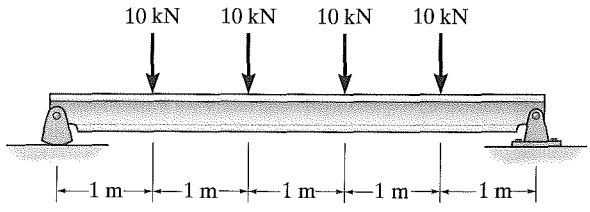
Problema 6.2

6.3. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo. Os mancais em A e D exercem somente reações verticais sobre o eixo. A carga é aplicada às polias em B, C e E.



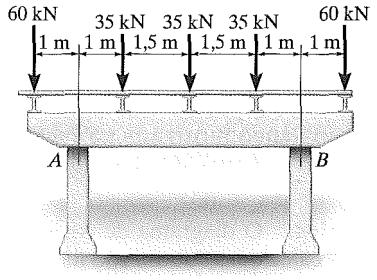
Problema 6.3

*__6.4.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



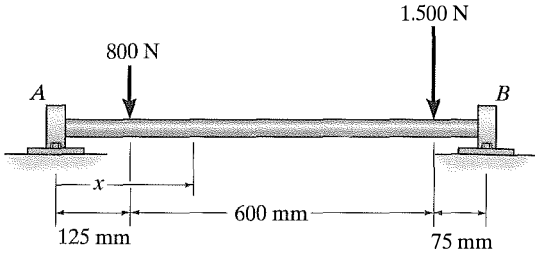
Problema 6.4

6.5. Um suporte de concreto armado é usado para apoiar as longarinas da plataforma de uma ponte. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento para o suporte quando submetido à carga das longarinas mostradas na figura. Considere que as colunas em A e B exercem somente reações verticais no suporte.



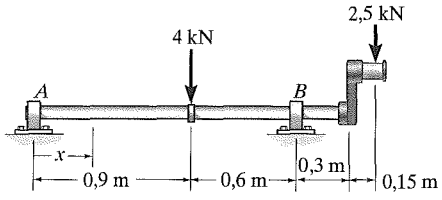
Problema 6.5

6.6. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo. Expresse também a força cortante e o momento no eixo em função de x dentro da região $125 \text{ mm} < x < 725 \text{ mm}$.



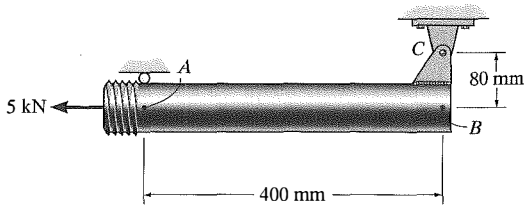
Problema 6.6

6.7. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo e determine a força cortante e o momento em todo o eixo em função de x. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo.



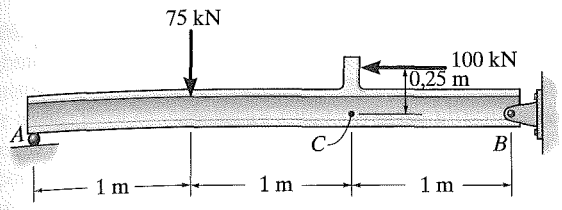
Problema 6.7

*__6.8.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para o tubo. A extremidade rosqueada está sujeita a uma força horizontal de 5 kN. *Dica:* As reações no pino C devem ser substituídas por cargas equivalentes no ponto B no eixo do tubo.



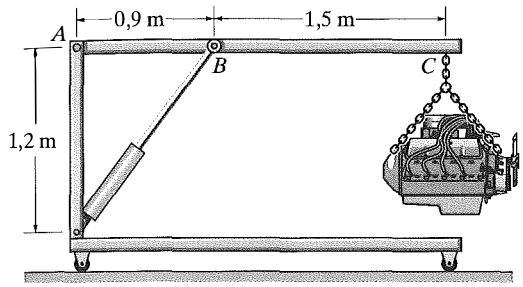
Problema 6.8

6.9. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. *Dica:* A carga de 100 kN dever ser substituída por cargas equivalentes no ponto C no eixo da viga.



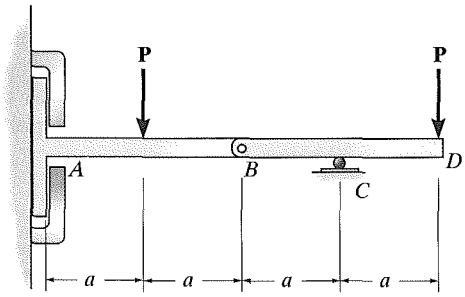
Problema 6.9

6.10. O guindaste de motores é usado para suportar o motor que pesa 6 kN. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor da lança ABC quando ela está na posição horizontal mostrada.



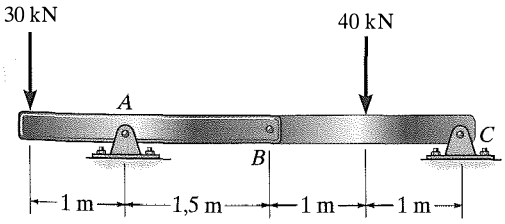
Problema 6.10

6.11. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga composta. Ela é suportada por uma chapa lisa em A, que desliza no interior de uma ranhura e, por isso, não pode suportar uma força vertical, embora possa suportar momento e carga axial.



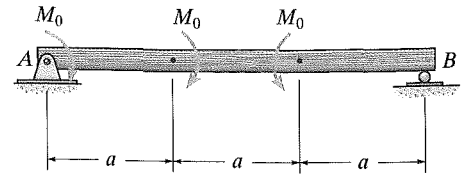
Problema 6.11

*__6.12.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga composta interligada por um pino em B.



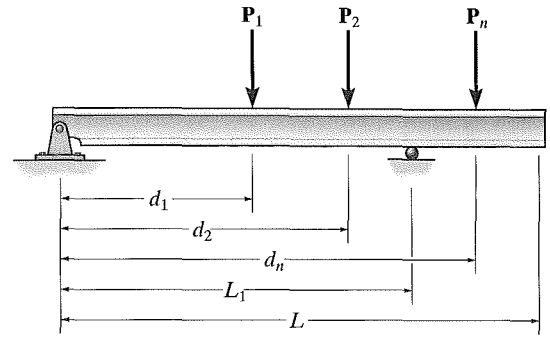
Problema 6.12

6.13. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



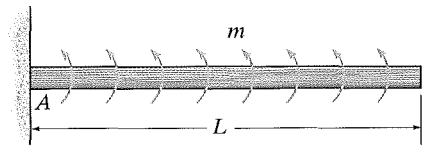
Problema 6.13

6.14. Considere o problema geral de uma viga simplesmente apoiada submetida a n cargas concentradas. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar a força cortante interna e o momento em qualquer localização específica x ao longo da viga e construa os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. Mostre uma aplicação do código usando os valores $P_1 = 2{,}5$ kN, $d_1 = 1{,}5$ m, $P_2 = 4$ kN, $d_2 = 4{,}5$ m, $L_1 = 3$ m, $L = 4{,}5$ m.



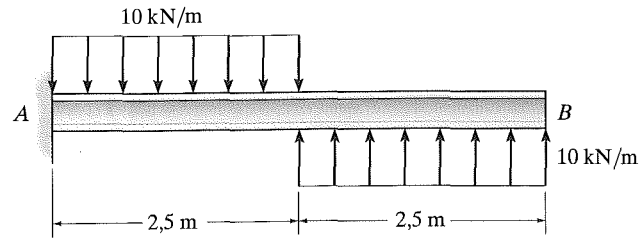
Problema 6.14

6.15. A viga está sujeita ao momento uniformemente distribuído m (momento/comprimento). Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



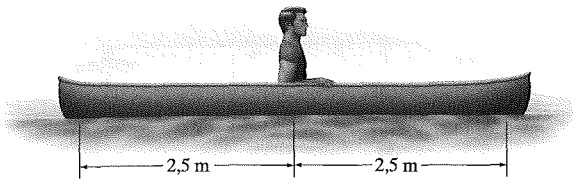
Problema 6.15

*__6.16.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



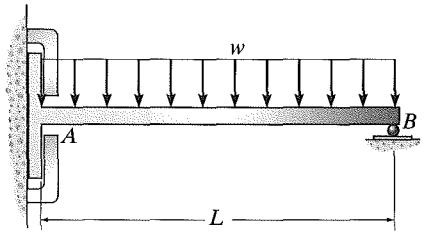
Problema 6.16

6.17. Um homem de massa 75 kg está sentado no meio de um barco com largura uniforme e peso de 50 N/m. Determine o momento fletor máximo exercido sobre o barco. Considere que a água exerce uma carga distribuída uniforme para cima na parte inferior do barco.



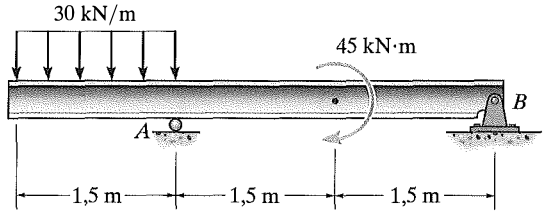
Problema 6.17

6.18. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. Ela é suportada por uma chapa lisa em A que desliza no interior de uma ranhura e, por isso, não pode suportar uma força vertical, embora possa suportar momento e carga axial.



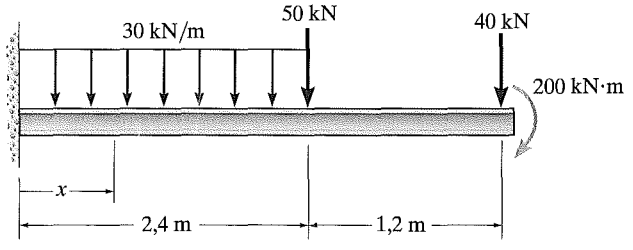
Problema 6.18

6.19. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



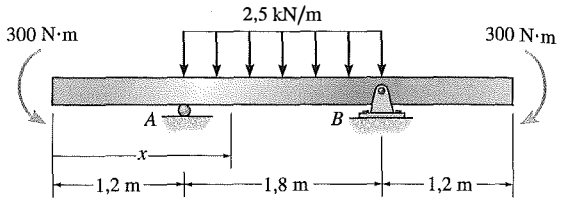
Problema 6.19

*__6.20.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e determine a força cortante e o momento em toda a viga em função de x.



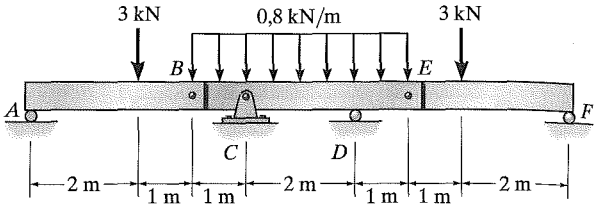
Problema 6.20

6.21. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e determine a força cortante e o momento na viga em função de x, onde $1{,}2\text{ m} < x < 3\text{ m}$.



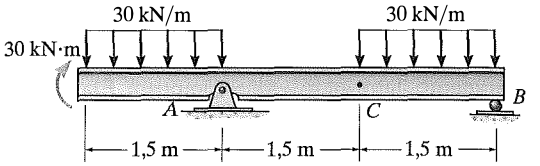
Problema 6.21

6.22. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga composta. Os três segmentos estão interligados por pinos em B e E.



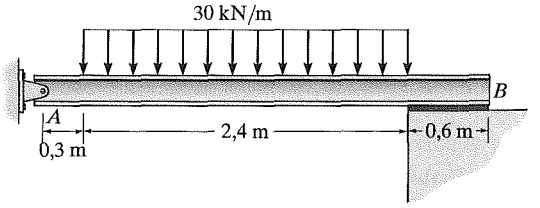
Problema 6.22

6.23. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



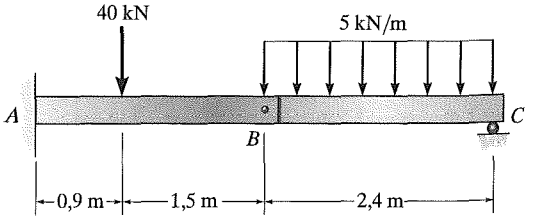
Problema 6.23

*__6.24.__ A viga está parafusada ou presa por pino em A e repousa sobre um coxim em B que exerce uma carga uniformemente distribuída na viga ao longo de seu 0,6 m de comprimento. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga se ela suportar uma carga uniforme de 30 kN/m.

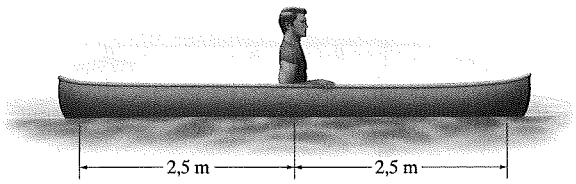


Problema 6.24

6.25. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. Os dois segmentos estão interligados em B.

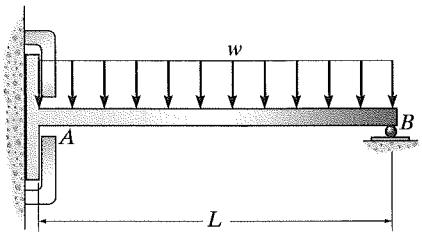


Problema 6.25



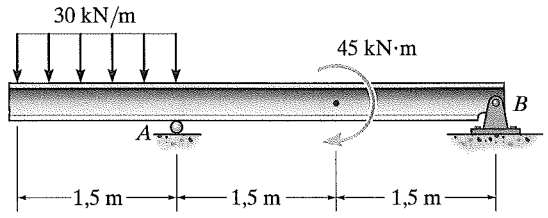
Problema 6.17

6.18. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. Ela é suportada por uma chapa lisa em A que desliza no interior de uma ranhura e, por isso, não pode suportar uma força vertical, embora possa suportar momento e carga axial.



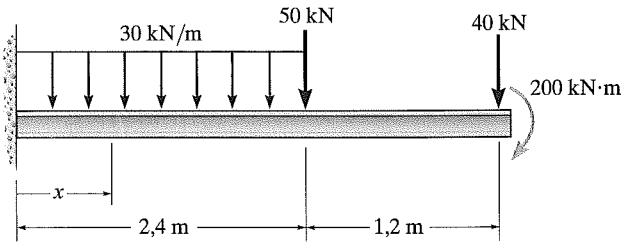
Problema 6.18

6.19. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



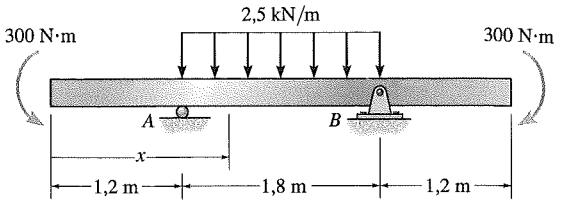
Problema 6.19

*__6.20.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e determine a força cortante e o momento em toda a viga em função de x.



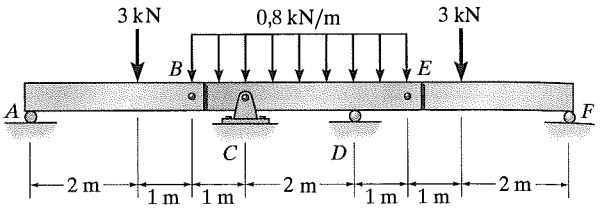
Problema 6.20

6.21. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e determine a força cortante e o momento na viga em função de x, onde $1{,}2\text{ m} < x < 3\text{ m}$.



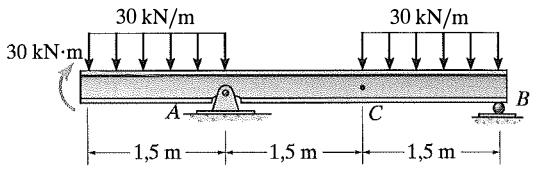
Problema 6.21

6.22. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga composta. Os três segmentos estão interligados por pinos em B e E.



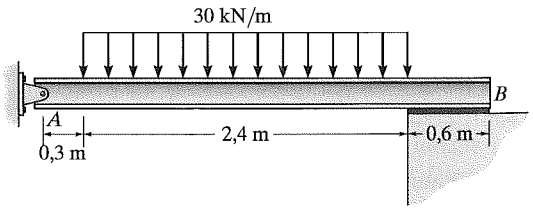
Problema 6.22

6.23. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



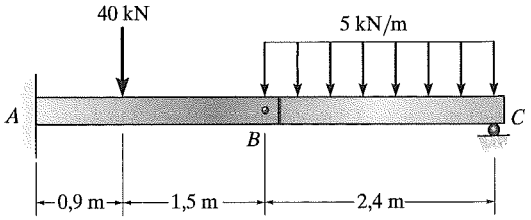
Problema 6.23

*__6.24.__ A viga está parafusada ou presa por pino em A e repousa sobre um coxim em B que exerce uma carga uniformemente distribuída na viga ao longo de seu 0,6 m de comprimento. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga se ela suportar uma carga uniforme de 30 kN/m.



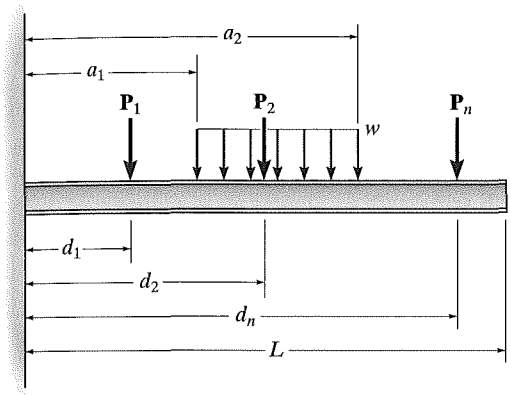
Problema 6.24

6.25. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. Os dois segmentos estão interligados em B.



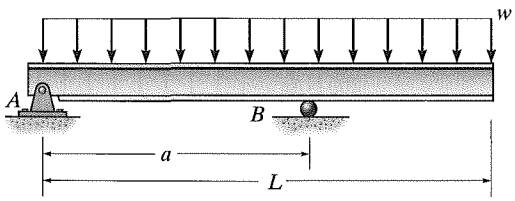
Problema 6.25

6.26. Considere o problema geral de uma viga em balanço submetida a n cargas concentradas e a uma carga distribuída constante w. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar a força cortante interna e o momento em qualquer localização específica x ao longo da viga e construa os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. Mostre uma aplicação do código usando os valores $P_1 = 4$ kN, $d_1 = 2$ m, $w = 800$ N/m, $a_1 = 2$ m, $a_2 = 4$ m, $L = 4$ m.



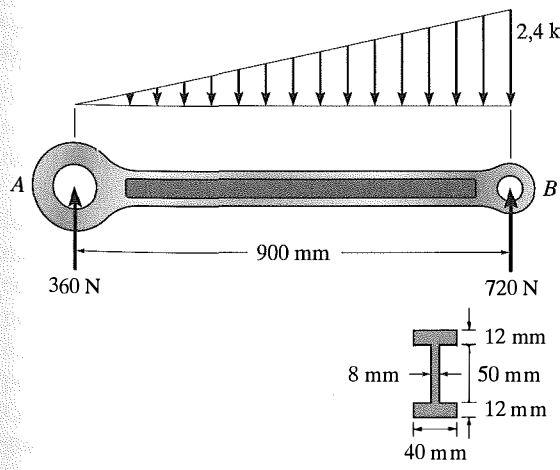
Problema 6.26

6.27. Determine a distância de colocação a do suporte de rolete de modo que o maior valor absoluto do momento seja um mínimo. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para essa condição.



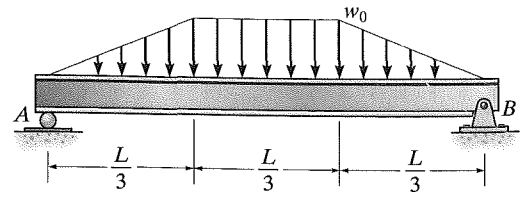
Problema 6.27

*__6.28.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a barra. Somente reações verticais ocorrem em suas extremidades A e B.



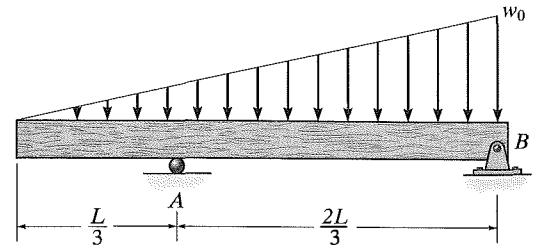
Problema 6.28

6.29. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



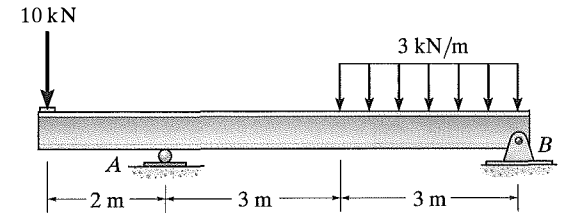
Problema 6.29

6.30. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



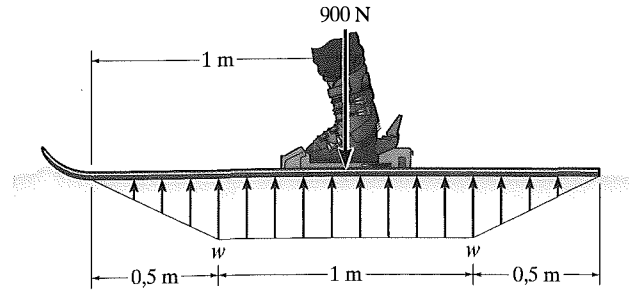
Problema 6.30

6.31. A viga T está sujeita ao carregamento mostrado. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor.



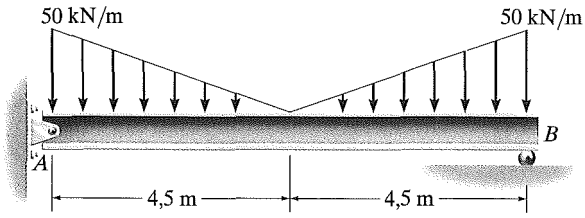
Problema 6.31

*__6.32.__ O esqui suporta o peso de 900 N (≈ 90 kg) do homem. Se a carga da neve em sua superfície inferior for trapezoidal, como mostra a figura, determine a intensidade w e, então, represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para o esqui.



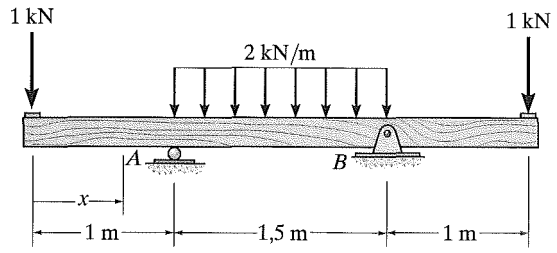
Problema 6.32

6.33. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



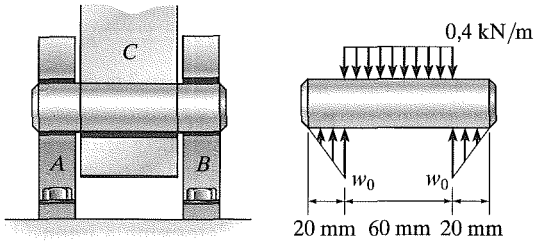
Problema 6.33

6.34. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga de madeira e determine a força cortante e o momento fletor em todo o comprimento da viga em função de x.



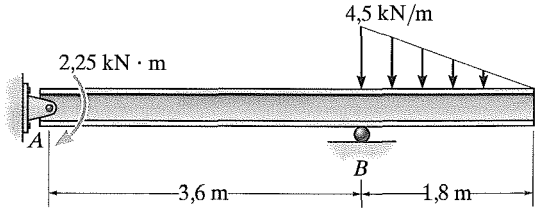
Problema 6.34

6.35. O pino liso está apoiado em duas chapas A e B e sujeito a uma carga de compressão de 0,4 kN/m provocada pela barra C. Determine a intensidade da carga distribuída w_0 das chapas agindo sobre o pino e represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para o pino.



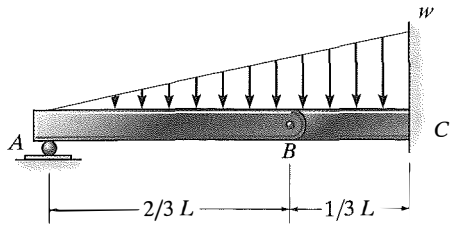
Problema 6.35

*__6.36.__ Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



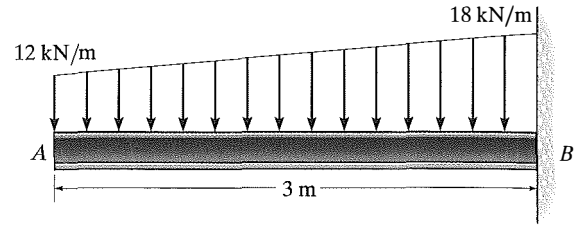
Problema 6.36

6.37. A viga composta consiste em dois segmentos interligados por um pino em B. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor se ela suportar a carga distribuída mostrada na figura.



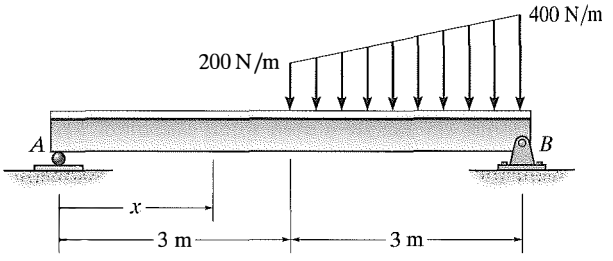
Problema 6.37

6.38. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



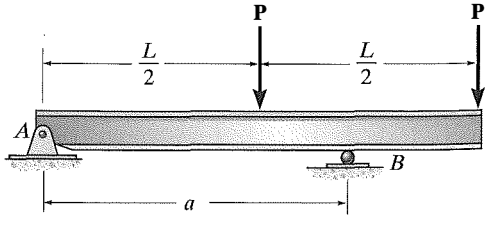
Problema 6.38

6.39. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e determine a força cortante e o momento em função de x.



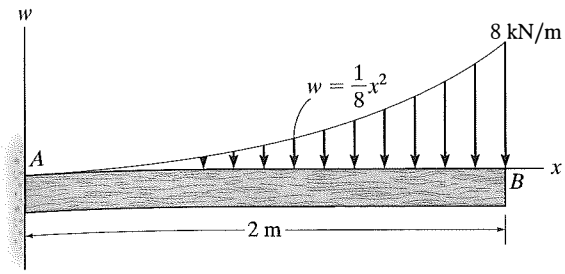
Problema 6.39

*__6.40.__ Determine a distância de colocação a do suporte de rolete de modo que o maior valor absoluto do momento seja um mínimo. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para essa condição.



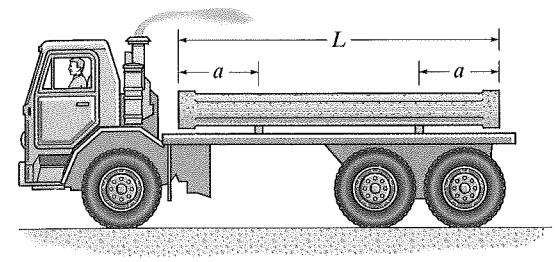
Problema 6.40

6.41. Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



Problema 6.41

6.42. O caminhão será usado para transportar a coluna de concreto. Se ela tiver um peso uniforme de w (força/comprimento), determine a colocação dos apoios a distâncias a iguais em relação às extremidades, de modo que o momento fletor absoluto máximo na coluna seja o menor possível. Além disso, represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a coluna.



Problema 6.42

6.3 Deformação por flexão de um elemento reto

Nesta seção, discutiremos as deformações que ocorrem quando uma viga prismática reta, feita de um material homogêneo, é submetida à flexão. A discussão ficará limitada a vigas com área de seção transversal simétrica em relação a um eixo e a um momento fletor aplicado em torno de uma linha central perpendicular a esse eixo de simetria, como mostrado na Figura 6.20. O comportamento de elementos com seções transversais assimétricas ou feitos de vários materiais diferentes é baseado em observações semelhantes e será discutido separadamente em seções posteriores deste capítulo.

Se usarmos um material de alta capacidade de deformação, como a borracha, poderemos ilustrar fisicamente o que acontece quando um elemento prismático reto é submetido a um momento fletor. Considere, por exemplo, a barra reta (não deformada) na Figura 6.21a, que tem seção transversal quadrada e marcada por uma grade de linhas longitudinais e transversais. Quando um momento fletor é aplicado, as linhas da grade tendem a se distorcer segundo o padrão mostrado na Figura 6.21b. Aqui, podemos ver que as linhas longitudinais se tornam *curvas* e as linhas transversais verticais *continuam retas*, porém sofrem *rotação*.

O comportamento de qualquer barra deformável sujeita a um momento fletor provoca o alongamento do material na parte inferior da barra e a compressão do material na porção superior da barra. Por consequência, entre essas duas regiões deve existir uma superfície, denominada *superfície neutra*, na qual não ocorrerá mudança nos comprimentos das fibras longitudinais do material (Figura 6.20).

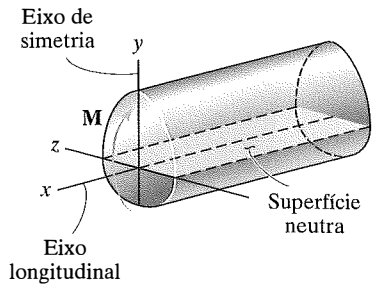
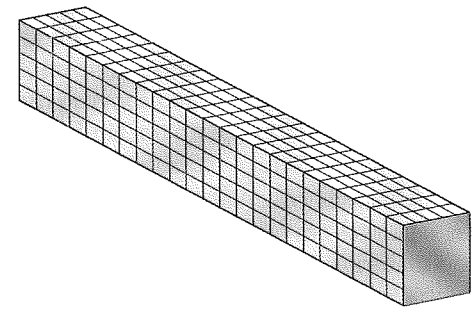
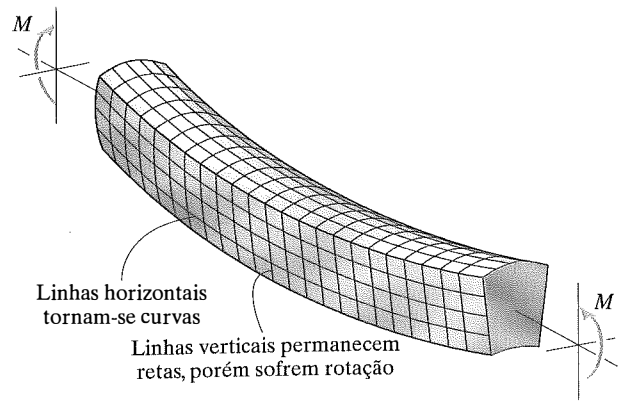


Figura 6.20



Antes da deformação

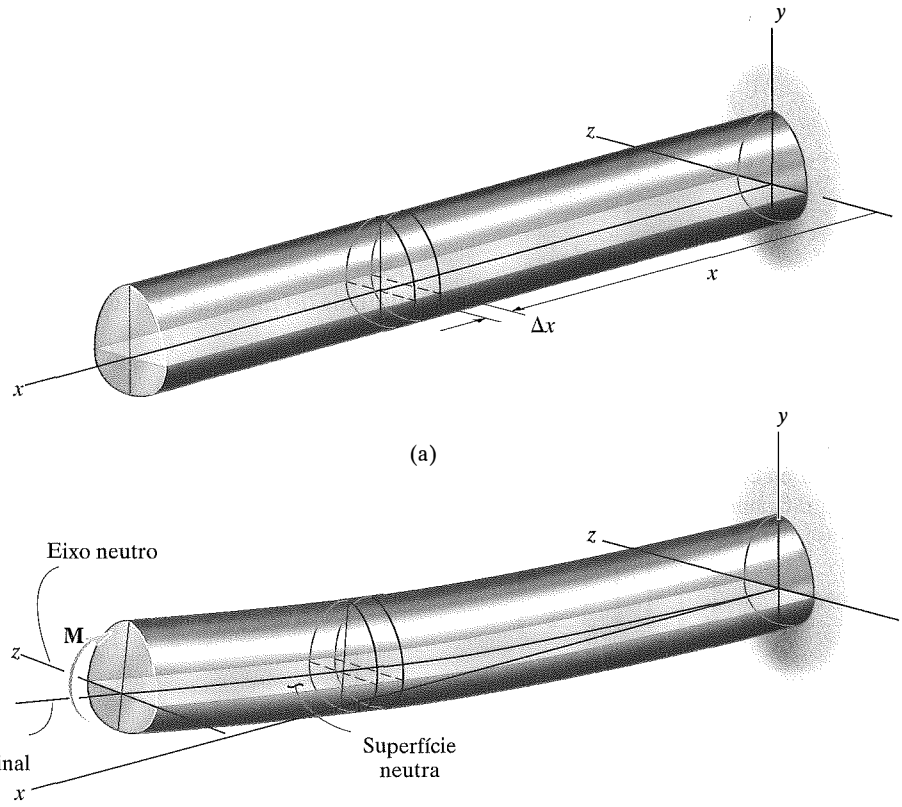
(a)



Após a deformação

(b)

Figura 6.21



(b)

Figura 6.22

Com base nessas observações, adotaremos as três premissas seguintes em relação ao modo como a tensão deforma o material. A primeira é que o *eixo longitudinal x*, que se encontra no interior da superfície neutra (Figura 6.22a), não sofre qualquer *mudança no comprimento*. Mais exatamente, o momento tenderá a deformar a viga de modo que essa linha *torna-se uma curva* localizada no plano de simetria *x–y* (Figura 6.22b). A segunda é que todas as ***seções transversais*** da viga ***permanecem planas*** e perpendiculares ao eixo longitudinal durante a deformação. A terceira é que qualquer *deformação* da *seção transversal* dentro de seu próprio plano, como observamos na Figura 6.21b, será *desprezada*. Em particular, o eixo *z*, que se encontra no plano da seção transversal e em torno do qual a seção transversal gira, é denominado *eixo neutro* (Figura 6.22b). Sua localização será determinada na próxima seção.

Para mostrar como essa distorção deformará o material, isolaremos um segmento da viga localizado à distância x ao longo do comprimento da viga com espessura Δx antes da deformação (Figura 6.22a). A Figura 6.23 mostra uma vista lateral desse elemento tomado da viga antes e após a deformação. Observe que qualquer segmento de reta Δx, localizado na superfície neutra, não muda de comprimento, ao passo que qualquer segmento de reta Δs, localizado à distância arbitrária y acima da superfície neutra, se contrairá e se tornará $\Delta s'$ após a deformação. Por definição, a deformação normal ao longo de Δs é determinada pela Equação 2.2, a saber,

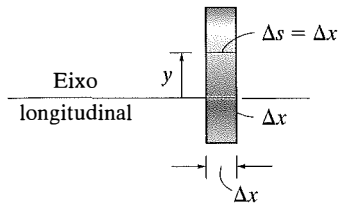
$$\epsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

Agora, representaremos essa deformação em termos da localização y do segmento e do raio de curvatura ρ do eixo longitudinal do elemento. Antes da deformação, $\Delta s = \Delta x$ (Figura 6.23a). Após a deformação, Δx tem raio de curvatura ρ com centro de curvatura no ponto O' (Figura 6.23b). Visto que $\Delta\theta$ define o ângulo entre os lados da seção transversal do elemento, $\Delta x = \Delta s = \rho\Delta\theta$. Da mesma maneira, o comprimento deformado de Δs torna-se $\Delta s' = (\rho - y)\Delta\theta$. Substituindo na equação acima, obtemos

$$\epsilon = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

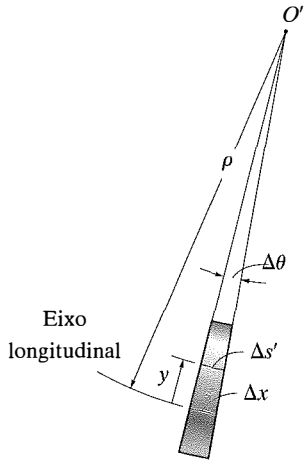
ou

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} \tag{6.7}$$



Elemento antes da deformação

(a)



Elemento após a deformação

(b)

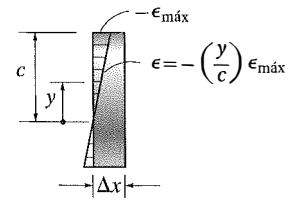
Figura 6.23

Esse importante resultado indica que a deformação normal longitudinal de qualquer elemento no interior de uma viga depende de sua localização y na seção transversal e do raio de curvatura do eixo longitudinal da viga no ponto. Em outras palavras, para qualquer seção transversal específica, a ***deformação normal longitudinal variará linearmente*** com y em relação ao eixo neutro. Ocorrerá uma contração $(-\epsilon)$ nas fibras localizadas acima do eixo neutro $(+y)$, ao passo que ocorrerá um alongamento $(+\epsilon)$ nas fibras localizadas abaixo do eixo $(-y)$. Essa variação da deformação na seção transversal é mostrada na Figura 6.24. Aqui, a deformação máxima ocorre na fibra mais externa, localizada a distância c do eixo neutro. Usando a Equação 6.7 e visto que $\epsilon_{máx} = c/\rho$, então, por divisão,

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{máx}} = \frac{-y/\rho}{c/\rho}$$

De modo que

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\epsilon_{máx} \tag{6.8}$$



Distribuição da deformação normal

Figura 6.24

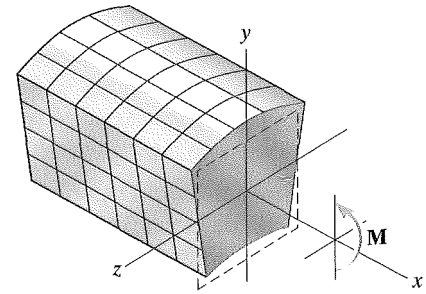


Figura 6.25

Essa deformação normal depende somente das premissas adotadas em relação à *deformação*. Contanto que somente um momento seja aplicado à viga, é razoável adotar uma premissa adicional, ou seja, que esse momento provoca uma *tensão normal somente* na direção longitudinal, ou direção x. Todas as outras componentes de tensão normal e tensão de cisalhamento são nulas, visto que a superfície da viga está livre de qualquer outra carga. É esse estado de tensão uniaxial que faz o material ter a componente da deformação normal longitudinal ϵ_x, $(\sigma_x = E\epsilon_x)$, definida pela Equação 6.8. Além do mais, pelo coeficiente de Poisson, *também* devem existir componentes de deformação associadas $\epsilon_y = -\nu\epsilon_x$ e $\epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, que deformam o plano da área da seção transversal, embora, aqui, tenhamos desprezado essas deformações. Todavia, essas deformações farão com que as *dimensões* da *seção transversal* fiquem menores abaixo do eixo neutro e maiores acima do eixo neutro. Por exemplo, se a viga tiver seção transversal quadrada, ela se deformará na verdade como mostra a Figura 6.25.

6.4 A fórmula da flexão

Nesta seção, desenvolveremos uma equação que relaciona a distribuição de tensão longitudinal em uma viga e o momento fletor interno resultante que age na seção transversal da viga. Para isto, partiremos da premissa de que o material se comporta de uma maneira linear elástica, de modo que a lei de Hooke se aplica, isto é, $\sigma = E\epsilon$. Então, uma ***variação linear da deformação normal*** (Figura 6.26a) deve ser a consequência de uma

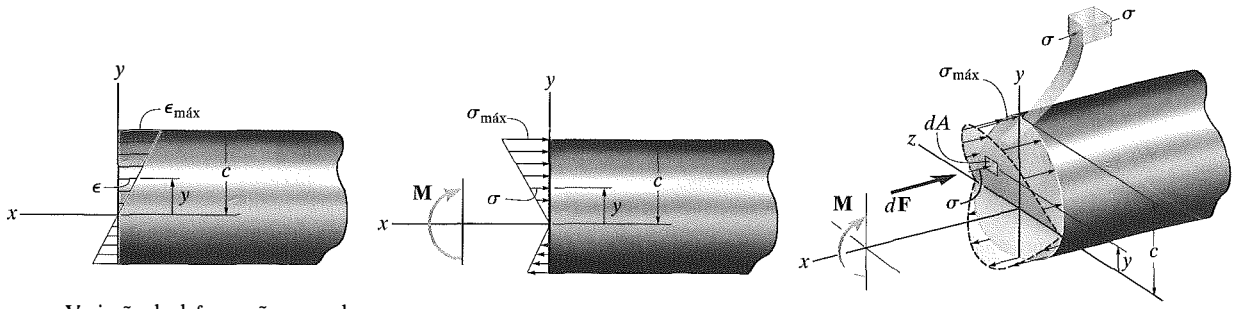


Figura 6.26

variação linear da tensão normal (Figura 6.26b). Logo, assim como a variação da deformação normal, σ variará de zero no eixo neutro do elemento até um valor máximo, $\sigma_{máx}$, à distância c mais afastada do eixo neutro. Pela proporcionalidade de triângulos (Figura 6.26b) ou pela lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, e, pela Equação 6.8, podemos escrever

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx} \tag{6.9}$$

Essa equação representa a distribuição de tensão na área da seção transversal. Aqui, a convenção de sinal definida é significativa. Para **M** positivo, que age na direção $+z$, valores positivos de y dão valores negativos para σ, isto é, uma tensão de compressão, visto que age na direção x negativa. De maneira semelhante, valores negativos de y darão valores positivos ou de tração para σ. Se um elemento de volume de material for selecionado em um ponto específico na seção transversal, somente essas tensões normais de tração ou de compressão agirão sobre ele. Por exemplo, o elemento localizado em $+y$ é mostrado na Figura 6.26c.

Podemos localizar a posição do eixo neutro na seção transversal satisfazendo a condição de que a *força resultante* produzida pela distribuição de tensão na área da seção transversal deve ser nula. Observando que a força $dF = \sigma dA$ age sobre o elemento arbitrário dA na Figura 6.26c, exige-se

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad 0 = \int_A dF = \int_A \sigma\, dA$$

$$= \int_A -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{máx}\, dA$$

$$= \frac{-\sigma_{máx}}{c}\int_A y\, dA$$

Visto que $\sigma_{máx}/c$ não é igual a zero, então

$$\int_A y\, dA = 0 \tag{6.10}$$

Em outras palavras, o momento de primeira ordem da área da seção transversal do elemento em torno do eixo neutro deve ser nulo. Essa condição só pode ser satisfeita se o *eixo neutro* também for o *eixo do centroide horizontal* para a seção transversal analisada.* Por consequência, uma vez determinado o centroide para a área da seção transversal do elemento, a localização do eixo é conhecida.

Podemos determinar a tensão na viga pelo fato de que o momento interno resultante M deve ser igual ao momento produzido pela distribuição de tensão em torno do eixo neutro. O momento de $d\mathbf{F}$ na Figura 6.26c em torno do eixo neutro é $dM = y\, dF$. Esse momento é *positivo*, visto que, pela regra da mão direita, o polegar está direcionado ao longo do *eixo z* positivo quando os dedos são curvados no sentido da rotação causada por $d\mathbf{M}$. Uma vez que $dF = \sigma dA$, pela Equação 6.9, temos, para toda a seção transversal,

$$(M_R)_z = \Sigma M_z;$$

$$M = \int_A y\, dF = \int_A y(\sigma\, dA) = \int_A y\left(\frac{y}{c}\sigma_{máx}\right) dA$$

ou

$$M = \frac{\sigma_{máx}}{c}\int_A y^2\, dA \tag{6.11}$$

* Lembre-se de que a localização $\bar{y}$ para o centroide da área da seção transversal é definida pela equação $\bar{y} = \int y\, dA / \int dA$. Se $\int y\, dA = 0$, então, $\bar{y} = 0$ e, portanto, o centroide encontra-se no eixo de referência (neutro). Veja o Apêndice A.

Nessa expressão, a integral representa o *momento de inércia* da área da seção transversal, calculada em torno do eixo neutro. Esse valor é representado pela letra I. Por consequência, a Equação 6.11 pode ser resolvida para $\sigma_{máx}$ e escrita em sua forma geral como

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} \tag{6.12}$$

Nessa expressão,

$\sigma_{máx}$ = tensão normal máxima no elemento, que ocorre em um ponto na área da seção transversal *mais afastado* do eixo neutro
M = momento interno resultante, determinado pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio e calculado em torno do eixo neutro da seção transversal
I = momento de inércia da área da seção transversal calculada em torno do eixo neutro
c = distância perpendicular do eixo neutro a um ponto mais afastado do eixo neutro, onde $\sigma_{máx}$ age.

Visto que $\sigma_{máx}/c = -\sigma/y$ (Equação 6.9), a tensão normal em uma distância intermediária y pode ser determinada por uma equação semelhante à Equação 6.12. Temos

$$\sigma = -\frac{My}{I} \tag{6.13}$$

Observe que o sinal negativo é necessário, já que está de acordo com os eixos x, y e z definidos. Pela regra da mão direita, M é positivo ao longo do eixo $+z$, y é positivo para cima e, portanto, σ deve ser negativa (compressão), uma vez que age na direção negativa de x (Figura 6.26c).

Qualquer das duas equações (6.12 e 6.13) é denominada ***fórmula da flexão.*** Essa fórmula é usada para determinar a tensão normal em um elemento reto, com seção transversal simétrica em relação a um eixo, e momento aplicado perpendicularmente a esse eixo. Embora tenhamos considerado que o elemento seja prismático, na maioria dos projetos de engenharia também podemos usar a fórmula da flexão para determinar a tensão normal em elementos que tenham *ligeira conicidade.* Por exemplo, por análise matemática baseada na teoria da elasticidade, um elemento com seção transversal retangular e comprimento com 15° de conicidade terá uma tensão normal máxima real aproximadamente 5,4% *menor* que a calculada pela fórmula da flexão.

PONTOS IMPORTANTES

- A seção transversal de uma viga reta *permanece plana* quando a viga se deforma por flexão. Isso provoca uma tensão de tração de um lado da viga e uma tensão de compressão do outro lado. O eixo neutro é submetido à *tensão nula.*
- Por conta da deformação, a *deformação longitudinal* varia *linearmente* de zero no eixo neutro a máxima nas fibras externas da viga. Contanto que o material seja homogêneo e a lei de Hooke se aplique, a *tensão* também varia *linearmente* na seção transversal.
- Quando o material é linear elástico, o eixo neutro passa pelo *centroide* da área da seção transversal. Essa conclusão se baseia no fato de que a força normal resultante que age na seção transversal deve ser nula.
- A fórmula da flexão baseia-se no fato de que o momento resultante na seção transversal é igual ao momento produzido pela distribuição linear da tensão normal em torno do eixo neutro.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Para aplicar a fórmula da flexão, sugerimos o seguinte procedimento.

Momento interno

- Tome uma seção do elemento no ponto onde a flexão ou tensão normal deve ser determinada e obtenha o momento interno M na seção. O eixo do centroide ou eixo neutro para a seção transversal tem de ser conhecido, visto que M *deve ser* calculado em torno desse eixo.
- Se a tensão de flexão máxima absoluta tiver de ser determinada, represente graficamente o diagrama de momento fletor para determinar o momento máximo na viga.

Propriedade da seção

- Determine o momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo neutro. Os métodos usados para esse cálculo são discutidos no Apêndice A, e a tabela que apresenta os valores de I para várias formas comuns é dada no final deste livro.

Tensão normal

- Especifique a distância y, medida perpendicularmente ao eixo neutro, até o ponto onde a tensão normal deve ser determinada. Então, aplique a equação $\sigma = -My/I$. Porém, se quiser calcular a tensão de flexão máxima, use $\sigma_{máx} = Mc/I$. Ao substituir os dados, não se esqueça de verificar se as unidades de medida são consistentes.
- A tensão age em uma direção tal que a força que ela cria no ponto contribui para o momento em torno do eixo neutro que está na mesma direção do momento interno **M** (Figura 6.26c). Desse modo, podemos representar a distribuição de tensão que age sobre toda a seção transversal ou isolar um elemento de volume do material e usá-lo para fazer uma representação gráfica da tensão normal que age no ponto.

EXEMPLO 6.14

A viga tem seção transversal retangular e está sujeita à distribuição de tensão mostrada na Figura 6.27a. Determine o momento interno **M** na seção provocado pela distribuição de tensão (a) pela fórmula da flexão e (b) pela determinação da resultante da distribuição de tensão pelos princípios básicos.

SOLUÇÃO

Parte (a). A fórmula da flexão é $\sigma_{máx} = Mc/I$. Pela Figura 6.27a, $c = 60$ mm e $\sigma_{máx} = 20$ MPa. O eixo neutro é definido como a reta NA, porque a tensão é nula ao longo dessa reta. Visto que a seção transversal tem forma retangular, o momento de inércia para a área em torno de NA é determinado pela fórmula para um retângulo dada no final deste livro; isto é,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(60\text{ mm})(120\text{ mm})^3 = 864(10^4)\text{ mm}^4$$

Portanto,

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad 20\text{ N/mm}^2 = \frac{M(60\text{ mm})}{864(10^4)\text{ mm}^4}$$

$$M = 288(10^4)\text{ N}\cdot\text{mm} = 2{,}88\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Parte (b). Em primeiro lugar, mostraremos que a força resultante da distribuição de tensão é nula. Como mostrado na Figura 6.27b, a tensão que age sobre um elemento arbitrário $dA = (60\text{ mm})\,dy$, localizada à distância y do eixo neutro, é

$$\sigma = \left(\frac{-y}{60\text{ mm}}\right)(20\text{ N/mm}^2)$$

A força criada por essa tensão é $dF = \sigma dA$ e, portanto, para a seção transversal inteira,

$$F_R = \int_A \sigma\,dA = \int_{-60\text{ mm}}^{+60\text{ mm}} \left[\left(\frac{-y}{60\text{ mm}}\right)(20\text{ N/mm}^2)\right](60\text{ mm})\,dy$$

$$= (-10\text{ N/mm}^2)y^2\Big|_{-60\text{ mm}}^{+60\text{ mm}} = 0$$

O momento resultante da distribuição de tensão em torno do eixo neutro (*eixo z*) deve ser igual a M. Visto que o valor do momento de $d\mathbf{F}$ em torno desse eixo é $dM = y\,dF$, e $d\mathbf{M}$ é *sempre positivo* (Figura 6.27b), então, para a área inteira,

$$M = \int_A y\,dF = \int_{-60\text{ mm}}^{+60\text{ mm}} y\left[\left(\frac{y}{60\text{ mm}}\right)(20\text{ N/mm}^2)\right](60\text{ mm})\,dy$$

$$= \left[\left(\frac{20}{3}\text{ N/mm}^2\right)y^3\right]\Big|_{-60\text{ mm}}^{+60\text{ mm}}$$

$$= 288(10^4)\text{ N}\cdot\text{mm} = 2{,}88\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Esse resultado *também* pode ser determinado sem a necessidade da integração. A força resultante para cada uma das duas distribuições de tensão *triangulares* na Figura 6.27c é graficamente equivalente ao *volume* contido no interior de cada distribuição de tensão. Assim, cada volume é

$$F = \frac{1}{2}(60\text{ mm})(20\text{ N/mm}^2)(60\text{ mm}) = 36(10^3)\text{ N} = 36\text{ kN}$$

Essas forças, que formam um conjugado, agem na mesma direção das tensões no interior de cada distribuição (Figura 6.27c). Além do mais, agem passando pelo *centroide* de

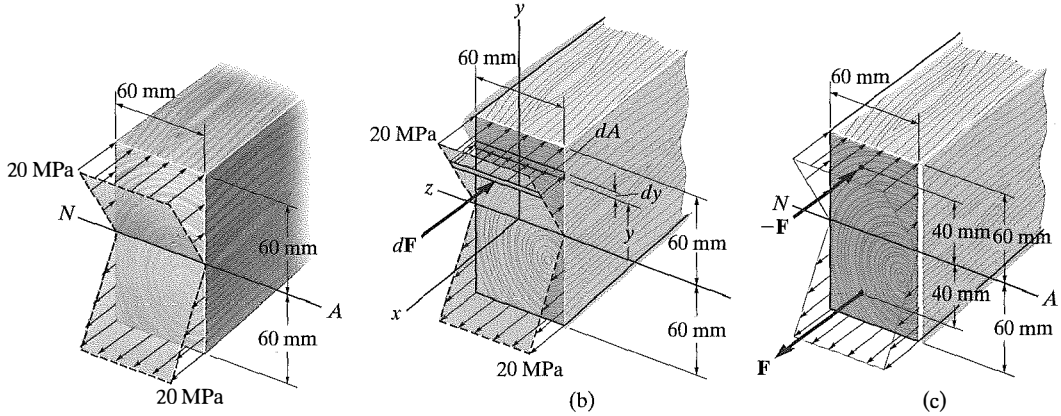


Figura 6.27

cada volume, isto é, 1/3 (60 mm) = 20 mm em relação à parte superior e à parte inferior da viga. Por consequência, a distância entre elas é 80 mm, como mostrado. O momento do conjugado é, portanto,

$M = 36\text{ kN}\,(80\text{ mm}) = 2.880\text{ kN}\cdot\text{mm} = 2{,}88\text{ kN}\cdot\text{m}$ *Resposta*

EXEMPLO 6.15

A viga simplesmente apoiada na Figura 6.28a tem a área de seção transversal mostrada na Figura 6.28b. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e represente a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.

SOLUÇÃO

Momento interno máximo. O momento interno máximo na viga, $M = 22{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}$, ocorre no centro, como mostra o diagrama de momento fletor (Figura 6.28c). Veja o Exemplo 6.3.

Propriedade da seção. Por razões de simetria, o centroide C e, portanto, o eixo neutro, passa a meia altura da viga (Figura 6.28b). A área é subdividida nas três partes mostradas, e o momento de inércia de cada parte é calculado em torno do eixo neutro usando o teorema dos eixos paralelos. (Veja Equação A.5 no Apêndice A.) Como optamos por trabalhar em metros, temos

$$\begin{aligned} I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\ &= 2\left[\frac{1}{12}(0{,}25\text{ m})(0{,}020\text{ m})^3 + (0{,}25\text{ m})(0{,}020\text{ m})(0{,}160\text{ m})^2\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{12}(0{,}020\text{ m})(0{,}300\text{ m})^3\right] \\ &= 301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4 \end{aligned}$$

Tensão de flexão. Aplicando a fórmula da flexão, para $c = 170$ mm, a tensão de flexão máxima absoluta é

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{máx} = \frac{22{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}170\text{ m})}{301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4} = 12{,}7\text{ MPa}$$

Resposta

A Figura 6.28d mostra vistas bidimensionais e tridimensionais da distribuição de tensão. Observe como a tensão em cada ponto na seção transversal desenvolve uma força que contribui para o momento $d\mathbf{M}$ em torno do eixo neutro de tal modo que tenha a mesma direção que $\mathbf{M}$. Especificamente, no ponto B, $y_B = 150$ mm e, portanto,

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I}; \qquad \sigma_B = \frac{22{,}5\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}150\text{ m})}{301{,}3(10^{-6})\text{ m}^4} = 11{,}2\text{ MPa}$$

A tensão normal que age sobre os elementos do material localizados nos pontos B e D é mostrada na Figura 6.28e.

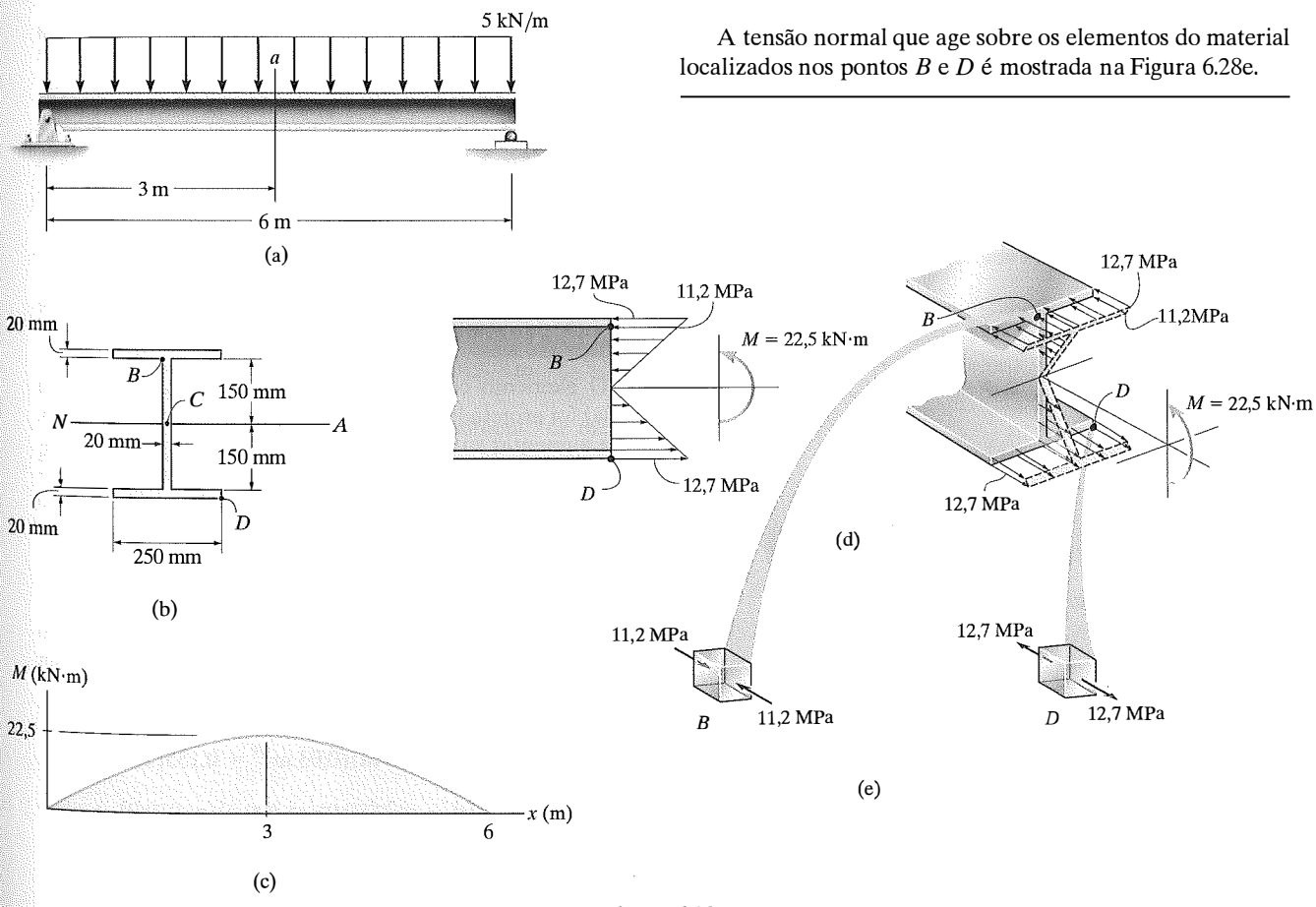


Figura 6.28

EXEMPLO 6.16

A viga mostrada na Figura 6.29a tem área de seção transversal em forma de um canal (Figura 6.29b). Determine a tensão de flexão máxima que ocorre na viga na seção *a–a*.

SOLUÇÃO

Momento interno. Aqui, as reações no apoio da viga não precisam ser determinadas. Em vez disso, pelo método das seções, podemos usar o segmento à esquerda da seção *a–a* (Figura 6.29c). Em particular, observe que força axial interna resultante **N** passa pelo centroide da seção transversal. Entenda, também, que o *momento interno resultante deve ser calculado em torno do eixo neutro da viga* na seção *a–a*.

Para determinar a localização do eixo neutro, a área da seção transversal é subdividida em três partes compostas, como mostra a Figura 6.29b. Visto que o eixo neutro passa pelo centroide, então, pela Equação A.2 do Apêndice A, temos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} =$$

$$= \frac{2[0{,}100\text{ m}](0{,}200\text{ m})(0{,}015\text{ m}) + [0{,}010\text{ m}](0{,}02\text{ m})(0{,}250\text{ m})}{2(0{,}200\text{ m})(0{,}015\text{ m}) + 0{,}020\text{ m}(0{,}250\text{ m})}$$

$$= 0{,}05909\text{ m} = 59{,}09\text{ mm}$$

Essa dimensão é mostrada na Figura 6.29c.

Aplicando a equação do equilíbrio de momento em torno do eixo neutro, temos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad 2{,}4\text{ kN}(2\text{ m}) + 1{,}0\text{ kN}(0{,}05909\text{ m}) - M = 0$$

$$M = 4{,}859\text{ kN} \cdot \text{m}$$

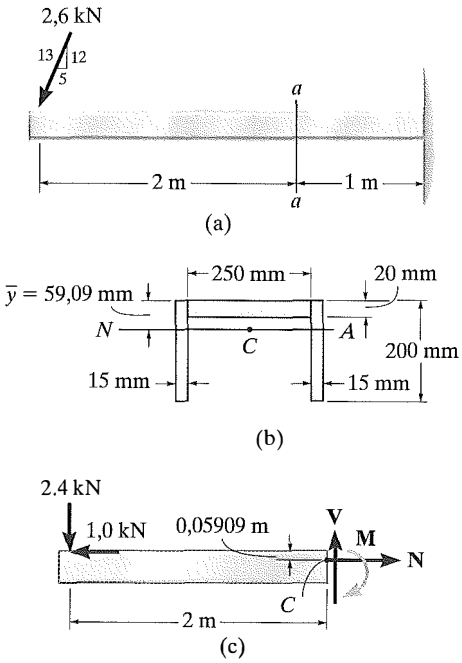


Figura 6.29

Propriedade da seção. O momento de inércia em torno do eixo neutro é determinado pelo teorema dos eixos paralelos aplicado a cada uma das três partes compostas da área da seção transversal. Trabalhando em metros, temos

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}250\text{ m})(0{,}020\text{ m})^3 + \right.$$

$$\left. + (0{,}250\text{ m})(0{,}020\text{ m})(0{,}05909\text{ m} - 0{,}010\text{ m})^2\right]$$

$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0{,}015\text{ m})(0{,}200\text{ m})^3 + \right.$$

$$\left. + (0{,}015\text{ m})(0{,}200\text{ m})(0{,}100\text{ m} - 0{,}05909\text{ m})^2\right]$$

$$= 42{,}26(10^{-6})\text{ m}^4$$

Tensão de flexão máxima. A tensão de flexão máxima ocorre nos pontos mais afastados do eixo neutro, ou seja, na parte inferior da viga, $c = 0{,}200\text{ m} - 0{,}05909\text{ m} = 0{,}1409\text{ m}$. Assim,

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{4{,}859\text{ kN} \cdot \text{m}(0{,}1409\text{ m})}{42{,}26(10^{-6})\text{ m}^4} = 16{,}2\text{ MPa}$$

Resposta

Mostre que a tensão de flexão no topo da viga é $\sigma' = 6{,}79$ MPa.

OBSERVAÇÃO: A força normal $N = 1$ kN e a força de cisalhamento $V = 2{,}4$ kN também contribuirão com uma tensão adicional na seção transversal. A superposição de todos esses efeitos será discutida mais adiante, em outro capítulo.

EXEMPLO 6.17

O elemento com seção transversal retangular (Figura 6.30a) foi projetado para resistir a um momento de 40 N · m. Para aumentar sua resistência e rigidez, foi proposta a adição de duas pequenas nervuras em sua parte inferior (Figura 6.30b). Determine a tensão normal máxima no elemento para ambos os casos.

SOLUÇÃO

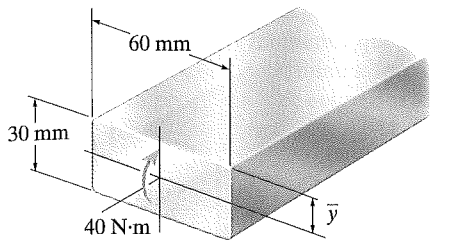
Sem nervuras. O eixo neutro está claramente no centro da seção transversal (Figura 6.30a), portanto, $y = c = 15$ mm $= 0{,}015$ m. Assim,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0{,}06\text{ m})(0{,}03\text{ m})^3 = 0{,}135(10^{-6})\text{ m}^4$$

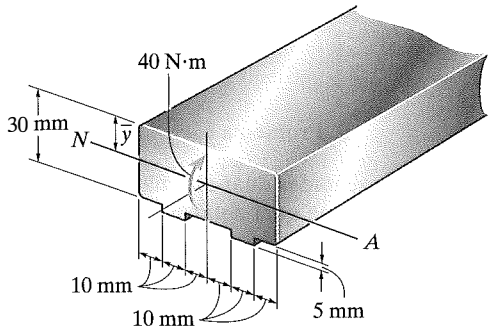
Logo, a tensão normal máxima é

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{(40\text{ N} \cdot \text{m})(0{,}015\text{ m})}{0{,}135(10^{-6})\text{ m}^4} = 4{,}44\text{ MPa}$$

Resposta



(a)



(b)

Figura 6.30

Com nervuras. Pela Figura 6.30b, segmentando a área no retângulo grande principal e nos dois retângulos (nervuras) na parte inferior, a localização de y do centroide e do eixo neutro é determinada da seguinte maneira:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A}$$
$$= \frac{[0{,}015\text{ m}](0{,}030\text{ m})(0{,}060\text{ m}) + 2[0{,}0325\text{ m}](0{,}005\text{ m})(0{,}010\text{ m})}{(0{,}03\text{ m})(0{,}060\text{ m}) + 2(0{,}005\text{ m})(0{,}010\text{ m})}$$
$$= 0{,}01592\text{ m}$$

Esse valor não representa c. O valor de c é

$$c = 0{,}035\text{ m} - 0{,}01592\text{ m} = 0{,}01908\text{ m}$$

Pelo teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia em torno do eixo neutro é

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}060\text{ m})(0{,}030\text{ m})^3 + (0{,}060\text{ m})(0{,}030\text{ m})(0{,}01592\text{ m} - 0{,}015\text{ m})^2\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0{,}010\text{ m})(0{,}005\text{ m})^3 + (0{,}010\text{ m})(0{,}005\text{ m})(0{,}0325\text{ m} - 0{,}01592\text{ m})^2\right]$$
$$= 0{,}1642(10^{-6})\text{ m}^4$$

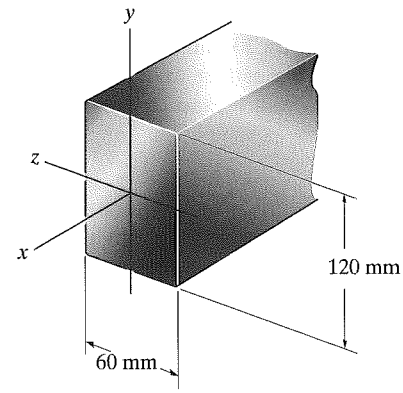
Portanto, a tensão normal máxima é

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{40\text{ N}\cdot\text{m}(0{,}01908\text{ m})}{0{,}1642(10^{-6})\text{ m}^4} = 4{,}65\text{ MPa} \quad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Esse resultado surpreendente indica que o acréscimo de nervuras à seção transversal *aumentará* a tensão normal em vez de diminuí-la; por essa razão, elas devem ser omitidas.

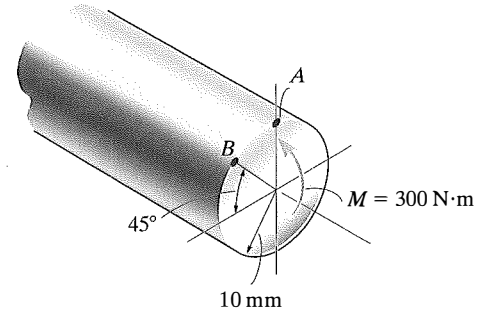
PROBLEMAS

6.43. Um elemento com as dimensões mostradas na figura deverá ser usado para resistir a um momento fletor interno $M = 2\text{ kN}\cdot\text{m}$. Determine a tensão máxima no elemento se o momento for aplicado (a) em torno do eixo z e (b) em torno do *eixo y*. Trace um rascunho da distribuição de tensão para cada caso.



Problema 6.43

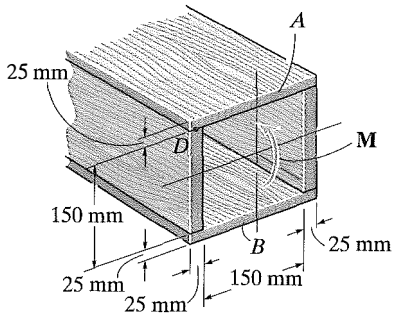
*__6.44.__ A haste de aço com diâmetro de 20 mm está sujeita a um momento interno $M = 300\text{ N}\cdot\text{m}$. Determine a tensão criada nos pontos A e B. Além disso, trace um rascunho de uma vista tridimensional da distribuição de tensão que age na seção transversal.



Problema 6.44

6.45. A viga está sujeita a um momento M. Determine a porcentagem desse momento à qual resistem as tensões que agem nas pranchas superior e inferior A e B da viga.

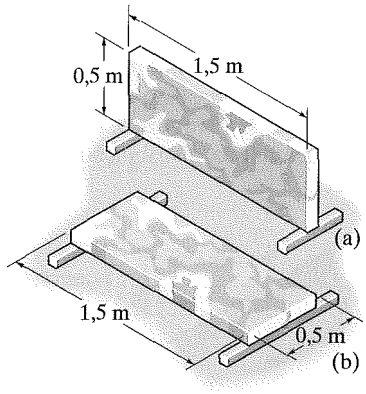
6.46. Determine o momento M que deve ser aplicado à viga de modo a criar uma tensão de compressão no ponto D $\sigma_D = 30$ MPa. Além disso, trace um rascunho da distribuição de tensão que age na seção transversal e calcule a tensão máxima desenvolvida na viga.



Problemas 6.45/46

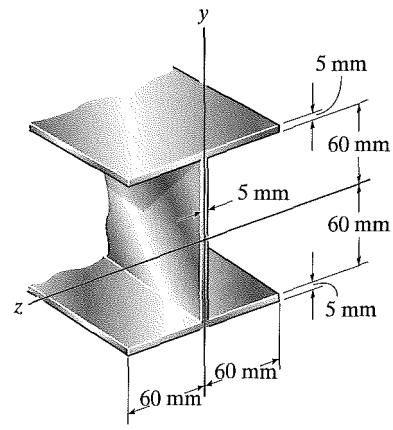
6.47. A peça de mármore, que podemos considerar como um material linear elástico frágil, tem peso específico de 24 kN/m³ e espessura de 20 mm. Calcule a tensão de flexão máxima na peça se ela estiver apoiada (a) em seu lado e (b) em suas bordas. Se a tensão de ruptura for $\sigma_{rup} = 1{,}5$ MPa, explique as consequências de apoiar a peça em cada uma das posições.

*__6.48.__ A peça de mármore, que podemos considerar como um material linear elástico frágil, tem peso específico de 24 kN/m³. Se for apoiada nas bordas como mostrado em (b), determine a espessura mínima que ela deve ter para não quebrar. A tensão de ruptura é $\sigma_{rup} = 1{,}5$ MPa.



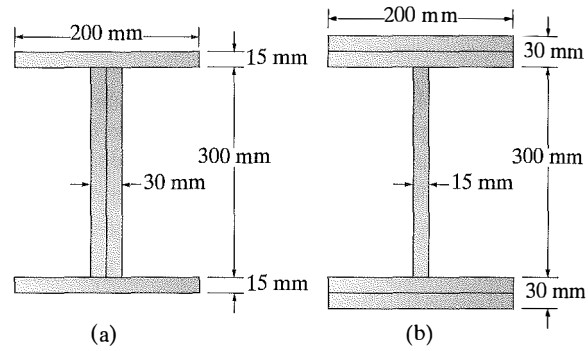
Problemas 6.47/48

6.49. A viga tem a seção transversal mostrada na figura. Se for feita de aço com tensão admissível $\sigma_{adm} = 170$ MPa, determine o maior momento interno ao qual ela pode resistir se o momento for aplicado (a) em torno do eixo z e (b) em torno do *eixo y*.



Problema 6.49

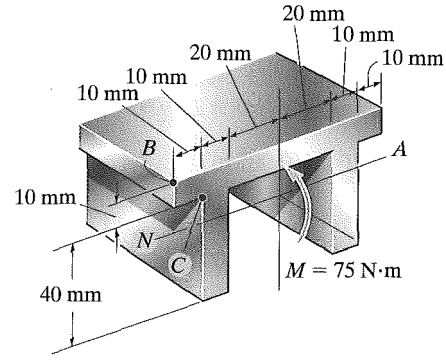
6.50. Foram apresentadas duas alternativas para o projeto de uma viga. Determine qual delas suportará um momento de $M = 150$ kN · m com a menor quantidade de tensão de flexão. Qual é essa tensão? Com que porcentagem ela é mais efetiva?



Problema 6.50

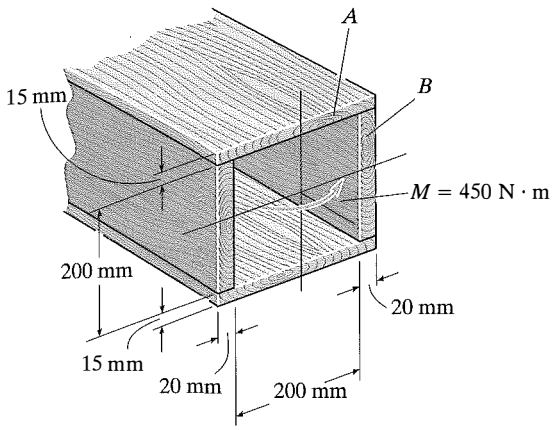
6.51. A peça de máquina feita de alumínio está sujeita a um momento $M = 75$ N · m. Determine a tensão de flexão criada nos pontos B e C da seção transversal. Trace um rascunho dos resultados sobre um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.

*__6.52.__ A peça de máquina feita de alumínio está sujeita a um momento $M = 75$ N · m. Determine as tensões de flexão máximas tanto de tração quanto de compressão na peça.



Problemas 6.51/52

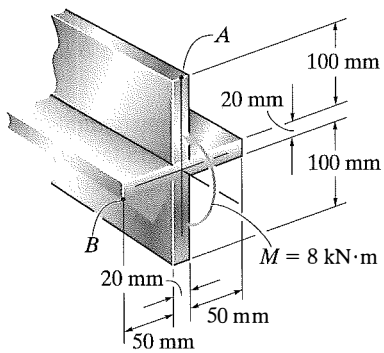
6.53. A viga é composta por quatro peças de madeira coladas como mostra a figura. Se o momento que age na seção transversal for $M = 450 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine a força resultante que a tensão de flexão produz na peça superior A e na peça lateral B.



Problema 6.53

6.54. A área da seção transversal da escora de alumínio tem forma de cruz. Se ela for submetida ao momento $M = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determine a tensão de flexão que age nos pontos A e B e mostre os resultados em elementos de volume localizados nesses pontos.

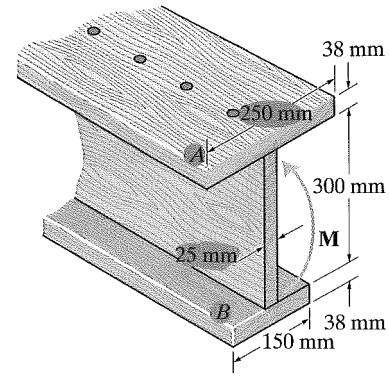
6.55. A área da seção transversal da escora de alumínio tem forma de cruz. Se ela for submetida ao momento $M = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determine a tensão de flexão máxima na viga e faça o rascunho de uma vista tridimensional da distribuição de tensão que age em toda a seção transversal.



Problemas 6.54/55

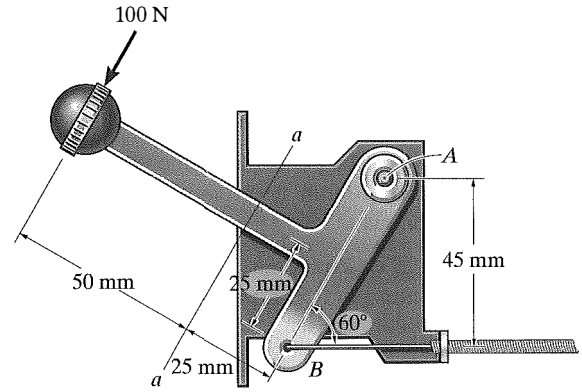
*__6.56.__ A viga é composta por três tábuas de madeira pregadas como mostra a figura. Se o momento que age na seção transversal for $M = 1{,}5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, determine a tensão de flexão máxima na viga. Faça um rascunho de uma vista tridimensional da distribuição de tensão que age na seção transversal.

6.57. Determine a força resultante que as tensões de flexão produzem na tábua superior A da viga se $M = 1{,}5 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



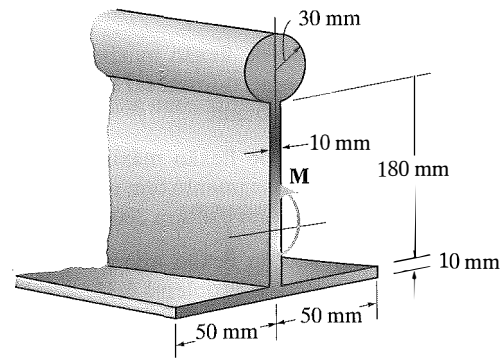
Problemas 6.56/57

6.58. A alavanca de controle é usada em um cortador de grama de empurrar. Determine a tensão de flexão máxima na seção a–a da alavanca se uma força de 100 N for aplicada ao cabo. A alavanca é suportada por um pino em A e um cabo em B. A seção a–a é quadrada, 6 mm por 6 mm.



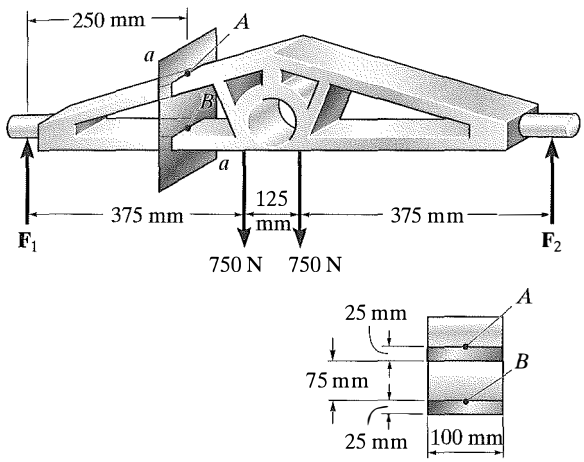
Problema 6.58

6.59. Determine a maior tensão de flexão desenvolvida no elemento se ele for submetido a um momento fletor interno $M = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Problema 6.59

*__6.60.__ A peça fundida cônica suporta a carga mostrada. Determine a tensão de flexão nos pontos A e B. A seção transversal na seção a–a é dada na figura.



Problema 6.60

6.61. Se o eixo no Problema 6.1 tiver diâmetro de 100 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta no eixo.

6.62. Se o eixo no Problema 6.3 tiver um diâmetro de 40 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta no eixo.

6.63. Se o eixo no Problema 6.6 tiver um diâmetro de 50 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta no eixo.

***6.64.** Se o tubo no Problema 6.8 tiver diâmetro externo de 30 mm e espessura de 10 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta no eixo.

6.65. Se a viga *ACB* no Problema 6.9 tiver seção transversal quadrada de 150 mm por 150 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.

6.66. Se a lança do guindaste *ABC* no Problema 6.10 tiver seção transversal retangular com base de 60 mm, determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, a altura *h* exigida se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 170$ MPa.

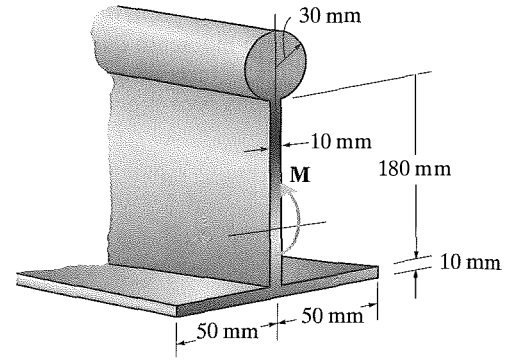
6.67. Se a lança do guindaste *ABC* no Problema 6.10 tiver seção transversal retangular com base de 50 mm e altura de 75 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta na lança.

***6.68.** Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga no Problema 6.24. A seção transversal é retangular com base de 75 mm e altura de 100 mm.

6.69. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga no Problema 6.25. Cada segmento tem seção transversal retangular com base de 100 mm e altura 200 mm.

6.70. Determine a tensão de flexão máxima absoluta no pino de 20 mm de diâmetro no Problema 6.35.

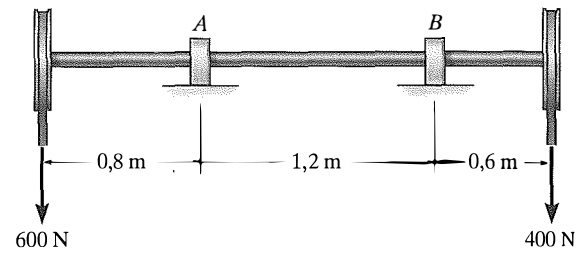
6.71. O elemento tem seção transversal com as dimensões mostradas na figura. Determine o maior momento interno *M* que pode ser aplicado sem ultrapassar as tensões de tração e compressão admissíveis de $(\sigma_t)_{adm} = 150$ MPa e $(\sigma_c)_{adm} = 100$ MPa, respectivamente.



Problema 6.71

***6.72.** Determine a tensão de flexão máxima absoluta no eixo de 30 mm de diâmetro que está sujeito às forças concentradas. Os mancais de luva em *A* e *B* suportam somente forças verticais.

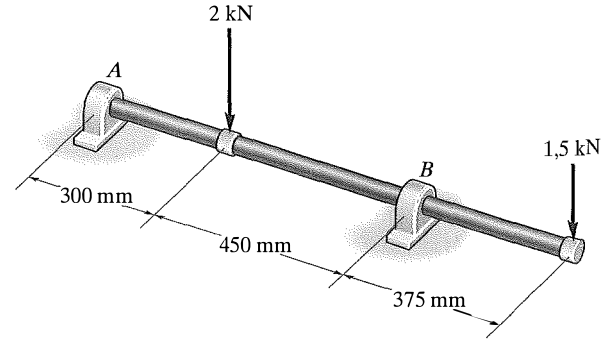
6.73. Determine o menor diâmetro admissível do eixo que está sujeito às forças concentradas. Os mancais de luva em *A* e *B* suportam somente forças verticais, e a tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa.



Problemas 6.72/73

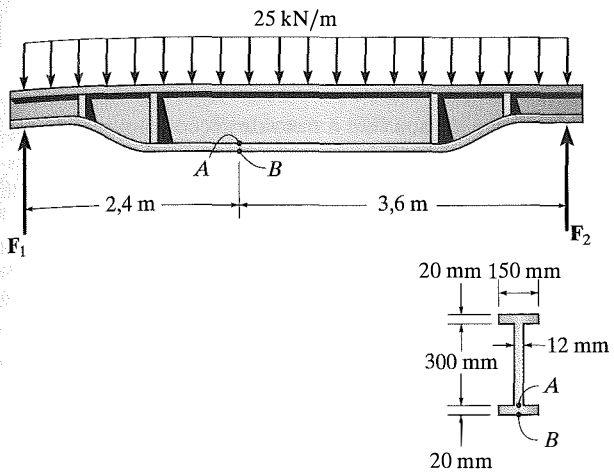
6.74. Determine a tensão de flexão máxima absoluta no eixo de 40 mm de diâmetro que está sujeito às forças concentradas. Os mancais de luva em *A* e *B* suportam somente forças verticais.

6.75. Determine o menor diâmetro admissível para o eixo que está sujeito às forças concentradas. Os mancais de luva em *A* e *B* suportam somente forças verticais, e a tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



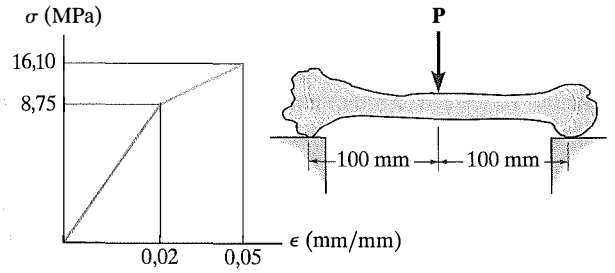
Problemas 6.74/75

*6.76. A travessa ou longarina de suporte principal da carroceria do caminhão está sujeita à carga distribuída uniforme. Determine a tensão de flexão nos pontos A e B.



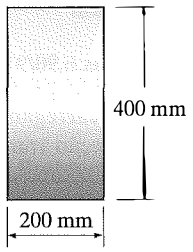
Problema 6.76

6.77. Uma porção do fêmur pode ser modelada como um tubo com diâmetro interno de 9,5 mm e diâmetro externo de 32 mm. Determine a força estática elástica máxima P que pode ser aplicada ao centro do osso sem causar fratura. Considere que as extremidades do osso estão apoiadas em roletes. O diagrama $\sigma - \epsilon$ para a massa do osso é mostrado na figura e é o mesmo para tração e para compressão.



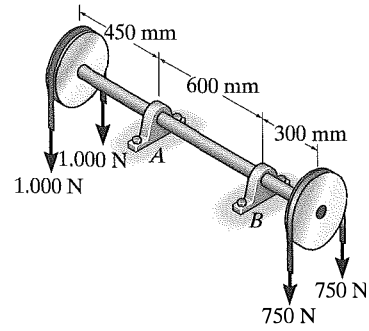
Problema 6.77

6.78. Se a viga no Problema 6.20 tiver seção transversal retangular com largura de 200 mm e altura de 400 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



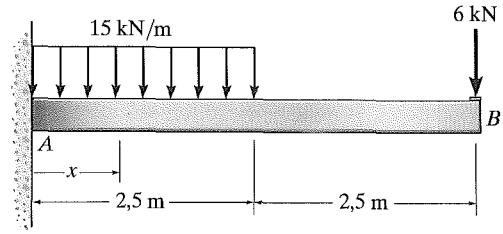
Problema 6.78

6.79. Se o eixo tiver diâmetro de 37,5 mm, determine a tensão de flexão máxima absoluta no eixo.



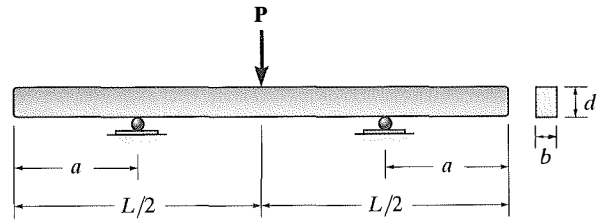
Problema 6.79

*6.80. Se a viga tiver seção transversal quadrada de 225 mm em cada lado, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



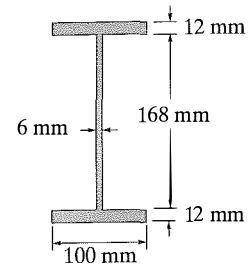
Problema 6.80

6.81. A viga está sujeita à carga **P** em seu centro. Determine a distância a dos apoios de modo que a tensão de flexão máxima absoluta na viga seja a maior possível. Qual é essa tensão?



Problema 6.81

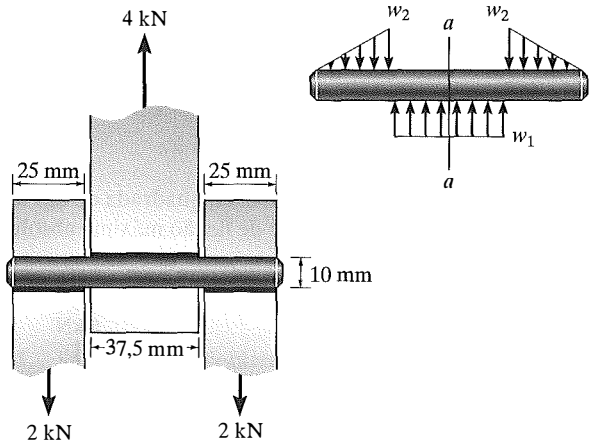
6.82. Se a viga no Problema 6.23 tiver a seção transversal mostrada na figura, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



Problema 6.82

6.83. O pino é usado para interligar os três elos. Devido ao desgaste, a carga é distribuída na parte superior e inferior do

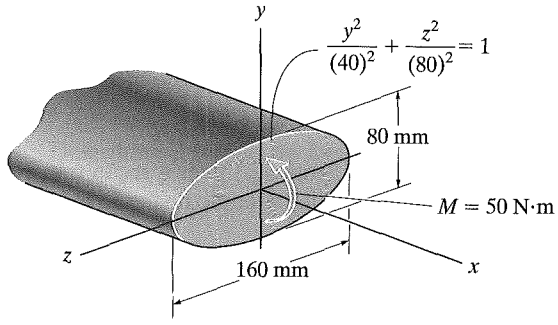
pino, como mostra o diagrama de corpo livre. Se o diâmetro do pino for 10 mm, determine a tensão de flexão máxima na área da seção transversal na seção central *a–a*. Para resolver o problema, em primeiro lugar, é necessário determinar as intensidades das cargas w_1 e w_2.



Problema 6.83

***6.84.** Um eixo é feito de um polímero com seção transversal elíptica. Se ele resistir a um momento interno $M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$, determine a tensão de flexão máxima desenvolvida no material (a) pela fórmula da flexão, onde $I_z = 1/4\ \pi\ (0{,}08\ \text{m})(0{,}04\ \text{m})^3$, e (b) por integração. Trace o rascunho de uma vista tridimensional da distribuição de tensão que age na área da seção transversal.

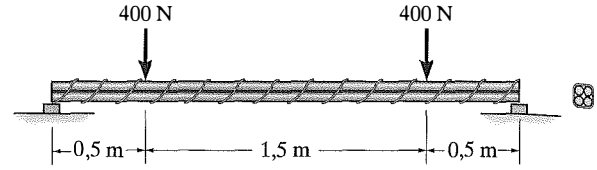
6.85. Resolva o Problema 6.84 se o momento $M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$ for aplicado em torno do *eixo y* em vez de em torno do eixo *x*. Aqui, $I_y = 1/4\ \pi\ (0{,}04\ \text{m})\ (0{,}08\ \text{m})^3$.



Problemas 6.84/85

6.86. A viga simplesmente apoiada é composta por quatro hastes de 16 mm de diâmetro, agrupadas como mostra a figura. Determine a tensão de flexão máxima na viga devida à carga mostrada.

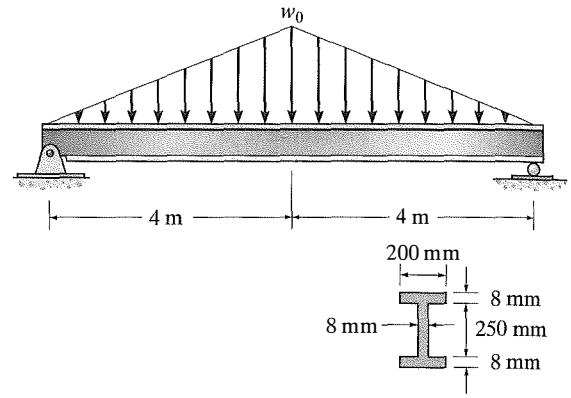
6.87. Resolva o Problema 6.86 se o conjunto girar 45° e for assentado nos apoios.



Problemas 6.86/87

***6.88.** A viga de aço tem a área de seção transversal mostrada na figura. Determine a maior intensidade da carga distribuída w_0 que ela pode suportar de modo que a tensão de flexão máxima na viga não ultrapasse $\sigma_{máx} = 150\ \text{MPa}$.

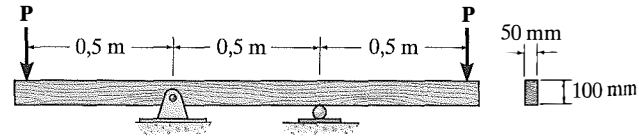
6.89. A viga de aço tem a área de seção transversal mostrada na figura. Se $w_0 = 10\ \text{kN/m}$, determine a tensão de flexão máxima na viga.



Problemas 6.88/89

6.90. A viga tem a seção transversal retangular mostrada na figura. Determine a maior carga *P* que pode ser suportada em suas extremidades em balanço de modo que a tensão de flexão na viga não ultrapasse $\sigma_{máx} = 10\ \text{MPa}$.

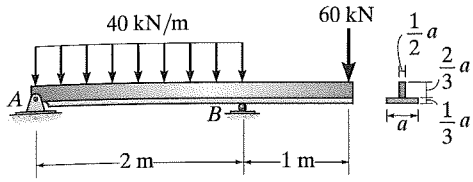
6.91. A viga tem a seção transversal retangular mostrada na figura. Se $P = 1{,}5\ \text{kN}$, determine a tensão de flexão máxima na viga. Faça um rascunho da distribuição de tensão que age na seção transversal.



Problemas 6.90/91

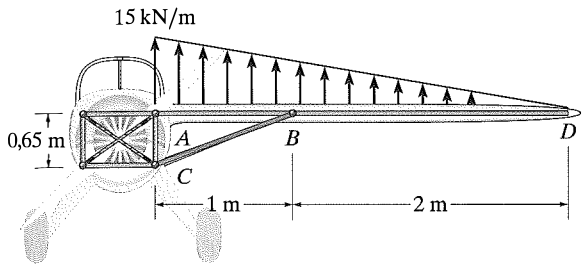
***6.92.** A viga está sujeita ao carregamento mostrado na figura. Se a dimensão de sua seção transversal $a = 180\ \text{mm}$, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.

6.93. A viga está sujeita ao carregamento mostrado na figura. Determine a dimensão *a* exigida para sua seção transversal se a tensão de flexão admissível para o material for $\sigma_{máx} = 150\ \text{MPa}$.



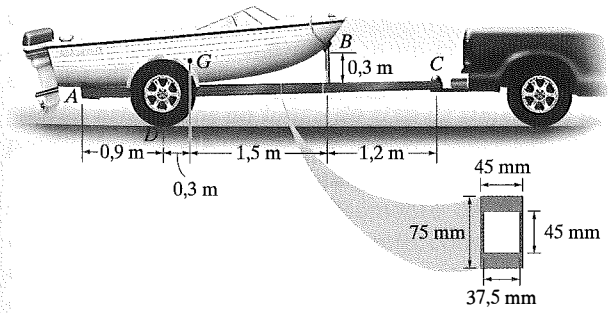
Problemas 6.92/93

6.94. A longarina *ABD* da asa de um avião leve é feita de alumínio 2014 T6 e tem área de seção transversal de 1.000 mm², profundidade de 80 mm e momento de inércia em torno de seu eixo neutro de 1,662(10⁶) mm⁴. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na longarina se a carga for a mostrada na figura. Considere que *A*, *B* e *C* são pinos. O acoplamento é feito ao longo do eixo longitudinal central da longarina.



Problema 6.94

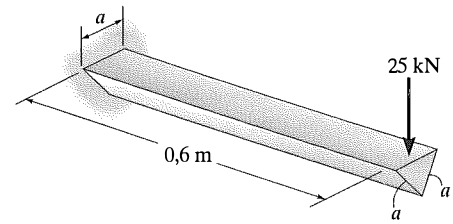
6.95. O barco pesa 11,5 kN e tem centro de gravidade em *G*. Se estiver apoiado no reboque no contato liso *A* e preso por um pino em *B*, determine a tensão de flexão máxima absoluta desenvolvida na escora principal do reboque. Considere que a escora é uma viga-caixão com as dimensões mostradas na figura e presa por um pino em *C*.



Problema 6.95

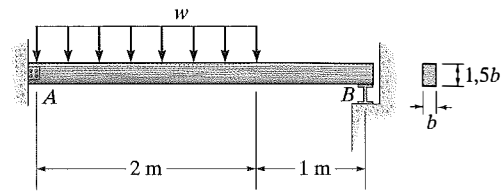
***6.96.** A viga suporta a carga de 25 kN. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga se os lados de sua seção transversal triangular forem $a = 150$ mm.

6.97. A viga suporta a carga de 25 kN. Determine o tamanho a exigido para os lados de sua seção transversal triangular se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 126$ MPa.



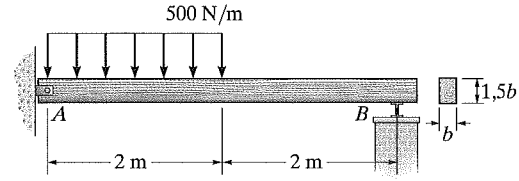
Problemas 6.96/97

6.98. A viga de madeira está sujeita à carga uniforme $w = 3$ kN/m. Se a tensão de flexão admissível para o material for $\sigma_{adm} = 10$ MPa, determine a dimensão b exigida para sua seção transversal. Considere que o suporte em *A* é um pino e em *B* é um rolete.



Problema 6.98

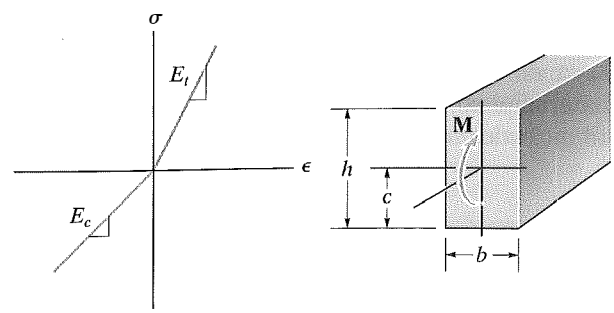
6.99. A viga de madeira tem seção transversal retangular na proporção mostrada na figura. Determine a dimensão b exigida se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 10$ MPa.



Problema 6.99

***6.100.** A viga é feita de um material com módulo de elasticidade sob compressão diferente do módulo de elasticidade sob tração. Determine a localização c do eixo neutro e deduza uma expressão para a tensão de tração máxima na viga cujas dimensões são mostradas na figura se ela estiver sujeita ao momento fletor M.

6.101. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita ao momento fletor M. Se o material de fabricação da viga tiver módulos de elasticidade diferentes para tração e compressão, como mostrado na figura, determine a localização c do eixo neutro e a tensão de compressão máxima na viga.



Problemas 6.100/101

6.5 Flexão assimétrica

Quando desenvolvemos a fórmula da flexão, impusemos a condição de que a área da seção transversal fosse *simétrica* em torno de um eixo perpendicular ao eixo neutro e também que o momento interno resultante **M** agisse ao longo do eixo neutro. É isso o que ocorre nas seções em T ou em U, mostradas na Figura 6.31. Porém, essas condições são desnecessárias, e, nesta seção, mostraremos que a fórmula da flexão também pode ser aplicada tanto a uma viga com área de seção transversal de qualquer formato, como a uma viga com momento interno resultante que aja em qualquer direção.

Momento aplicado ao longo do eixo principal. Considere que a seção transversal da viga tem a forma assimétrica mostrada na Figura 6.32a. Como na Seção 6.4, o sistema de coordenadas x, y, z orientado para a direita é definido de modo tal que a origem esteja localizada no centroide C da seção transversal e o momento interno resultante **M** aja ao longo do eixo $+z$. A distribuição de tensão que age sobre toda a área da seção transversal deve ter força resultante nula, momento interno resultante em torno do *eixo y* nulo e momento interno resultante em torno do eixo z igual a **M**.* Estas três condições podem ser expressas matematicamente considerando-se a força que age sobre o elemento diferencial dA localizado em $(0, y, z)$ (Figura 6.32a). Essa força é $dF = \sigma dA$ e, portanto, temos

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad 0 = -\int_A \sigma \, dA \tag{6.14}$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \qquad 0 = \int_A z\sigma \, dA \tag{6.15}$$

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \qquad M = \int_A -y\sigma \, dA \tag{6.16}$$

Como mostrado na Seção 6.4, a Equação 6.14 é satisfeita desde que o eixo z passe pelo *centroide* da área da seção transversal. Além disso, visto que o eixo z representa o *eixo neutro* para a seção transversal, a deformação normal variará de zero no eixo neutro a máxima em um ponto y localizado à maior distância $y = c$ do eixo neutro (Figura 6.32b). Contanto que o material se comporte de maneira linear elástica, a distribuição de tensão normal na área da seção transversal

* A condição de que os momentos em torno do *eixo y* sejam nulos não foi considerada na Seção 6.4, visto que a distribuição da tensão de flexão era *simétrica* em relação ao eixo y e tal distribuição de tensão produz automaticamente momento nulo em torno do *eixo y*. Veja a Figura 6.26c.

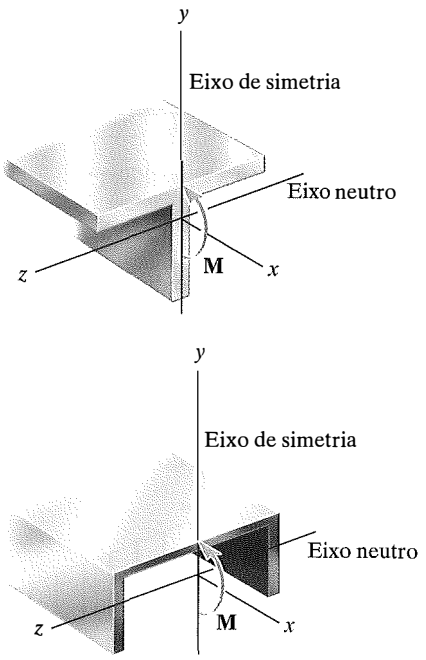
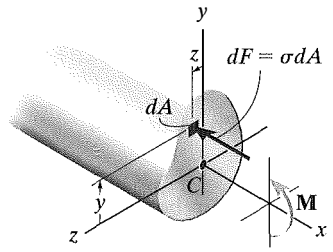
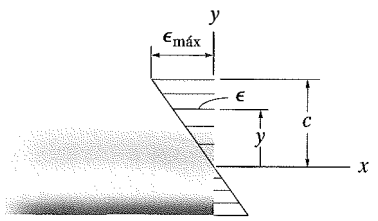


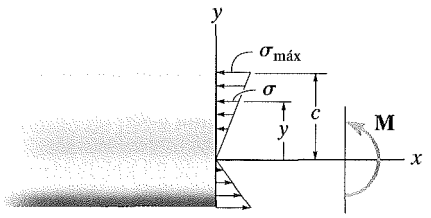
Figura 6.31



(a)



Distribuição de deformação normal
(vista lateral)
(b)



Distribuição da tensão de flexão
(vista lateral)
(c)

Figura 6.32

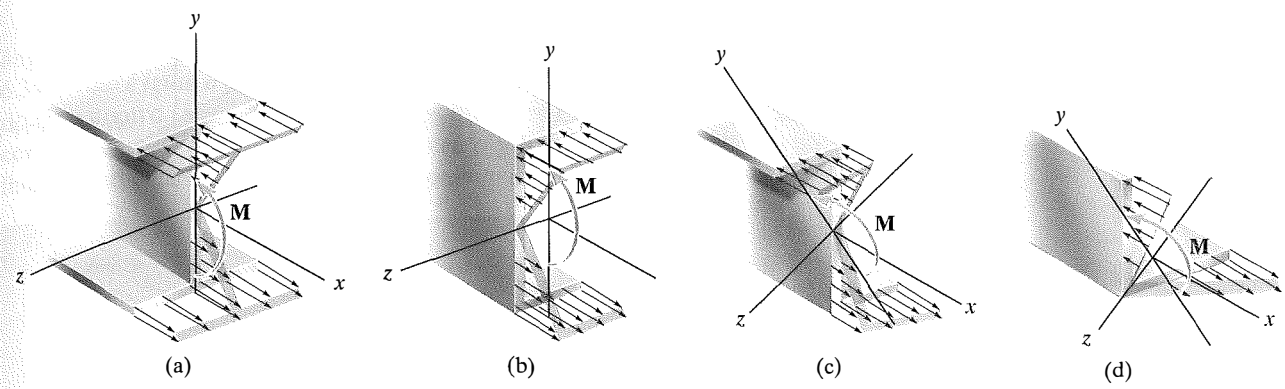


Figura 6.33

também será linear, de modo que $\sigma = -(y/c)\,\sigma_{máx}$ (Figura 6.32c). Quando essa equação é substituída na Equação 6.16 e integrada, resulta na fórmula da flexão $\sigma_{máx} = Mc/I$. Quando substituída na Equação 6.15, obtemos

$$0 = \frac{-\sigma_{máx}}{c}\int_A yz\,dA$$

que exige

$$\int_A yz\,dA = 0$$

Essa integral é denominada ***produto de inércia*** para a área. Como indicado no Apêndice A, ela realmente será nula desde que os eixos y e z sejam escolhidos como os ***eixos principais de inércia*** para a área. Para uma área de forma qualquer, a orientação dos eixos principais pode ser determinada pelas equações de transformação de inércia ou pelo círculo de Mohr de inércia, como mostrado no Apêndice A, Seções A.4 e A.5. Entretanto, se a área tiver um eixo de simetria, é fácil definir os ***eixos principais visto que eles sempre estarão orientados ao longo do eixo de simetria e perpendiculares a ele.***

Então, resumindo, as equações 6.14 a 6.16 *sempre* serão satisfeitas independentemente da direção do momento aplicado **M**. Por exemplo, considere os elementos mostrados na Figura 6.33. Em cada um desses casos, y e z definem os eixos principais de inércia para a seção transversal cuja origem está localizada no centroide da área. Nas figuras 6.33a e 6.33b, os eixos principais são localizados por simetria, e nas figuras 6.33c e 6.33d, a orientação dos eixos é determinada pelos métodos apresentados no Apêndice A. Visto que **M** é aplicado em torno de um dos eixos principais (*eixo z*), a distribuição de tensão é determinada pela fórmula da flexão, $\sigma = M_y/I_z$, e é mostrada na figura para cada caso.

Momento aplicado arbitrariamente. Às vezes, um elemento pode ser carregado de tal modo que o momento interno resultante não aja em torno de um dos eixos principais da seção transversal. Quando isso ocorre, em primeiro lugar, o momento deve ser decomposto em componentes dirigidas ao longo dos eixos principais. Então, a fórmula da flexão pode ser usada para determinar a tensão normal provocada por cada componente do momento. Por fim, usando o princípio da superposição, a tensão normal resultante no ponto pode ser determinada.

Para tal, considere que a viga tenha seção transversal retangular e está sujeita ao momento **M** (Figura 6.34a). Aqui, **M** forma um ângulo θ com o *eixo principal z*. Consideraremos que θ é positivo quando estiver direcionado do eixo $+z$ para o eixo $+y$, como mostra a figura. Decompondo **M** em componentes ao longo dos *eixos z e y*, temos $M_z = M\cos\theta$ e $M_y = M$ sen θ, respectivamente. Cada uma dessas componentes é mostrada separadamente na seção transversal nas figuras 6.34b e 6.34c. As distribuições de tensão normal que produzem **M** e suas componentes $\mathbf{M}_z$ e $\mathbf{M}_y$ são mostradas nas figuras 6.34d, 6.34e e 6.34f, respectivamente. Aqui, consideramos que $(\sigma_x)_{máx} > (\sigma'_x)_{máx}$. Por inspeção, as tensões de tração e compressão máximas $[(\sigma_x)_{máx} + (\sigma'_x)_{máx}]$ ocorrem em dois cantos opostos da seção transversal (Figura 6.34d).

Aplicando a fórmula da flexão a cada componente do momento nas figuras 6.34b e 6.34c, podemos expressar a tensão normal resultante em qualquer ponto na seção transversal (Figura 6.34d), em termos gerais, como

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (6.17)$$

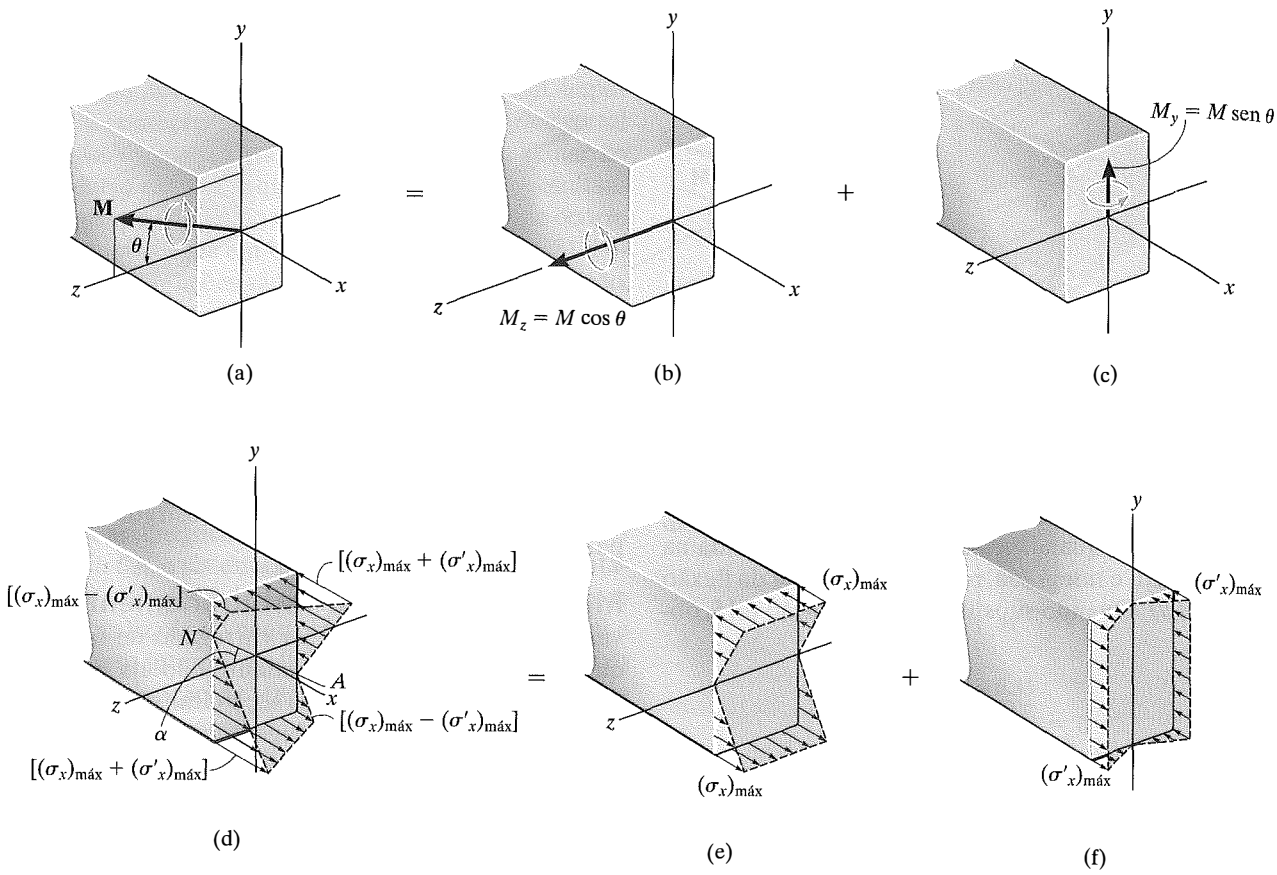


Figura 6.34

onde

σ = tensão normal no ponto.

y, z = coordenadas do ponto medidas em relação aos eixos x, y, z com origem no centroide da área da seção transversal e formando um sistema de coordenadas orientado para a direita. O eixo x é direcionado para fora da seção transversal, e os eixos y e z representam, respectivamente, os eixos principais dos momentos de inércia mínimo e máximo para a área.

M_y, M_z = componentes do momento interno resultante direcionadas ao longo dos eixos principais y e z. São positivos se direcionados ao longo dos eixos $+y$ e $+z$; caso contrário, são negativos. Ou, em outras palavras, $M_y = M \text{ sen } \theta$ e $M_z = M \cos \theta$, onde θ é positivo se medido do eixo $+z$ na direção do eixo $+y$.

I_y, I_z = *momentos principais de inércia* calculados em torno dos eixos y e z, respectivamente. Veja o Apêndice A.

Como observamos antes, é muito *importante* que os eixos x, y, z formem um sistema orientado para a direita e que sejam designados os sinais algébricos adequados às componentes do momento e às coordenadas quando aplicamos essa equação. A tensão resultante será *de tração* se ela for *positiva* e *de compressão* se ela for *negativa.*

Orientação do eixo neutro. O ângulo α do eixo neutro na Figura 6.34d pode ser determinado pela Equação 6.17 com $\sigma = 0$, visto que, por definição, nenhuma tensão normal age no eixo neutro. Temos

$$y = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

Visto que $M_z = M \cos \theta$ e $M_y = M \text{ sen } \theta$, então,

$$y = \left(\frac{I_z}{I_y} \text{tg } \theta\right) z \tag{6.18}$$

Essa é a equação da reta que define o eixo neutro para a seção transversal. Uma vez que a inclinação dessa reta é $\text{tg } \alpha = y/z$, então,

$$\text{tg } \alpha = \frac{I_z}{I_y} \text{tg } \theta \tag{6.19}$$

Aqui, podemos ver que, para *flexão assimétrica*, o ângulo θ, que define a direção do momento **M** (Figura 6.34a), *não é igual a* α, o ângulo que define a inclinação do eixo neutro (Figura 6.34d), a menos que $I_z = I_y$. Ao contrário, se, como na Figura 6.34a, o *eixo y* for escolhido como o eixo principal para o *momento de inércia mínimo* e o eixo z for escolhido como o eixo principal para o momento de inércia *máximo*, de modo que $I_y < I_z$, então, pela Equação 6.19, podemos concluir que o ângulo α, positivo quando medido do eixo $+z$ em direção ao eixo $+y$, estará *entre* a linha de ação de **M** e o eixo y, isto é, $\theta \leq \alpha \leq 90°$.

PONTOS IMPORTANTES

- A fórmula da flexão só pode ser aplicada quando a flexão ocorrer em torno de eixos que representem os *eixos principais de inércia* para a seção transversal. Esses eixos têm origem no centroide e estão orientados ao longo de um eixo de simetria, caso ele exista, e perpendicularmente a ele.
- Se o momento for aplicado em torno de algum eixo arbitrário, então deve ser decomposto em componentes ao longo de cada um dos eixos principais, e a tensão em um ponto é determinada por superposição da tensão provocada por cada uma das componentes dos momentos.

EXEMPLO 6.18

A seção transversal retangular mostrada na Figura 6.35a está sujeita a um momento fletor $M = 12\ \text{kN} \cdot \text{m}$. Determine a tensão normal desenvolvida em cada canto da seção e especifique a orientação do eixo neutro.

SOLUÇÃO

Componentes do momento interno. Por inspeção, vemos que os eixos y e z representam os eixos principais de inércia, uma vez que são eixos de simetria para a seção transversal. Como exigido, definimos o eixo z como o eixo principal para momento de inércia *máximo*. O momento é decomposto em suas componentes y e z, onde

$$M_y = -\frac{4}{5}(12\ \text{kN} \cdot \text{m}) = -9{,}60\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = \frac{3}{5}(12\ \text{kN} \cdot \text{m}) = 7{,}20\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Propriedades da seção. Os momentos de inércia em torno dos eixos y e z são

$$I_y = \frac{1}{12}(0{,}4\ \text{m})(0{,}2\ \text{m})^3 = 0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0{,}2\ \text{m})(0{,}4\ \text{m})^3 = 1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4$$

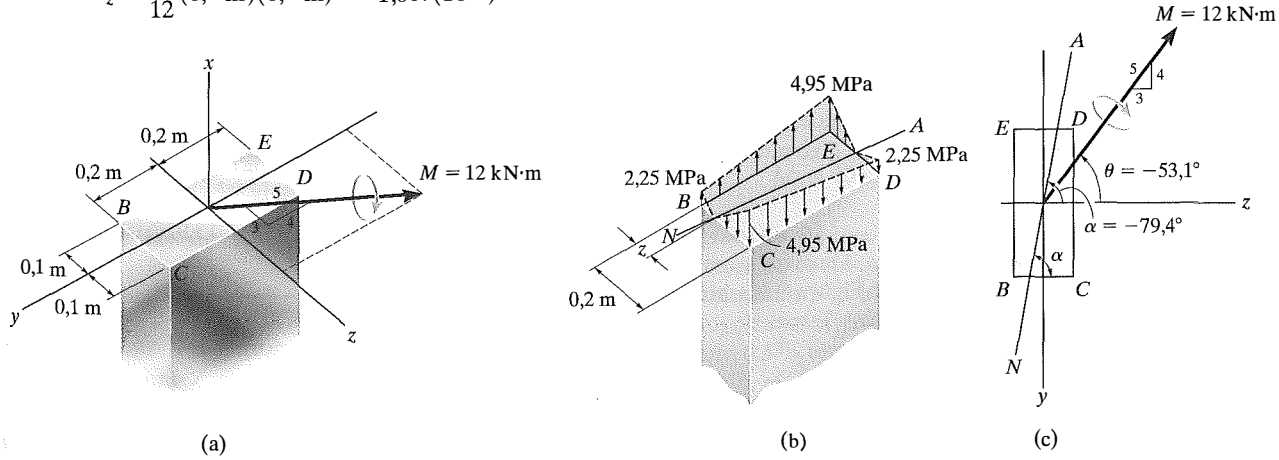
Tensão de flexão. Assim,

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(-0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = 2{,}25\ \text{MPa} \quad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_C = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = -4{,}95\ \text{MPa} \quad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_D = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(-0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N} \cdot \text{m}(0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = -2{,}25\ \text{MPa} \quad \textit{Resposta}$$



(a) (b) (c)

Figura 6.35

$$\sigma_E = -\frac{7{,}20(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}(-0{,}2\ \text{m})}{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4} +$$

$$+\frac{-9{,}60(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}(-0{,}1\ \text{m})}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4} = 4{,}95\ \text{MPa}\quad \textit{Resposta}$$

A distribuição da tensão normal resultante foi traçada usando esses valores (Figura 6.35b). Visto que a superposição se aplica, a distribuição de tensão é linear, como mostrado.

Orientação do eixo neutro. A localização z do eixo neutro (NA) (Figura 6.35b) pode ser determinada por cálculo proporcional. Ao longo da borda BC, exige-se

$$\frac{2{,}25\ \text{MPa}}{z} = \frac{4{,}95\ \text{MPa}}{(0{,}2\ \text{m} - z)}$$

$$0{,}450 - 2{,}25z = 4{,}95z$$

$$z = 0{,}0625\ \text{m}$$

Da mesma maneira, essa é também a distância de D ao eixo neutro na Figura 6.35b.

Também podemos determinar a orientação de NA pela Equação 6.19, que é usada para especificar o ângulo α que o eixo faz com o eixo z ou eixo principal *máximo*. De acordo com a convenção de sinal que adotamos, θ deve ser medido do eixo $+z$ em direção ao eixo $+y$. Por comparação, na Figura 6.35c, $\theta = -\text{tg}^{-1}4/3 = -53{,}1°$ (ou $\theta = +306{,}9°$). Assim,

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{I_z}{I_y}\text{tg}\ \theta$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{1{,}067(10^{-3})\ \text{m}^4}{0{,}2667(10^{-3})\ \text{m}^4}\text{tg}\ (-53{,}1°)$$

$$\alpha = -79{,}4°\quad \textit{Resposta}$$

Esse resultado é mostrado na Figura 6.35c. Usando o valor de z calculado acima, verifique, usando a geometria da seção transversal, que obtemos a mesma resposta.

EXEMPLO 6.19

Uma viga em T está sujeita a um momento fletor de 15 kN · m, como mostra a Figura 6.36a. Determine a tensão normal máxima na viga e a orientação do eixo neutro.

SOLUÇÃO

Componentes do momento interno. Os eixos y e z são eixos principais de inércia. Por quê? Pela Figura 6.36a, ambas as componentes do momento são positivas. Temos

$$M_y = (15\ \text{kN}\cdot\text{m})\cos 30° = 12{,}99\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = (15\ \text{kN}\cdot\text{m})\ \text{sen}\ 30° = 7{,}50\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Propriedades da seção. Com referência à Figura 6.36b e trabalhando em metros, temos

$$\bar{z} = \frac{\Sigma \tilde{z}A}{\Sigma A} =$$

$$= \frac{[0{,}05\ \text{m}](0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m}) + [0{,}115\ \text{m}](0{,}03\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})}{(0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m}) + (0{,}03\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})}$$

$$= 0{,}0890\ \text{m}$$

Pelo teorema dos eixos paralelos apresentado no Apêndice A, $I = \bar{I} + Ad^2$ e, assim, os momentos principais de inércia são:

$$I_z = \frac{1}{12}(0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m})^3 + \frac{1}{12}(0{,}03\ \text{m})(0{,}200\ \text{m})^3 =$$

$$= 20{,}53(10^{-6})\ \text{m}^4$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12}(0{,}04\ \text{m})(0{,}100\ \text{m})^3 + \right.$$

$$\left. + (0{,}100\ \text{m})(0{,}04\ \text{m})(0{,}0890\ \text{m} - 0{,}05\ \text{m})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(0{,}200\ \text{m})(0{,}03\ \text{m})^3 + \right.$$

$$\left. + (0{,}200\ \text{m})(0{,}03\ \text{m})(0{,}115\ \text{m} - 0{,}0890\ \text{m})^2\right]$$

$$= 13{,}92(10^{-6})\ \text{m}^4$$

Tensão de flexão máxima. As componentes do momento são mostradas na Figura 6.36c. Por inspeção, a maior tensão *de tração* ocorre no ponto B, visto que, por superposição, ambas as componentes do momento criam uma tensão de tração naquele lugar. De maneira semelhante, a maior tensão *de compressão* ocorre no ponto C. Assim,

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7{,}50\ \text{kN}\cdot\text{m}(-0{,}100\ \text{m})}{20{,}53(10^{-6})\ \text{m}^4} + \frac{12{,}99\ \text{kN}\cdot\text{m}(0{,}0410\ \text{m})}{13{,}92(10^{-6})\ \text{m}^4}$$

$$= 74{,}8\ \text{MPa}$$

$$\sigma_C = -\frac{7{,}50\ \text{kN}\cdot\text{m}(0{,}020\ \text{m})}{20{,}53(10^{-6})\ \text{m}^4} + \frac{12{,}99\ \text{kN}\cdot\text{m}(-0{,}0890\ \text{m})}{13{,}92(10^{-6})\ \text{m}^4}$$

$$= -90{,}3\ \text{MPa}\quad \textit{Resposta}$$

Por comparação, a maior tensão normal é, portanto, de compressão, e ocorre no ponto C.

Orientação do eixo neutro. Quando aplicamos a Equação 6.19, é importante ter certeza de que os ângulos α e θ

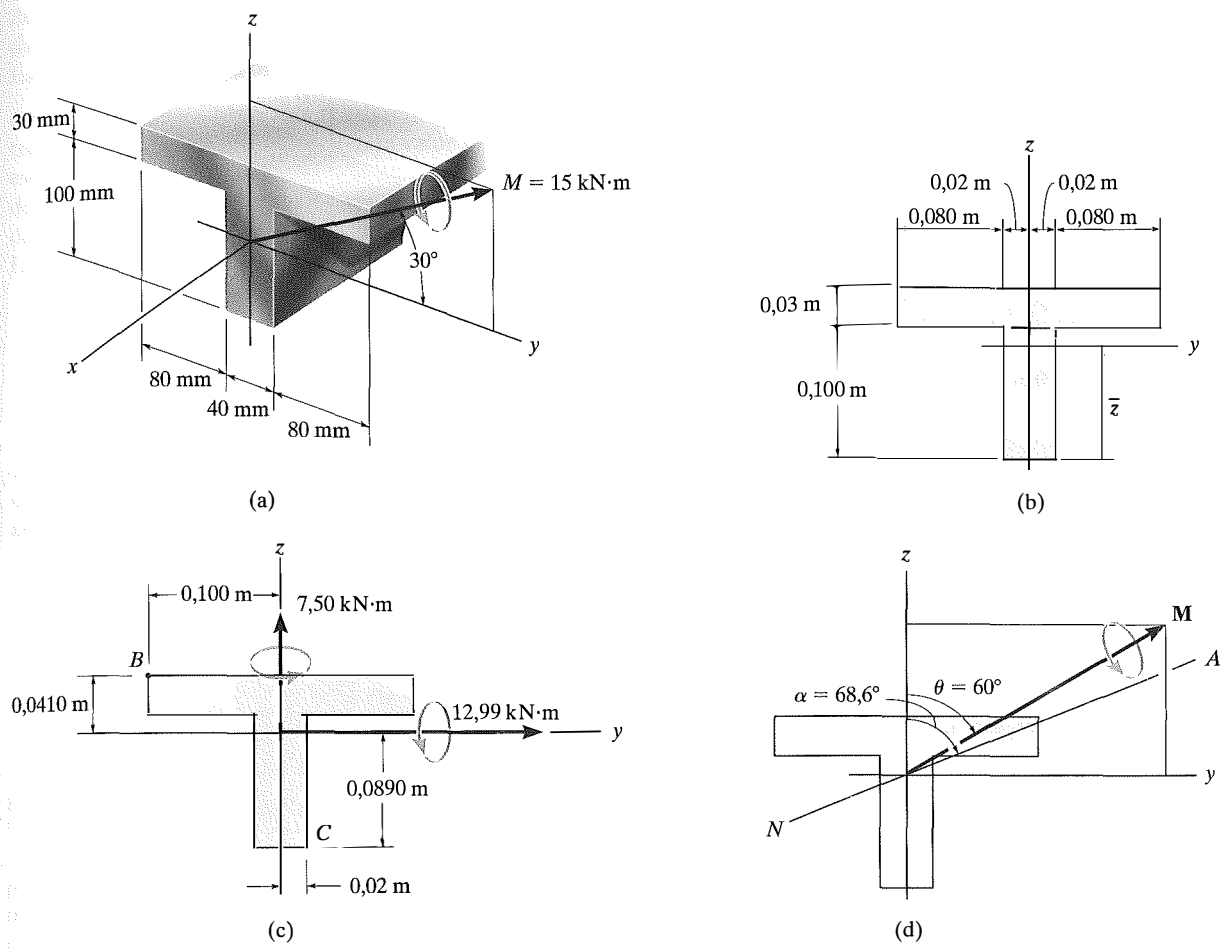


Figura 6.36

foram definidos corretamente. Como já dissemos, y deve representar o eixo para o momento principal de inércia *mínimo* e z deve representar o eixo para o momento principal de inércia *máximo*. Aqui, esses eixos estão posicionados adequadamente, visto que $I_y < I_z$. Usando essa configuração, θ e α são positivos quando medidos do eixo $+z$ em direção ao eixo $+y$. Por consequência, pela Figura 6.36a, $\theta = +60°$. Assim,

$$\text{tg } \alpha = \left[\frac{20{,}53(10^{-6})\text{ m}^4}{13{,}92(10^{-6})\text{ m}^4}\right] \text{tg } 60°$$

$$\alpha = 68{,}6° \qquad \textit{Resposta}$$

O eixo neutro é mostrado na Figura 6.36d. Como esperado, ele se encontra entre o eixo y e a linha de ação de **M**.

EXEMPLO 6.20

A seção em Z mostrada na Figura 6.37a está sujeita ao momento fletor $M = 20$ kN · m. Usando os métodos apresentados no Apêndice A (veja Exemplo A.4 ou A.5), os eixos principais y e z estão orientados como mostra a figura, de tal modo que representam os momentos principais de inércia mínimo e máximo, $I_y = 0{,}960(10^{-3})\text{m}^4$ e $I_z = 7{,}54(10^{-3})\text{m}^4$, respectivamente. Determine a tensão normal no ponto P e a orientação do eixo neutro.

SOLUÇÃO

Para usar a Equação 6.19, é importante que o eixo z seja o eixo principal para o momento de inércia *máximo*, o que ele é, porque a maior parte da área está em uma posição *mais afastada desse* eixo.

Componentes do momento interno. Pela Figura 6.37a,

$$M_y = 20 \text{ kN} \cdot \text{m sen } 57{,}1° = 16{,}79 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_z = 20 \text{ kN} \cdot \text{m cos } 57{,}1° = 10{,}86 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Tensão de flexão. Em primeiro lugar, devem ser determinadas as coordenadas y *e* z do ponto P. Observe que as coordenadas y' e z' de P são (−0,2 m, 0,35 m). Usando os triângulos colorido e sombreado da construção mostrada na Figura 6.37b, temos

$$y_P = -0{,}35 \text{ sen } 32{,}9° - 0{,}2 \text{ cos } 32{,}9° = -0{,}3580 \text{ m}$$

$$z_P = 0{,}35 \text{ cos } 32{,}9° - 0{,}2 \text{ sen } 32{,}9° = 0{,}1852 \text{ m}$$

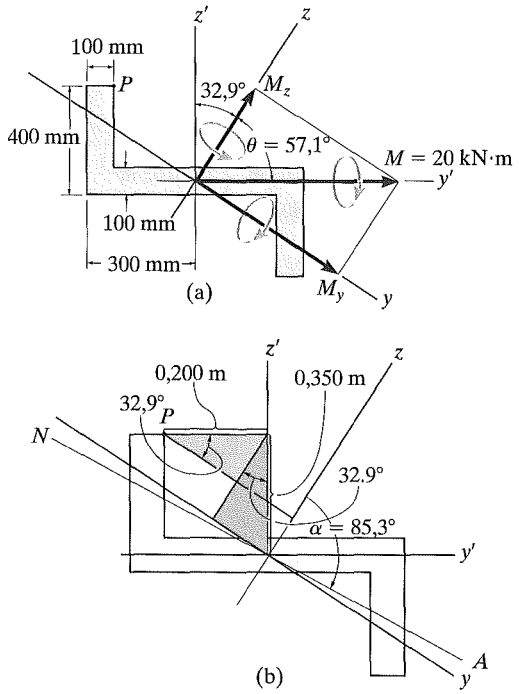


Figura 6.37

Aplicando a Equação 6.17, temos

$$\sigma_P = -\frac{M_z y_P}{I_z} + \frac{M_y z_P}{I_y}$$

$$= -\frac{(10{,}86\ \text{kN}\cdot\text{m})(-0{,}3580\ \text{m})}{7{,}54(10^{-3})\ \text{m}^4} + \frac{(16{,}79\ \text{kN}\cdot\text{m})(0{,}1852\ \text{m})}{0{,}960(10^{-3})\ \text{m}^4}$$

$$= 3{,}76\ \text{MPa}$$

Resposta

Orientação do eixo neutro. O ângulo $\theta = 57{,}1°$ é mostrado na Figura 6.37a. Assim,

$$\text{tg}\,\alpha = \left[\frac{7{,}54(10^{-3})\ \text{m}^4}{0{,}960(10^{-3})\ \text{m}^4}\right] \text{tg}\ 57{,}1°$$

$$\alpha = 85{,}3°$$

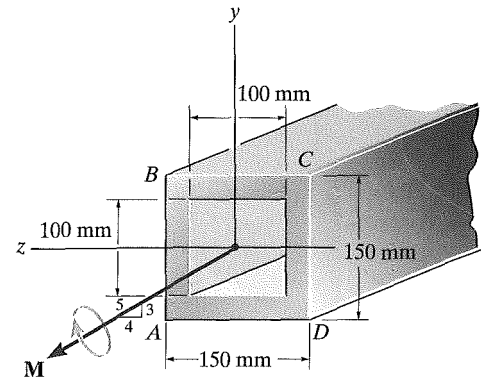
Resposta

O eixo neutro está localizado como mostra a Figura 6.37b.

PROBLEMAS

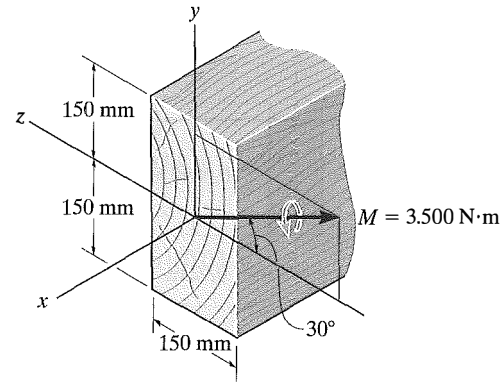
6.102. A viga-caixão está sujeita a um momento fletor $M = 25\ \text{kN}\cdot\text{m}$ direcionado, como mostra a figura. Determine a tensão de flexão máxima na viga e a orientação do eixo neutro.

6.103. Determine o valor máximo do momento fletor **M** de modo que a tensão de flexão no elemento não ultrapasse 100 MPa.



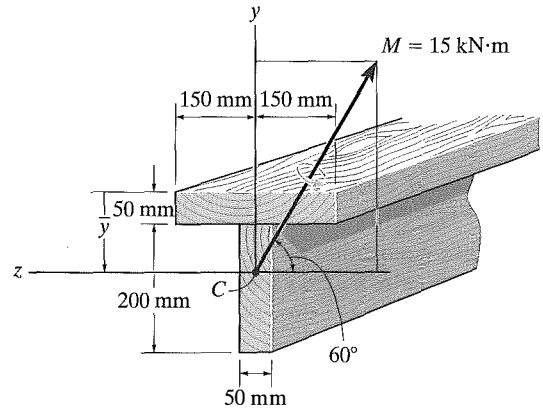
Problemas 6.102/103

***6.104.** A viga tem seção transversal retangular. Se estiver sujeita a um momento fletor $M = 3.500\ \text{N}\cdot\text{m}$ direcionado como mostra a figura, determine a tensão de flexão máxima na viga e a orientação do eixo neutro.



Problema 6.104

6.105. A viga em T está sujeita a um momento fletor $M = 15\ \text{kN}\cdot\text{m}$ direcionado, como mostra a figura. Determine a tensão de flexão máxima na viga e a orientação do eixo neutro. A localização y do centroide, C, deve ser determinada.

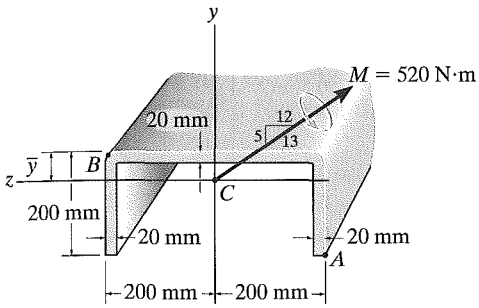


Problema 6.105

6.106. Se o momento interno resultante que age na seção transversal da escora de alumínio tiver valor $M = 520\ \text{N}\cdot\text{m}$ e for direcionado como mostra a figura, determine a tensão

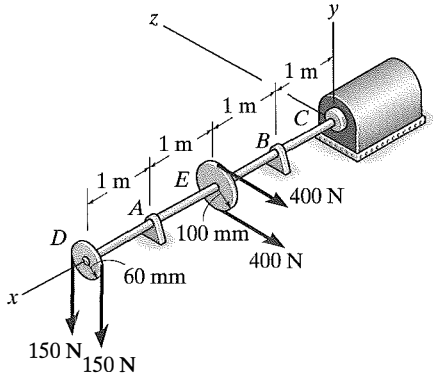
de flexão nos pontos A e B. A localização y do centroide C da área da seção transversal da escora deve ser determinada. Especifique, também, a orientação do eixo neutro.

6.107. O momento interno resultante que age na seção transversal da escora de alumínio tem valor $M = 520\ \text{N} \cdot \text{m}$ e está direcionado como mostra a figura. Determine a tensão de flexão máxima na escora. A localização y do centroide C da área da seção transversal da escora deve ser determinada. Especifique, também, a orientação do eixo neutro.



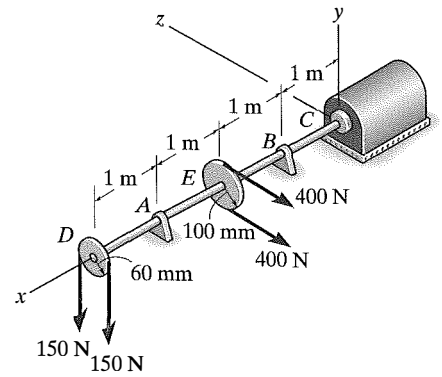
Problemas 6.106/107

6.108. O eixo de 30 mm de diâmetro está sujeito às cargas vertical e horizontal de duas polias como mostra a figura. O eixo está apoiado em dois mancais em A e B, que não oferecem nenhuma resistência à carga axial. Além do mais, podemos considerar que o acoplamento ao motor em C não oferece nenhum apoio ao eixo. Determine a tensão de flexão máxima desenvolvida no eixo.



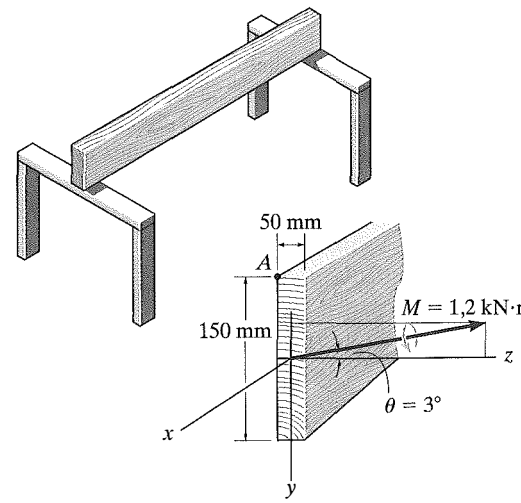
Problema 6.108

6.109. O eixo está sujeito às cargas vertical e horizontal de duas polias, como mostra a figura, e está apoiado em dois mancais em A e B, que não oferecem nenhuma resistência à carga axial. Além do mais, podemos considerar que acoplamento ao motor em C não oferece nenhum apoio ao eixo. Determine o diâmetro d exigido para o eixo se a tensão de flexão admissível para o material for $\sigma_{adm} = 180\ \text{MPa}$.



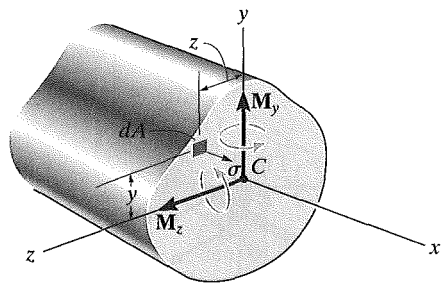
Problema 6.109

6.110. A tábua é usada como uma trave de assoalho simplesmente apoiada. Se um momento fletor $M = 1{,}2\ \text{kN} \cdot \text{m}$ for aplicado a 3° em relação ao eixo z, determine a tensão desenvolvida na tábua no canto A. Compare essa tensão com a desenvolvida pelo mesmo momento aplicado ao longo do eixo z ($\theta = 0°$). Qual é o ângulo para o eixo neutro quando $\theta = 3°$? *Comentário*: Normalmente, as tábuas do assoalho seriam pregadas à parte superior da viga de modo que $\theta \approx 0°$ e a alta tensão devida a um mau alinhamento eventual não ocorreria.



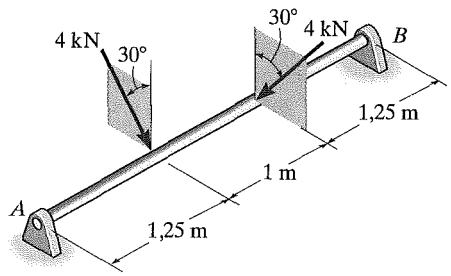
Problema 6.110

6.111. Considere o caso geral de uma viga prismática sujeita às componentes de momento fletor $\mathbf{M}_y$ e $\mathbf{M}_z$, como mostra a figura, quando os eixos x, y, z passam pelo centroide da seção transversal. Se o material for linear elástico, a tensão normal na viga é uma função linear da posição tal que $\sigma = a + by + cz$. Usando as condições de equilíbrio $0 = \int_A \sigma\, dA$, $M_y = \int_A z\sigma\, dA$, $M_z = \int_A -y\sigma\, dA$, determine as constantes a, b e c e mostre que a tensão normal pode ser determinada pela equação $\sigma = [-(M_z I_y + M_y I_{yz})y + (M_y I_z + M_z I_{yz})z]/(I_y I_z - I_{yz}^2)$, onde os momentos e produtos de inércia são definidos no Apêndice A.



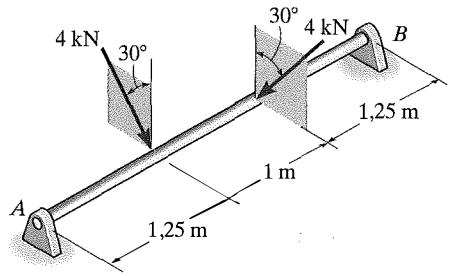
Problema 6.111

***6.112.** O eixo de aço de 65 mm de diâmetro está sujeito a duas cargas que agem nas direções mostradas na figura. Se os mancais em A e B não exercerem uma força axial sobre o eixo, determine a tensão de flexão máxima absoluta desenvolvida no eixo.



Problema 6.112

6.113. O eixo de aço está sujeito às duas cargas que agem nas direções mostradas na figura. Se os mancais em A e B não exercerem uma força axial sobre o eixo, determine o diâmetro exigido para o eixo, se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 180$ MPa.

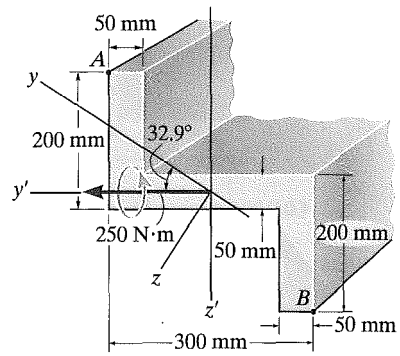


Problema 6.113

6.114. Usando as técnicas descritas no Apêndice A, Exemplo A.5 ou A.6, a seção em Z tem momentos principais de inércia $I_y = 0{,}060(10^{-3})\text{m}^4$ e $I_z = 0{,}471(10^{-3})\text{m}^4$, calculados em torno dos eixos principais de inércia y e z, respectivamente. Se a seção for submetida a um momento interno $M = 250$ N · m direcionado na horizontal, como mostra a figura, determine a tensão produzida no ponto A. Resolva o problema usando a Equação 6.17.

6.115. Resolva o Problema 6.114 usando a equação desenvolvida no Problema 6.111.

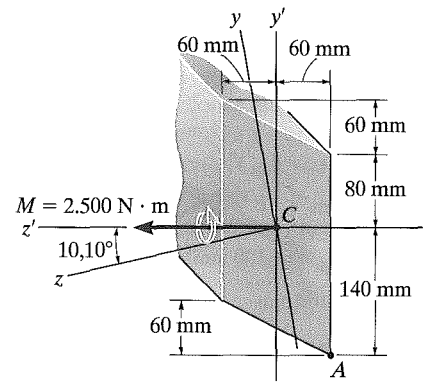
***6.116.** Usando as técnicas descritas no Apêndice A, Exemplo A.5 ou A.6, a seção em Z tem momentos principais de inércia $I_y = 0{,}060(10^{-3})\text{m}^4$ e $I_z = 0{,}471(10^{-3})\text{m}^4$, calculados em torno dos eixos principais de inércia y e z, respectivamente. Se a seção for submetida a um momento interno $M = 250$ N · m direcionado na horizontal, como mostra a figura, determine a tensão produzida no ponto B. Resolva o problema usando a Equação 6.17.



Problemas 6.114/115/116

6.117. Para a seção, $I_{y'} = 31{,}7(10^{-6})\text{m}^4$, $I_{z'} = 114(10^{-6})\text{m}^4$, $I_{y'z'} = 15{,}1(10^{-6})\text{m}^4$. Usando as técnicas apresentadas no Apêndice A, a área da seção transversal do elemento tem momentos principais de inércia $I_y = 29{,}0(10^{-6})\text{m}^4$ e $I_z = 117(10^{-6})\text{m}^4$, calculados em torno dos eixos principais de inércia y e z, respectivamente. Se a seção for submetida a um momento $M = 2.500$ N · m direcionado como mostra a figura, determine a tensão produzida no ponto A, usando a Equação 6.17.

6.118. Resolva o Problema 6.117 usando a equação desenvolvida no Problema 6.111.



Problemas 6.117/118

*6.6 Vigas compostas

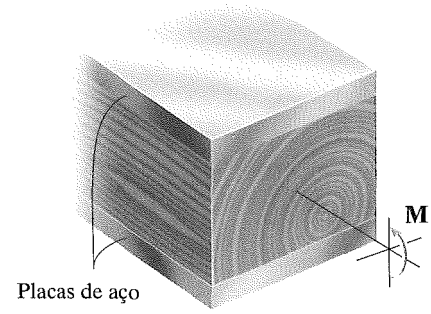
Vigas construídas com dois ou mais materiais diferentes são denominadas ***vigas compostas***. Citamos como exemplos as de madeira com tiras de aço nas partes superior e inferior (Figura 6.38a) ou as mais comuns, vigas de concreto reforçadas com hastes de aço (Figura 6.38b). Os engenheiros projetam essas vigas de propósito, para desenvolver um meio mais eficiente de

suportar cargas aplicadas. Por exemplo, na Seção 3.3 foi demonstrado que o concreto é excelente para resistir à tensão de compressão, mas muito ruim para resistir à tensão de tração. Por consequência, as hastes de reforço de aço mostradas na Figura 6.38b foram colocadas na zona de tensão da seção transversal da viga para que elas resistam às tensões de tração resultantes do momento **M**.

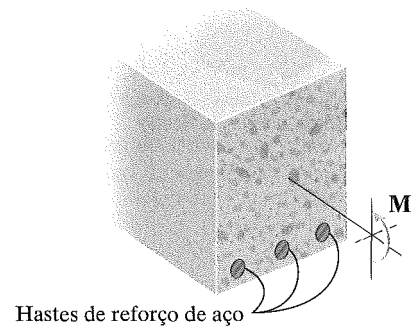
Visto que a fórmula da flexão foi desenvolvida para vigas de material homogêneo, ela não pode ser aplicada diretamente para determinar a tensão normal em uma viga composta. Entretanto, nesta seção, desenvolveremos um método para modificar ou "transformar" a seção transversal da viga em uma seção feita de um único material. Feito isso, a fórmula da flexão poderá ser usada para a análise de tensão.

Para explicar como aplicar o *método da seção transformada*, considere a viga composta feita de dois materiais, 1 e 2, com áreas de seção transversal mostradas na Figura 6.39a. Se um momento fletor for aplicado a essa viga, então, como ocorre com uma viga de material homogêneo, a área total da seção transversal *permanecerá plana* após a flexão e, por consequência, as deformações normais variarão linearmente de zero no eixo neutro a máxima no material mais afastado desse eixo (Figura 6.39b). Contanto que o material apresente comportamento linear elástico, a lei de Hooke se aplica e, em qualquer ponto no material 1, a tensão normal é determinada por $\sigma = E_1\epsilon$. De maneira semelhante, para o material 2, a distribuição de tensão é determinada por $\sigma = E_2\epsilon$. É óbvio que, se o material 1 for mais *rígido* que o material 2, por exemplo, aço e borracha, a maior parte da carga será suportada pelo material 1, visto que $E_1 > E_2$. Considerando que seja esse o caso, a distribuição de tensão será semelhante à mostrada na Figura 6.39c ou 6.39d. Em particular, observe o salto na tensão que ocorre na junção entre os materiais. Nesse local, a *deformação* é a *mesma*, porém, visto que os módulos de elasticidade ou rigidez para os materiais mudam repentinamente, a tensão também muda. A localização do eixo neutro e a determinação da tensão máxima na viga, usando essa distribuição de tensão, pode ser baseada em um procedimento de tentativa e erro. Isso requer satisfazer as seguintes condições: a distribuição de tensão produz uma força resultante nula na seção transversal e o momento da distribuição de tensão em torno do eixo neutro deve ser igual a **M**.

Contudo, um modo mais simples de cumprir essas duas condições é transformar a viga em outra, feita de um *único material*. Por exemplo, se considerarmos que a viga é feita inteiramente do material 2, menos rígido, então a seção transversal seria semelhante à mostrada na Figura 6.39e. Nesse caso, a altura h da viga permanece a *mesma*, já que a distribuição de tensão de deformação mostrada na Figura 6.39b deve ser preservada.



(a)



(b)

Figura 6.38

Todavia, a porção superior da viga tem de ser alargada, de modo a poder suportar uma carga *equivalente* à suportada pelo material 1, mais rígido, na Figura 6.39d. A largura necessária pode ser determinada considerando a força $d\mathbf{F}$ que age em uma área $dA = dz\,dy$ da viga na Figura 6.39a. Essa força é $dF = \sigma\,dA = (E_1\epsilon)\,dz\,dy$. Por outro lado, se a largura de um *elemento correspondente* de altura dy na Figura 6.39e for $n\,dz$, então $dF' = \sigma' dA' = (E_2\epsilon)n\,dz\,dy$. Igualando essas duas forças de modo a produzirem o mesmo momento em torno do eixo z, temos

$$E_1\epsilon\,dz\,dy = E_2\epsilon n\,dz\,dy$$

ou

$$n = \frac{E_1}{E_2} \tag{6.20}$$

Esse número adimensional n é denominado ***fator de transformação***. Esse fator indica que a seção transversal com largura b na viga original (Figura 6.39a) deve ser aumentada na largura para $b_2 = nb$ na região onde o material 1 está sendo transformado no material 2

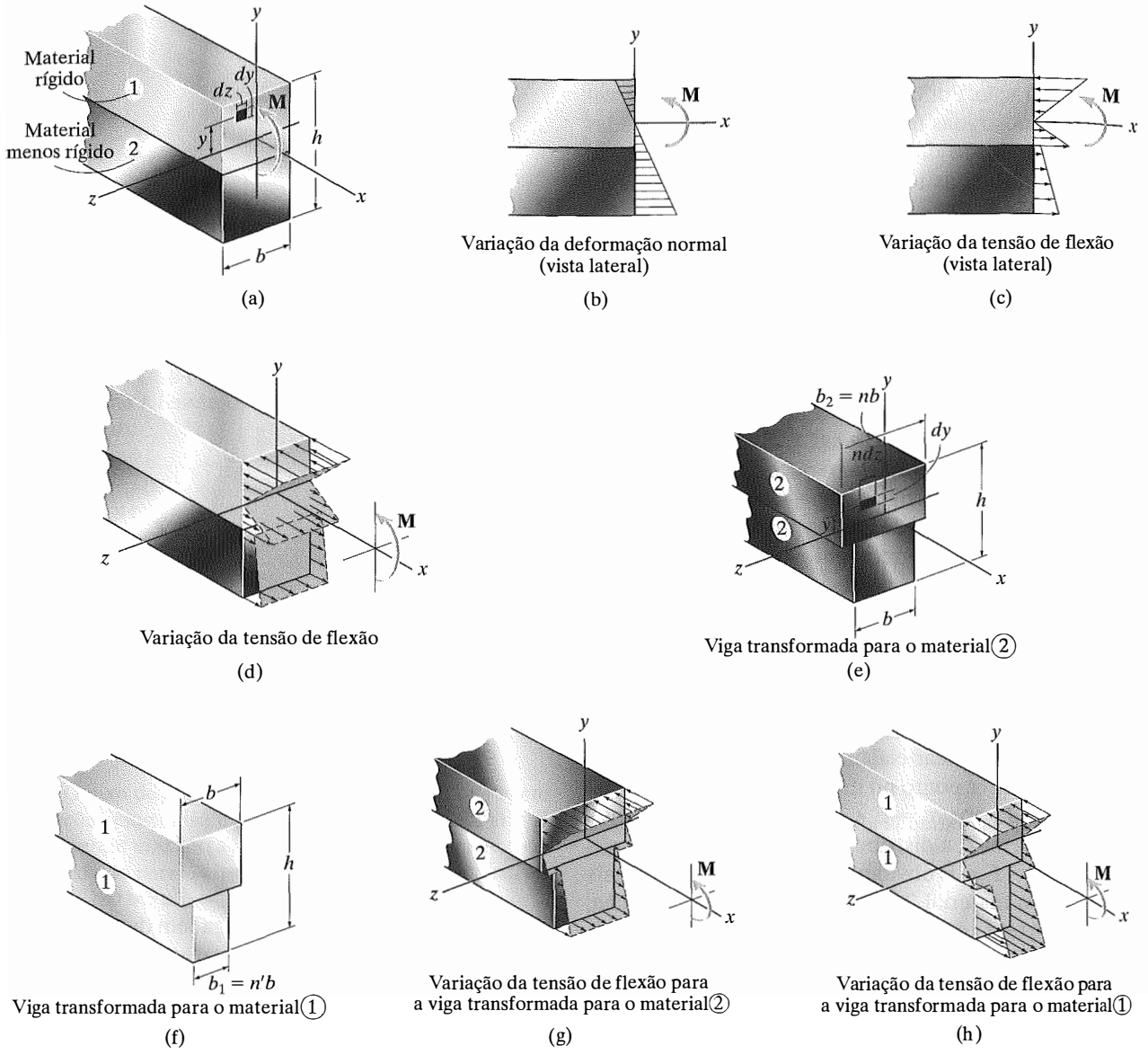


Figura 6.39

(Figura 6.39e). De um modo semelhante, se o material 2, menos rígido, for transformado no material 1, mais rígido, a seção transversal será semelhante à mostrada na Figura 6.39f. Aqui, a largura do material 2 foi mudada para $b_1 = n'b$, onde $n' = E_2/E_1$. Observe que, nesse caso, o fator de transformação n' deve ser *menor do que um*, visto que $E_1 > E_2$. Em outras palavras, precisamos uma quantidade menor do material mais rígido para suportar um determinado momento.

Assim que a viga tenha sido transformada em outra feita de um *único material*, a distribuição de tensão normal na seção transversal transformada será linear, como mostra a Figura 6.39g ou 6.39h. Por consequência, o centroide (eixo neutro) e o momento de inércia para a área transformada podem ser determinados, e a fórmula da flexão pode ser aplicada do modo usual para determinar a tensão em cada ponto na viga transformada. Entenda que a tensão na viga transformada é equivalente à tensão no *mesmo material* da viga verdadeira. Porém, para o *material transformado*, a tensão determinada na seção transformada tem de ser multiplicada pelo fator de transformação n (ou n'), já que a área do material transformado, $dA' = n\,dz\,dy$, é n vezes a área do material verdadeiro $dA = dz\,dy$. Isto é,

$$\begin{aligned} dF &= \sigma\,dA = \sigma' dA' \\ \sigma\,dz\,dy &= \sigma' n\,dz\,dy \\ \sigma &= n\sigma' \end{aligned} \tag{6.21}$$

Os exemplos 6.21 e 6.22 ilustram numericamente a aplicação do método da seção transformada.

PONTOS IMPORTANTES

- *Vigas compostas* são feitas de materiais diferentes, de modo a suportar uma carga com eficiência. A aplicação da fórmula da flexão exige que o material seja homogêneo e, portanto, a seção transversal da viga deve ser transformada em um único material, se quisermos usar essa fórmula para calcular a tensão de flexão.
- O *fator de transformação* é uma razão entre os módulos dos diferentes materiais que compõem a viga. Usado como multiplicador, esse fator converte as dimensões da seção transversal da viga composta em uma viga feita de um único material, de modo que essa viga tenha a mesma resistência que a viga composta. Assim, o material rígido será substituído por um material menos rígido e vice-versa.
- Uma vez determinada a tensão na seção transformada, ela deve ser multiplicada pelo fator de transformação para obter a tensão na viga verdadeira.

EXEMPLO 6.21

Uma viga composta é feita de madeira e reforçada com uma tira de aço localizada em sua parte interior. Ela tem a área de seção transversal mostrada na Figura 6.40a. Se for submetida a um momento fletor $M = 2\ \text{kN} \cdot \text{m}$, determine a tensão normal nos pontos B e C. Considere $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$. $E_{mad} = 12\ \text{GPa}$.

SOLUÇÃO

Propriedades da seção. Embora a escolha seja arbitrária, aqui, transformaremos a seção em outra feita inteiramente de aço. Visto que o aço tem rigidez maior do que a madeira ($E_{aço} > E_{mad}$), a largura da madeira deve ser *reduzida* a uma largura equivalente para o aço. Por consequência, n deve ser menor do que um. Para que isso ocorra, $n = E_{mad}/E_{aço}$, de modo que

$$b_{aço} = nb_{mad} = \frac{12\ \text{GPa}}{200\ \text{GPa}}(150\ \text{mm}) = 9\ \text{mm}$$

A seção transformada é mostrada na Figura 6.40b.

A localização do centroide (eixo neutro), calculada em relação a um eixo de referência localizado na *parte inferior* da seção, é

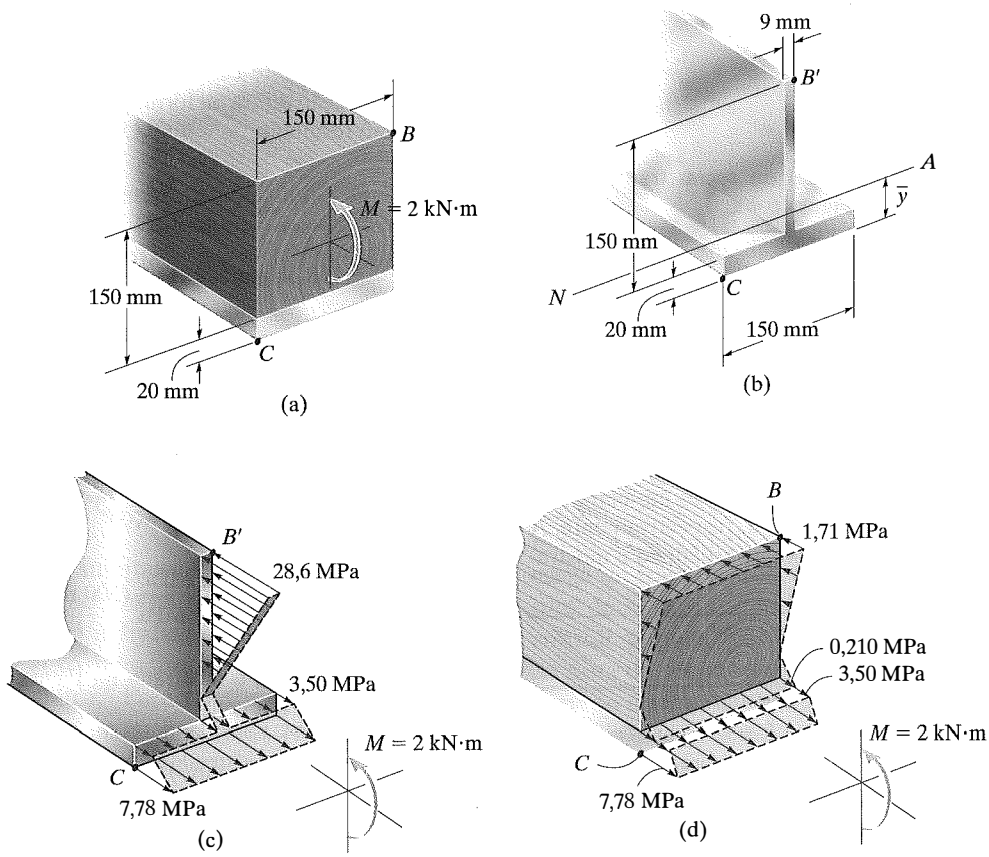


Figura 6.40

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} =$$

$$= \frac{[0{,}01\text{ m}](0{,}02\text{ m})(0{,}150\text{ m}) + [0{,}095\text{ m}](0{,}009\text{ m})(0{,}150\text{ m})}{0{,}02\text{ m}(0{,}150\text{ m}) + 0{,}009\text{ m}(0{,}150\text{ m})}$$

$$= 0{,}03638\text{ m}$$

Portanto, o momento de inércia em torno do eixo neutro é

$$I_{NA} = \left[\frac{1}{12}(0{,}150\text{ m})(0{,}02\text{ m})^3 + \right.$$

$$\left. + (0{,}150\text{ m})(0{,}02\text{ m})(0{,}03638\text{ m} - 0{,}01\text{ m})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(0{,}009\text{ m})(0{,}150\text{ m})^3 + \right.$$

$$\left. + (0{,}009\text{ m})(0{,}150\text{ m})(0{,}095\text{ m} - 0{,}03638\text{ m})^2\right]$$

$$= 9{,}358(10^{-6})\text{ m}^4$$

Tensão normal. Aplicando a fórmula da flexão, a tensão normal em B' e C é

$$\sigma_{B'} = \frac{2\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}170\text{ m} - 0{,}03638\text{ m})}{9{,}358(10^{-6})\text{ m}^4} = 28{,}6\text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{2\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}03638\text{ m})}{9{,}358(10^{-6})\text{ m}^4} = 7{,}78\text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

A distribuição da tensão normal na seção transformada (toda de aço) é mostrada na Figura 6.40c.

A tensão normal na madeira, localizada em B na Figura 6.40a, é determinada pela Equação 6.21; isto é,

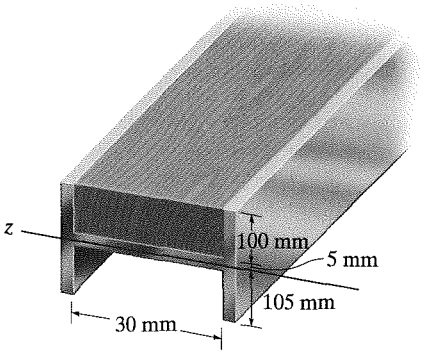
$$\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12\text{ GPa}}{200\text{ GPa}}(28{,}56\text{ MPa}) = 1{,}71\text{ MPa}$$

Resposta

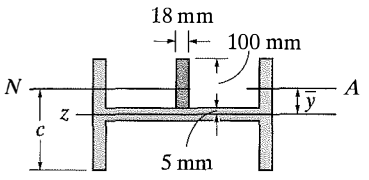
Usando esses conceitos, mostre que a tensão normal no aço e na madeira no ponto onde elas estão em contato é $\sigma_{aço} = 3{,}50$ MPa e $\sigma_{mad} = 0{,}210$ MPa, respectivamente. A distribuição de tensão normal na viga verdadeira é mostrada na Figura 6.40d.

EXEMPLO 6.22

Para reforçar uma viga de aço, uma tábua de carvalho foi colocada entre seus flanges, como mostra a Figura 6.41a. Se a tensão normal admissível para o aço for $(\sigma_{adm})_{aço} = 168$ MPa e para a madeira for $(\sigma_{adm})_{mad} = 21$ MPa, determine o momento fletor máximo que a viga pode suportar com e sem o reforço de madeira. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{mad} = 12$ GPa. O momento de inércia da viga de aço é $I_z = 7{,}93 \times 10^6$ mm^4, e sua área de seção transversal é $A = 5.493{,}75$ mm^2.



(a)



(b)

Figura 6.41

SOLUÇÃO

Sem a tábua. Neste caso, o eixo neutro coincide com o eixo z. A aplicação direta da fórmula da flexão para a viga de aço dá como resultado

$$(\sigma_{adm})_{aço} = \frac{Mc}{I_z}$$

$$168\text{ N/mm}^2 = \frac{M(105\text{ mm})}{7{,}93(10^6)\text{ mm}^4}$$

$$M = 12{,}688\text{ kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

Com a tábua. Visto que agora temos uma viga composta, devemos transformar a seção em um único material. Será mais fácil transformar a madeira em uma quantidade equivalente de aço. Para tal, $n = E_{mad}/E_{aço}$. Assim, a largura de uma quantidade equivalente de aço é

$$b_{aço} = nb_{mad} = \frac{12(10^3)\text{ MPa}}{200(10^3)\text{ MPa}}(300\text{ mm}) = 18\text{ mm}$$

A seção transformada é mostrada na Figura 6.41b. O eixo neutro encontra-se em

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[0](5.493{,}75\text{ mm}^2) + [55\text{ mm}](100\text{ mm})(18\text{ mm})}{5.493{,}75\text{ mm}^2 + 100(18)\text{ mm}^2}$$

$$= 13{,}57\text{ mm}$$

E o momento de inércia em torno do eixo neutro é

$$I = [7{,}93(10^6)\ \text{mm}^2 + 5.493{,}75\ \text{mm}^2(13{,}57\ \text{mm})^2]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(18\ \text{mm})(100\ \text{mm})^3 +\right.$$

$$\left. + (18\ \text{mm})(100\ \text{mm})^3(55\ \text{mm} - 13{,}57\ \text{mm})^2\right]$$

$$= 13{,}53(10^6)\ \text{mm}^4$$

A tensão normal máxima no aço ocorrerá na *parte inferior* da viga (Figura 6.41b). Aqui, $c = 105\ \text{mm} + 13{,}57\ \text{mm} = 118{,}57\ \text{mm}$. O momento máximo baseado na tensão admissível para o aço é

$$(\sigma_{\text{adm}})_{\text{aço}} = \frac{Mc}{I}$$

$$168\ \text{N/mm}^2 = \frac{M(118{,}57\ \text{mm})}{13{,}53 \times 10^6\ \text{mm}^4}$$

$$M = 19{,}17\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

A tensão normal máxima na madeira ocorre na parte superior da viga (Figura 6.41b). Aqui, $c' = 105\ \text{mm} - 13{,}57\ \text{mm} = 91{,}43\ \text{mm}$. Visto que $\sigma_{\text{mad}} = n\sigma_{\text{aço}}$, o momento máximo baseado na tensão admissível para a madeira é

$$(\sigma_{\text{adm}})_{\text{mad}} = n\frac{M'c'}{I}$$

$$21\ \text{N/mm}^2 = \left[\frac{12(10^3)\ \text{MPa}}{200(10^3)\ \text{MPa}}\right]\frac{M'(91{,}43\ \text{mm})}{13{,}53 \times 10^6\ \text{mm}^4}$$

$$M' = 51{,}79\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Por comparação, o momento máximo é limitado pela tensão admissível no aço. Portanto,

$$M = 19{,}17\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Usando a tábua como reforço, conseguimos 48% de capacidade adicional para o momento da viga.

*6.7 Vigas de concreto armado

Todas as vigas sujeitas a flexão pura devem resistir a tensões de tração e compressão. Porém, o concreto é muito suscetível a fratura quando está sob tração, portanto, por si só, não seria adequado para resistir a um momento fletor.* Para contornar essa deficiência, os engenheiros colocam hastes de reforço de aço no interior das vigas de concreto no local onde o concreto está sob tração (Figura 6.42a). Para maior efetividade, essas hastes são localizadas o mais longe possível do eixo neutro da viga, de modo que o momento criado pelas forças desenvolvidas nas hastes seja maior em torno do eixo neutro. Por outro lado, também é necessário cobrir as hastes com concreto para protegê-las da corrosão ou da perda de resistência se ocorrer um incêndio. Em situações reais de projeto com concreto armado, a capacidade do concreto de suportar qualquer carga de tração é desprezada, visto que a possível fratura do concreto é imprevisível. O resultado é que se considera que a distribuição da tensão normal que age na área da seção transversal de uma viga de concreto armado é semelhante à mostrada na Figura 6.42b.

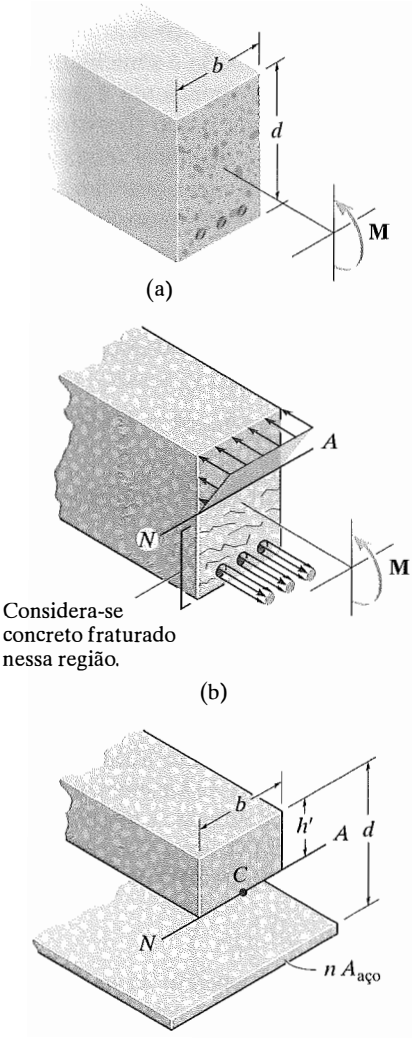


Figura 6.42

A análise da tensão requer localizar o eixo neutro e determinar a tensão máxima no aço e no concreto. Para tal, em primeiro lugar, a área de aço $A_{\text{aço}}$ é transformada em uma área equivalente de concreto usando o fator de transformação $n = E_{\text{aço}}/E_{\text{conc}}$. Essa razão, que dá $n > 1$,

* A inspeção de seu diagrama tensão–deformação particular na Figura 3.11 revela que o concreto pode ser 12,5 vezes mais resistente sob compressão do que sob tração.

é escolhida, porque é preciso uma quantidade "maior" de concreto para substituir o aço. A área transformada é $nA_{aço}$, e a seção transformada é semelhante à mostrada na Figura 6.42c. Aqui, d representa a distância entre a parte superior da viga até o aço (transformado), b é a largura da viga e h' é a distância ainda desconhecida entre a parte superior da viga e o eixo neutro. Podemos obter h' usando o fato de que o centroide C da área da seção transversal da seção transformada se encontra no eixo neutro (Figura 6.42c). Portanto, com referência ao eixo neutro, o momento das duas áreas, $\Sigma \tilde{y} A$, deve ser nulo, visto que $\bar{y} = \Sigma \tilde{y} A / \Sigma A = 0$. Assim,

$$bh'\left(\frac{h'}{2}\right) - nA_{aço}(d - h') = 0$$

$$\frac{b}{2}h'^2 + nA_{aço}h' - nA_{aço}d = 0$$

Uma vez obtida h' por essa equação quadrática, a solução prossegue da maneira usual para obter a tensão na viga.

EXEMPLO 6.23

A viga de concreto armado tem a área de seção transversal mostrada na Figura 6.43a. Se for submetida a um momento fletor $M = 60\ \text{kN} \cdot \text{m}$, determine a tensão normal em cada uma das hastes de reforço de aço e a tensão normal máxima no concreto. Considere $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$ e $E_{conc} = 25\ \text{GPa}$.

SOLUÇÃO

Visto que a viga é feita de concreto, na análise que faremos a seguir desprezaremos sua resistência à tensão de tração.

Propriedades da seção. A área total de aço, $A_{aço} = 2[\pi(12{,}5\ \text{mm})^2] = 982\ \text{mm}^2$ será transformada em uma área equivalente de concreto (Figura 6.43b). Aqui,

$$A' = nA_{aço} = \frac{200(10^3)\ \text{MPa}}{25(10^3)\ \text{MPa}}(982\ \text{mm}^2) = 7.856\ \text{mm}^2$$

Exige-se que o centroide se encontre no eixo neutro. Assim, $\Sigma \tilde{y} A = 0$, ou

$$300\ \text{mm}\ (h')\frac{h'}{2} - 7.856\ \text{mm}^2(400\ \text{mm} - h') = 0$$

$$h'^2 + 52{,}37h' - 20.949{,}33 = 0$$

Resolvendo para a raiz positiva,

$$h' = 120{,}90\ \text{mm}$$

Usando esse valor para h', o momento de inércia da seção transformada, calculado em torno do eixo neutro, é

$$I = \left[\frac{1}{12}(300\ \text{mm})(120{,}90\ \text{mm})^3 + 300\ \text{mm}(120{,}90\ \text{mm})\left(\frac{120{,}9\ \text{mm}}{2}\right)^2 + 7.856\text{mm}^2\,(400\text{mm} - 120{,}9\ \text{mm})^2\right]$$

$$= 788{,}67 \times 10^6\ \text{mm}$$

Tensão normal. Aplicando a fórmula da flexão à seção transformada, a tensão normal máxima no concreto é

$$(\sigma_{conc})_{máx} = \frac{60\ \text{kN} \cdot \text{m}\,(1.000\ \text{mm/m})(120{,}90\ \text{mm})(1.000\ \text{N/kN})}{788{,}67 \times 10^6\ \text{mm}^4}$$

$$= 9{,}20\ \text{M} \qquad \textit{Resposta}$$

A tensão normal à qual a tira "de concreto" resiste e que é substituída pelo aço é

$$\sigma'_{conc} = \frac{60\ \text{kN} \cdot \text{m}\,(1.000\ \text{mm/m})(1.000\ \text{N/kN})(400\ \text{m} - 120{,}90\ \text{mm})}{788{,}67 \times 10^6\ \text{mm}^4}$$

$$= 21{,}23\ \text{MPa}$$

A tensão normal em cada uma das duas hastes de reforço é, portanto,

$$\sigma_{aço} = n\sigma'_{conc} = \left(\frac{200(10^3)\ \text{MPa}}{25(10^3)\ \text{MPa}}\right)21{,}23\ \text{MPa} = 169{,}84\ \text{MPa}$$

Resposta

A distribuição da tensão normal é mostrada graficamente na Figura 6.43c.

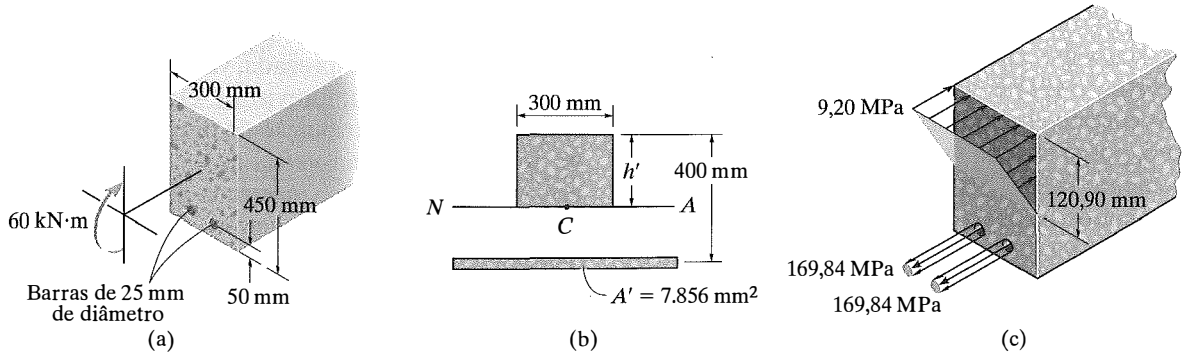


Figura 6.43

*6.8 Vigas curvas

A fórmula da flexão aplica-se a um elemento prismático *reto*, já que demonstramos que, para um elemento reto a deformação normal varia linearmente em relação ao eixo neutro. Entretanto, se o elemento for *curvo*, essa premissa torna-se inexata e, portanto, temos de desenvolver outra equação que descreva a distribuição de tensão. Nesta seção, consideraremos a análise de uma *viga curva*, isto é, um elemento que tem um eixo curvo e está sujeito a flexão. Como exemplos típicos, citamos ganchos e elos de corrente. Em todos os casos, os elementos não são delgados; mais exatamente, têm uma curva acentuada, e as dimensões de suas seções transversais são grandes, em comparação com o raio de curvatura.

A análise a ser considerada supõe que a área da seção transversal é constante e tem um eixo de simetria perpendicular à direção do momento aplicado **M** (Figura 6.44a). Além disso, o material é homogêneo e isotrópico e comporta-se de maneira linear elástica quando a carga é aplicada. Como no caso de uma viga reta, também admitiremos que as *seções transversais* do elemento *permanecem planas* após a aplicação do momento. Além do mais, qualquer distorção da seção transversal dentro de seu próprio plano será desprezada.

Para realizar a análise, três raios, que se estendem do centro de curvatura O' do elemento, são identificados na Figura 6.44a. São os seguintes: $\bar{r}$, que indica a localização conhecida do *centroide* para a área da seção transversal; R, que indica a localização ainda não especificada do *eixo neutro*, e r, que indica a localização de um *ponto arbitrário* ou elemento de área dA na seção transversal. Observe que o eixo neutro se encontra no interior da seção transversal, visto que o momento **M** cria compressão nas fibras superiores da viga e tração nas fibras inferiores, e, por definição, o eixo neutro é uma reta onde a tração e a deformação são nulos.

Se isolarmos um segmento diferencial da viga (Figura 6.44b), a tensão tende a deformar o material de tal modo que cada seção transversal sofrerá uma rotação de um ângulo $\delta\theta/2$. A deformação normal ϵ na tira de material localizada em r agora será determinada. Essa tira tem comprimento original $r\,d\theta$ (Figura 6.44b). Contudo, devido às rotações $\delta\theta/2$, a mudança total no comprimento da tira é $\delta\theta(R - r)$. Por consequência,

$$\epsilon = \frac{\delta\theta(R - r)}{r\,d\theta}$$

Definindo $k = \delta\theta/d\theta$, que é constante para qualquer elemento particular, temos

$$\epsilon = k\left(\frac{R - r}{r}\right)$$

Diferentemente do caso das vigas retas, podemos ver, aqui, que a ***deformação normal*** é uma função não-linear de r; na verdade, ela varia de ***maneira hiperbólica***. Isso ocorre ainda que a seção transversal da viga permaneça plana após a deformação. Visto que o momento provoca comportamento elástico no material, a lei de Hooke se aplica e, portanto, a tensão em função da posição é

$$\sigma = Ek\left(\frac{R - r}{r}\right) \tag{6.22}$$

Essa variação também é hiperbólica e, uma vez que agora já foi definida, podemos determinar a localização do eixo neutro e relacionar a distribuição de tensão ao momento interno resultante M.

Para obter a localização R do eixo neutro, exige-se que a força interna resultante provocada pela distribuição de tensão que age na seção transversal seja nula; isto é,

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad \int_A \sigma\,dA = 0$$

$$\int_A Ek\left(\frac{R - r}{r}\right) dA = 0$$

Visto que Ek e R são constantes, temos

$$R\int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA = 0$$

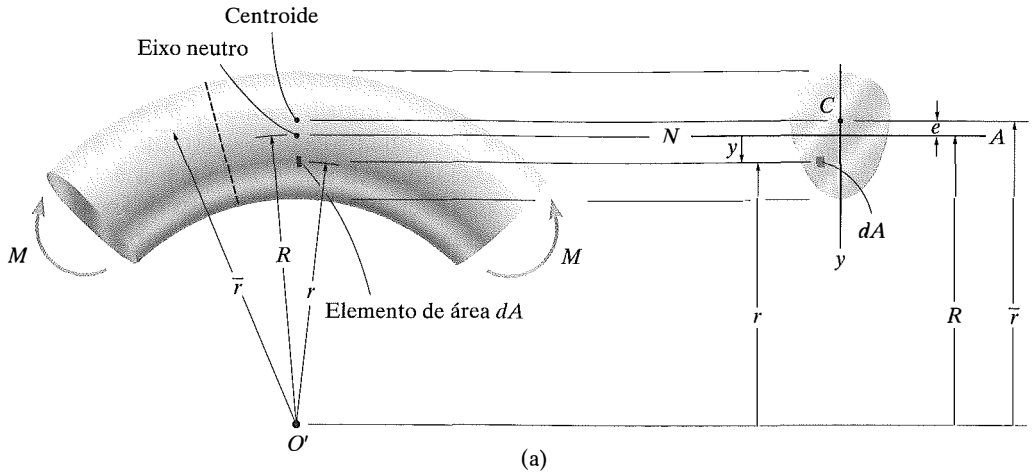
Resolvendo para R, obtemos

$$R = \frac{A}{\displaystyle\int_A \frac{dA}{r}} \tag{6.23}$$

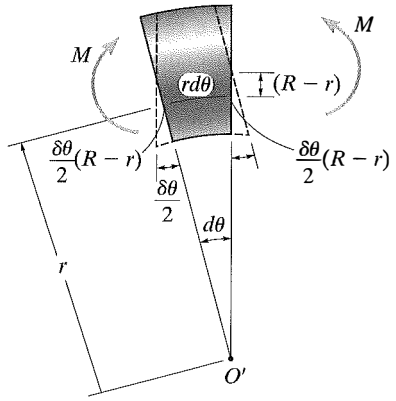
Nessa expressão,

R = localização do eixo neutro, determinada em relação ao centro de curvatura O' do elemento
A = área da seção transversal do elemento
r = posição arbitrária do elemento de área dA na seção transversal, determinada em relação ao centro de curvatura O' do elemento

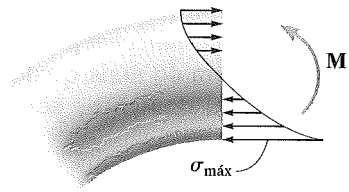
A integral na Equação 6.23 pode ser calculada para várias geometrias de seção transversal. A Tabela 6.2 apresenta os resultados para algumas seções transversais comuns.



(a)

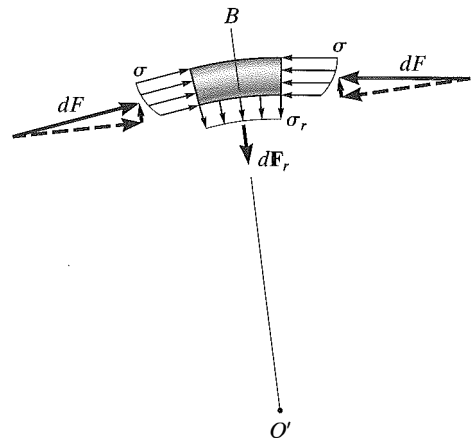


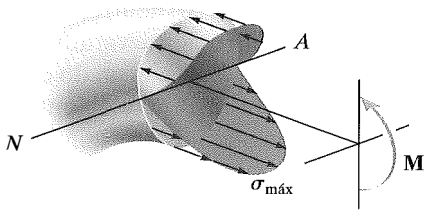
(b)



Variação da tensão de flexão
(vista lateral)

(c)



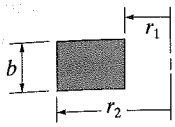
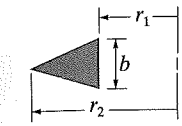
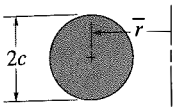
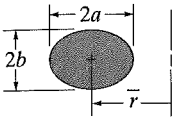


(d)

(e)

Figura 6.44

TABELA 6.2

Forma	Área	$\int_A \frac{dA}{r}$
	$b\,(r_2 - r_1)$	$b \ln \frac{r_2}{r_1}$
	$\frac{b}{2}(r_2 - r_1)$	$\frac{b\,r_2}{(r_2 - r_1)}\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right) - b$
	πc^2	$2\pi\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}\right)$
	πab	$\frac{2\pi b}{a}\left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - a^2}\right)$

Para relacionar a distribuição de tensão com o momento fletor resultante, exige-se que o momento interno resultante seja igual ao momento da distribuição de tensão calculado em torno do eixo neutro. Pela Figura 6.44a, a tensão σ que age sobre um elemento de área dA localizado a uma distância y do eixo neutro cria uma força $dF = \sigma\, dA$ no elemento e um momento em torno do eixo neutro $dM = y(\sigma\, dA)$. Esse momento é positivo, visto que, pela regra da mão direita, ele está direcionado na mesma direção de **M**. Para a seção transversal inteira, exige-se $M = \int y\sigma\, dA$.

Uma vez que $y = R - r$, e σ é definida pela Equação 6.22, temos

$$M = \int_A (R - r)Ek\left(\frac{R - r}{r}\right) dA$$

Expandindo essa expressão, e entendendo que Ek e R são constantes, obtemos

$$M = Ek\left(R^2 \int_A \frac{dA}{r} - 2R \int_A dA + \int_A r\, dA\right)$$

A primeira integral é equivalente a A/R como determinado pela Equação 6.23, e a segunda integral é simplesmente a área de seção transversal A. Percebendo que a localização do centroide da seção transversal é determinada por $r = \int r\, dA/A$, a terceira integral pode ser substituída por rA. Assim, podemos escrever

$$M = EkA(\bar{r} - R)$$

Resolvendo para Ek na Equação 6.22, substituindo na equação acima e resolvendo para σ, temos

$$\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)} \tag{6.24}$$

Nessa expressão,

σ = tensão normal no elemento
M = momento interno, determinado pelo método das seções e equações de equilíbrio e calculado em torno do eixo neutro para a seção transversal. Esse momento é *positivo* se tender a aumentar o raio de curvatura do elemento, isto é, se tender a recuperar a forma reta do elemento
A = área da seção transversal do elemento
R = distância medida do centro de curvatura até o eixo neutro, determinada pela Equação 6.23
$\bar{r}$ = distância medida do centro de curvatura até o centroide da área da seção transversal
r = distância medida do centro de curvatura até o ponto onde a tensão σ deve ser determinada

Pela Figura 6.44a, $y = R - r$ ou $r = R - y$. Além disso, a distância constante e normalmente muito pequena é $e = r - R$. Quando esses resultados são substituídos na Equação 6.24, podemos escrever também

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)} \tag{6.25}$$

Essas duas últimas equações representam duas formas da chamada *fórmula da viga curva*, que, como a fórmula da flexão, pode ser usada para determinar a distribuição de tensão normal em elementos curvos. Essa distribuição de tensão, como dissemos antes, é hiperbólica; um exemplo é mostrado nas Figuras 6.44c e 6.44d. Visto que a tensão age na direção da circunferência da viga, às vezes ela é denominada ***tensão circunferencial***. Todavia, devemos perceber que, devido à curvatura da viga, a tensão circunferencial criará uma componente correspondente de ***tensão radial***, assim denominada porque essa componente age na direção radial. Para mostrar como ela é desenvolvida, considere o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 6.44e, que é um segmento da parte superior do elemento diferencial na Figura 6.44b. Aqui, a tensão radial σ_r é necessária, visto que ela cria a força dF_r exigida para equilibrar as componentes das forças circunferenciais dF que agem ao longo da reta $O'B$.

Às vezes, as tensões radiais no interior de elementos curvos podem tornar-se significativas, especialmente se o elemento for construído com chapas finas e tiver, por exemplo, a forma de uma seção em I. Nesse caso, a ten-

são radial pode tornar-se tão grande quanto a tensão circunferencial e, por consequência, o elemento deve ser projetado para resistir a ambas as tensões. Entretanto, na maioria dos casos, essas tensões podem ser desprezadas, em especial se a seção transversal do elemento for *sólida*. Então, a fórmula da viga curva dará resultados muito próximos daqueles determinados por meios experimentais ou por análise matemática baseada na teoria da elasticidade.

Geralmente, a fórmula da viga curva é usada quando a curvatura do elemento é muito pronunciada, como no caso de ganchos ou anéis. Todavia, se o raio de curvatura for maior do que cinco vezes a largura do elemento, a *fórmula da flexão* pode ser usada normalmente para determinar a tensão. Especificamente, para seções retangulares para as quais essa razão é igual a 5, a tensão normal máxima, quando determinada pela fórmula da flexão, será aproximadamente 7% *menor* do que seu valor determinado pela fórmula da viga curva. Esse erro é reduzido mais ainda quando a razão entre o raio de curvatura e a largura for maior que 5.*

PONTOS IMPORTANTES

- A *fórmula da viga curva* deve ser usada para determinar a tensão circunferencial em uma viga quando o raio de curvatura for menor do que cinco vezes a largura da viga.
- Devido à curvatura da viga, a deformação normal na viga *não* varia linearmente com a largura, como ocorre em uma viga reta. O resultado é que o eixo neutro não passa pelo centroide da seção transversal.
- A componente da tensão radial causada pela flexão pode, em geral, ser desprezada, especialmente se a seção transversal for uma seção sólida e não for feita de chapas finas.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Para aplicar a fórmula da viga curva, sugerimos o seguinte procedimento.

Propriedades da seção

- Determine a área da seção transversal A e a localização do centroide, $\bar{r}$, medida em relação ao centro de curvatura.
- Calcule a localização do eixo neutro, R, usando a Equação 6.23 ou a Tabela 6.2. Se a área de seção transversal consistir em n partes "compostas", calcule $\int dA/r$ para *cada parte*. Então, pela Equação 6.23, para a seção inteira, $R = \Sigma A/\Sigma(\int dA/r)$. Em todos os casos, $R < \bar{r}$.

Tensão normal

- A tensão normal localizada em um ponto r afastado do centro de curvatura é determinada pela Equação 6.24. Se a distância y até o ponto for medida em relação ao eixo neutro, então calcule $e = \bar{r} - R$ e use a Equação 6.25.
- Visto que $\bar{r} - R$ geralmente produz um número *muito pequeno*, é melhor calcular $\bar{r}$ e R com precisão suficiente para que a subtração dê um número e que tenha no mínimo três algarismos significativos.
- Se a tensão for positiva, será de tração, ao passo que, se for negativa, será de compressão.
- Uma distribuição de tensão em toda a seção transversal pode ser apresentada de forma gráfica, ou um elemento de volume do material pode ser isolado e usado para representar a tensão que age no ponto na seção transversal onde foi calculada.

EXEMPLO 6.24

Uma barra de aço com seção transversal retangular tem a forma de um arco de círculo como mostra a Figura 6.45a. Se a tensão normal admissível for $\sigma_{adm} = 140$ MPa, determine o momento fletor máximo M que pode ser aplicado à barra. Qual seria esse momento se a barra fosse reta?

SOLUÇÃO

Momento interno. Visto que M tende a aumentar o raio de curvatura da barra, ele é positivo.

Propriedades da seção. A localização do eixo neutro é deter inada pela Equação 6.23. Pela Figura 6.45a, temos

$$\int_A \frac{dA}{r} = \int_{90\,mm}^{110\,mm} \frac{(20\,mm)\,dr}{r} =$$

$$= (200\,mm)\ln r \Big|_{90\,mm}^{110\,mm} = 4{,}0134\,mm$$

É claro que esse mesmo resultado pode ser obtido diretamente pela Tabela 6.2. Assim,

$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}} = \frac{(20\,mm)(20\,mm)}{4{,}0134\,mm} = 99{,}666\,mm$$

* Veja, por exemplo, Boresi, A. P., et al., *Advanced mechanics of materials*. 3. ed. Nova York: John Wiley & Sons, 1978, p. 333.

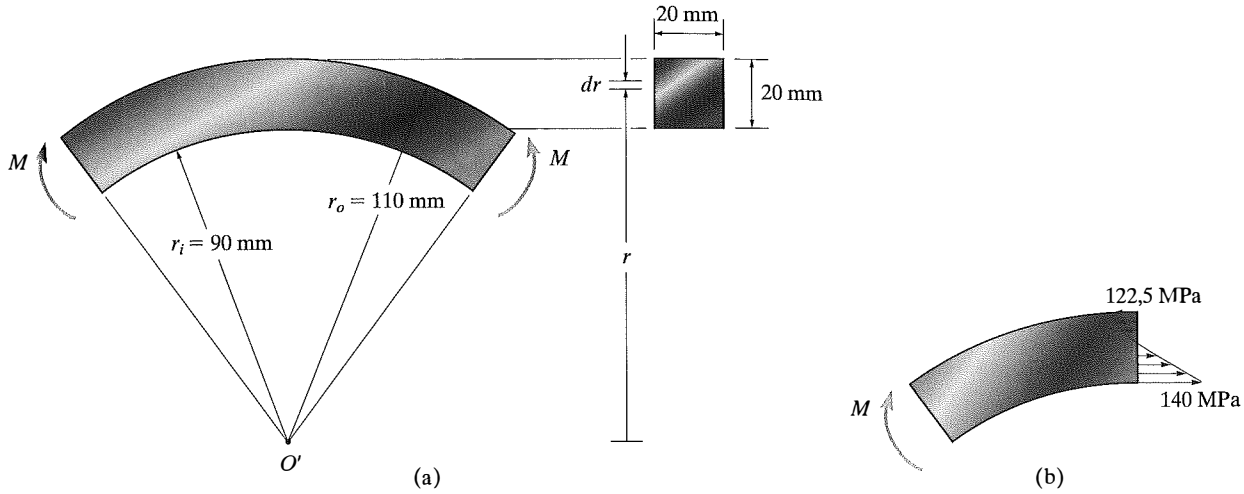


Figura 6.45

Deve-se observar que, em todos os cálculos que fizemos, R foi determinado com vários algarismos significativos para garantir que $(\bar{r} - R)$ tenha uma precisão de, no mínimo, três algarismos significativos.

Não sabemos se a tensão normal atinge seu máximo na parte superior ou na parte inferior da barra, portanto, temos de calcular o momento M para cada caso separadamente. Visto que a tensão normal na parte superior da barra é de compressão, $\sigma_{adm} = -140$ MPa.

$$\sigma = \frac{M(R - r_o)}{Ar_o(\bar{r} - R)}$$

$$-140\ \text{N/mm}^2 = \frac{M(99{,}666\ \text{mm} - 110\ \text{mm})}{(20\ \text{mm})(20\ \text{mm})(110\ \text{mm})(100\ \text{mm} - 99{,}666\ \text{mm})}$$

$$M = 199.094\ \text{N} \cdot \text{mm} = 0{,}199\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

De maneira semelhante, a tensão normal na parte inferior da barra será de tração, portanto, $\sigma_{adm} = +140$ MPa, e

$$\sigma = \frac{M(R - r_i)}{Ar_i(\bar{r} - R)}$$

$$140\ \text{N/mm}^2 = \frac{M(99{,}666\ \text{mm} - 90\ \text{mm})}{(20\ \text{mm})(20\ \text{mm})(90\ \text{mm})(100\ \text{mm} - 99{,}666\ \text{mm})}$$

$$M = 174.153\ \text{N} \cdot \text{mm} = 0{,}174\ \text{kN} \cdot \text{m} \quad \textit{Resposta}$$

Por comparação, o momento máximo que pode ser aplicado é 0,174 kN · m e, portanto, a tensão normal máxima ocorre na parte inferior da barra. A tensão de compressão na parte superior da barra é, então,

$$\sigma = \frac{174.153\ \text{N} \cdot \text{mm}(99{,}666\ \text{mm} - 90\ \text{mm})}{(20\ \text{mm})(20\ \text{mm})(110\ \text{mm})(100\ \text{mm} - 99{,}666\ \text{mm})}$$
$$= 122{,}5\ \text{N/mm}^2$$

A distribuição da tensão é mostrada na Figura 6.45b.

Se a barra fosse reta, então

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

$$140\ \text{N/mm}^2 = \frac{M(10\ \text{mm})}{\frac{1}{12}(20\ \text{mm})(20\ \text{mm})^3}$$

$$M = 186.666{,}7\ \text{N} \cdot \text{mm} = 0{,}187\ \text{kN} \cdot \text{m} \quad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Isso representa um erro de aproximadamente 7% em relação ao valor mais exato determinado acima.

EXEMPLO 6.25

A barra curva tem a área de seção transversal mostrada na Figura 6.46a. Se estiver sujeita a momentos fletores de 4 kN · m, determine a tensão normal máxima desenvolvida na barra.

SOLUÇÃO

Momento interno. Cada seção da barra está sujeita ao mesmo momento interno resultante de 4 kN · m. Visto que esse momento tende a diminuir o raio de curvatura da barra, ele é negativo. Assim, $M = -4$ kN · m.

Propriedades da seção. Aqui, consideraremos que a seção transversal é composta por um retângulo e um triângulo. A área total da seção transversal é

$$\Sigma A = (0{,}05\ \text{m})^2 + \frac{1}{2}(0{,}05\ \text{m})(0{,}03\ \text{m}) = 3{,}250(10^{-3})\ \text{m}^2$$

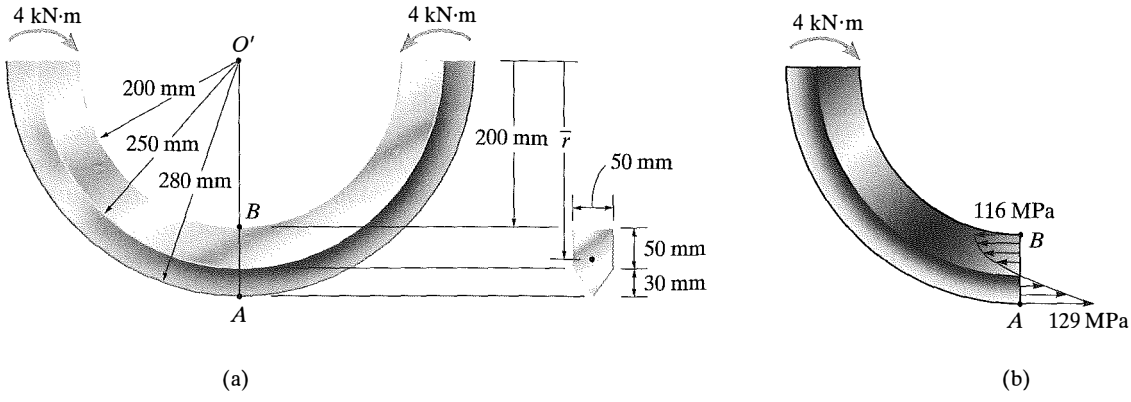


Figura 6.46

A localização do centroide é determinada em relação ao centro de curvatura, ponto O' (Figura 6.46a).

$$\bar{r} = \frac{\Sigma \tilde{r} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0{,}225\text{ m}](0{,}05\text{ m})(0{,}05\text{ m}) + [0{,}260\text{ m}]\frac{1}{2}(0{,}050\text{ m})(0{,}030\text{ m})}{3{,}250(10^{-3})\text{ m}^2}$$

$$= 0{,}23308\text{ m}$$

Podemos calcular $\int T_A\, dA/r$ para cada parte pela Tabela 6.2. Para o retângulo,

$$\int_A \frac{dA}{r} = 0{,}05\text{ m}\left(\ln\frac{0{,}250\text{ m}}{0{,}200\text{ m}}\right) = 0{,}011157\text{ m}$$

E, para o triângulo,

$$\int_A \frac{dA}{r} = \frac{(0{,}05\text{ m})(0{,}280\text{ m})}{(0{,}280\text{ m} - 0{,}250\text{ m})}\left(\ln\frac{0{,}280\text{ m}}{0{,}250\text{ m}}\right) - 0{,}05\text{ m} =$$

$$= 0{,}0028867\text{ m}$$

Assim, a localização do eixo neutro é determinada por

$$R = \frac{\Sigma A}{\Sigma \int_A dA/r} = \frac{3{,}250(10^{-3})\text{ m}^2}{0{,}011157\text{ m} + 0{,}0028867\text{ m}} = 0{,}23142\text{ m}$$

Observe que $R < \bar{r}$, como esperado. Além disso, os cálculos foram realizados com precisão suficiente, de modo que $(\bar{r} - R) = 0{,}23308\text{ m} - 0{,}23142\text{ m} = 0{,}00166\text{ m}$ tenha precisão de três algoritmos significativos.

Tensão normal. A tensão normal máxima ocorre em A ou em B. Aplicando a fórmula da viga curva para calcular a tensão normal em B, $r_B = 0{,}200$ m, temos

$$\sigma_B = \frac{M(R - r_B)}{Ar_B(\bar{r} - R)} = \frac{(-4\text{ kN}\cdot\text{m})(0{,}23142\text{ m} - 0{,}200\text{ m})}{3{,}2500(10^{-3})\text{ m}^2(0{,}200\text{ m})(0{,}00166\text{ m})}$$

$$= -116\text{ MPa}$$

No ponto A, $r_A = 0{,}280$ m e a tensão normal é

$$\sigma_A = \frac{M(R - r_A)}{Ar_A(\bar{r} - R)} = \frac{(-4\text{ kN}\cdot\text{m})(0{,}23142\text{ m} - 0{,}280\text{ m})}{3{,}2500(10^{-3})\text{ m}^2(0{,}280\text{ m})(0{,}00166\text{ m})}$$

$$= 129\text{ MPa}$$ *Resposta*

Por comparação, a tensão normal máxima ocorre em A. Uma representação bidimensional da distribuição de tensão é mostrada na Figura 6.46b.

6.9 Concentrações de tensão

A fórmula da flexão, $\sigma_{máx} = Mc/I$, pode ser usada para determinar a distribuição de tensão em regiões de um elemento onde a área da seção transversal é constante ou ligeiramente cônica. Entretanto, se a seção transversal mudar repentinamente, a distribuição de tensão normal e a distribuição de tensão de deformação na seção tornam-se *não lineares* e podem ser obtidas por meios experimentais ou, em alguns casos, por análise matemática usando a teoria da elasticidade. Entre as descontinuidades comuns, citamos entalhes na superfície de elementos (Figura 6.47a), furos para a passagem de elementos de fixação ou outros itens (Figura 6.47b) ou mudanças abruptas nas dimensões externas da seção transversal do elemento (Figura 6.47c). A tensão normal *máxima* em cada uma dessas descontinuidades ocorre na seção que passa pela *menor* área de seção transversal.

Para o projeto, em geral, é importante conhecer a tensão normal máxima desenvolvida nessas seções, e não a distribuição de tensão verdadeira em si. Como

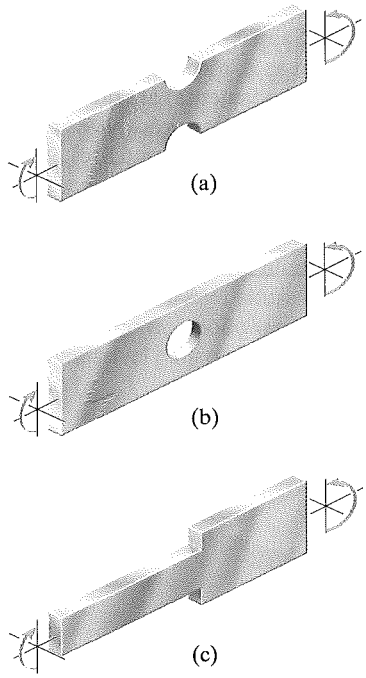


Figura 6.47

nos casos anteriores de barras com cargas axiais e eixos com cargas de torção, podemos obter a tensão normal máxima devida à flexão usando um fator de concentração de tensão K. Por exemplo, a Figura 6.48 dá valores de K para uma barra chata cuja seção transversal muda repentinamente com a utilização de filetes. Para usar esse gráfico, basta determinar as relações geométricas w/h e r/h e, então, calcular o valor correspondente de K para uma determinada geometria. Uma vez obtido K, a tensão de flexão máxima é determinada por

$$\sigma_{máx} = K\frac{Mc}{I} \tag{6.26}$$

Aqui, a fórmula da flexão é aplicada à *menor* área de seção transversal, visto que $\sigma_{máx}$ ocorre na base do filete (Figura 6.50). Da mesma maneira, a Figura 6.49 pode ser usada se a descontinuidade consistir em sulcos ou entalhes regulares.

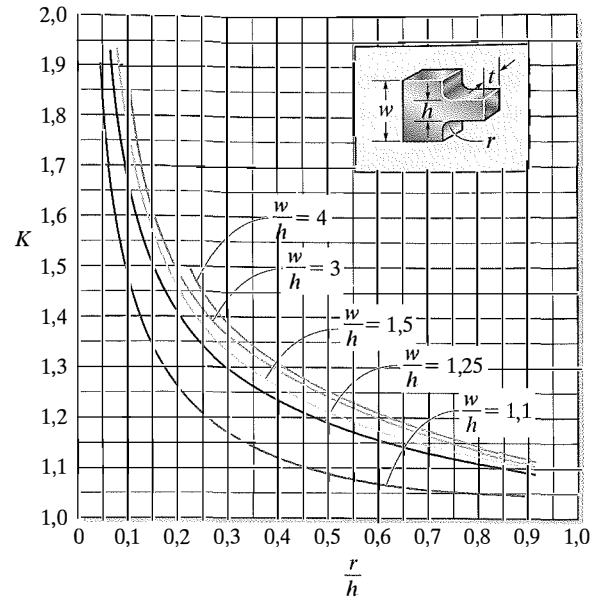


Figura 6.48

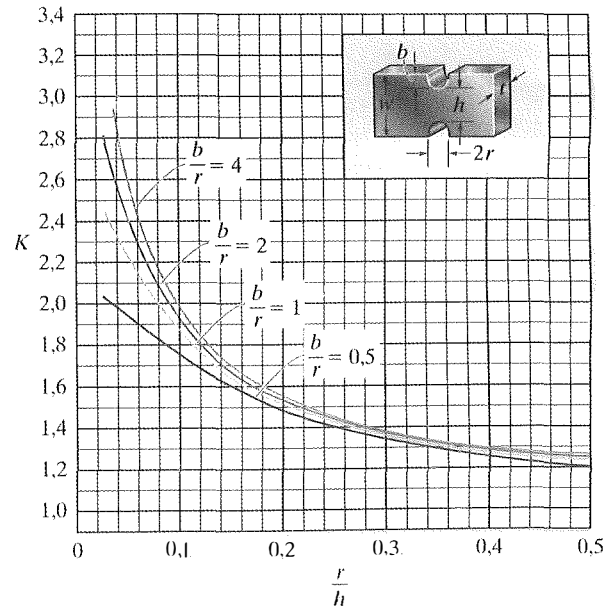


Figura 6.49

PONTOS IMPORTANTES

- Concentrações de tensão em elementos sujeitos a flexão ocorrem em pontos de mudança na seção transversal causada por entalhes e furos porque, nesses pontos, a tensão e a deformação tornam-se não lineares. Quanto mais severa a mudança, maior a concentração de tensão.
- Para projeto ou análise, não é necessário conhecer a distribuição de tensão exata em torno da mudança na seção transversal, porque a tensão normal máxima ocorre na *menor* área de seção transversal. É possível obter essa tensão usando-se um fator de concentração de tensão, K, que foi determinado por meios experimentais e é função apenas da geometria do elemento.
- Normalmente, a concentração de tensão em um material dúctil sujeito a um momento estático não terá de ser considerada no projeto; todavia, se o material for *frágil* ou estiver sujeito a carregamento de *fadiga*, então as concentrações de tensão se tornam importantes.

Como ocorre com as cargas axiais e de torção, a concentração de tensão para a flexão sempre deve ser considerada no projeto de elementos feitos de materiais frágeis ou sujeitos a carregamentos de fadiga ou cíclicos. Entenda, também, que os fatores de concentração de tensão somente se aplicam quando o material está sujeito a um *comportamento elástico. Se o momento* aplicado provocar o escoamento do material, como acontece com os materiais dúcteis, a tensão será redistribuída por todo o elemento, e a tensão máxima resultante será mais *baixa* do que a determinada quando são usados fatores de concentração de tensão. Esse fenômeno é discutido mais adiante na próxima seção.

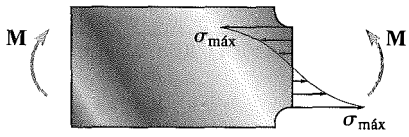


Figura 6.50

EXEMPLO 6.26

A transição na área da seção transversal da barra de aço é obtida por filetes de redução como mostra a Figura 6.51a. Se a barra for submetida a um momento fletor de 5 kN · m, determine a tensão normal máxima desenvolvida no aço. A tensão de escoamento é $\sigma_e = 500$ MPa.

SOLUÇÃO

O momento cria a maior tensão na barra na base do filete, onde a área da seção transversal é a menor. O fator de concentração de tensão pode ser determinado pela Figura 6.48. Pela geometria da barra, temos $r = 16$ mm, $h = 80$ mm, $w = 120$ mm. Assim,

$$\frac{r}{h} = \frac{16\text{ mm}}{80\text{ mm}} = 0{,}2 \qquad \frac{w}{h} = \frac{120\text{ mm}}{80\text{ mm}} = 1{,}5$$

Esses valores dão $K = 1{,}45$.

Aplicando a Equação 6.26, temos

$$\sigma_{máx} = K\frac{Mc}{I} = (1{,}45)\frac{(5\text{ kN}\cdot\text{m})(0{,}04\text{ m})}{\left[\frac{1}{12}(0{,}020\text{ m})(0{,}08\text{ m})^3\right]} = 340\text{ MPa}$$

Este resultado indica que o aço permanece elástico, visto que a tensão está abaixo da tensão de escoamento (500 MPa).

OBSERVAÇÃO: A distribuição de tensão normal é não linear e é mostrada na Figura 6.51b. Entretanto, entenda que, pelo princípio de Saint-Venant, Seção 4.1, essas tensões localizadas suavizam-se e tornam-se lineares à medida que avançamos (aproximadamente) até uma distância de 80 mm ou mais para a direita da transição. Nesse caso, a fórmula da flexão dá $\sigma_{máx} = 234$ MPa (Figura 6.51c). Observe, também, que a escolha de um filete com raio maior provocará uma redução significativa de $\sigma_{máx}$ já que, à medida que r cresce na Figura 6.48, K decresce.

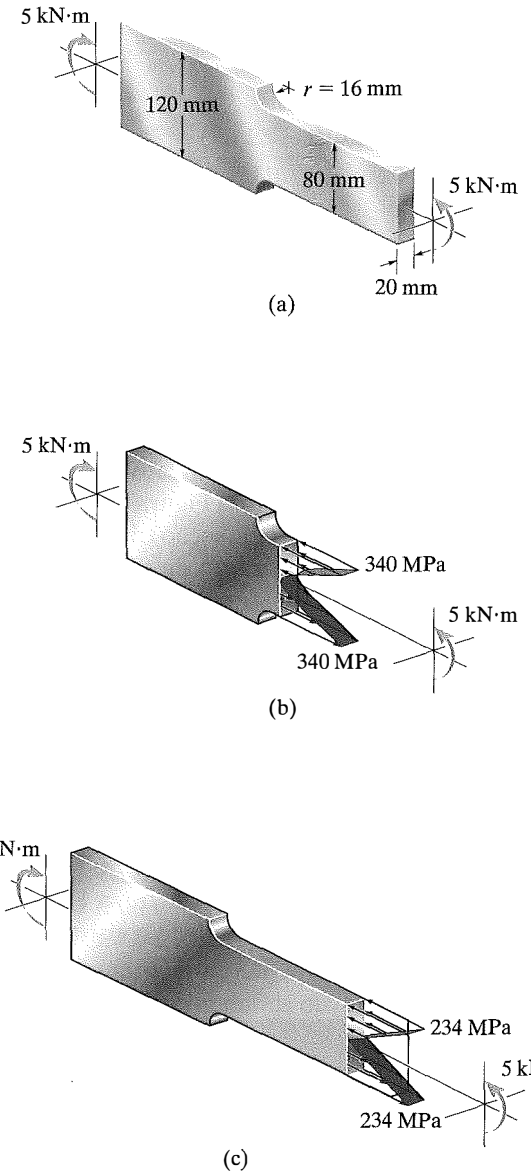
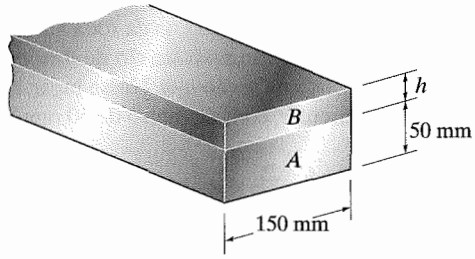


Figura 6.51

PROBLEMAS

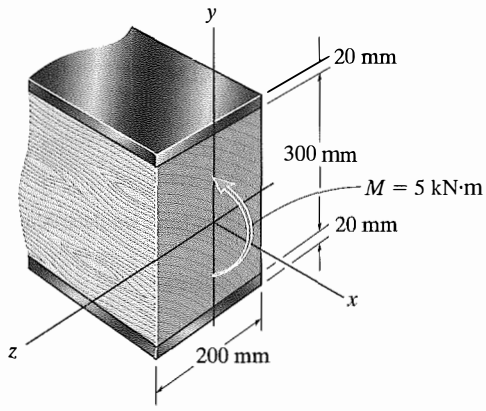
6.119. A viga composta é feita de alumínio 6061-T6 (A) e latão vermelho C83400 (B). Determine a dimensão h da tira de latão de modo que o eixo neutro da viga esteja localizado na costura dos dois metais. Qual é o momento máximo que essa viga suportará se a tensão de flexão admissível para o alumínio for $(\sigma_{adm})_{al} = 128$ MPa e para o latão $(\sigma_{adm})_{lat} = 35$ MPa?

***6.120.** A viga composta é feita de alumínio 6061-T6 (A) e latão vermelho C83400 (B). Se a altura $h = 40$ mm, determine o momento máximo que pode ser aplicado à viga se a tensão de flexão admissível para o alumínio for $(\sigma_{adm})_{al} = 128$ MPa e para o latão $(\sigma_{adm})_{lat} = 35$ MPa.



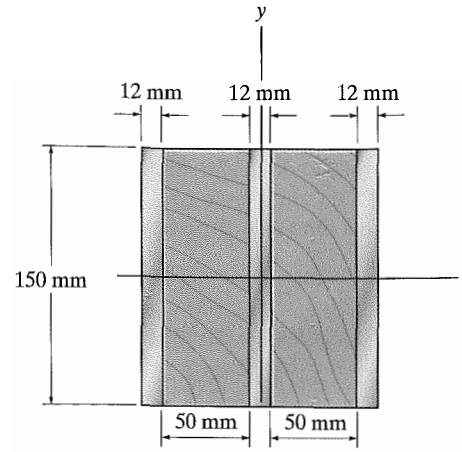
Problemas 6.119/120

6.121. As partes superior e inferior da viga de madeira são reforçadas com tiras de aço, como mostra a figura. Determine a tensão de flexão máxima desenvolvida na madeira e no aço se a viga for submetida a um momento fletor $M = 5$ kN · m. Trace um rascunho da distribuição de tensão que age na seção transversal. Considere $E_{mad} = 11$ GPa, $E_{aço} = 200$ GPa.



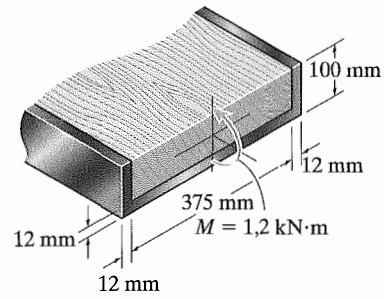
Problema 6.121

6.122. O centro e os lados da viga de abeto Douglas são reforçados com tiras de aço A-36. Determine a tensão máxima desenvolvida na madeira e no aço se a viga for submetida a um momento fletor $M_z = 10$ kN · m. Faça um rascunho da distribuição de tensão que age na seção transversal.



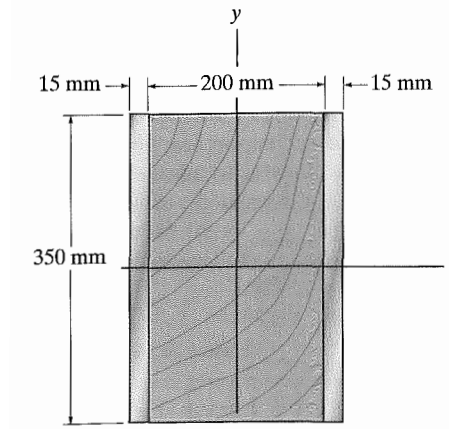
Problema 6.122

6.123. A viga em U de aço é usada para reforçar a viga de madeira. Determine a tensão máxima no aço e na madeira se a viga for submetida a um momento $M = 1{,}2$ kN · m. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{mad} = 12$ GPa.



Problema 6.123

***6.124.** Os lados da viga de abeto Douglas são reforçados com tiras de aço A-36. Determine a tensão máxima desenvolvida na madeira e no aço se a viga for submetida a um momento fletor $M_z = 4$ kN · m. Faça um rascunho da distribuição de tensão que age na seção transversal.

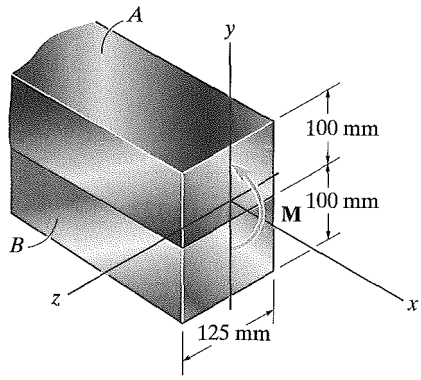


Problema 6.124

6.125. A viga composta é feita de aço A-36 (A) e latão vermelho C83400 (B) e tem a seção transversal mostrada na fi-

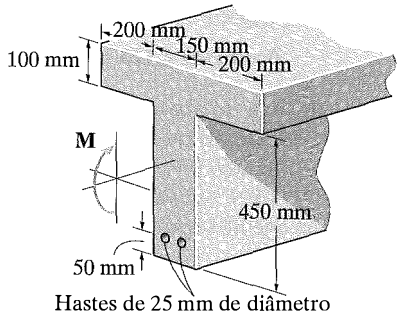
gura. Se for submetida a um momento $M = 6{,}5\ \text{kN} \cdot \text{m}$, determine a tensão máxima no latão e no aço. Determine também a tensão em cada material na junção entre eles.

6.126. A viga composta é feita de aço A-36 (A) unido a latão vermelho C83.400 (B) e tem a seção transversal mostrada na figura. Se a tensão de flexão admissível para o aço for $(\sigma_{adm})_{aço} = 180$ MPa e para o latão $(\sigma_{adm})_{lat} = 60$ MPa, determine o momento máximo M que pode ser aplicado à viga.



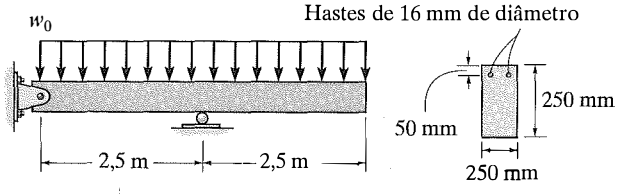
Problemas 6.125/126

6.127. A viga de concreto armado é feita com duas hastes de reforço de aço. Se a tensão de tração admissível para o aço for $(\sigma_{aço})_{adm} = 280$ MPa e a tensão de compressão admissível para o concreto for $(\sigma_{conc})_{adm} = 21$ MPa, determine o momento máximo M que pode ser aplicado à seção. Considere que o concreto não pode suportar uma tensão de tração. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{conc} = 26{,}5$ GPa.



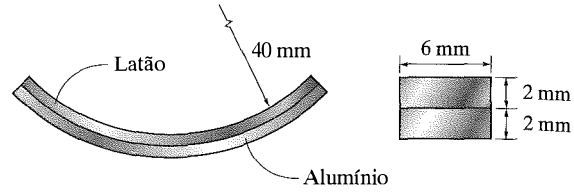
Problema 6.127

*__6.128.__ Determine a carga uniformemente distribuída máxima w_0 que pode ser suportada pela viga de concreto armado se a tensão de tração admissível para o aço for $(\sigma_{aço})_{adm} = 200$ MPa e a tensão de compressão admissível para o concreto for $(\sigma_{conc})_{adm} = 20$ MPa. Considere que o concreto não pode suportar uma tensão de tração. Considere $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{conc} = 25$ GPa.



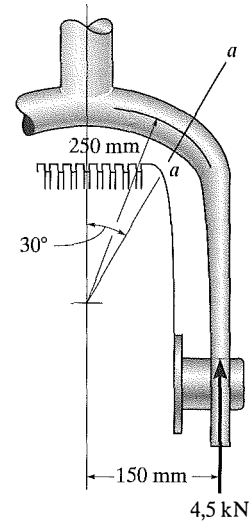
Problema 6.128

6.129. Uma tira bimetálica é feita de pedaços de alumínio 2014-T6 e latão vermelho C83400 e tem a seção transversal mostrada na figura. Um aumento na temperatura provoca a curvatura de sua superfície neutra e forma um arco circular com raio de 400 mm. Determine o momento que agiria em sua seção transversal resultante da tensão térmica. $E_{al} = 74$ GPa e $E_{lat} = 102$ GPa.



Problema 6.129

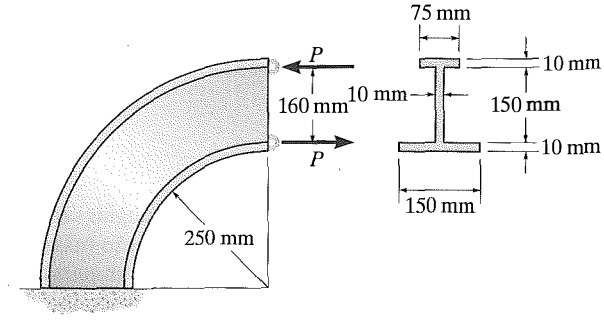
6.130. O garfo é usado como parte do conjunto do trem de pouso de um avião. Se a reação máxima da roda na extremidade do garfo for 4,5 kN, determine a tensão de flexão máxima na porção curva do garfo na seção a–a. Nesse lugar, a área da seção transversal é circular, com diâmetro de 50 mm.



Problema 6.130

6.131. Determine a maior valor das forças aplicadas P se a tensão de flexão admissível for $(\sigma_{adm})_c = 50$ MPa sob compressão e $(\sigma_{adm})_t = 120$ MPa sob tração.

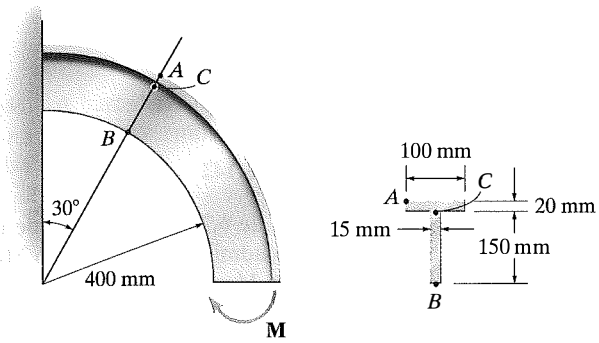
*__6.132.__ Se $P = 6$ kN, determine as tensões de tração e compressão máximas na viga.



Problemas 6.131/132

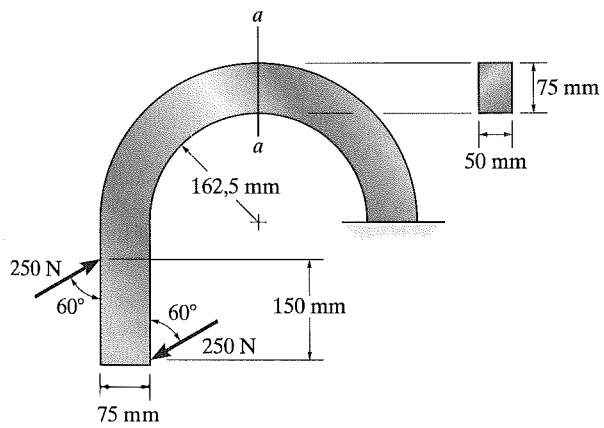
6.133. A viga curva está sujeita a um momento fletor $M = 900\ \text{N} \cdot \text{m}$ como mostra a figura. Determine a tensão nos pontos A e B e mostre a tensão sobre um elemento de volume localizado em cada desses pontos.

6.134. A viga curva está sujeita a um momento fletor $M = 900\ \text{N} \cdot \text{m}$. Determine a tensão no ponto C.



Problemas 6.133/134

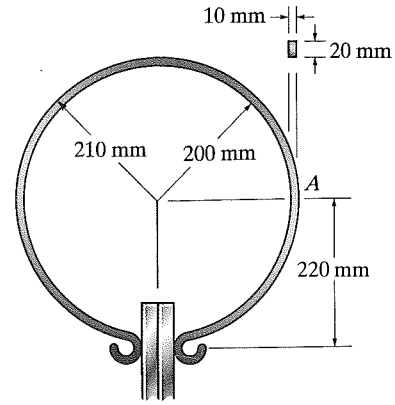
6.135. A barra curva usada em uma máquina tem seção transversal retangular. Se a barra for submetida a um conjugado, como mostra a figura, determine as tensões de tração e compressão máximas que agem na seção a–a. Trace um rascunho tridimensional da distribuição de tensão na seção.



Problema 6.135

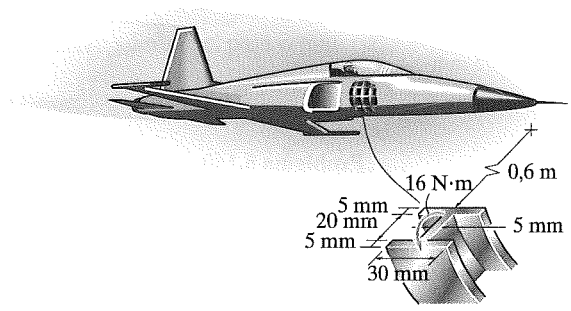
***6.136.** A braçadeira circular de mola produz uma força de compressão de 3 N sobre as chapas. Determine a tensão de flexão máxima produzida na mola A. A mola tem seção transversal retangular, como mostra a figura.

6.137. Determine a força de compressão máxima que a braçadeira de mola pode exercer sobre as chapas se a tensão de flexão admissível para a braçadeira for $\sigma_{adm} = 4$ MPa.



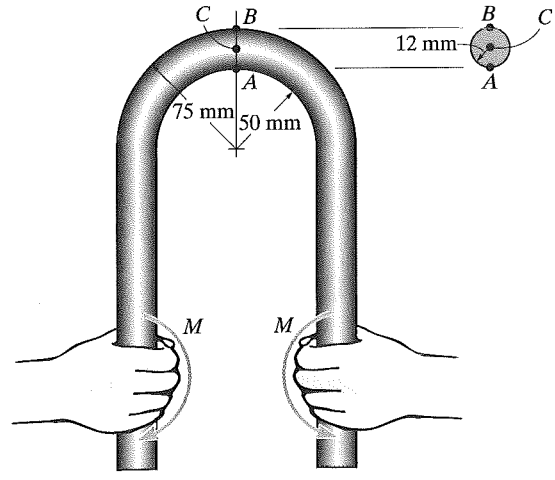
Problemas 6.136/137

6.138. Em voo, a nervura curva do avião a jato é submetida a um momento previsto $M = 16\ \text{N} \cdot \text{m}$ na seção. Determine a tensão de flexão máxima na nervura nessa seção e trace um rascunho bidimensional da distribuição de tensão.



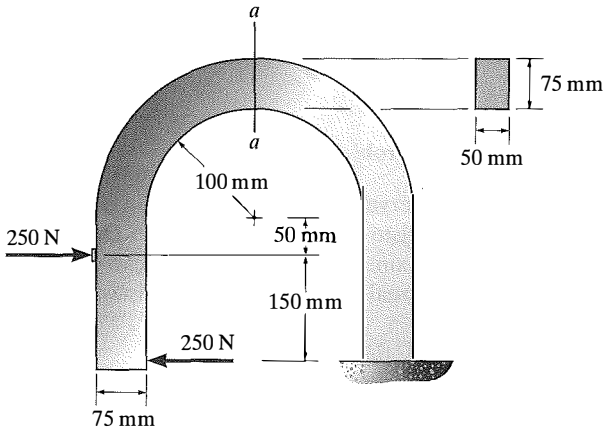
Problema 6.138

6.139. A haste de aço tem seção transversal circular. Se cada uma de suas extremidades for segurada e um conjugado $M = 1{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$ for desenvolvido nesses locais, determine a tensão que age nos pontos A e B e no centroide C.



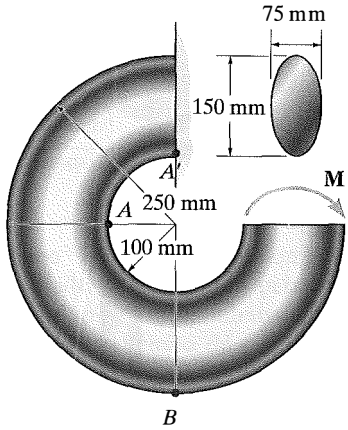
Problema 6.139

*6.140. Uma barra curva é usada em uma máquina e tem seção transversal retangular. Se a barra estiver sujeita a um conjugado, como mostra a figura, determine as tensões de tração e compressão máximas que agem na seção *a–a*. Trace um rascunho tridimensional da distribuição de tensão na seção.



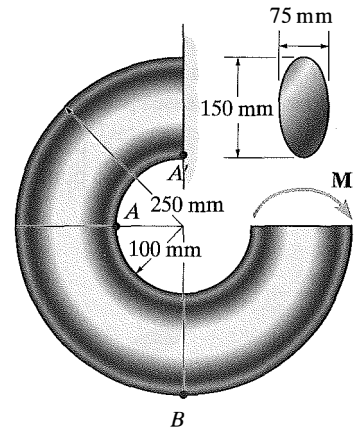
Problema 6.140

6.141. O elemento tem seção transversal elíptica. Se for submetido a um momento $M = 50\ \text{N} \cdot \text{m}$, determine a tensão nos pontos A e B. A tensão no ponto A', que está localizado no elemento próximo à parede é igual à tensão no ponto A? Explique sua resposta.



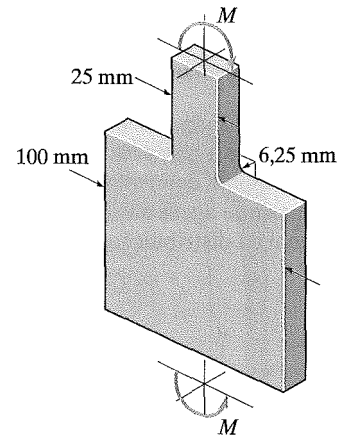
Problema 6.141

6.142. O elemento tem seção transversal elíptica. Se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 125$ MPa, determine o momento máximo M que pode ser aplicado ao elemento.



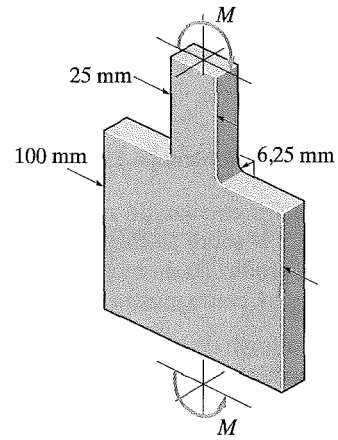
Problema 6.142

6.143. A barra tem espessura de 6,25 mm e é feita de um material com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 126$ MPa. Determine o momento máximo M que pode ser aplicado.



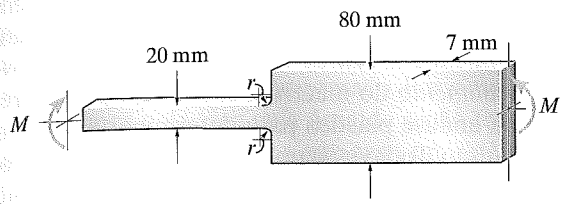
Problema 6.143

*6.144. A barra tem espessura de 12,5 mm e está sujeita a um momento de $90\ \text{N} \cdot \text{m}$. Determine a tensão de flexão máxima na barra.



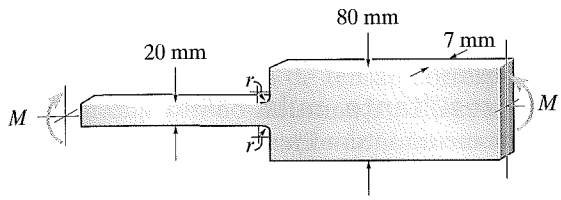
Problema 6.144

6.145. A barra está sujeita a um momento $M = 40\ \text{N} \cdot \text{m}$. Determine o menor raio r dos filetes de modo a não ultrapassar a tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 124\ \text{MPa}$.



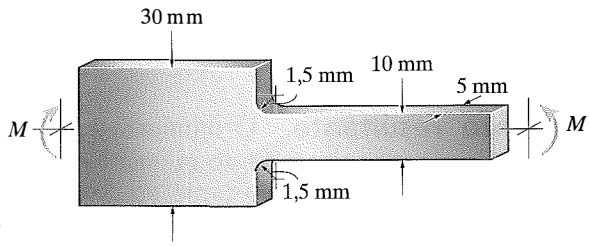
Problema 6.145

6.146. A barra está sujeita a um momento $M = 17{,}5\ \text{N} \cdot \text{m}$. Se $r = 5$ mm, determine a tensão de flexão máxima no material.



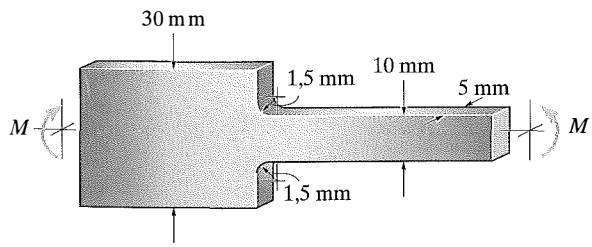
Problema 6.146

6.147. A barra está sujeita a um momento $M = 20\ \text{N} \cdot \text{m}$. Determine a tensão de flexão máxima na barra e trace um rascunho que mostre, aproximadamente, a variação da tensão na seção crítica.



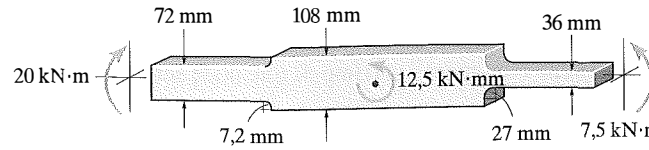
Problema 6.147

6.148. A tensão de flexão admissível para a barra é $\sigma_{adm} = 175\ \text{MPa}$. Determine o momento máximo M que pode ser aplicado à barra.



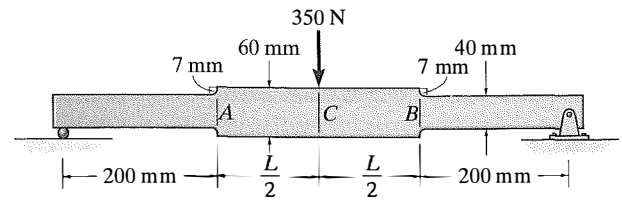
Problema 6.148

6.149. Determine a tensão de flexão máxima desenvolvida na barra se ela for submetida aos conjugados mostrados na figura. A barra tem espessura de 6 mm.



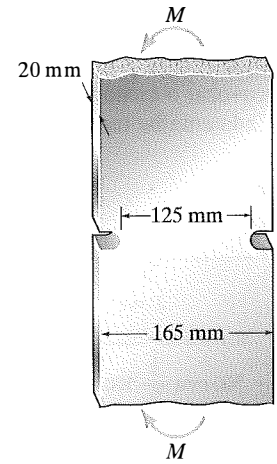
Problema 6.149

6.150. Determine o comprimento L da porção central da barra de modo que as tensões de flexão máximas em A, B e C sejam as mesmas. A barra tem espessura de 10 mm.



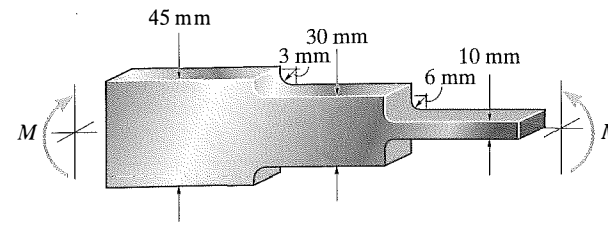
Problema 6.150

6.151. Se o raio de cada entalhe na chapa for $r = 10$ mm, determine o maior momento M que pode ser aplicado. A tensão de flexão admissível para o material é $\sigma_{adm} = 180\ \text{MPa}$.



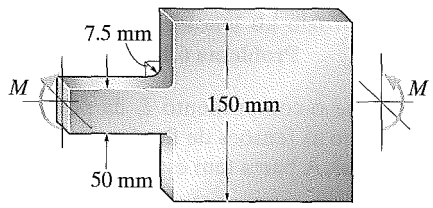
Problema 6.151

6.152. A barra escalonada tem espessura de 15 mm. Determine o momento máximo que pode ser aplicado às suas extremidades se ela for feita de um material com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 200\ \text{MPa}$.



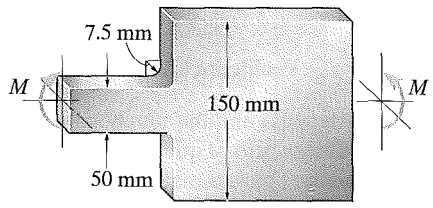
Problema 6.152

6.153. A barra tem espessura de 12,5 mm e é feita de um material com tensão de flexão admissível σ_{adm} = 140 MPa. Determine o momento máximo M que pode ser aplicado.



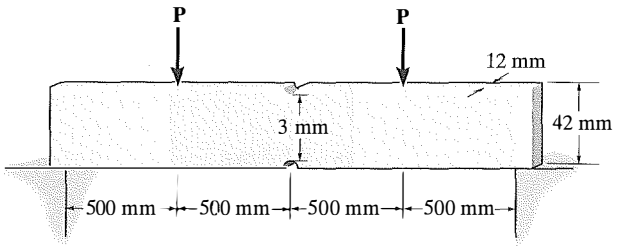
Problema 6.153

6.154. A barra tem espessura de 12,5 mm e está sujeita a um momento de 900 N · m. Determine a tensão de flexão máxima na barra.



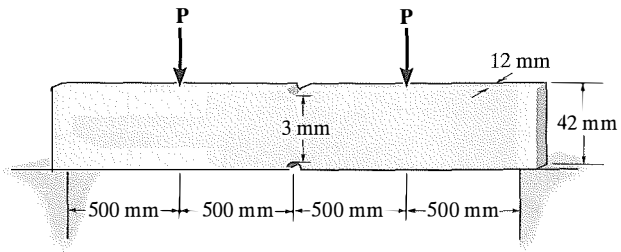
Problema 6.154

6.155. A barra entalhada simplesmente apoiada é submetida a duas forças **P**. Determine o maior valor de **P** que pode ser aplicada sem provocar o escoamento do material. O material é aço A-36. Cada entalhe tem raio r = 3 mm.



Problema 6.155

***6.156.** A barra entalhada simplesmente apoiada é submetida a duas cargas, cada uma de valor P = 500 N. Determine a tensão de flexão máxima desenvolvida na barra e trace um rascunho da distribuição da tensão de flexão que age na seção transversal no centro da barra. Cada entalhe tem raio r = 3 mm.



Problema 6.156

*6.10 Flexão inelástica

As equações para determinar a tensão normal devido à flexão que foram desenvolvidas anteriormente são válidas somente se o material se comportar de uma maneira linear elástica. Se o momento aplicado provocar o *escoamento* do material, então será preciso realizar uma análise plástica para determinar a distribuição de tensão. Todavia, para ambos os casos, elástico e plástico, entenda que, para a flexão de elementos retos, há três condições que devem ser cumpridas.

Distribuição linear da deformação normal. Com base em considerações geométricas, mostramos, na Seção 6.3, que as deformações normais que se desenvolvem em um material sempre variam *linearmente* de zero no eixo neutro da seção transversal a máximas no ponto mais afastado do eixo neutro.

Força resultante nula. Visto que há somente um momento interno resultante que age na seção transversal, a força resultante provocada pela distribuição de tensão deve ser nula. Uma vez que σ cria uma força na área dA de $dF = \sigma\, dA$ (Figura 6.52), então, para a área total da seção transversal A, temos

$$F_R = \Sigma F_x; \qquad \int_A \sigma\, dA = 0 \qquad (6.27)$$

Essa equação proporciona um meio para obter a localização *do eixo neutro.*

Momento resultante. O momento resultante na seção deve ser equivalente ao momento causado pela distribuição de tensão em torno do eixo neutro. Visto que o momento da força $dF = \sigma\, dA$ em torno do eixo neutro é $dM = y(\sigma\, dA)$ então, somando os resultados na seção transversal inteira (Figura 6.52), temos,

$$(M_R)_z = \Sigma M_z; \qquad M = \int_A y(\sigma\, dA) \qquad (6.28)$$

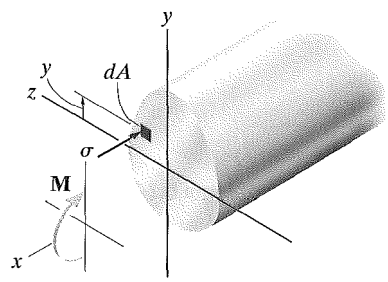


Figura 6.52

Essas condições de geometria e carregamento serão usadas agora para determinar a distribuição de tensão em uma viga quando submetida a um momento interno resultante que provoque o escoamento do material. Durante toda a discussão, consideraremos que o material tem o *mesmo* diagrama tensão–deformação sob tração e sob compressão. Por simplicidade, começaremos pela viga cuja área de seção transversal tem dois eixos de simetria; neste caso, um retângulo de altura h e largura b, como mostra a Figura 6.53a. Serão considerados três casos de carregamento de especial interesse.

Momento elástico máximo. Considere que o momento aplicado $M = M_e$ é suficiente para produzir tensões de escoamento nas fibras superiores e inferiores da viga, como mostra a Figura 6.53b. Visto que a distribuição da deformação é linear, podemos determinar a distribuição de tensão correspondente pelo diagrama tensão–deformação (Figura 6.53c). Aqui, vemos que a deformação de escoamento ϵ_e provoca a tensão de escoamento σ_e, e as deformações intermediárias ϵ_1 e ϵ_2 causam as tensões σ_1 e σ_2, respectivamente. Quando essas tensões, e outras como elas, são representadas em gráfico nos pontos medidos $y = h/2$, $y = y_1$, $y = y_2$ etc., o resultado é a distribuição de tensão mostrada na Figura 6.53d ou 6.53e. A linearidade da tensão é, evidentemente, uma consequência da lei de Hooke.

Agora que estabelecemos a distribuição de tensão, podemos verificar se a Equação 6.27 é satisfeita. Para tanto, em primeiro lugar, precisamos calcular a força resultante para cada uma das duas porções da distribuição de tensão na Figura 6.53e. Em termos geométricos, isso equivale a determinar os *volumes* sob os dois blocos triangulares. Como mostra a figura, a parte superior da seção transversal do elemento está sujeita à compressão, e a porção inferior está sujeita à tração. Temos

$$T = C = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\sigma_e\right)b = \frac{1}{4}bh\,\sigma_e$$

Visto que **T** é igual, mas oposta a **C**, a Equação 6.27 é satisfeita, e, de fato, o eixo neutro passa pelo centroide da área da seção transversal.

O momento elástico máximo M_e é determinado pela Equação 6.28, que afirma que M_e é equivalente ao momento da distribuição de tensão em torno do eixo neutro. Para aplicar essa equação geometricamente, temos de determinar os momentos criados por **T** e **C** na Figura 6.53e em torno do eixo neutro. Uma vez que cada uma das forças age no centroide do volume de seu bloco de tensão triangular associado, temos

$$M_e = C\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} + T\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2} = 2\left(\frac{1}{4}bh\,\sigma_e\right)\left(\frac{2}{3}\right)\frac{h}{2}$$

$$= \frac{1}{6}bh^2\sigma_e \qquad (6.29)$$

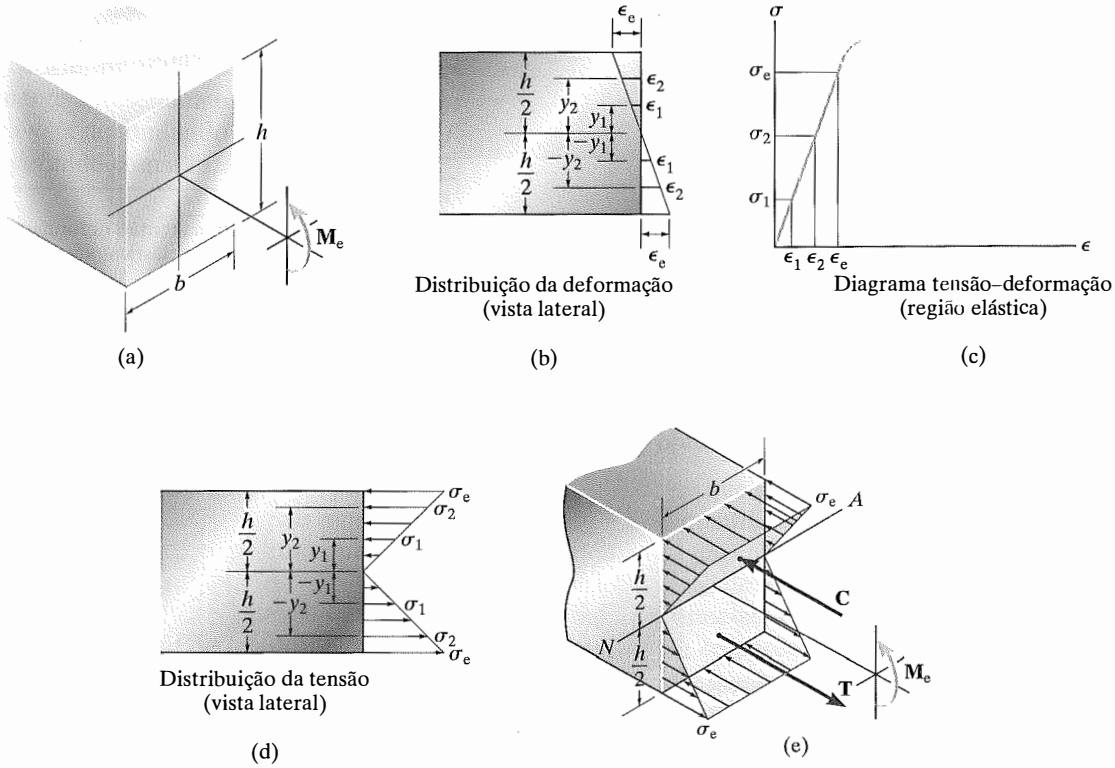


Figura 6.53

É claro que esse mesmo resultado pode ser obtido de uma maneira mais direta pela fórmula da flexão, isto é, $\sigma_e = M_e(h/2)/[bh^3/12]$ ou $M_e = bh^2\,\sigma_e/6$.

Momento plástico. Alguns materiais, como o aço, tendem a exibir comportamento elástico perfeitamente plástico quando a tensão no material ultrapassa σ_e. Considere, por exemplo, o elemento na Figura 6.54a. Se o momento interno $M > M_e$, o material nas partes superior e inferior da viga começará a escoar e provocará uma redistribuição da tensão na seção transversal até que o momento interno exigido M seja desenvolvido. Se a distribuição de deformação normal assim produzida for como a mostrada na Figura 6.54b, a distribuição de tensão normal correspondente é determinada pelo diagrama tensão–deformação da mesma maneira que no caso elástico. Pelo diagrama tensão–deformação para o material mostrado na Figura 6.54c, as deformações ϵ_1, ϵ_e e ϵ_2 correspondem às tensões σ_1, σ_e e σ_e, respectivamente. Quando essas e outras tensões são representadas graficamente na seção transversal, obtemos a distribuição de tensão mostrada na Figura 6.54d ou 6.54e. Aqui, cada um dos "blocos" de tensão de compressão e tensão de tração é composto por componentes de blocos retangulares e triangulares. Os volumes desses blocos são

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2} y_e\, \sigma_e\, b$$

$$T_2 = C_2 = \left(\frac{h}{2} - y_e\right)\sigma_e\, b$$

Em razão da simetria, a Equação 6.27 é satisfeita e o eixo neutro passa pelo centroide da seção transversal, como mostra a figura. O momento aplicado M pode ser relacionado com a tensão de escoamento σ_e pela Equação 6.28. Pela Figura 6.54e, exige-se que

$$M = T_1\left(\frac{2}{3}y_e\right) + C_1\left(\frac{2}{3}y_e\right) + T_2\left[y_e + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_e\right)\right] + C_2\left[y_e + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_e\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}y_e\sigma_e b\right)\left(\frac{2}{3}y_e\right) + 2\left[\left(\frac{h}{2} - y_e\right)\sigma_e\, b\right]\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y_e\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}bh^2\,\sigma_e\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_e^2}{h^2}\right)$$

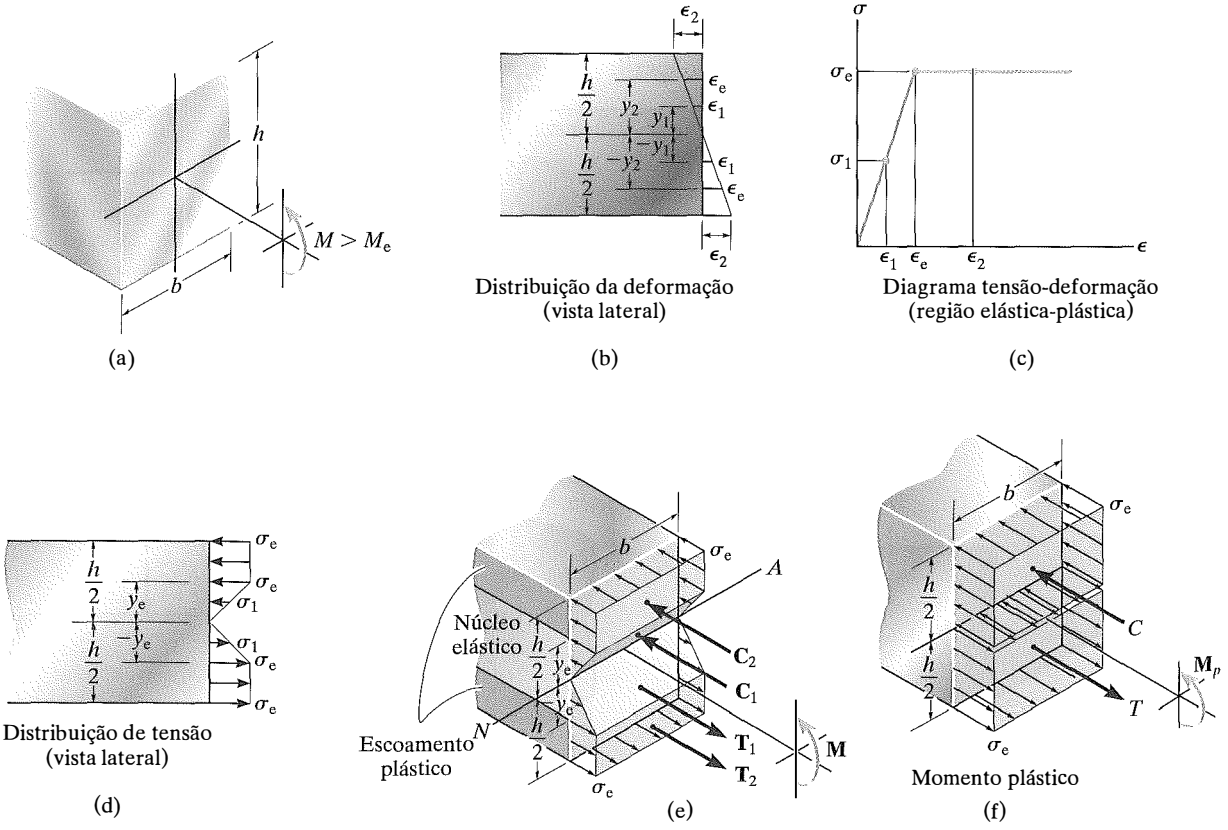


Figura 6.54

Ou, pela Equação 6.29,

$$M = \frac{3}{2}M_e\left(1 - \frac{4}{3}\frac{y_e^2}{h^2}\right) \tag{6.30}$$

A inspeção da Figura 6.54e revela que **M** produz duas zonas de escoamento plástico e um núcleo elástico no elemento. A fronteira entre elas está localizada a distância $\pm y_e$ do eixo neutro. À medida que o valor de **M** aumenta, y_e aproxima-se de zero. Isso converteria o material em inteiramente plástico e, então, a distribuição de tensão seria semelhante à mostrada na Figura 6.54f. Pela Equação 6.30 com $y_e = 0$ ou determinando os momentos dos "blocos" de tensão em torno do eixo neutro, podemos expressar esse valor-limite como

$$M_p = \frac{1}{4}bh^2\sigma_e \tag{6.31}$$

Pela Equação 6.29, temos

$$M_p = \frac{3}{2}M_e \tag{6.32}$$

Esse momento é denominado ***momento plástico***. Seu valor é exclusivo somente para a seção retangular mostrada na Figura 6.54f, visto que a análise depende da geometria da seção transversal.

Às vezes, as vigas usadas na construção de edifícios são projetadas para resistir a momento plástico. Quando isso ocorre, os códigos e manuais de engenharia normalmente apresentam uma propriedade de projeto para uma viga denominado fator de forma. O ***fator de forma*** é definido com a razão

$$\boxed{k = \frac{M_p}{M_e}} \tag{6.33}$$

Esse valor especifica a capacidade de momento adicional que uma viga pode suportar além de seu momento elástico máximo. Por exemplo, pela Equação 6.32, uma viga com seção transversal retangular tem um fator de forma $k = 1{,}5$. Portanto, podemos concluir que essa seção suportará 50% mais momento fletor do que seu momento elástico máximo quando ela se tornar totalmente plástica.

Momento resistente. Considere, agora, o caso mais geral de uma viga com seção transversal simétrica somente em relação ao eixo vertical, enquanto o momento é aplicado em torno do eixo horizontal (Figura 6.55a). Consideraremos que o material exibe encruamento e que seus diagramas tensão–deformação para tração e compressão são diferentes (Figura 6.55b).

Se o momento **M** produzir o escoamento da viga, será difícil determinar a localização do eixo neutro e a deformação máxima produzida na viga. Isso porque a seção transversal é assimétrica em torno do eixo horizontal e o comportamento tensão–deformação do material é assimétrico sob tração e sob compressão. Para resolver esse problema, há um procedimento de tentativa e erro com as seguintes etapas:

1. Para um dado momento **M**, *assuma* uma localização para o eixo neutro e a inclinação da distribuição de deformação "linear", Figura 6.55c.
2. Estabeleça, por meios gráficos, a distribuição de tensão na seção transversal do elemento usando a curva σ–ϵ para marcar os valores da tensão correspondentes aos valores da deformação. Então, a distribuição de tensão resultante (Figura 6.55d) terá a mesma forma da curva σ–ϵ.
3. Determine os volumes envolvidos pelos "blocos" de tensão de tração e compressão. (Como aproximação, isso pode exigir a divisão de cada bloco em regiões compostas.) A Equação 6.27 requer que os volumes desses blocos sejam *iguais*, visto que representam a força de tração resultante **T** e a força de compressão resultante **C** na seção (Figura 6.55e). Se essas forças não forem iguais, deve ser feito um ajuste na *localização* do eixo neutro (ponto de *deformação* nula), e o processo é repetido até a Equação 6.27 ($T = C$) ser satisfeita.
4. Assim que $T = C$, os momentos produzidos por **T** e **C** podem ser calculados em torno do eixo neutro. Aqui, os braços de momento para **T** e **C** são medidos do eixo neutro até os *centroides dos volumes* definidos pelas distribuições de tensão (Figura 6.55e). A Equação 6.28 requer $M = Ty' + Cy''$. Se essa equação não for satisfeita, a *inclinação* da *distribuição da deformação* deve ser ajustada e os cálculos para T e C e para momento devem ser repetidos até se obter uma boa concordância.

É óbvio que esse processo de cálculo é muito tedioso e, felizmente, não ocorre com muita frequência na prática da engenharia. A maioria das vigas são simétricas em torno de dois eixos e construídas com materiais que, presume-se, têm diagramas tensão–deformação tanto para compressão quanto para tração semelhantes. Sempre que isso ocorre, o eixo neutro passará pelo centroide da seção transversal e, por isso, o processo de relacionar a distribuição de tensão com o momento resultante é simplificado.

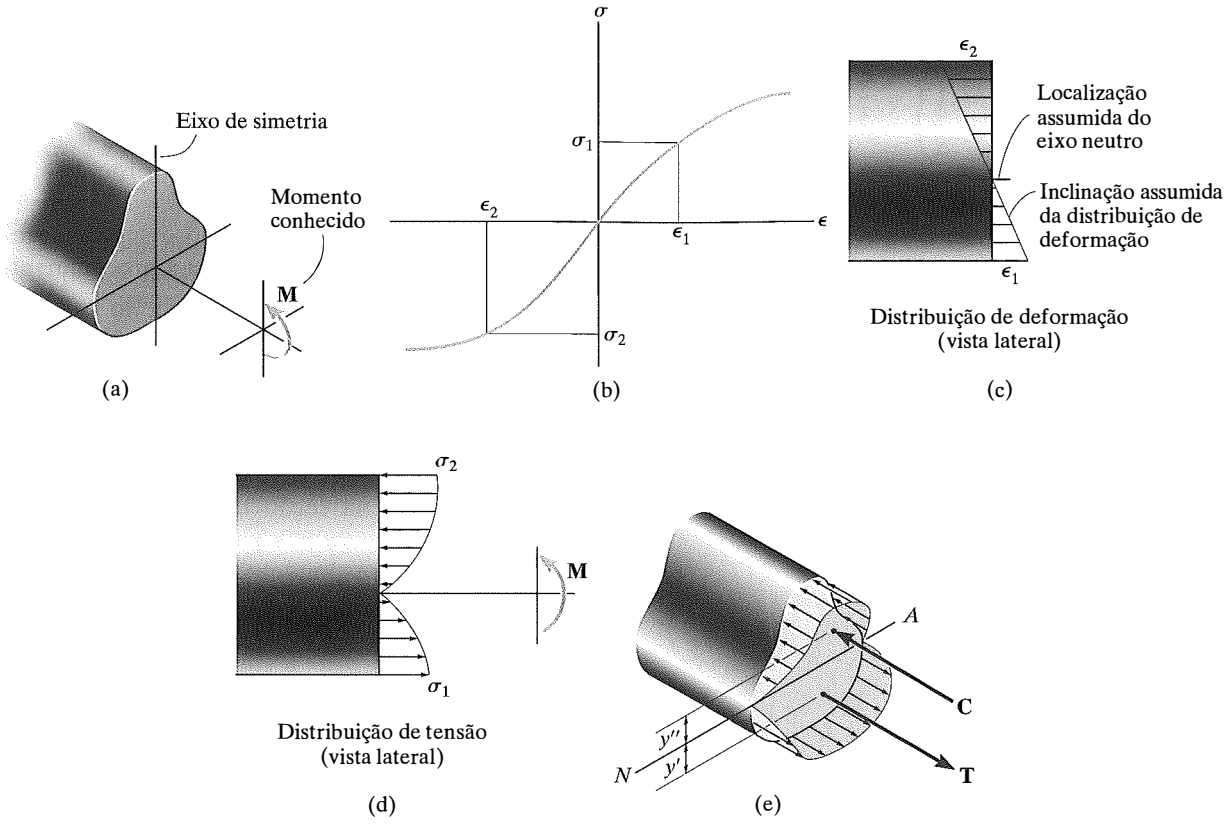


Figura 6.55

PONTOS IMPORTANTES

- A *distribuição da deformação normal* na seção transversal de uma viga é baseada somente em considerações geométricas, e constatou-se que ela permanece sempre *linear*, independentemente da carga aplicada. Todavia, a distribuição de tensão normal deve ser determinada pelo comportamento do material, ou pelo diagrama tensão–deformação, tão logo a distribuição da deformação tenha sido definida.
- A localização do *eixo neutro* é determinada pela condição de que a *força resultante* na seção transversal seja *nula*.
- O momento interno resultante na seção transversal deve ser igual ao momento da distribuição de tensão em torno do eixo neutro.
- Comportamento perfeitamente plástico supõe que a distribuição de tensão normal é *constante* na seção transversal e que a flexão na viga continuará sem que haja nenhum aumento no momento. Esse momento é denominado *momento plástico*.

EXEMPLO 6.27

A viga tem as dimensões mostradas na Figura 6.56a. Se ela for feita de um material elástico perfeitamente plástico com tensão de escoamento por tração e por compressão $\sigma_e = 250$ MPa, determine o fator de forma para a viga.

SOLUÇÃO

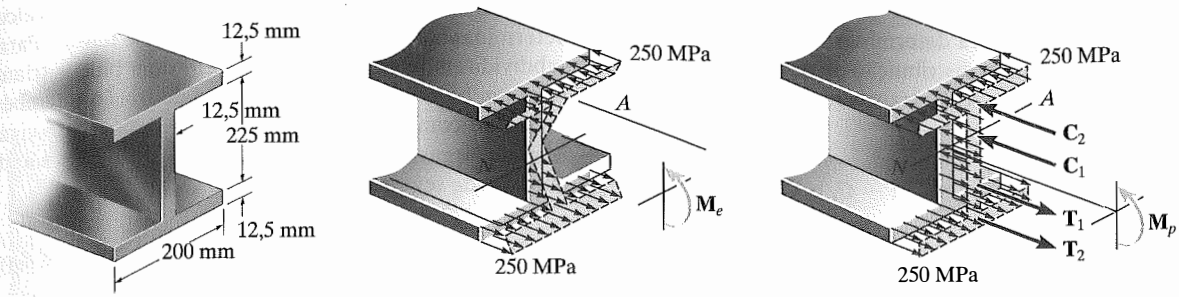
Para determinar o fator de forma, em primeiro lugar, é necessário calcular o momento elástico máximo M_e e o momento plástico M_p.

Momento elástico máximo. A distribuição de tensão normal para o momento elástico máximo é mostrada na Figura 6.56b. O momento de inércia em torno do eixo neutro é

$$I = \left[\frac{1}{12}(12{,}5\text{ mm})(225\text{ mm})^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(12{,}5\text{ mm})^3 + 200\text{ mm}(12{,}5\text{ mm})(118{,}75\text{ mm})^2\right]$$

$$= 82{,}44 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

Aplicando a fórmula da flexão, temos



(a) (b) (c)

Figura 6.56

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \quad 250\ \text{N/mm}^2 = \frac{M_e\ (125\ \text{mm})}{82{,}44 \times 10^6\ \text{mm}^4}$$

$$M_e = 164{,}88\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Momento plástico. O momento plástico provoca o escoamento do aço em toda a seção transversal da viga, de modo que a distribuição de tensão normal é semelhante à mostrada na Figura 6.56c. Devido à simetria da área de seção transversal e visto que os diagramas tensão–deformação para tração e compressão são iguais, o eixo neutro passa pelo centroide da seção transversal. Para determinar o momento plástico, a distribuição de tensão é dividida em quatro "blocos" retangulares compostos, e a força produzida por cada "bloco" é igual ao volume do bloco. Portanto, temos

$$C_1 = T_1 = 250\ \text{N/mm}^2(12{,}5\ \text{mm})(112{,}5\ \text{mm}) = 351{,}56\ \text{kN}$$

$$C_2 = T_2 = 250\ \text{N/mm}^2(12{,}5\ \text{mm})(200\ \text{mm}) = 625\ \text{kN}$$

Essas forças agem no *centroide* do volume para cada bloco. O cálculo dos momentos dessas forças em torno do eixo neutro dá o momento plástico:

$$M_p = 2[(56{,}25\ \text{mm})(351{,}56\ \text{kN})] + 2[(118{,}75\ \text{mm})(625\ \text{kN})]$$

$$= 188\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

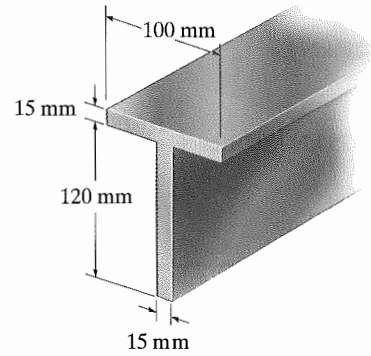
Fator de forma. Aplicando a Equação 6.33 temos

$$k = \frac{M_p}{M_e} = \frac{188\ \text{kN} \cdot \text{m}}{164{,}88\ \text{kN} \cdot \text{m}} = 1{,}14 \qquad \textit{Resposta}$$

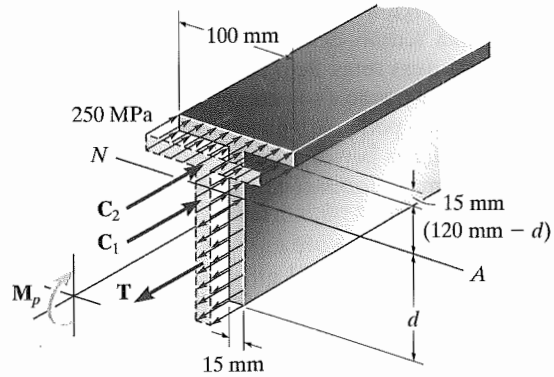
OBSERVAÇÃO: Esse valor indica que a viga oferece uma seção muito eficiente para resistir a um *momento elástico*. A maior parte do momento é desenvolvida nas flanges, isto é, nos segmentos superior e inferior da viga, ao passo que a contribuição da aba ou segmento vertical é muito pequena. Nesse caso em particular, somente 14% do momento adicional pode ser suportado pela viga além do que ela pode suportar elasticamente.

EXEMPLO 6.28

Uma viga em T tem as dimensões mostradas na Figura 6.57a. Se for feita de um material elástico perfeitamente plástico com tensão de escoamento por tração e por compressão σ_e = 250 MPa, determine o momento plástico ao qual a viga pode resistir.



(a)



(b)

Figura 6.57

SOLUÇÃO

A distribuição de tensão "plástica" que age na seção transversal da viga é mostrada na Figura 6.57b. Neste caso, a seção transversal não é simétrica em relação ao eixo horizontal e,

por consequência, o eixo neutro *não* passará pelo centroide da seção transversal. Para determinar a *localização* do eixo neutro, d, exige-se que a distribuição de tensão produza uma força resultante nula na seção transversal. Considerando que $d \leq 120$ mm, temos

$$\int_A \sigma \, dA = 0; \qquad T - C_1 - C_2 = 0$$

$$250 \text{ MPa } (0{,}015 \text{ m})(d) - 250 \text{ MPa } (0{,}015 \text{ m})(0{,}120 \text{ m} - d) - 250 \text{ MPa } (0{,}015 \text{ m})(0{,}100 \text{ m}) = 0$$

$$d = 0{,}110 \text{ m} < 0{,}120 \text{ m} \qquad \text{OK}$$

Usando esse resultado, as forças que agem em cada segmento são

$$T = 250 \text{ MN/m}^2 \, (0{,}015 \text{ m})(0{,}110 \text{ m}) = 412{,}5 \text{ kN}$$

$$C_1 = 250 \text{ MN/m}^2 \, (0{,}015 \text{ m})(0{,}010 \text{ m}) = 37{,}5 \text{ kN}$$

$$C_2 = 250 \text{ MN/m}^2 \, (0{,}015 \text{ m})(0{,}100 \text{ m}) = 375 \text{ kN}$$

Por consequência, o momento plástico resultante em torno do eixo neutro é

$$M_p = 412{,}5 \text{ kN} \left(\frac{0{,}110 \text{ m}}{2} \right) + 37{,}5 \text{ kN} \left(\frac{0{,}01 \text{ m}}{2} \right) + 375 \text{ kN} \left(0{,}01 \text{ m} + \frac{0{,}015 \text{ m}}{2} \right)$$

$$M_p = 29{,}4 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 6.29

A viga na Figura 6.58a é feita de uma liga de titânio cujo diagrama tensão–deformação pode ser aproximado, em parte, por duas retas. Se o comportamento do material for o *mesmo* sob tração e sob compressão, determine o momento fletor que pode ser aplicado à viga e que fará com que o material, nas partes superior e inferior da viga, seja submetido a uma deformação de 0,050 mm/mm.

SOLUÇÃO I

Examinando o diagrama tensão–deformação, podemos dizer que o material exibe comportamento "elástico–plástico com encruamento". Visto que a seção transversal é simétrica e os diagramas σ–ϵ de tração e compressão são iguais, o eixo neutro deve passar pelo centroide da seção transversal. A distribuição de deformação, que é sempre linear, é mostrada na Figura 6.58b. Em particular, o ponto onde ocorre a deformação elástica máxima (0,010 mm/mm) foi determinado por cálculo proporcional, tal que 0,05/1,5 cm = 0,010/y ou $y = 0{,}3$ cm = 3 mm.

A distribuição de tensão normal correspondente que age na seção transversal é mostrada na Figura 6.58c. O momento produzido por essa distribuição de tensão pode ser calculado determinando-se o "volume" dos blocos de tensão. Para isto, subdividiremos essa distribuição em dois blocos triangulares e um bloco retangular na região de tração e também na região de compressão (Figura 6.58d). Visto que a viga tem 2 cm de largura, as resultantes e suas localizações são determinadas da seguinte maneira:

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2}(12 \text{ mm})(280 \text{ N/mm}^2)(20 \text{ mm}) = 33.600 \text{ N}$$

$$= 33{,}6 \text{ kN}$$

$$y_1 = 0{,}3 \text{ cm} + \frac{2}{3}(1{,}2 \text{ cm}) = 1{,}10 \text{ cm} = 11{,}0 \text{ mm}$$

$$T_2 = C_2 = (12 \text{ mm})(1.050 \text{ N/mm}^2)(20 \text{ mm}) = 25.200 \text{ N}$$

$$= 252 \text{ kN}$$

$$y_2 = 0{,}3 \text{ cm} + \frac{1}{2}(1{,}2 \text{ cm}) = 0{,}90 \text{ cm} = 9 \text{ mm}$$

$$T_3 = C_3 = \frac{1}{2}(3 \text{ mm})(1.050 \text{ N/mm}^2)(20 \text{ mm}) = 31.500 \text{ N}$$

$$= 31{,}5 \text{ kN}$$

$$y_3 = \frac{2}{3}(0{,}3 \text{ cm}) = 0{,}2 \text{ cm} = 2 \text{ mm}$$

O momento produzido por essa distribuição de tensão normal em torno do eixo neutro é, portanto,

$$M = 2[33{,}6 \text{ kN } (110 \text{ mm}) + 252 \text{ kN } (9 \text{ mm}) + 31{,}5 \text{ kN } (2 \text{ mm})]$$

$$= 5.401{,}2 \text{ kN} \cdot \text{mm} = 5{,}40 \text{ kN} \cdot \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

Em vez de usar essa técnica parcialmente gráfica, também é possível calcular o momento analiticamente. Para tanto, precisamos expressar a distribuição de tensão na Figura 6.58c em função da posição y ao longo da viga. Observe que $\sigma = f(\epsilon)$ foi dada na Figura 6.58a. Além disso, pela Figura 6.58b, a deformação normal pode ser determinada em função da posição y por cálculo proporcional de triângulos; isto é,

$$\epsilon = \frac{0{,}05}{1{,}5} y \qquad 0 \leq y \leq 1{,}5 \text{ cm} = 15 \text{ mm}$$

Substituindo esse resultado nas funções σ–ϵ mostradas na Figura 6.58a, obtemos

$$\sigma = 350y \qquad 0 \leq y \leq 0{,}3 \text{ cm} = 3 \text{ mm} \qquad (1)$$

$$\sigma = 23{,}33y + 980 \qquad 3 \text{ cm} \leq y \leq 1{,}5 \text{ cm} = 15 \text{ mm} \qquad (2)$$

Pela Figura 6.58e, o momento provocado por σ que age na tira de área $dA = 2\,dy$ é

$$dM = y(\sigma \, dA) = y\sigma(2 \, dy)$$

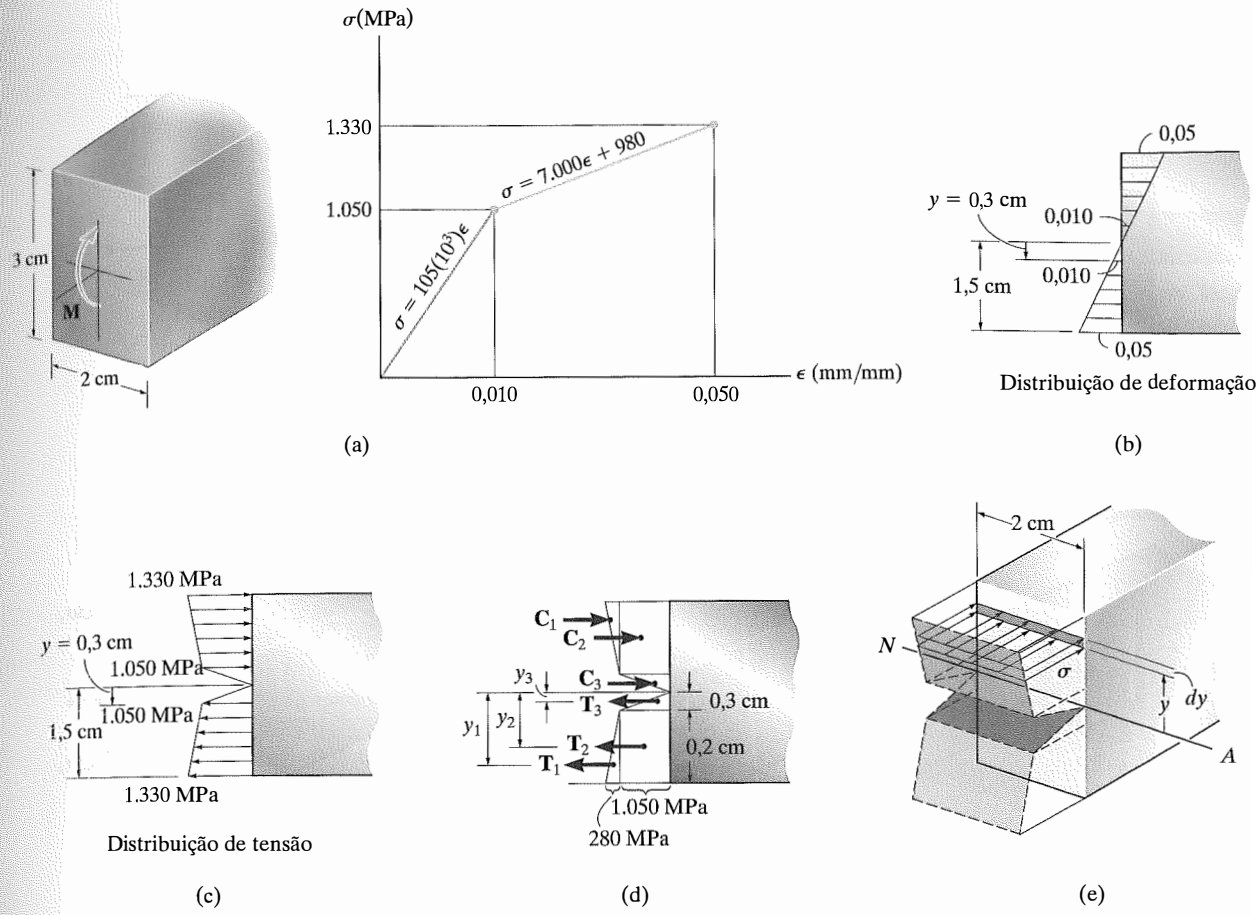


Figura 6.58

Pelas Equações 1 e 2, o momento para a seção transversal inteira é, portanto,

$$M = 2\left[20\int_0^3 350y^2\,dy + 20\int_3^{15}(23{,}33y^2\,dy + 980y\,dy)\right]$$

$$= 5.401(10^3)\ \text{N}\cdot\text{mm} = 5{,}40\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

6.11 Tensão residual

Se a viga for carregada de tal modo que provoque o escoamento do material, então a retirada da carga causará ***tensão residual*** que se desenvolverá na viga. Visto que as tensões residuais são importantes quando se consideram fadiga e outros tipos de comportamento mecânico, discutiremos um método usado para calcular essas tensões quando um elemento é submetido à flexão.

Como no caso da torção, podemos calcular a distribuição da tensão residual pelos princípios da superposição e recuperação elástica. Para explicar como isso é feito, considere a viga mostrada na Figura 6.59a, com seção transversal retangular e feita de um material elástico perfeitamente plástico para o qual os diagramas tensão–deformação sob tração e sob compressão são iguais (Figura 6.59b). A aplicação do momento plástico M_p provoca uma distribuição de tensão idealizada na Figura 6.59c. Pela Equação 6.31, esse momento é

$$M_p = \frac{1}{4}bh^2\sigma_e$$

Se M_p provocar deformação no material nas partes superior e inferior da viga até ϵ ($>>\epsilon_e$), como mostra o ponto B da curva σ–ϵ na Figura 6.59b, então a remoção desse momento fará o material recuperar parte dessa deformação elasticamente segundo a trajetória BC indicada pela reta tracejada. Uma vez que essa recuperação é elástica, podemos sobrepor à distribuição de tensão mostrada na Figura 6.59c uma distribuição de tensão linear provocada pela aplicação do momento plástico na direção oposta (Figura 6.59d). Aqui, a tensão máxima, que é denominada ***módulo de ruptura*** por flexão, σ_r, pode ser determinada pela fórmula da flexão quando a viga está carregada com o momento plástico. Temos

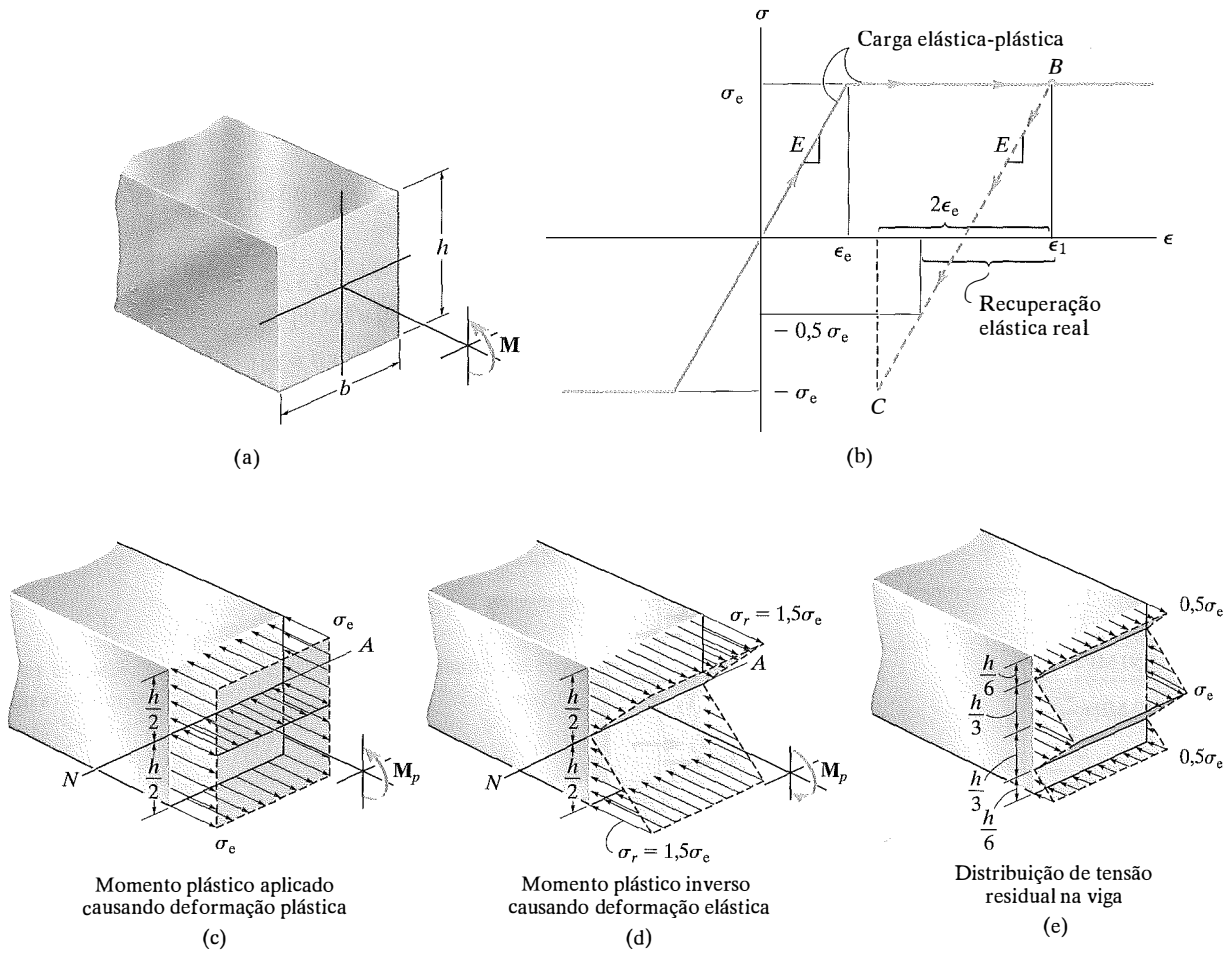


Figura 6.59

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I};$$

$$\sigma_r = \frac{M_p\left(\frac{1}{2}h\right)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}bh^2\sigma_e\right)\left(\frac{1}{2}h\right)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)}$$

$$= 1{,}5\sigma_e$$

Observe que, aqui, é possível a aplicação inversa do momento plástico usando uma distribuição de tensão linear, visto que a *recuperação elástica* do material nas partes superior e inferior da viga pode ter uma *recuperação de deformação máxima* $2\epsilon_e$, como mostra a Figura 6.59b. Isso corresponderia a uma tensão máxima de $2\sigma_e$ nas partes superior e inferior da viga, que é maior do que a tensão *exigida* de 1,5 σ_e, a qual já calculamos (Figura 6.59d).

A superposição do momento plástico (Figura 6.59c) e sua remoção (Figura 6.59d) dão a distribuição de tensão residual mostrada na Figura 6.59e. Como exercício, use os "blocos" triangulares que representam essa distribuição de tensão e mostre que ela pode resultar em força nula e momento nulo resultantes no elemento, como exigido.

O exemplo a seguir ilustra numericamente a aplicação desses princípios.

EXEMPLO 6.30

A viga mostrada na Figura 6.60a está sujeita a um momento inteiramente plástico $\mathbf{M}_p$. Se esse momento for removido, determine a distribuição de tensão residual na viga. O material é elástico perfeitamente plástico e tem tensão de escoamento $\sigma_e = 250$ MPa.

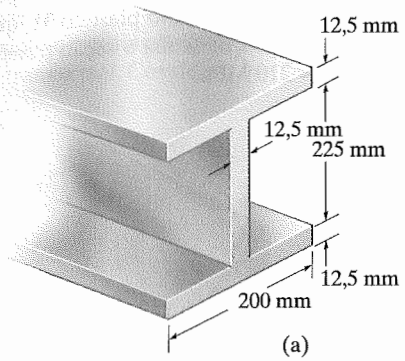
SOLUÇÃO

A distribuição de tensão normal na viga provocada por $\mathbf{M}_p$ é mostrada na Figura 6.60b. Quando $\mathbf{M}_p$ é removido, o material responde elasticamente. A remoção de $\mathbf{M}_p$ requer a aplicação de $\mathbf{M}_p$ na direção oposta e, portanto, acarreta uma suposta distribuição de tensão elástica, como mostra a Figura 6.60c. O módulo de ruptura σ_r é calculado pela fórmula da flexão. Usando $M_p = 188$ kN · m e $I = 82{,}44 \times 10^6$ mm^4 do Exemplo 6.27, temos

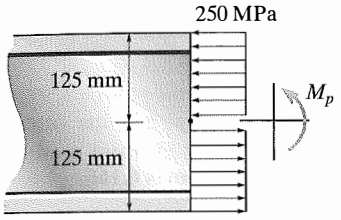
$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{adm} = \frac{(188 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm})(125 \text{ mm})}{82{,}44 \times 10^6 \text{ mm}^4}$$

$$= 285{,}1 \text{ N/mm}^2 = 285{,}1 \text{ MPa}$$

Como esperado, $\sigma_r < 2\,\sigma_y$.

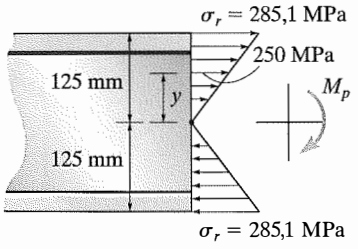


(a)



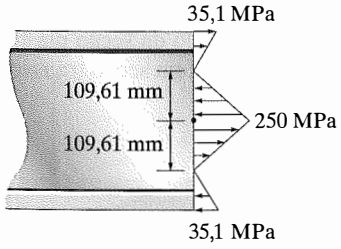
Momento plástico aplicado
(vista lateral)

(b)



Momento plástico inverso
(vista lateral)

(c)



Distribuição de tensão residual

(d)

Figura 6.60

A superposição das tensões dá a distribuição de tensão residual mostrada na Figura 6.60d. Observe que o ponto de tensão normal nula foi determinado por cálculo proporcional; isto é, pela Figura 6.60b e 6.60c, exige-se que

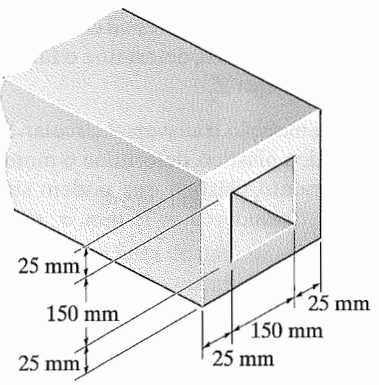
$$\frac{281{,}51\ \text{MPa}}{125\ \text{mm}} = \frac{2.501\ \text{MPa}}{y}$$

$$y = 109{,}61\ \text{mm}$$

PROBLEMAS

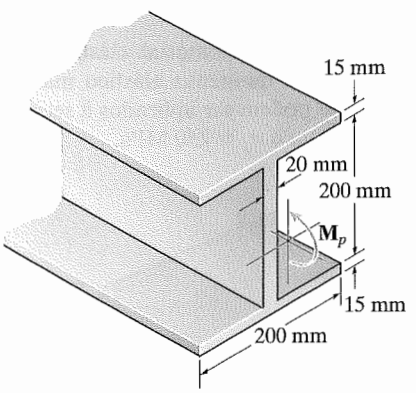
6.157. Uma barra retangular de aço A-36 tem largura 25 mm e altura 75 mm. Determine o momento aplicado em torno do eixo horizontal que provocará o escoamento de metade da barra.

6.158. A viga-caixão é feita de um material elástico perfeitamente plástico para o qual σ_e = 250 MPa. Determine a tensão residual nas partes superior e inferior da viga após a aplicação e posterior remoção do momento plástico $\mathbf{M}_p$.



Problema 6.158

6.159. A viga é feita de um material elástico plástico para o qual σ_e = 250 MPa. Determine a tensão residual nas partes superior e inferior da viga após a aplicação e posterior remoção do momento plástico $\mathbf{M}_p$.

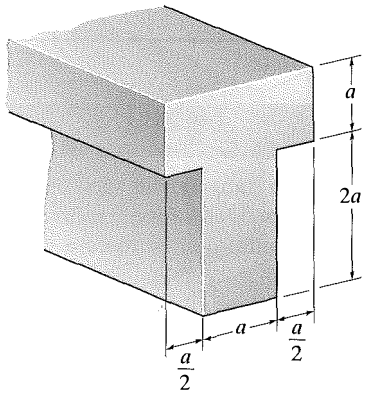


Problema 6.159

*__6.160.__ Determine o módulo da seção plástica e o fator de forma da seção transversal da viga.

6.161. A viga é feita de um material elástico perfeitamente plástico. Determine o momento elástico máximo e o mo-

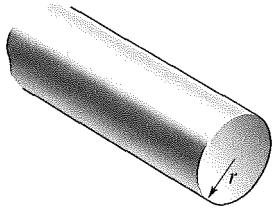
mento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Considere $a = 50$ mm e $\sigma_e = 230$ MPa.



Problemas 6.160/161

6.162. A haste tem seção transversal circular. Se for feita de um material elástico plástico, determine o fator de forma e o módulo da seção plástica Z.

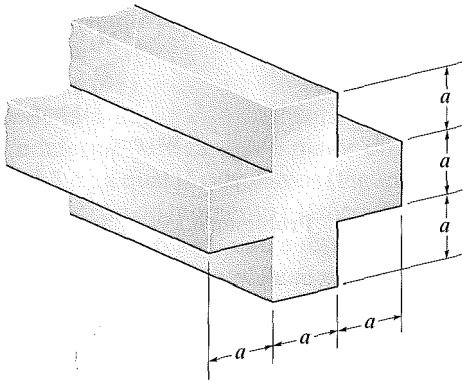
6.163. A haste tem seção transversal circular. Se for feita de um material elástico plástico, determine o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Considere $r = 75$ mm, $\sigma_e = 250$ MPa.



Problemas 6.162/163

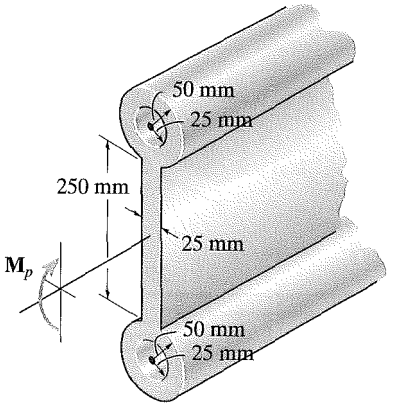
*__6.164.__ Determine o módulo da seção plástica e o fator de forma da seção transversal.

6.165. A viga é feita de material elástico perfeitamente plástico. Determine o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Considere $a = 50$ mm e $\sigma_e = 250$ MPa.



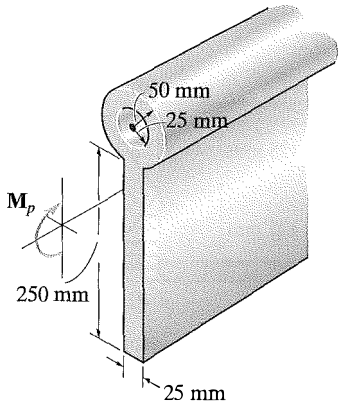
Problemas 6.164/165

6.166. A viga é feita de um material elástico perfeitamente plástico. Determine o momento plástico $\mathbf{M}_p$ que pode ser suportado por uma viga que tenha a seção transversal mostrada na figura $\sigma_e = 210$ MPa.



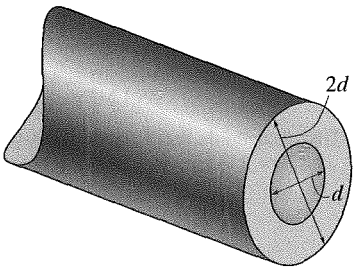
Problemas 6.166

6.167. Determine o momento plástico $\mathbf{M}_p$ que pode ser suportado por uma viga que tenha a seção transversal mostrada na figura $\sigma_e = 210$ MPa.



Problema 6.167

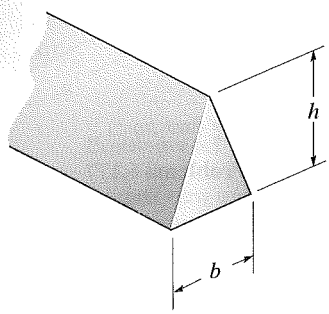
*__6.168.__ Determine o módulo da seção plástica e o fator de forma para o elemento que tem seção transversal tubular.



Problema 6.168

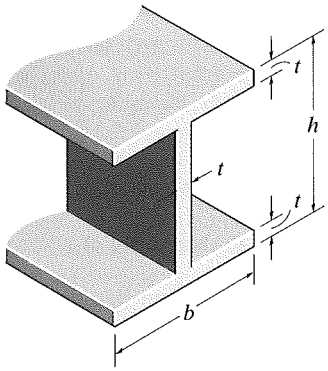
6.169. Determine o módulo da seção plástica e o fator de forma para o elemento.

6.170. O elemento é feito de material elástico perfeitamente plástico para o qual $\sigma_e = 230$ MPa. Determine o momento elástico máximo e o momento plástico que podem ser aplicados à seção transversal. Considere $b = 50$ mm e $h = 80$ mm.



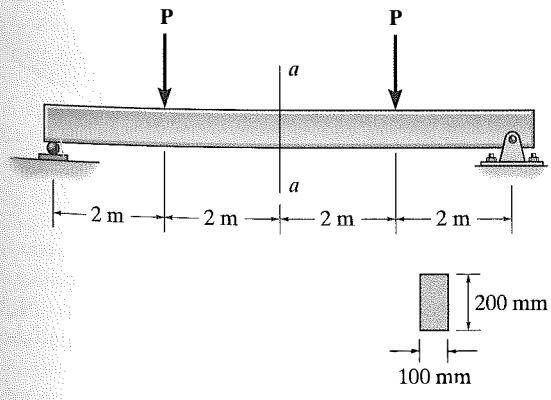
Problemas 6.169/170

6.171. O elemento em T é feito de um material elástico plástico. Determine o fator de forma e o módulo da seção plástica, Z.



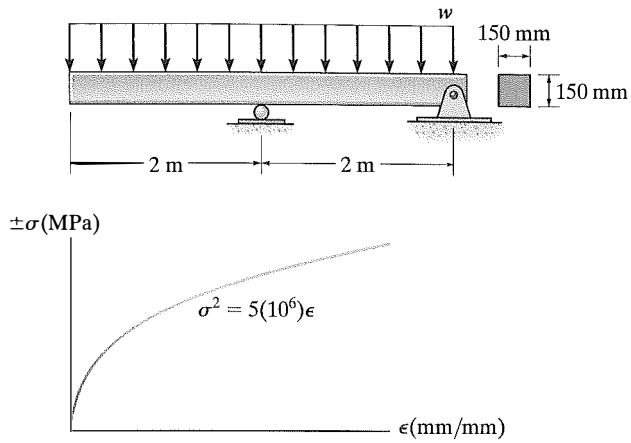
Problema 6.171

6.172. A viga é feita de um material elástico plástico para o qual $\sigma_e = 200$ MPa. Se o maior momento na viga ocorrer no interior da seção central a–a, determine o valor de cada força **P** que faz com que esse momento seja (a) o maior momento elástico e (b) o maior momento plástico.



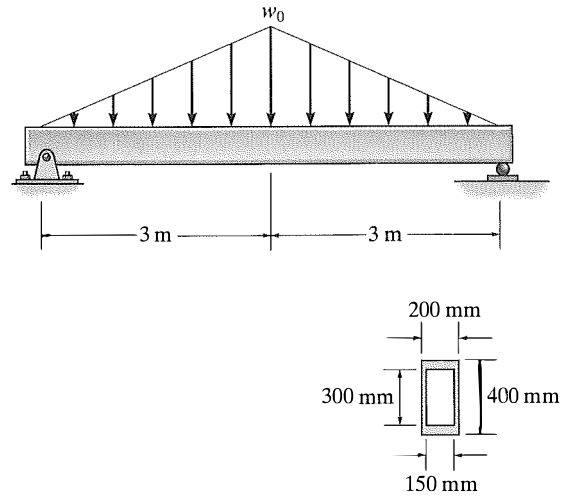
Problema 6.172

6.173. A viga é feita de um material fenólico, um plástico estrutural, cuja curva tensão–deformação é mostrada na figura. Se uma porção da curva puder ser representada pela equação $\sigma = [5(10^6)\epsilon]^{1/2}$ MPa, determine o valor w da carga distribuída que pode ser aplicada à viga sem que a deformação máxima provocada nas fibras em sua seção crítica ultrapasse $\epsilon_{máx} = 0{,}005$ mm/mm.



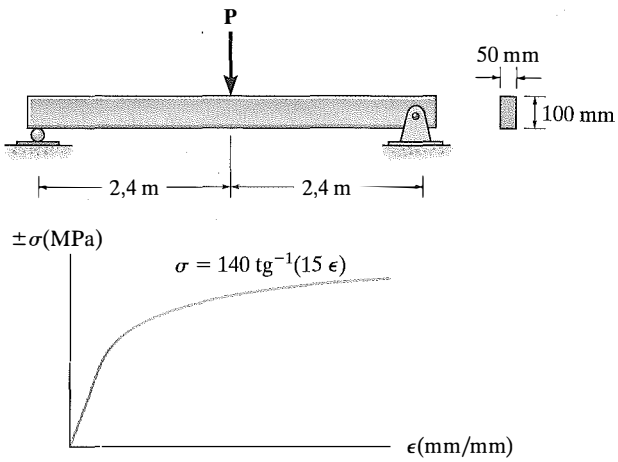
Problema 6.173

6.174. A viga-caixão é feita de um material elástico plástico para o qual $\sigma_e = 175$ MPa. Determine a intensidade da carga distribuída w_0 que fará com que o momento seja (a) o maior momento elástico e (b) o maior momento plástico.



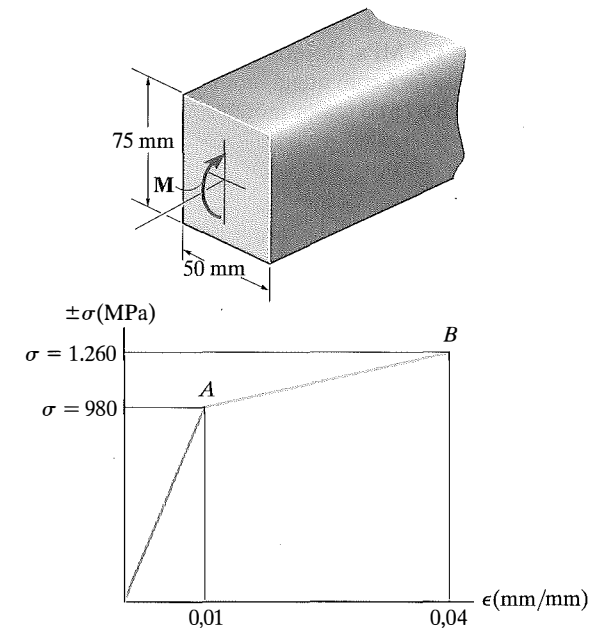
Problema 6.174

6.175. A viga é feita de um poliéster cuja curva tensão–deformação é mostrada na figura. Se a curva puder ser representada pela equação $\sigma = 140\ \text{tg}^{-1}(15\epsilon)]$ MPa, onde $\text{tg}^{-1}(15\epsilon)$ é dada em radianos, determine o valor da força **P** que pode ser aplicada à viga sem que a deformação máxima provocada nas fibras em sua seção crítica ultrapasse $\epsilon_{máx} = 0{,}003$ mm/mm.



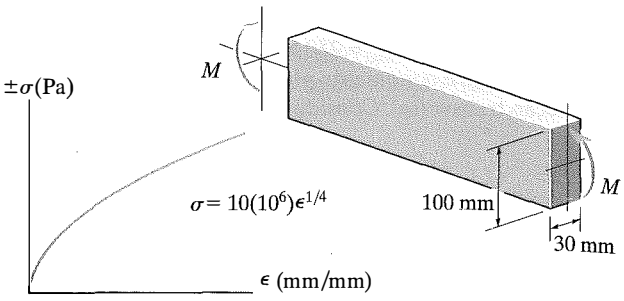
Problema 6.175

*6.176. O diagrama tensão–deformação para uma liga de titânio pode ser aproximado pelas duas retas mostradas na figura. Se uma escora feita desse material for submetida a flexão, determine o momento ao qual ela resistirá se a tensão máxima atingir um valor de (a) σ_A e (b) σ_B.



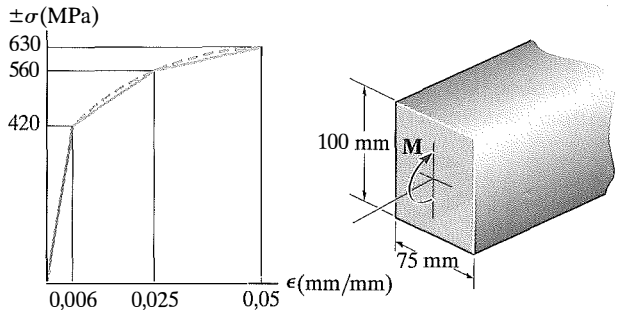
Problema 6.176

6.177. A viga é feita de plástico polipropileno, e seu diagrama tensão–deformação pode ser aproximado pela curva mostrada na figura. Se a viga for submetida a uma deformação máxima tanto para tração quanto para compressão de $\epsilon = 0{,}02$ mm/mm, determine o momento máximo M.



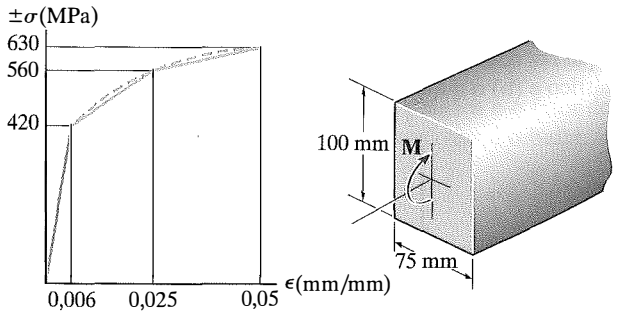
Problema 6.177

6.178. A barra é feita de uma liga de alumínio cujo diagrama tensão–deformação pode ser aproximado pelos segmentos de reta mostrados na figura. Considerando que esse diagrama é o mesmo para tração e compressão, determine o momento que a barra suportará se a deformação máxima nas fibras superiores e inferiores da viga for $\epsilon_{máx} = 0{,}03$.



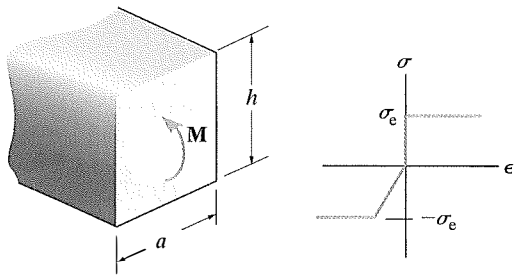
Problema 6.178

6.179. A barra é feita de uma liga de alumínio cujo diagrama tensão–deformação pode ser aproximado pelos segmentos de reta mostrados na figura. Considerando que esse diagrama é o mesmo para tração e compressão, determine o momento que a barra suportará se a deformação máxima nas fibras superiores e inferiores da viga for $\epsilon_{máx} = 0{,}05$.



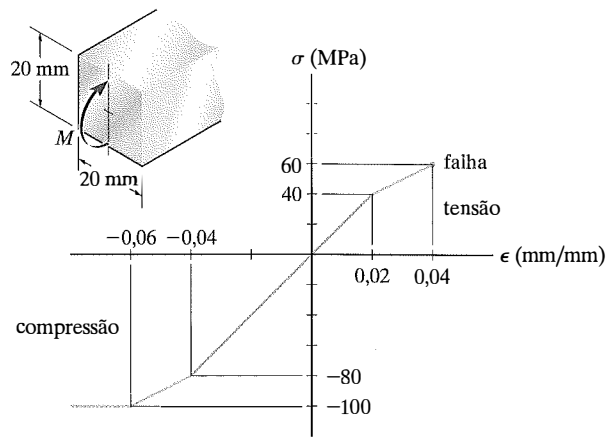
Problema 6.179

*6.180. A viga é feita de um material que pode ser considerado como perfeitamente plástico sob tração e plástico sob compressão. Determine o momento fletor máximo M que pode ser suportado pela viga de modo que o material sob compressão na borda externa comece a escoar.



Problema 6.180

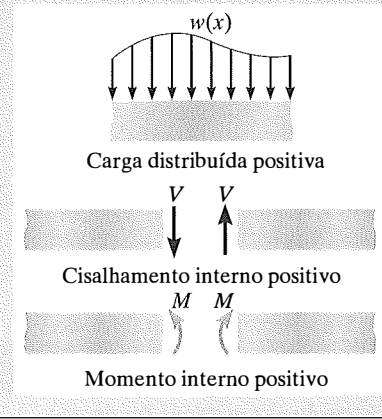
6.181. A barra de *plexiglass* tem uma curva tensão–deformação que pode ser aproximada pelos segmentos de reta mostrados na figura. Determine o maior momento M que pode ser aplicado à barra antes que ela falhe.



Problema 6.181

Revisão do capítulo

Diagramas de força cortante e momento fletor são representações gráficas do cisalhamento interno e do momento no interior de uma viga. A construção desses diagramas requer um corte na viga a uma distância arbitrária x da extremidade esquerda, a determinação de V e M em função de x e, por fim, a construção do gráfico com os resultados. Será necessário adotar uma convenção de sinal para força cortante e momento positivos.



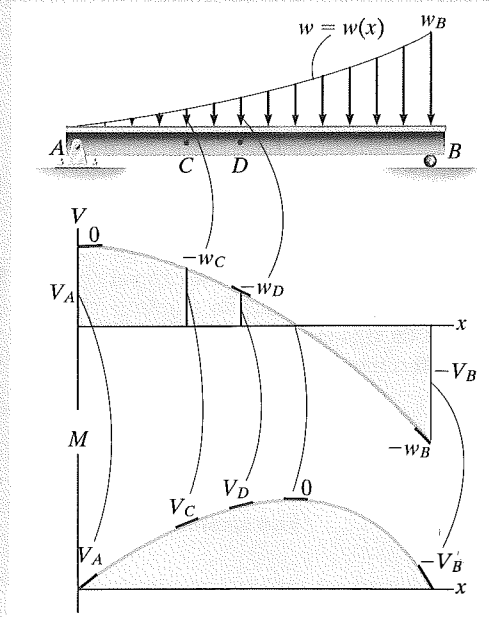
Também é possível fazer a representação gráfica de diagramas de força cortante e momento fletor se considerarmos que, em cada ponto, a inclinação do diagrama de força cortante corresponde a uma negativa do carregamento distribuído.
A inclinação do diagrama de momento é o cisalhamento.
A área (negativa) sob o diagrama de carregamento representa a mudança na força cortante.
A área sob o diagrama de força cortante representa a mudança no momento fletor.
Os valores de força cortante e momento fletor também podem ser obtidos pelo método das seções.

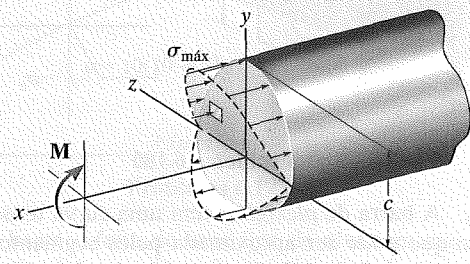
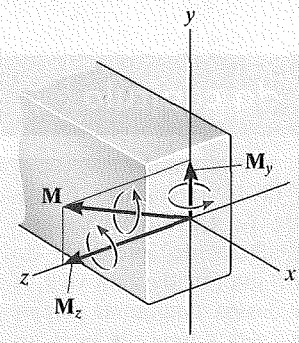
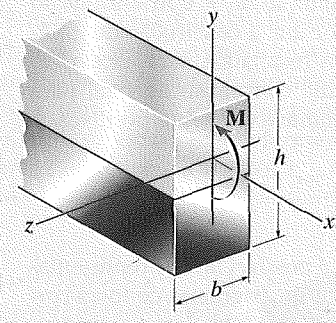
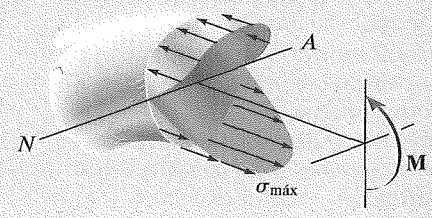
$$w = \frac{dV}{dx}$$

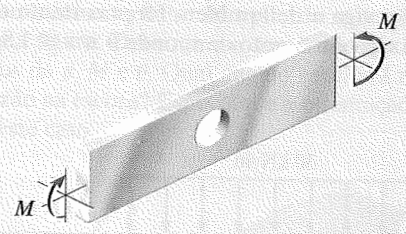
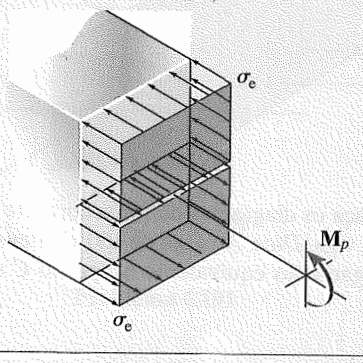
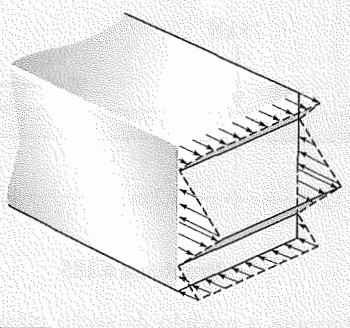
$$V = \frac{dM}{dx}$$

$$\Delta V = -\int w\,dx$$

$$\Delta M = \int V\,dx$$

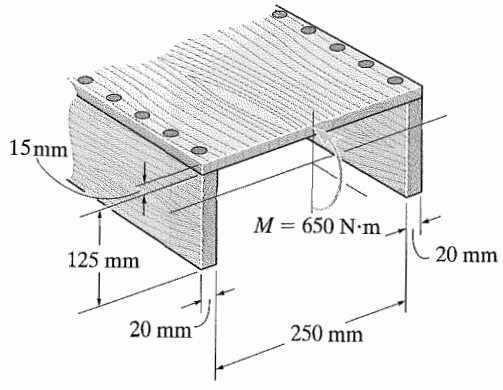


Um momento fletor tende a produzir uma variação linear da deformação normal no interior de uma viga. Contanto que o material seja homogêneo e a lei de Hooke se aplique, o equilíbrio pode ser usado para relacionar o momento interno na viga com a distribuição de tensão. O resultado é a fórmula da flexão, $$\sigma = \frac{Mc}{I}$$ onde I e c são determinados em relação ao eixo neutro que passa pelo centroide da seção transversal.		
Se a seção transversal da viga não for simétrica em torno de um eixo perpendicular ao eixo neutro, então ocorrerá flexão assimétrica. A tensão máxima pode ser determinada por fórmulas, ou o problema pode ser resolvido considerando-se a superposição da flexão em torno de dois eixos separados.	$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$	
Vigas feitas de materiais compostos podem ser "transformadas" de modo a podermos considerar que sua seção transversal seja feita de um único material. Para isso, usa-se um fator de transformação que é a razão entre os módulos de elasticidade dos materiais. Então, a tensão na viga pode ser determinada da maneira usual, pela fórmula da flexão.	$$n = \frac{E_1}{E_2}$$	
Vigas curvas deformam-se de tal modo que a deformação normal não varia linearmente em relação ao eixo neutro. Desde que o material seja homogêneo e linear elástico e a seção transversal tenha um eixo de simetria, então a fórmula da viga curva pode ser usada para determinar a tensão de flexão.	$$\sigma = \frac{M(R - r)}{Ar(\bar{r} - R)}$$ ou $$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)}$$	

Concentrações de tensão ocorrem em elementos cuja seção transversal muda repentinamente devido a furos e entalhes. A tensão de flexão máxima nesses locais é determinada com a utilização do fator de concentração de tensão K, que é obtido em gráficos determinados por meios experimentais.	$\sigma_{máx} = K\sigma_{méd}$	
Se o momento fletor fizer o material ultrapassar seu limite elástico, a deformação normal permanecerá linear; todavia, a distribuição de tensão variará de acordo com o diagrama de deformação por cisalhamento e o saldo entre o equilíbrio de força e momento. Desse modo, os momentos plástico e resistente suportados pela viga podem ser determinados.		
Se um momento plástico ou resistente for aplicado e removido, fará o material responder elasticamente e, por isso, induzirá tensões residuais na viga.		

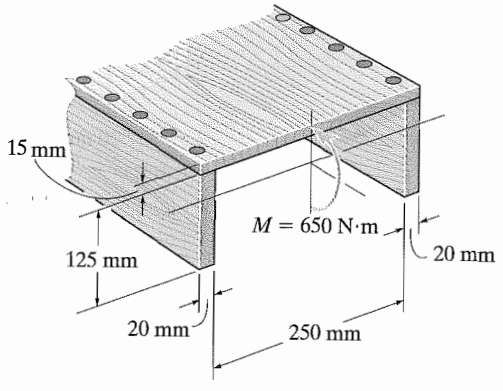
PROBLEMAS DE REVISÃO

6.182. A viga é composta por três tábuas unidas por pregos, como mostra a figura. Se o momento que age na seção transversal for $M = 650\ \text{N} \cdot \text{m}$, determine a força resultante que a tensão de flexão produz na tábua de cima.



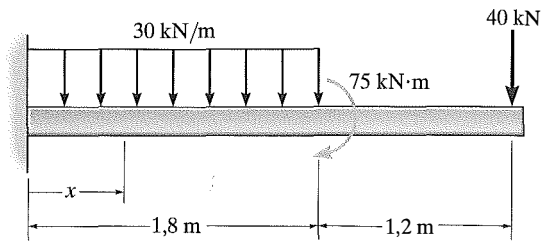
Problema 6.182

6.183. A viga é composta por três tábuas unidas por pregos, como mostra a figura. Determine as tensões de tração e compressão máximas na viga.



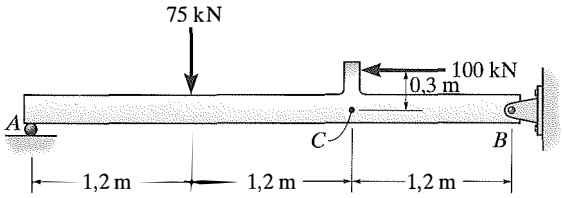
Problema 6.183

*6.184. Faça os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e determine a força cortante e o momento fletor na viga em função de x, onde $0 \leq x \leq 1{,}8$ m.



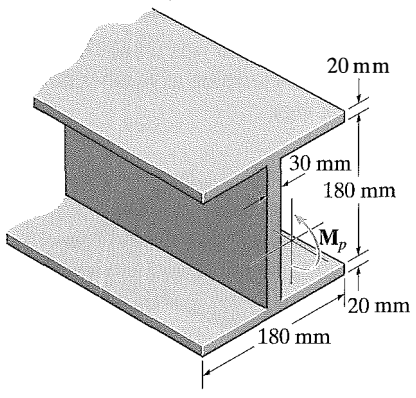
Problema 6.184

6.185. Faça os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga. *Dica:* A carga de 100 kN deve ser substituída por carregamento equivalente no ponto C sobre o eixo da viga.



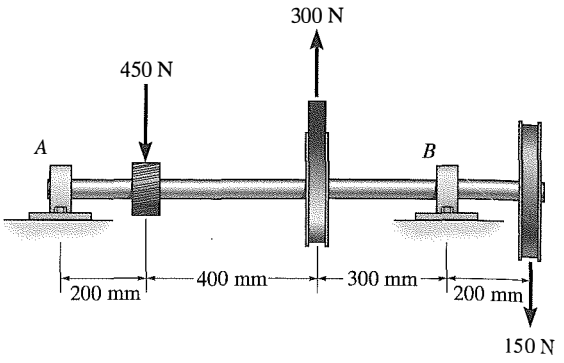
Problema 6.185

6.186. Determine o módulo da seção plástica e o fator de forma para a viga em I.



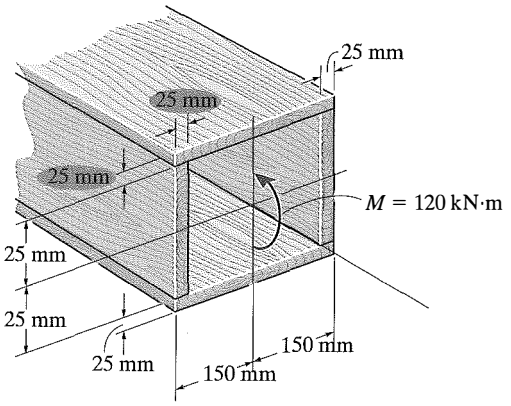
Problema 6.186

6.187. Faça os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo se ele for submetido às cargas verticais da correia, engrenagem e volante. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo.



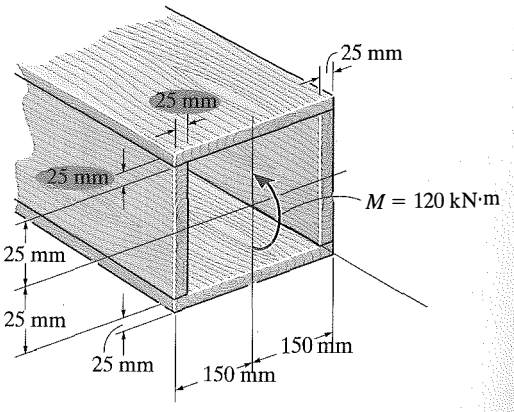
Problema 6.187

*6.188. A viga é composta por quatro peças de madeira coladas, como mostra a figura. Se o momento fletor interno for $M = 120$ kN · m, determine a tensão de flexão máxima na viga. Trace um rascunho tridimensional da distribuição de tensão que age na seção transversal.



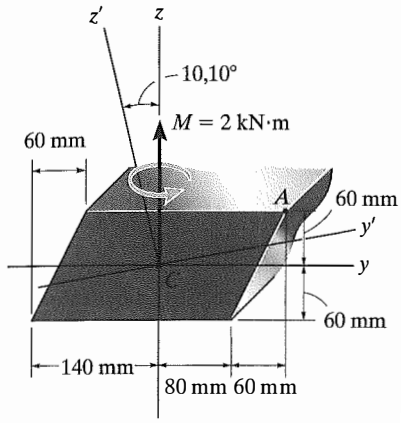
Problema 6.188

6.189. A viga é composta por quatro peças de madeira coladas, como mostra a figura. Se o momento fletor interno for $M = 120$ kN · m, determine a força resultante que o momento fletor exerce nas peças superior e inferior da viga.



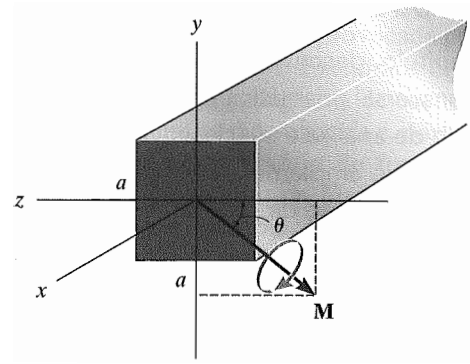
Problema 6.189

6.190. Para a seção, $I_z = 114(10^{-6})\text{m}^4$, $31{,}7(10^{-6})\text{m}^4$, $I_{yz} = 15{,}1(10^{-6})\text{m}^4$. Pelas técnicas descritas no Apêndice A, a área da seção transversal do elemento tem momentos de inércia principais de $I_{y'} = 29(10^{-6})\text{m}^4$ e $I_{z'} = 117(10^{-6})\text{m}^4$, calculados em torno dos eixos principais de inércia y' e z', respectivamente. Se a seção for submetida a um momento $M = 2\text{ kN} \cdot \text{m}$ direcionado, como mostra a figura, determine a tensão produzida no ponto A, (a) pela Equação 6.11 e (b) pela equação desenvolvida no Problema 6.111.



Problema 6.190

6.191. A escora tem seção transversal quadrada a por a e está sujeita ao momento fletor **M** aplicado a um ângulo θ, como mostra a figura. Determine a tensão de flexão máxima em termos de a, M e θ. Qual ângulo resultará na maior tensão de flexão na escora? Especifique a orientação do eixo neutro para este caso.



Problema 6.191

7 Cisalhamento transversal

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, desenvolveremos um método para determinar a tensão de cisalhamento em uma viga com seção transversal prismática e feita de material homogêneo que se comporta de uma maneira linear elástica. O método de análise a ser desenvolvido ficará limitado a casos especiais de geometria da seção transversal. Apesar disso, é amplamente aplicado em projeto e análise de engenharia. O conceito de fluxo de cisalhamento e o de tensão de cisalhamento serão discutidos para vigas e elementos de paredes finas. O capítulo é finalizado com uma discussão sobre centro de cisalhamento.

7.1 Cisalhamento em elementos retos

Na Seção 6.1, mostramos que, em geral, as vigas suportam cargas de cisalhamento e também de momento fletor. O cisalhamento **V** é o resultado de uma distribuição de tensão de cisalhamento transversal que age na seção transversal da viga (Figura 7.1). Devido à propriedade complementar de cisalhamento, observe que tensões de cisalhamento longitudinais associadas também agirão ao longo dos planos longitudinais da viga. Por exemplo, um elemento retirado de um ponto interno da seção transversal está sujeito a tensões de cisalhamento transversal e longitudinal como mostra a Figura 7.1.

É possível explicar fisicamente por que a tensão de cisalhamento se desenvolve nos planos longitudinais de uma viga considerando que ela é composta por três tábuas (Figura 7.2a). Se as superfícies superior e inferior de cada tábua forem lisas e as tábuas estiverem soltas, a aplicação da carga **P** fará com que as tábuas

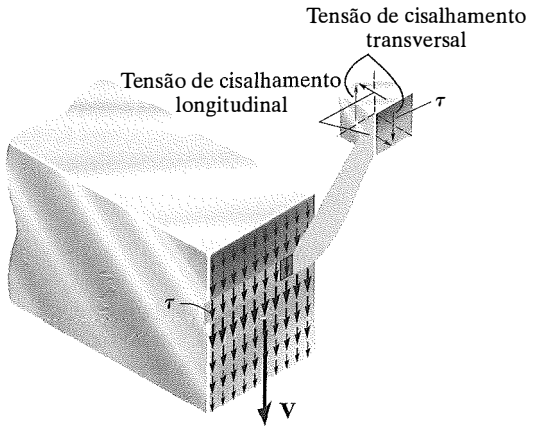
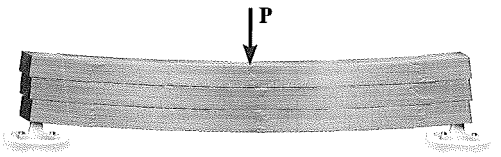
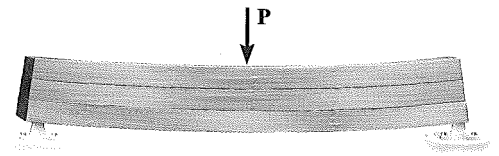


Figura 7.1



Tábuas soltas
(a)

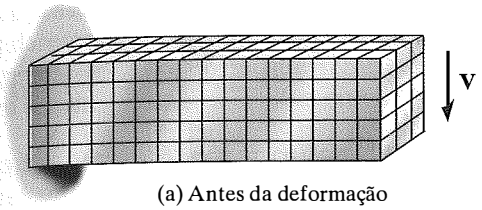


Tábuas unidas
(b)

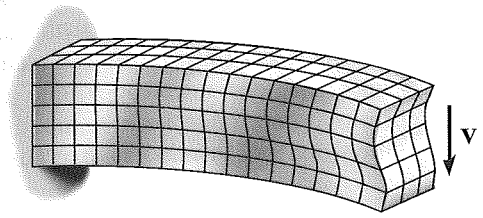
Figura 7.2

deslizem uma sobre a outra e, assim, a viga sofrerá a deflexão mostrada na Figura 7.2a. Por outro lado, se as tábuas estiverem unidas, as tensões de cisalhamento longitudinais entre elas impedirão que uma deslize sobre a outra e, por consequência, a viga agirá como uma unidade única (Figura 7.2b).

Como resultado da tensão de cisalhamento, serão desenvolvidas tensões de deformação que tenderão a distorcer a seção transversal de uma maneira bastante complexa. Para mostrar isso, considere uma barra feita de um material com alto grau de deformação e marcado com uma grade de linhas horizontais e verticais (Figura 7.3a). Quando é aplicado um cisalhamento **V**, as linhas da grade tendem a se deformar conforme o padrão mostrado na Figura 7.3b. Essa distribuição não uniforme da deformação por cisalhamento na seção transversal fará que ela se *deforme*, isto é, *não* permaneça plana.



(a) Antes da deformação



(b) Após a deformação

Figura 7.3

Lembre-se de que, no desenvolvimento da fórmula da flexão, consideramos que as seções transversais devem *permanecer* planas e perpendiculares ao eixo longitudinal da viga após a deformação. Embora essa regra seja *infringida* quando a viga é submetida a cisalhamento e também a flexão, de modo geral, podemos considerar que a distorção da seção transversal descrita anteriormente é pequena o suficiente para ser desprezada. Essa consideração é particularmente verdadeira para o caso mais comum como de uma *viga esbelta*; isto é, uma viga cuja largura é pequena em comparação com seu comprimento.

Nos capítulos anteriores, desenvolvemos as fórmulas da carga axial, da torção e da flexão determinando, em primeiro lugar, a distribuição da deformação com base em premissas referentes à deformação da seção transversal. Entretanto, no caso do cisalhamento transversal, a distribuição da deformação por cisalhamento ao longo da largura de uma viga *não pode* ser expressa facilmente em termos matemáticos. Por exemplo, ela não é uniforme nem linear para seções transversais retangulares, como já mostramos. Portanto, a análise de tensão de cisalhamento citada será desenvolvida de uma maneira diferente da usada para estudar os carregamentos anteriores. Especificamente, desenvolveremos uma fórmula para a tensão de cisalhamento *indiretamente*; isto é, usando a fórmula da flexão e a relação entre momento fletor e cisalhamento ($V = dM/dx$).

7.2 A fórmula do cisalhamento

O desenvolvimento de uma relação entre a distribuição da tensão de cisalhamento que age na seção transversal de uma viga e a força de cisalhamento resultante na seção é baseado no estudo da *tensão de cisalhamento longitudinal* e nos resultados da Equação 6.2, $V = dM/dx$. Para mostrar como essa relação é definida, consideraremos o *equilíbrio da força horizontal* de uma porção do elemento retirado da viga na Figura 7.4a e mostrado na Figura 7.4b. A Figura 7.4c apresenta um diagrama de corpo livre do *elemento* que mostra *somente* a distribuição de tensão normal que age sobre ele. Essa distribuição é provocada pelos momentos fletores M e $M + dM$. Excluímos o efeito de V, $V + dV$ e $w(x)$ sobre o diagrama de corpo livre, já que esses carregamentos são verticais e, portanto, não estarão envolvidos no somatório de forças horizontais. Na verdade, o elemento na Figura 7.4c satisfará $\Sigma F_x = 0$ desde que a distribuição de tensão de cada lado do elemento forme apenas um conjugado e, portanto, uma força resultante nula.

Agora, considere o *segmento* na parte superior do elemento que foi secionado em y' em relação ao eixo neutro (Figura 7.4b). Esse segmento tem largura t na seção, e cada um dos lados da seção transversal tem área A'. Como a diferença entre os momentos resultantes em cada lado do elemento é dM, podemos ver na Figura 7.4d que $\Sigma F_x = 0$ não será satisfeita *a menos que* uma tensão de cisalhamento longitudinal aja sobre a face inferior do segmento. Na análise que faremos a seguir, consideraremos que essa tensão de cisalhamento seja *constante* em toda a largura t da face inferior. Ela age na área $t\,dx$. Aplicando a equação do equilíbrio da força horizontal e usando a fórmula da flexão (Equação 6.13), temos

$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad \int_{A'} \sigma'\, dA' - \int_{A'} \sigma\, dA' - \tau(t\, dx) = 0$$

$$\int_{A'} \left(\frac{M + dM}{I}\right) y\, dA' - \int_{A'} \left(\frac{M}{I}\right) y\, dA' - \tau(t\, dx) = 0$$

$$\left(\frac{dM}{I}\right) \int_{A'} y\, dA' = \tau(t\, dx) \tag{7.1}$$

Resolvendo para τ, obtemos

$$\tau = \frac{1}{It}\left(\frac{dM}{dx}\right) \int_{A'} y\, dA'$$

Essa equação pode ser simplificada observando-se que $V = dM/dx$ (Equação 6.2). Além disso, a integral representa o momento de primeira ordem da área A' em torno do eixo neutro que representaremos pelo símbolo Q. Visto que a localização do centroide da área A' é determinada por $\bar{y}' = \int_{A'} y\, dA'/A'$, também podemos escrever

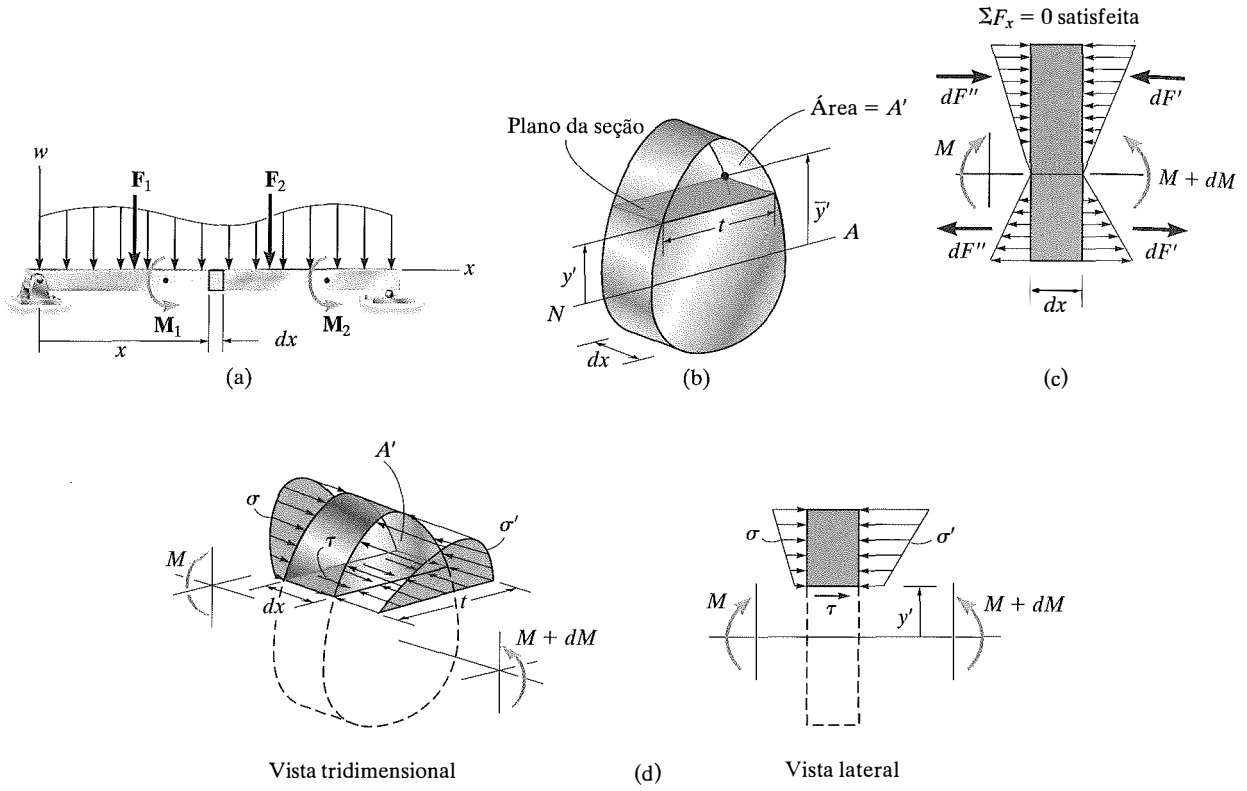


Figura 7.4

$$Q = \int_{A'} y\, dA' = \bar{y}'A' \tag{7.2}$$

O resultado final é, portanto,

$$\boxed{\tau = \frac{VQ}{It}} \tag{7.3}$$

Nessa expressão,

τ = tensão de cisalhamento no elemento no ponto localizado à distância y' do eixo neutro (Figura 7.4b). Consideramos que essa tensão é constante e, portanto, *média*, por toda a largura t do elemento (Figura 7.4d)

V = força de cisalhamento interna resultante, determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio

I = momento de inércia da área da seção transversal *inteira*, calculada em torno do eixo neutro.

t = largura da área da seção transversal do elemento, medida no ponto onde τ deve ser determinada

$Q = \int A' y\, dA' = \bar{y}'A'$, onde A' é a porção superior (ou inferior) da área da seção transversal do elemento, definido pela seção onde t é medida e $\bar{y}'$ é a distância até o centroide de A', medida em relação ao eixo neutro

A Equação 7.3 é conhecida como *fórmula do cisalhamento*. Embora, na dedução dessa fórmula, tenhamos considerado somente as tensões de cisalhamento que agem no plano longitudinal da viga, ela também se aplica para determinar a tensão de cisalhamento transversal na área da seção transversal da viga. Isso porque as tensões de cisalhamento transversal e longitudinal são complementares e numericamente iguais.

Visto que a Equação 7.3 foi derivada indiretamente da fórmula da flexão, é necessário que o material se comporte de uma maneira linear elástica e tenha o *mesmo* módulo de elasticidade sob tração e sob compressão. A tensão de cisalhamento em elementos compostos, isto é, os que têm seções transversais feitas de materiais diferentes, também pode ser obtida pela fórmula de cisalhamento. Para tanto, é necessário calcular Q e I da *seção transformada* do elemento como discutimos na Seção 6.6. Todavia, a espessura t na fórmula permanece a largura verdadeira t da seção transversal no ponto onde τ deve ser calculada.

7.3 Tensões de cisalhamento em vigas

Para desenvolver uma certa percepção do método de aplicação da fórmula de cisalhamento e também discutir algumas de suas limitações, estudaremos, agora, as distribuições de tensão de cisalhamento em

alguns tipos comuns de seções transversais de vigas. Então, daremos aplicações numéricas da fórmula do cisalhamento nos exemplos que serão apresentados logo em seguida.

Seção transversal retangular. Considere que a viga tem uma seção transversal retangular de largura b e altura h como mostra a Figura 7.5a. A distribuição da tensão de cisalhamento pela seção transversal pode ser determinada pelo cálculo da tensão de cisalhamento a uma *altura arbitrária* y em relação ao eixo neutro (Figura 7.5b) e posterior representação gráfica dessa função. Aqui, a área sombreada colorida escura A' será usada para calcular τ.* Por consequência,

$$Q = \bar{y}'A' = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]\left(\frac{h}{2} - y\right)b$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)b$$

Aplicando a fórmula do cisalhamento, temos

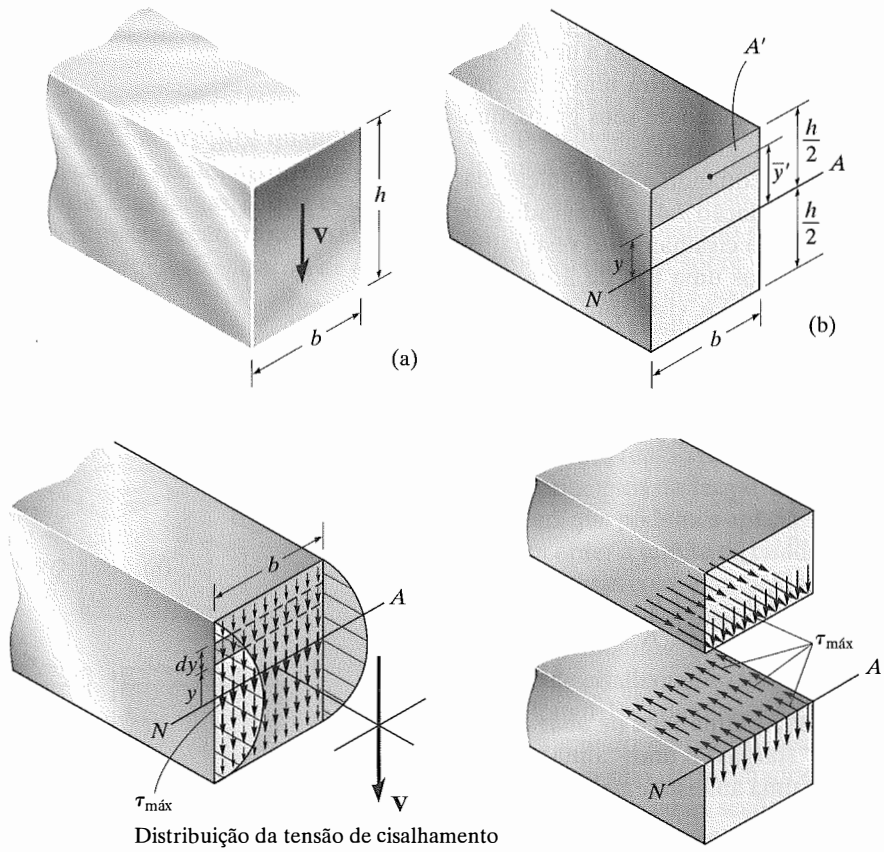
$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{1}{2}\right)[(h^2/4) - y^2]b}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)b}$$

ou

$$\tau = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{7.4}$$

Esse resultado indica que a distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal é **parabólica**. Como mostra a Figura 7.5c, a intensidade varia de zero nas partes superior e inferior, $y = \pm h/2$, até um valor máximo no eixo neutro, $y = 0$. Especificamente, visto que a área da seção transversal é $A = bh$, então, em $y = 0$, temos, pela Equação 7.4,

$$\tau_{máx} = 1{,}5\frac{V}{A} \tag{7.5}$$



Distribuição da tensão de cisalhamento

Figura 7.5

* A área abaixo de y também pode ser usada $[A' = b(h/2 + y)]$, porém envolve um pouco mais de manipulação algébrica.

Esse mesmo valor para $\tau_{máx}$ pode ser obtido diretamente pela fórmula do cisalhamento $\tau = VQ/It$, se percebermos que $\tau_{máx}$ ocorre onde Q é *maior*, já que V, I e t são *constantes*. Por inspeção, Q será máximo quando toda a área acima (ou abaixo) do eixo neutro for considerada; isto é, $A' = bh/2$ e $\bar{y}' = h/4$. Assim,

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{V(h/4)(bh/2)}{\left[\frac{1}{12}bh^3\right]b} = 1{,}5\frac{V}{A}$$

Por comparação, $\tau_{máx}$ é 50% maior que a tensão de cisalhamento *média* determinada pela Equação 1.7; isto é, $\tau_{méd} = V/A$.

É importante lembrar que, para cada τ que age na área da seção transversal na Figura 7.5c, há uma τ correspondente que age na direção longitudinal ao longo da viga. Por exemplo, se a viga for secionada por um plano longitudinal que passa por seu eixo neutro, então, como observamos anteriormente, a *tensão de cisalhamento máxima* age sobre esse plano (Figura 7.5d). É essa tensão que pode provocar a falha em uma viga de madeira, como mostra a Figura 7.6. Nesse caso, a ruptura horizontal da madeira começa a ocorrer no eixo neutro nas extremidades da viga, visto que, nesse local, as reações verticais submetem a viga a uma grande tensão de cisalhamento, e a madeira tem baixa resistência ao cisalhamento ao longo de seus grãos, que são orientados na direção longitudinal.

É instrutivo mostrar que, quando a distribuição da tensão de cisalhamento (Equação 7.4) é integrada por toda a seção transversal, dá o cisalhamento resultante V. Para fazer isso, escolhemos uma tira de área diferencial $dA = b\,dy$ (Figura 7.5c) e, visto que τ age uniformemente em toda a tira, temos

$$\begin{aligned}\int_A \tau\,dA &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)b\,dy \\ &= \frac{6V}{h^3}\left[\frac{h^2}{4}y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{6V}{h^3}\left[\frac{h^2}{4}\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right)\right] = V\end{aligned}$$

Viga de abas largas. Uma *viga de abas largas* consiste em duas "abas" (largas) e uma "alma", como mostra a Figura 7.7a. Por uma análise semelhante à que acabamos de realizar, podemos determinar a distribuição da tensão de cisalhamento que age na seção transversal. Os resultados são mostrados nos diagramas das figuras 7.7b e 7.7c. Como ocorreu na seção transversal retangular, a tensão de cisalhamento varia *parabolicamente* na altura da viga, já que a seção transversal pode ser tratada como a seção retangular que tem, primeiro, a largura da aba superior, b, então a espessura da alma t_{alma} e, novamente, a largura da aba inferior, b. Em particular, observe que a tensão de cisalhamento variará *apenas ligeiramente* na alma e, também, que ocorre um *salto* na tensão de cisalhamento na junção aba-alma, visto que a espessura da seção transversal muda nesse ponto ou, em outras palavras, t na fórmula do cisalhamento, muda. Por comparação, a alma suportará uma quantidade significativamente maior da força de cisalhamento do que as abas, o que será ilustrado numericamente no Exemplo 7.2.

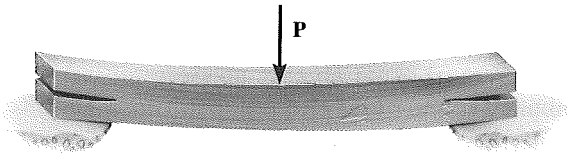


Figura 7.6

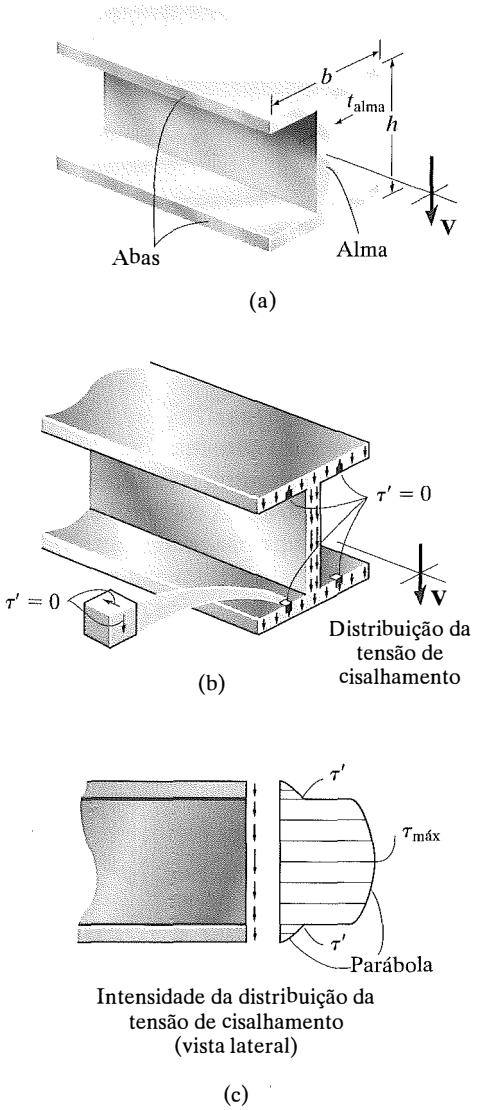


Figura 7.7

Limitações do uso da fórmula do cisalhamento. Uma das premissas mais importantes utilizadas no desenvolvimento da fórmula do cisalhamento é que a tensão de cisalhamento é *uniformemente* distribuída pela *largura t* na seção onde a tensão de cisalhamento é determinada. Em outras palavras, a tensão de cisalhamento *média* é calculada na largura. Podemos testar a precisão dessa premissa comparando-a com uma análise matemática mais exata baseada na teoria da elasticidade. A esse respeito, se a seção transversal da viga for retangular, a distribuição da tensão de cisalhamento *verdadeira* no eixo neutro, calculada pela teoria da elasticidade, varia como mostra a Figura 7.8. O valor máximo, $\tau'_{máx}$, ocorre nas *bordas* da seção transversal e seu valor depende da razão b/h (largura/altura). Para seções nas quais $b/h = 0{,}5$, $\tau'_{máx}$ é somente 3% maior que a tensão de cisalhamento calculada pela fórmula do cisalhamento (Figura 7.8a). Contudo, em *seções achatadas*, para as quais $b/h = 2$, $\tau'_{máx}$ é aproximadamente 40% maior que $\tau_{máx}$ (Figura 7.8b). O erro torna-se maior ainda à medida que a seção fica mais achatada, ou à medida que a relação b/h aumenta. Erros dessa ordem são, certamente, inaceitáveis se usarmos a fórmula do cisalhamento para determinar a tensão de cisalhamento na *aba* de uma viga de abas largas, como já discutimos.

É preciso destacar, também, que a fórmula do cisalhamento não dará resultados precisos quando usada para determinar a tensão de cisalhamento na junção aba-alma de uma viga de abas largas, já que esse é um ponto de mudança repentina na seção transversal e, portanto, um lugar onde ocorrerá *concentração de tensão*.

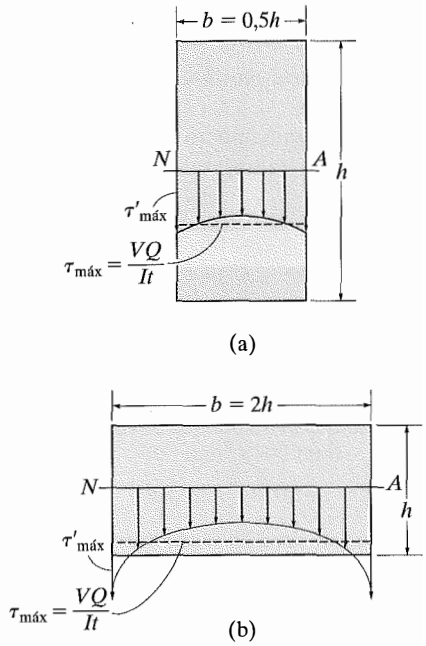


Figura 7.8

Além disso, as regiões internas das abas são bordas livres (Figura 7.7b), e o resultado é que a tensão de cisalhamento nessas bordas deve ser nula. Entretanto, se a fórmula do cisalhamento for aplicada para determinar a tensão de cisalhamento nessas bordas, obteremos um valor τ' que *não* será igual a zero (Figura 7.7c). Felizmente, essas limitações à aplicação da fórmula do cisalhamento às abas de uma viga de abas largas não são importantes na prática da engenharia. Na maioria dos casos, os engenheiros têm de calcular somente a *tensão de cisalhamento média máxima* que ocorre no eixo neutro onde a razão b/h (largura/altura) é muito *pequena* e, portanto, o resultado calculado fica muito próximo da tensão de cisalhamento máxima *verdadeira*, como já explicamos.

Outra limitação importante ao uso da fórmula do cisalhamento pode ser ilustrada com referência à Figura 7.9a, que mostra uma viga cuja seção transversal tem um contorno irregular não retangular. Se aplicarmos a fórmula do cisalhamento para determinar a tensão de cisalhamento (média) τ ao longo da reta AB, ela terá a direção mostrada na Figura 7.9b. Considere, agora, um elemento do material tomado no ponto B do contorno, tal que uma de suas faces esteja localizada sobre a superfície externa da viga (Figura 7.9c). Aqui, a tensão de cisalhamento τ calculada na face frontal do elemento é decomposta nas componentes τ' e τ''. Por inspeção, a componente τ' deve ser nula, visto que sua componente longitudinal correspondente τ', que age na superfície do contorno livre de tensão, deve ser nula. Portanto, para satisfazer essa condição de contorno, a tensão de cisalhamento que age sobre o elemento no contorno deve ter direção tangente ao contorno. Então, a distribuição da tensão de cisalhamento na reta AB terá a direção mostrada na Figura 7.9d. Devido à maior inclinação das tensões de cisalhamento em A e B, a tensão de cisalhamento máxima ocorrerá nesses pontos. Valores específicos para essa tensão de cisalhamento devem ser obtidos pelos princípios da teoria da elasticidade. Observe, entretanto, que podemos aplicar a fórmula do cisalhamento para obter a tensão de cisalhamento que age em cada uma das retas coloridas na Figura 7.9a. Aqui, essas retas interceptam as tangentes ao contorno da seção transversal em *ângulos retos*, e, como mostra a Figura 7.9e, a tensão de cisalhamento transversal é vertical e constante ao longo de cada reta.

Resumindo os pontos discutidos, a fórmula do cisalhamento não dá resultados precisos quando aplicada a elementos cujas seções transversais são *curtas* ou *achatadas*, ou em pontos onde a seção transversal sofre mudança abrupta. Tampouco deve ser aplicada em uma seção que intercepta o contorno do elemento a um ângulo diferente de 90°. Então, nesses casos, a tensão de cisalhamento deve ser determinada por métodos mais avançados baseados na teoria da elasticidade.

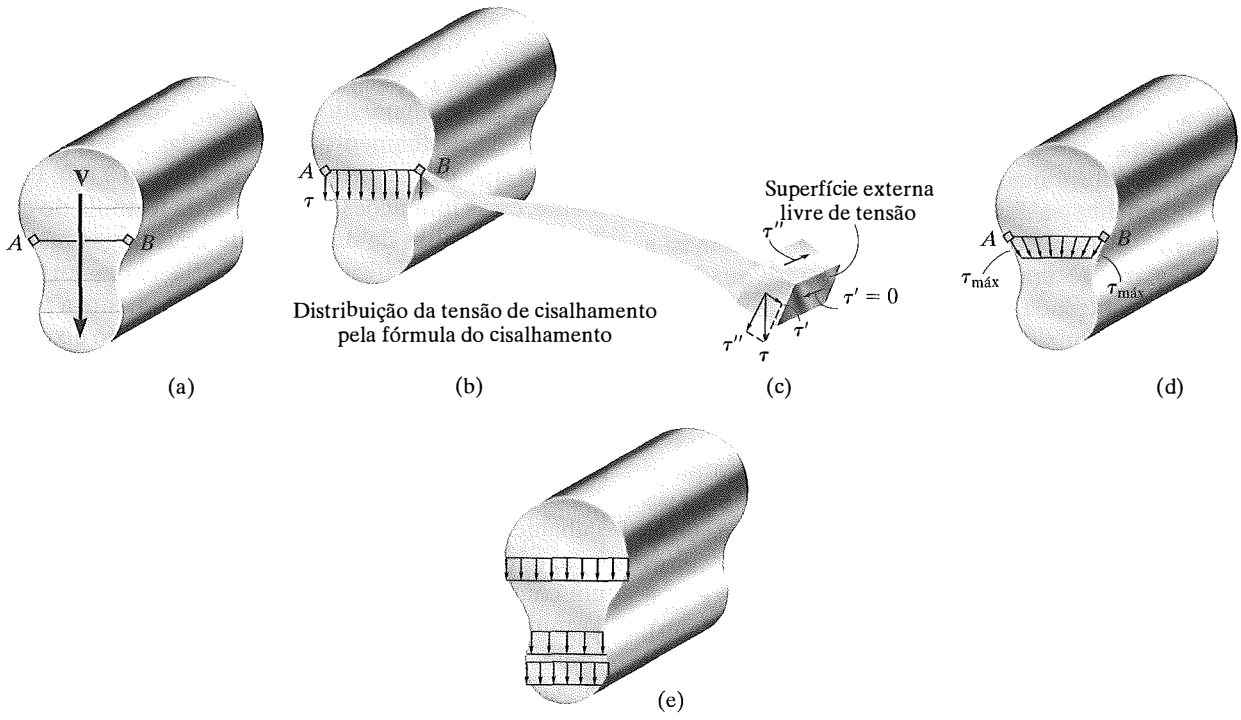


Figura 7.9

PONTOS IMPORTANTES

- Forças de cisalhamento em vigas provocam *distribuição não linear da deformação por cisalhamento* na seção transversal gerando uma distorção na viga.
- Devido à propriedade complementar da tensão de cisalhamento, a tensão de cisalhamento desenvolvida em uma viga age na seção transversal e também em planos longitudinais.
- A *fórmula do cisalhamento* foi deduzida considerando equilíbrio da força horizontal da tensão de cisalhamento longitudinal e distribuições de tensão de flexão que agem sobre uma porção de um segmento diferencial da viga.
- A fórmula do cisalhamento é usada para elementos prismáticos retos feitos de material homogêneo e que tenham comportamento linear elástico. Além disso, a força de cisalhamento interna resultante deve estar direcionada ao longo de um eixo de simetria para a área da seção transversal.
- Para uma viga com seção transversal retangular, a *tensão de cisalhamento varia parabolicamente* com a altura. A tensão de cisalhamento máxima ocorre ao longo do eixo neutro.
- A fórmula do cisalhamento não deve ser usada para determinar a tensão de cisalhamento em seções transversais curtas ou achatadas ou em pontos onde ocorrem mudanças repentinas na seção transversal ou em um ponto sobre um contorno inclinado.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Sugerimos o seguinte procedimento para aplicar a fórmula do cisalhamento.

Cisalhamento interno

- Secione o elemento perpendicularmente a seu eixo no ponto onde a tensão de cisalhamento deve ser determinada e obtenha o cisalhamento interno **V** na seção.

Propriedades da seção

- Determine a localização do eixo neutro e determine o momento de inércia I da *área da seção transversal inteira* em torno do eixo neutro.
- Passe uma seção horizontal imaginária pelo ponto onde a tensão de cisalhamento deve ser determinada. Meça a largura t da área nessa seção.

- A porção da área que se encontra acima ou abaixo dessa seção é A'. Determine Q por integração $Q = \int_{A'} y\, dA'$ ou usando $Q = \bar{y}'A'$. Nessa expressão, $\bar{y}'$ é a distância de A' até o centroide, medida em relação ao eixo neutro. Pode ser útil entender que A' é a porção da área da seção transversal do elemento que é "mantida no elemento" pelas tensões de cisalhamento longitudinais (Figura 7.4d).

Tensão de cisalhamento

- Usando um conjunto de unidades consistente, substitua os dados na fórmula do cisalhamento e calcule a tensão de cisalhamento τ.
- Sugerimos que a direção adequada da tensão de cisalhamento transversal τ seja definida sobre um elemento de volume de material localizado no ponto onde ela é calculada. Isso pode ser feito se entendermos que τ age na seção transversal na mesma direção de **V**. Com isso, podemos definir as tensões de cisalhamento correspondentes que agem nos outros três planos do elemento.

EXEMPLO 7.1

A viga mostrada na Figura 7.10a é feita de madeira e está sujeita a uma força de cisalhamento (cortante) vertical interna resultante $V = 3$ kN. (a) Determine a tensão de cisalhamento na viga no ponto P e (b) calcule a tensão de cisalhamento máxima na viga.

SOLUÇÃO

Parte (a). Propriedades da seção. O momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro é

$$I = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} (100 \text{ mm})(125 \text{ mm})^2 = 16{,}28 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

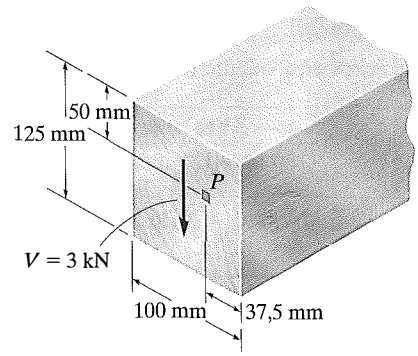
Traçamos na seção uma reta horizontal que passa pelo ponto P, e a área parcial A' corresponde à porção sombreada na Figura 7.10b. Por consequência,

$$Q = \bar{y}'A' = \left[12{,}5 \text{ mm} + \frac{1}{2}(50 \text{ mm})\right](50 \text{ mm})(100 \text{ mm})$$
$$= 18{,}75 \text{ mm} \times 10^4 \text{ mm}^3$$

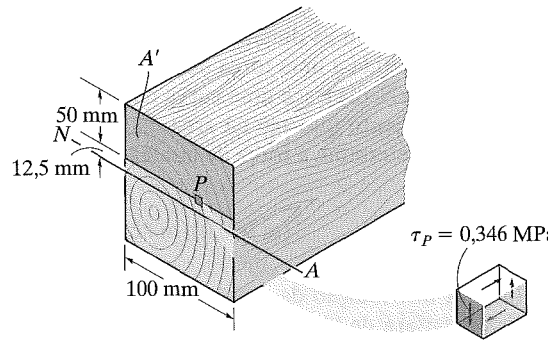
Tensão de cisalhamento. A força de cisalhamento (ou força cortante) na seção é $V = 3$ kN. Aplicando a fórmula do cisalhamento, temos

$$\tau_P = \frac{VQ}{It} = \frac{(3 \text{ kN})(18{,}75 \times 10^4 \text{ mm}^3)}{(16{,}28 \times 10^6 \text{ mm}^4)(100 \text{ mm})}$$
$$= 3{,}46 \text{ mm} \times 10^{-4} \text{ kN/mm}^2 = 0{,}346 \text{ MPa} \quad \textit{Resposta}$$

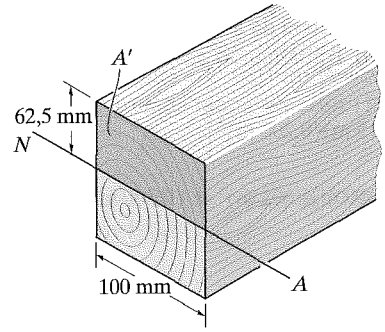
Visto que τ_P contribui para V, ela age para baixo em P na seção transversal. Por consequência, um elemento de volume do material nesse ponto sofreria a ação de tensões de cisalhamento, como mostra a Figura 7.10c.



(a)



(b) (c)



(d)

Figura 7.10

Parte (b). Propriedades da seção. A tensão de cisalhamento máxima ocorre no eixo neutro, visto que t é constante em toda a seção transversal e Q é o maior nesse caso. Para a área escura A' na Figura 7.10d, temos

$$Q = \bar{y}'A' = \left[\frac{62{,}5 \text{ mm}}{2}\right](100 \text{ mm})(62{,}5 \text{ mm})$$

$$= 19{,}53 \text{ mm} \times 10^4 \text{ mm}^3$$

Tensão de cisalhamento. A aplicação da fórmula do cisalhamento produz

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{(3 \text{ kN})(19{,}53 \times 10^4 \text{ mm}^3)}{(16{,}28 \times 10^6 \text{ mm}^4)(100 \text{ mm})}$$

$$= 3{,}60 \text{ mm} \times 10^{-4} \text{ kN/mm}^2 = 0{,}360 \text{ MPa} \quad \textit{Resposta}$$

Observe que isso é equivalente a

$$\tau_{máx} = 1{,}5\frac{V}{A} = 1{,}5\frac{3 \text{ kN}}{(100 \text{ mm})(125 \text{ mm})}$$

$$= 3{,}6 \times 10^{-4} \text{ kN/mm}^2 = 0{,}36 \text{ MPa} \quad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 7.2

Uma viga T de aço tem as dimensões mostradas na Figura 7.11a. Se for submetida a uma força de cisalhamento (força cortante) $\mathbf{V} = 80$ kN, (a) trace uma curva da distribuição da tensão de cisalhamento que age na área da seção transversal da viga e (b) determine a força de cisalhamento à qual a alma resiste.

SOLUÇÃO

Parte (a). A distribuição da tensão de cisalhamento será parabólica e variará da maneira mostrada na Figura 7.11b. Devido à simetria, somente as tensões de cisalhamento nos pontos B', B e C devem ser calculadas. Para mostrar como esses valores são obtidos, em primeiro lugar, determinamos o momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo neutro. Trabalhando em metros, temos

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}015 \text{ m})(0{,}200 \text{ m})^3\right]$$
$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0{,}300 \text{ m})(0{,}02 \text{ m})^3 + (0{,}300 \text{ m})(0{,}02 \text{ m})(0{,}110 \text{ m})^2\right]$$
$$= 155{,}6(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Para o ponto B', $t_{B'} = 0{,}300$ m, e A' é a área escura mostrada na Figura 7.11c. Assim,

$$Q_{B'} = \bar{y}'A' = [0{,}110 \text{ m}](0{,}300 \text{ m})(0{,}02 \text{ m}) = 0{,}660(10^{-3}) \text{ m}^3$$

de modo que

$$\tau_{B'} = \frac{VQ_{B'}}{It_{B'}} = \frac{80 \text{ kN}(0{,}660(10^{-3}) \text{ m}^3)}{155{,}6(10^{-6}) \text{ m}^4(0{,}300 \text{ m})} = 1{,}13 \text{ MPa}$$

Para o ponto B, $t_B = 0{,}015$ m, e $Q_B = Q_{B'}$ (Figura 7.11c). Por consequência,

$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It_B} = \frac{80 \text{ kN}(0{,}660(10^{-3}) \text{ m}^3)}{155{,}6(10^{-6}) \text{ m}^4(0{,}015 \text{ m})} = 22{,}6 \text{ MPa}$$

Observe, pela discussão sobre as "Limitações ao uso da fórmula do cisalhamento", que os valores calculados para ambas, τ_B e $\tau_{B'}$, não serão, na verdade, muito precisos. Por quê?

Para o ponto C, $t_C = 0{,}015$ m e A' é a área sombreada escura mostrada na Figura 7.11d. Considerando que essa área é composta por dois retângulos, temos

$$Q_C = \Sigma \bar{y}'A' = [0{,}110 \text{ m}](0{,}300 \text{ m})(0{,}02 \text{ m})$$
$$+ [0{,}05 \text{ m}](0{,}015 \text{ m})(0{,}100 \text{ m})$$
$$= 0{,}735(10^{-3}) \text{ m}^3$$

Assim,

$$\tau_C = \tau_{máx} = \frac{VQ_C}{It_C} = \frac{80 \text{ kN}[0{,}735(10^{-3}) \text{ m}^3]}{155{,}6(10^{-6}) \text{ m}^4(0{,}015 \text{ m})} = 25{,}2 \text{ MPa}$$

Parte (b). A força de cisalhamento na alma será determinada formulando, em primeiro lugar, a tensão de cisalhamento em uma localização *arbitrária* y no interior da alma (Figura 7.11e). Trabalhando em metros, temos

$$I = 155{,}6(10^{-6}) \text{ m}^4$$
$$t = 0{,}015 \text{ m}$$
$$A' = (0{,}300 \text{ m})(0{,}02 \text{ m}) + (0{,}015 \text{ m})(0{,}1 \text{ m} - y)$$
$$Q = \Sigma \bar{y}'A' = (0{,}11 \text{ m})(0{,}300 \text{ m})(0{,}02 \text{ m})$$
$$+ \left[y + \tfrac{1}{2}(0{,}1 \text{ m} - y)\right](0{,}015 \text{ m})(0{,}1 \text{ m} - y)$$
$$= (0{,}735 - 7{,}50\,y^2)(10^{-3}) \text{ m}^3$$

de modo que

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{80 \text{ kN}(0{,}735 - 7{,}50\,y^2)(10^{-3}) \text{ m}^3}{(155{,}6(10^{-6}) \text{ m}^4)(0{,}015 \text{ m})}$$
$$= (25{,}193 - 257{,}07y^2) \text{ MPa}$$

Essa tensão age na área infinitesimal $dA = 0{,}015\,dy$ mostrada na Figura 7.11 e, portanto, a força de cisalhamento à qual a alma resiste é

$$V_{alma} = \int_{A_{alma}} \tau\,dA = \int_{-0{,}1 \text{ m}}^{0{,}1 \text{ m}} (25{,}193 - 257{,}07y^2)(10^6)(0{,}015 \text{ m})\,d$$

$$V_{alma} = 73{,}0 \text{ kN} \quad \textit{Resposta}$$

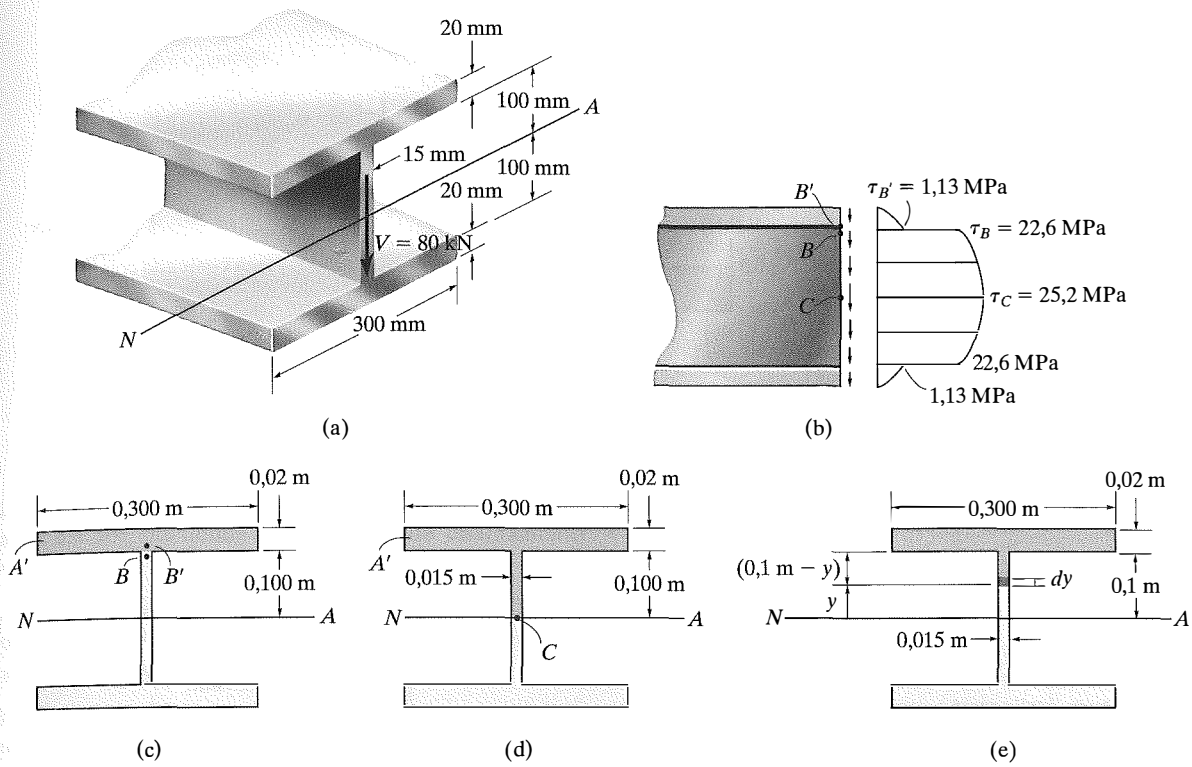


Figura 7.11

OBSERVAÇÃO: Por comparação, a alma suporta 91% do cisalhamento total (80 kN), enquanto as abas suportam os restantes 9%. Tente resolver este problema determinando a força em uma das abas (3,496 kN) pelo mesmo método. Então, $V_{alma} = V - 2V_{aba} = 80\ \text{kN} - 2(3{,}496\ \text{kN}) = 73{,}0\ \text{kN}$.

EXEMPLO 7.3

A viga mostrada na Figura 7.12a é feita com duas tábuas. Determine a tensão de cisalhamento máxima necessária na cola para que ela mantenha as tábuas unidas ao longo da linha de junção. Os apoios em B e C exercem apenas reações verticais na viga.

SOLUÇÃO

Cisalhamento interno. As reações nos apoios e o diagrama de força cortante para a viga são mostrados na Figura 7.12b. Vemos que o cisalhamento máximo na viga é 19,5 kN.

Propriedades da seção. O centroide e, portanto, o eixo neutro serão determinados pelo eixo de referência posicionado na parte inferior da área da seção transversal (Figura 7.12a). Trabalhando em metros, temos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0{,}075\ \text{m}](0{,}150\ \text{m})(0{,}030\ \text{m}) + [0{,}165\ \text{m}](0{,}030\ \text{m})(0{,}150\ \text{m})}{(0{,}150\ \text{m})(0{,}030\ \text{m}) + (0{,}030\ \text{m})(0{,}150\ \text{m})} =$$

$$= 0{,}120\ \text{m}$$

O momento de inércia, calculado em torno do eixo neutro (Figura 7.12a), é, portanto,

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}030\ \text{m})(0{,}150\ \text{m})^3 + (0{,}150\ \text{m})(0{,}030\ \text{m})(0{,}120\ \text{m} - 0{,}075\ \text{m})^2\right] + \left[\frac{1}{12}(0{,}150\ \text{m})(0{,}030\ \text{m})^3 + (0{,}030\ \text{m})(0{,}150\ \text{m})(0{,}165\ \text{m} - 0{,}120\ \text{m})^2\right]$$

$$= 27{,}0(10^{-6})\ \text{m}^4$$

A tábua (aba) superior está presa à inferior (alma) pela cola, que é aplicada na espessura $t = 0{,}03$ m. Por consequência, A' é definida como a área da tábua superior (Figura 7.12a). Temos

$$Q = y'A' = [0{,}180\ \text{m} - 0{,}015\ \text{m} - 0{,}120\ \text{m}](0{,}03\ \text{m})(0{,}150\ \text{m}) = 0{,}2025(10^{-3})\ \text{m}^3$$

Tensão de cisalhamento. Com os dados obtidos acima e aplicando a fórmula do cisalhamento, obtemos

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{19{,}5\ \text{kN}\ (0{,}2025(10^{-3})\ \text{m}^3)}{27{,}0(10^{-6})\ \text{m}^4(0{,}030\ \text{m})} = 4{,}88\ \text{MPa}$$ *Resposta*

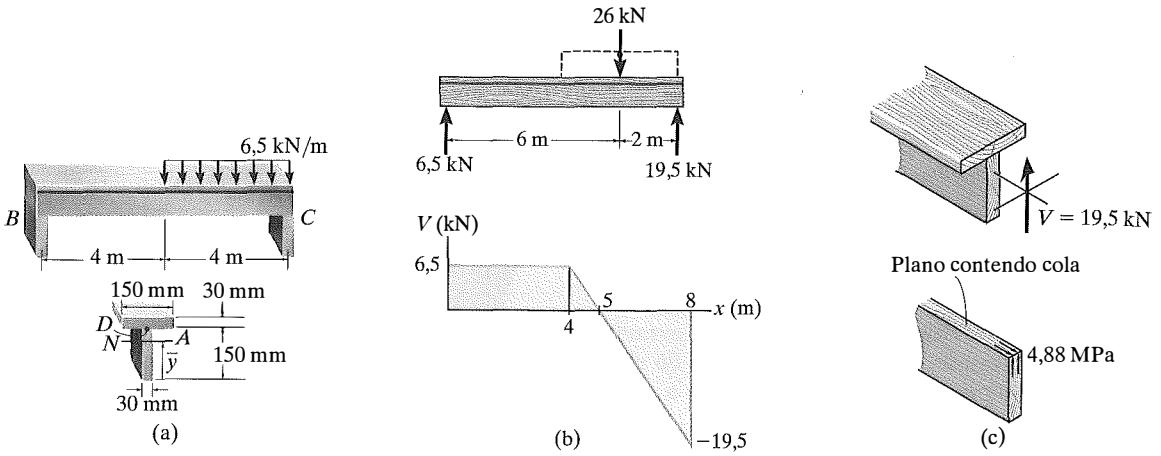


Figura 7.12

A tensão de cisalhamento que age no topo da tábua de baixo é mostrada na Figura 7.12c.

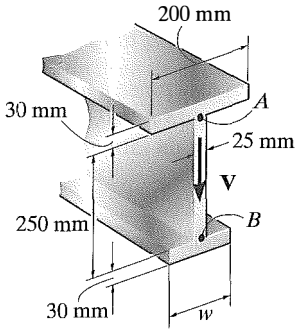
OBSERVAÇÃO: É a resistência da cola a essa tensão de cisalhamento lateral ou *horizontal* que é necessária para impedir que as tábuas deslizem no suporte *C*.

PROBLEMAS

7.1. Se a viga for submetida a um cisalhamento $V = 15$ kN, determine a tensão de cisalhamento na alma em A e B. Indique as componentes da tensão de cisalhamento sobre um elemento de volume localizado nesses pontos. Considere $w = 125$ mm. Mostre que o eixo neutro está localizado em $\bar{y} = 0{,}1747$ m em relação à parte inferior e $I_{NA} = 0{,}2182(10^{-3})$ m^4.

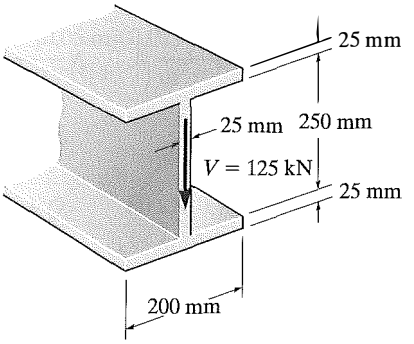
7.2. Se a viga de abas largas for submetida a um cisalhamento $V = 30$ kN, determine a tensão de cisalhamento máxima na viga. Considere $w = 200$ mm.

7.3. Se a viga de abas largas for submetida a um cisalhamento $V = 30$ kN, determine a força de cisalhamento à qual a alma da viga resiste. Considere $w = 200$ mm.



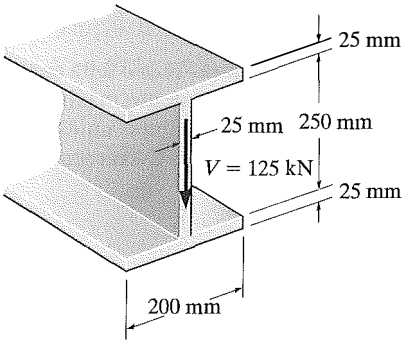
Problemas 7.1/2/3

*__7.4.__ Se a viga de abas largas for submetida a um cisalhamento $V = 125$ kN, determine a tensão de cisalhamento máxima na viga.



Problema 7.4

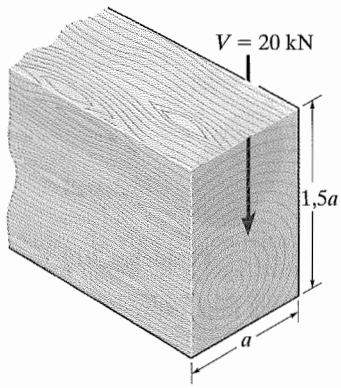
7.5. Se a viga de abas largas for submetida a um cisalhamento $V = 125$ kN, determine a força de cisalhamento à qual a alma da viga resistirá.



Problema 7.5

7.6. A viga tem seção transversal retangular e é feita de madeira com tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 11{,}2$ MPa. Se for submetida a um cisalhamento $V = 20$ kN, determine a menor dimensão a de sua parte inferior e $1{,}5a$ de seus lados.

7.7. A viga tem seção transversal retangular e é feita de madeira. Se for submetida a um cisalhamento $V = 20$ kN, e $a = 250$ mm, determine a tensão de cisalhamento máxima e trace uma curva da variação da tensão de cisalhamento na seção transversal. Faça um rascunho tridimensional do resultado.

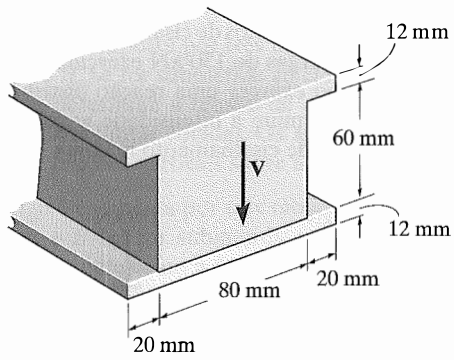


Problemas 7.6/7

*7.8. Determine a tensão de cisalhamento máxima na escora se ela for submetida a uma força de cisalhamento $V = 20$ kN.

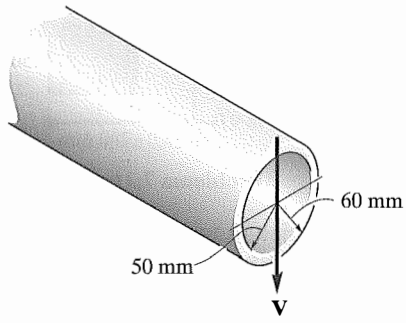
7.9. Determine a força de cisalhamento máxima V que a escora pode suportar se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 40$ MPa.

7.10. Faça um gráfico da intensidade da tensão de cisalhamento distribuída na seção transversal da escora se ela for submetida a uma força de cisalhamento $V = 15$ kN.



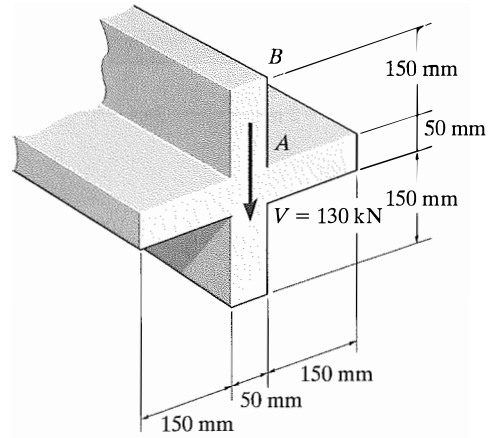
Problemas 7.8/9/10

7.11. Se o tubo estiver sujeito a um cisalhamento $V = 75$ kN, determine a tensão de cisalhamento máxima nele.



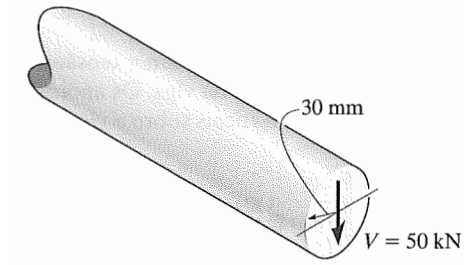
Problema 7.11

*7.12. A escora está sujeita a um cisalhamento vertical $V = 130$ kN. Construa um gráfico da intensidade da distribuição da tensão de cisalhamento que age na área da seção transversal e calcule a força de cisalhamento resultante desenvolvida no segmento vertical AB.



Problema 7.12

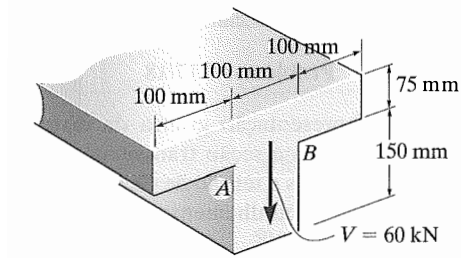
7.13. O raio da haste de aço é 30 mm. Se ela for submetida a um cisalhamento $V = 25$ kN, determine a tensão de cisalhamento máxima.



Problema 7.13

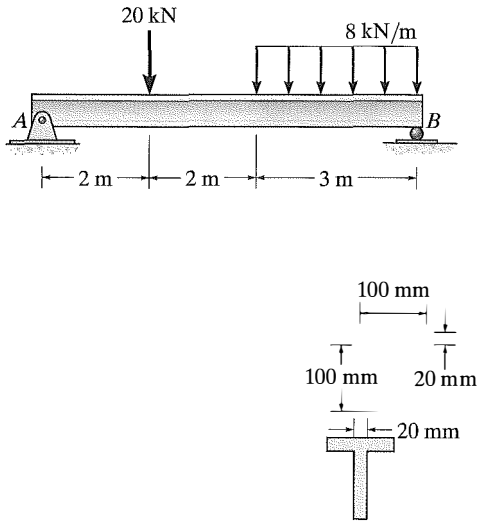
7.14. Se a viga T for submetida a um cisalhamento vertical $V = 60$ kN, determine a tensão de cisalhamento máxima na viga. Calcule também o salto da tensão de cisalhamento na junção aba-alma AB. Trace um rascunho da variação da intensidade da tensão de cisalhamento em toda a seção transversal.

7.15. Se a viga T for submetida a um cisalhamento vertical $V = 60$ kN, determine a força de cisalhamento vertical à qual a aba resiste.



Problema 7.14/15

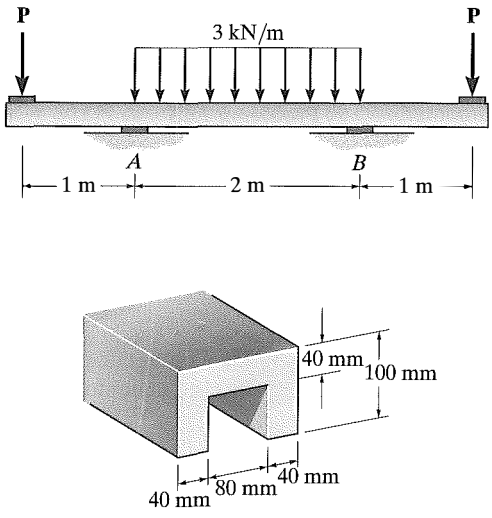
*7.16. A viga T está sujeita ao carregamento mostrado na figura. Determine a tensão de cisalhamento transversal máxima na seção crítica da viga.



Problema 7.16

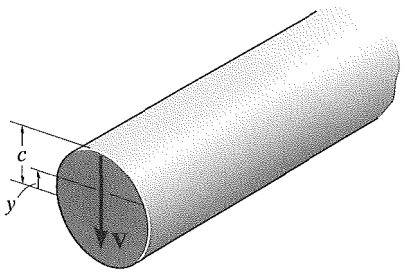
7.17. Determine as maiores forças **P** que o elemento pode suportar se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 70$ MPa. Os apoios em A e B exercem somente reações verticais sobre a viga.

7.18. Se a força $P = 4$ kN, determine a tensão de cisalhamento máxima na seção crítica da viga. Os apoios em A e B exercem somente reações verticais sobre a viga.



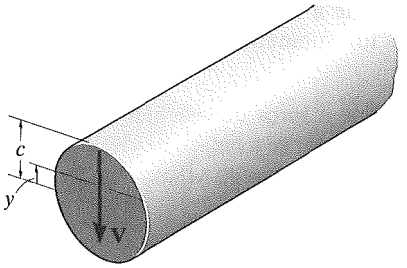
Problemas 7.17/18

7.19. Faça uma representação gráfica da distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal de uma haste com raio c. Quantas vezes a tensão de cisalhamento máxima é maior que a tensão de cisalhamento média que age na seção transversal?



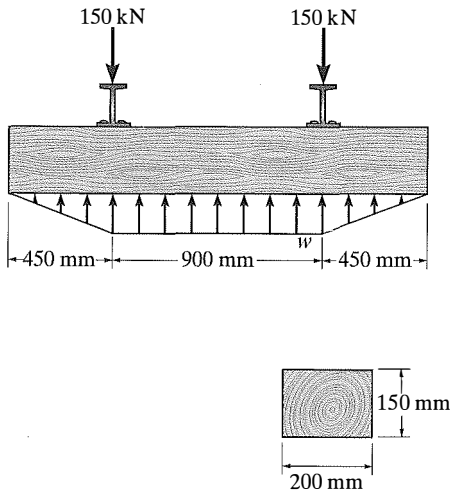
Problema 7.19

*7.20. Desenvolva uma expressão para a componente vertical média da tensão de cisalhamento que age no plano horizontal que passa pelo eixo, localizado a uma distância y do eixo neutro.



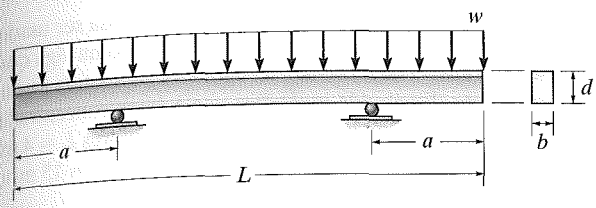
Problema 7.20

7.21. Dormentes de ferrovia devem ser projetados para resistir a grandes carregamentos de cisalhamento. Se o dormente for submetido a cargas de 150 kN exercidas pelos trilhos e o leito de cascalho exercer uma reação distribuída como mostra a figura, determine a intensidade w para equilíbrio e determine a tensão de cisalhamento máxima no dormente.



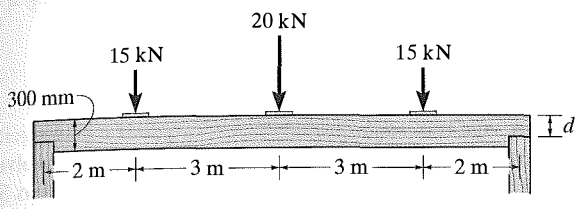
Problema 7.21

7.22. A viga está sujeita a uma carga uniforme w. Determine a localização a dos apoios de modo que a tensão de cisalhamento na viga seja a menor possível. Qual é essa tensão?



Problema 7.22

7.23. As extremidades da viga de madeira devem ser entalhadas como mostra a figura. Se a viga tiver de suportar o carregamento mostrado, determine a menor profundidade d da viga no entalhe se a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 450$ MPa. A largura da viga é de 8 metros.

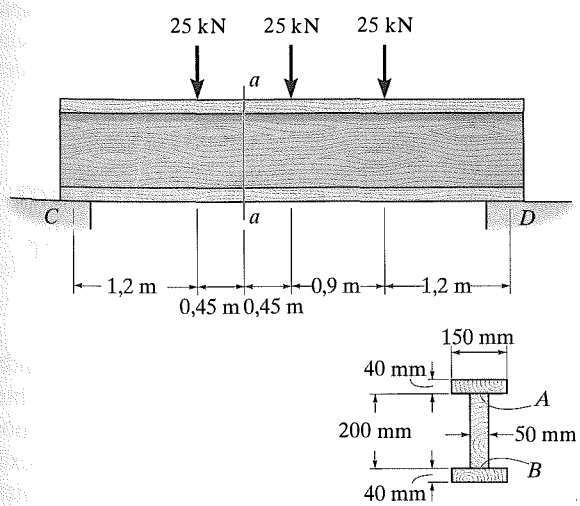


Problema 7.23

***7.24.** A viga é composta por três tábuas coladas nas linhas de junção A e B. Se for submetida ao carregamento mostrado na figura, determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nas juntas coladas na seção a–a. Os apoios em C e D exercem somente reações verticais sobre a viga.

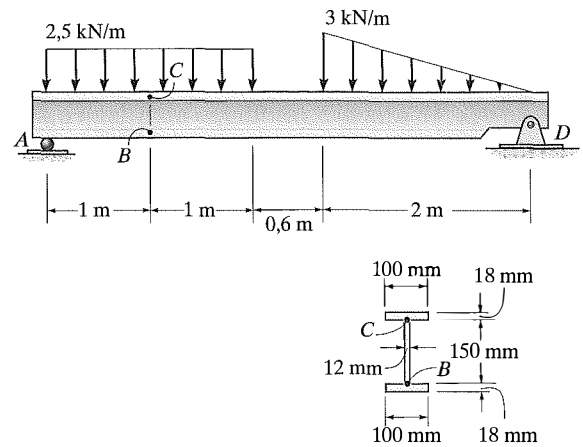
7.25. A viga é composta por três tábuas coladas nas linhas de junção A e B. Se for submetida ao carregamento mostrado na figura, determine a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida nas juntas coladas. Os apoios em C e D exercem somente reações verticais sobre a viga.

7.26. A viga é composta por três tábuas coladas nas linhas de junção A e B. Se for submetida ao carregamento mostrado na figura, determine a força de cisalhamento vertical máxima à qual resiste a aba superior da viga. Os apoios em C e D exercem somente reações verticais sobre a viga.



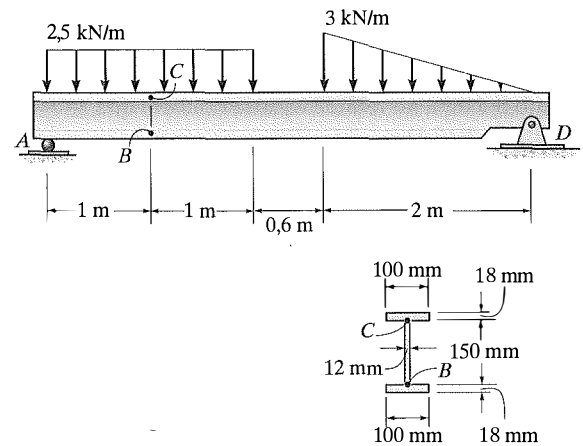
Problemas 7.24/25/26

7.27. Determine a tensão de cisalhamento nos pontos B e C localizados na alma da viga de fibra de vidro.



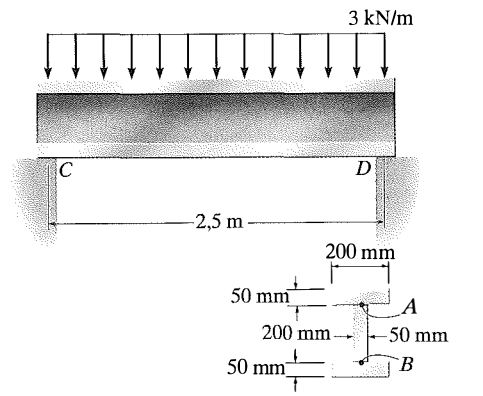
Problema 7.27

***7.28.** Determine a tensão de cisalhamento máxima que age na seção crítica da viga de fibra de vidro.



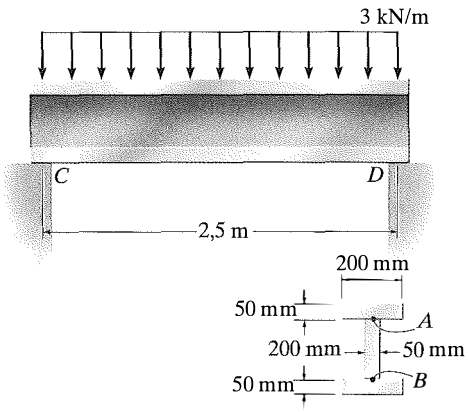
Problema 7.28

7.29. A viga é composta por três peças de plástico coladas nas linhas de junção A e B. Se for submetida ao carregamento mostrado na figura, determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nas juntas coladas na seção crítica. Os apoios em C e D exercem somente reações verticais sobre a viga.



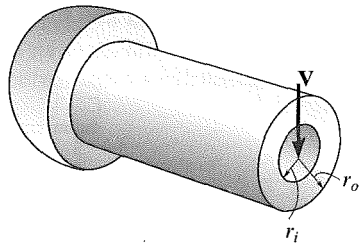
Problema 7.29

7.30. A viga é composta por três peças de plástico coladas nas linhas de junção A e B. Se for submetida ao carregamento mostrado na figura, determine a força de cisalhamento vertical à qual resiste a aba superior da viga na seção crítica. Os apoios em C e D exercem somente reações verticais sobre a viga.



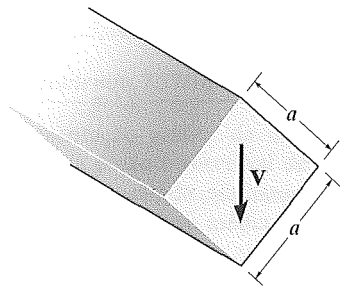
Problema 7.30

7.31. Determine a variação da tensão de cisalhamento na seção transversal de um rebite oco. Qual é a tensão de cisalhamento máxima no rebite? Mostre também que, se $r_i \rightarrow r_o$, então $\tau_{máx} = 2(V/A)$.



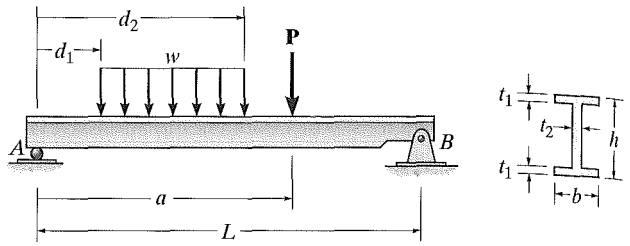
Problema 7.31

***7.32.** A viga tem seção transversal quadrada e está sujeita à força de cisalhamento **V**. Faça um rascunho da distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal e especifique a tensão de cisalhamento máxima. Além disso, determine o local em relação ao eixo neutro onde começará a aparecer uma trinca ao longo do elemento devido ao cisalhamento.



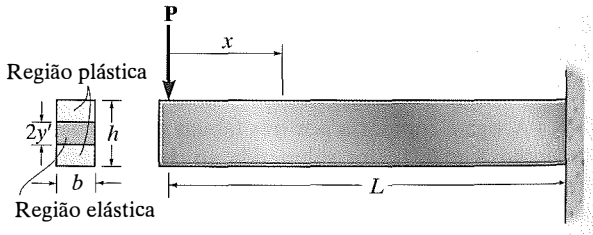
Problema 7.32

7.33. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar a tensão de cisalhamento máxima na viga que tem a seção transversal mostrada na figura e é submetida a uma carga constante distribuída específica w e à força concentrada P. Mostre uma aplicação do código usando os valores $L = 4$ m, $a = 2$ m, $P = 1{,}5$ kN, $d_1 = 0$, $d_2 = 2$ m, $w = 400$ N/m, $t_1 = 15$ mm, $t_2 = 20$ mm, $b = 50$ mm e $h = 150$ mm.



Problema 7.33

7.34. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita a uma carga P cuja intensidade é suficiente para desenvolver um momento totalmente plástico $M_p = PL$ no apoio fixo. Se o material for elástico plástico, então, a uma distância $x < L$, o momento $M = Px$ cria uma região de escoamento plástico com um núcleo elástico associado de altura $2y'$. Essa situação foi descrita pela Equação 6.30, e o momento **M** é distribuído na seção transversal como mostra a Figura 6.54e. Prove que a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida na viga é dada por $\tau_{máx} = 3/2(P/A')$, onde $A' = 2y'b$, a área da seção transversal do núcleo elástico.



Problema 7.34

7.35. A viga na Figura 6.54f é submetida a um momento totalmente plástico **M***p*. Prove que as tensões de cisalhamento longitudinal e transversal na viga são nulas. *Dica*: Considere um elemento da viga como mostra a Figura 7.4d.

7.4 Fluxo de cisalhamento em estruturas compostas por vários elementos

Na prática da engenharia, às vezes são construídas estruturas compostas por várias partes para se obter maior resistência à cargas. Alguns exemplos são mostrados na Figura 7.13. Se as cargas provocarem flexão nas partes componentes, pode ser necessário utilizar elementos de fixação como pregos, parafusos, material de soldagem ou cola para evitar o deslizamento

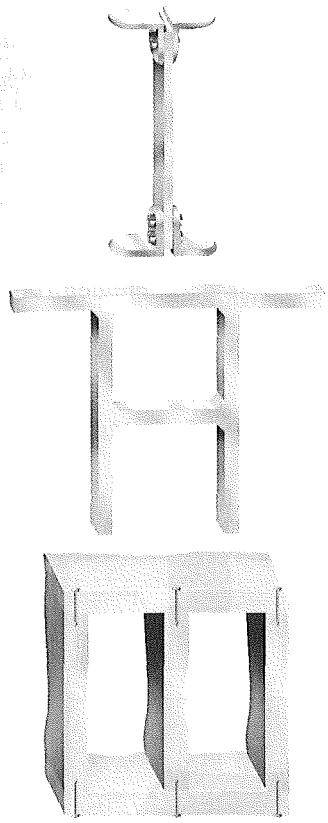


Figura 7.13

relativo dessas partes (Figura 7.2). Para projetar esses elementos de fixação, é preciso conhecer a força de cisalhamento à qual eles devem resistir ao longo do *comprimento* da estrutura. Esse carregamento, quando medido como força por unidade de comprimento, é denominado **fluxo de cisalhamento** q.*

O valor do fluxo de cisalhamento ao longo de qualquer seção longitudinal de uma viga pode ser obtido por um desenvolvimento semelhante ao usado para determinar a tensão de cisalhamento em uma viga. Para demonstrar isso, consideraremos a determinação do fluxo de cisalhamento ao longo da junção que liga a parte composta na Figura 7.14a à aba da viga. Como mostra a Figura 7.14b, três forças horizontais devem agir sobre essa parte. Duas dessas forças, F e $F + dF$, são desenvolvidas por tensões normais causadas pelos momentos M e $M + dM$, respectivamente. A terceira força, a qual, para equilíbrio, é igual a dF, age na junção e deve ser suportada pelo elemento de fixação. Como sabemos, dF é o resultado de dM, então, como no caso da fórmula do cisalhamento (Equação 7.1), temos

$$dF = \frac{dM}{I}\int_{A'} y\, dA'$$

A integral representa Q, isto é, o momento da área A', de cor clara na Figura 7.14b, em torno do eixo neutro para a seção transversal. Visto que o segmento tem comprimento dx, o fluxo de cisalhamento, ou força por unidade de comprimento ao longo da viga, é $q = dF/dx$. Por consequência, dividindo ambos os lados por dx e observando que $V = dM/dx$ (Equação 6.2), podemos escrever

$$\boxed{q = \frac{VQ}{I}} \tag{7.6}$$

Nessa expressão,

q = fluxo de cisalhamento, medido como uma força por unidade de comprimento ao longo da viga
V = força de cisalhamento ou força cortante interna resultante, determinada pelo método das seções e equações de equilíbrio
I = momento de inércia de *toda* a área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro
$Q = \int_{A'} y\, dA' = \bar{y}'A'$, onde A' é a área da seção transversal do segmento acoplado à viga na junção onde o fluxo de cisalhamento deve ser calculado e $\bar{y}'$ é a distância do eixo neutro ao centroide de A'

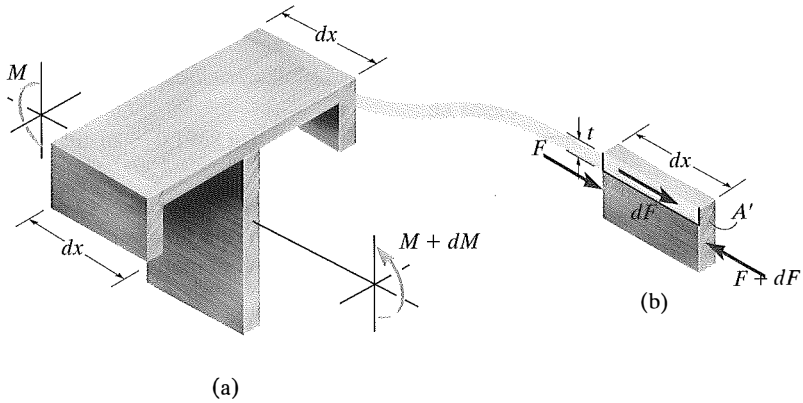


Figura 7.14

* A utilização da palavra "fluxo" nessa terminologia será significativa na discussão na Seção 7.5.

A aplicação dessa equação segue o mesmo "procedimento de análise" delineado na Seção 7.3 para a fórmula do cisalhamento. A propósito, é muito importante identificar corretamente o valor adequado de Q na determinação do fluxo de cisalhamento em uma junção particular da seção transversal. Alguns exemplos devem servir para ilustrar como isso é feito. Considere as seções transversais da viga mostrada na Figura 7.15. As partes constituintes sombreadas estão presas às vigas por elementos de fixação. Nos planos da conexão, o fluxo de cisalhamento necessário q é determinado usando-se um valor de Q calculado a partir de A' e y' indicados em cada figura. Observe que esse valor de q encontrará a resistência de um *único* elemento de fixação nas figuras 7.15a e 7.15b, de *dois* elementos de fixação na Figura 7.15c e de *três* elementos de fixação na figura 7.15d. Em outras palavras, o elemento de fixação nas Figuras 7.15a e 7.15b suporta o valor calculado de q e, nas figuras 7.15c e 7.15d, cada elemento de fixação suporta $q/2$ e $q/3$, respectivamente.

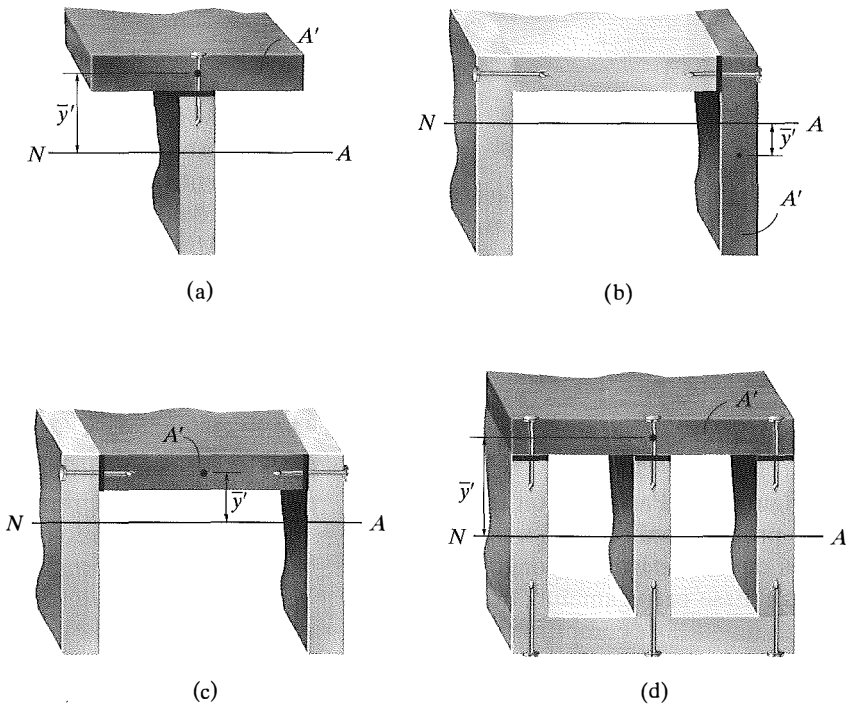


Figura 7.15

PONTOS IMPORTANTES

- *Fluxo de cisalhamento* é uma medida da força por unidade de comprimento ao longo de um eixo longitudinal de uma viga. Esse valor é determinado pela fórmula do cisalhamento e é usado para se definir a força de cisalhamento desenvolvida em elementos de fixação e cola que mantêm os vários segmentos de uma viga unidos.

EXEMPLO 7.4

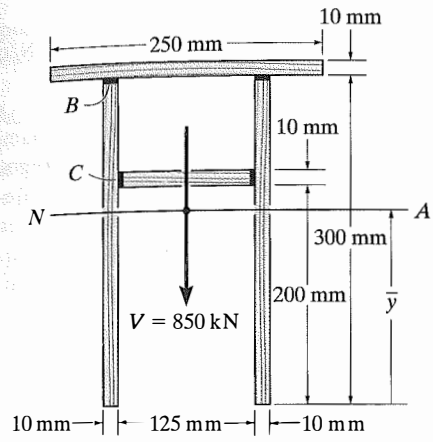
A viga é composta por quatro tábuas coladas, como mostra a Figura 7.16a. Se for submetida a um cisalhamento $V = 850$ kN, determine o fluxo de cisalhamento em B e C ao qual a cola deve resistir.

SOLUÇÃO

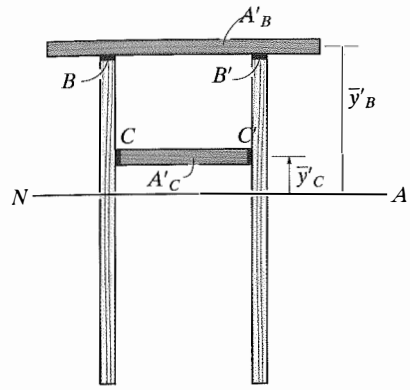
Propriedades da seção. O eixo neutro (centroide) será localizado em relação à parte inferior da viga (Figura 7.16a). Trabalhando com metros, temos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[0{,}15\text{ m}](0{,}3\text{ m})(0{,}01\text{ m}) + [0{,}205\text{ m}](0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m}) + [0{,}305\text{ m}](0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m})}{2(0{,}3\text{ m})(0{,}01\text{ m}) + 0{,}125\text{ m}(0{,}01\text{ m}) + 0{,}250\text{ m}(0{,}01\text{ m})}$$

$$= 0{,}1968\text{ m}$$



(a)



(b)

Figura 7.16

O momento de inércia calculado em torno do eixo de inércia é, portanto,

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0{,}01\text{ m})(0{,}3\text{ m})^3 + (0{,}01\text{ m})(0{,}3\text{ m})(0{,}1968\text{ m} - 0{,}150\text{ m})^2\right] + \left[\frac{1}{12}(0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m})^3 + (0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m})(0{,}205\text{ m} - 0{,}1968\text{ m})^2\right] + \left[\frac{1}{12}(0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m})^3 + (0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m})(0{,}305\text{ m} - 0{,}1968\text{ m})^2\right]$$
$$= 87{,}52(10^{-6})\text{ m}^4$$

Visto que a cola em B e B' mantém a tábua da parte superior presa à viga (Figura 7.16b), temos

$$Q_B = \bar{y}'_B A'_B = [0{,}305\text{ m} - 0{,}1968\text{ m}](0{,}250\text{ m})(0{,}01\text{ m}) = 0{,}271(10^{-3})\text{ m}^3$$

Da mesma forma, a cola em C e C' mantém a tábua interna presa à viga (Figura 7.16b), portanto

$$Q_C = \bar{y}'_C A'_C = [0{,}205\text{ m} - 0{,}1968\text{ m}](0{,}125\text{ m})(0{,}01\text{ m}) = 0{,}01026(10^{-3})\text{ m}^3$$

Fluxo de cisalhamento. Para B e B', temos

$$q'_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{850\text{ kN}(0{,}271(10^{-3})\text{ m}^3)}{87{,}52(10^{-6})\text{ m}^4} = 2{,}63\text{ MN/m}$$

E para C e C',

$$q'_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{850\text{ kN}(0{,}01026(10^{-3})\text{ m}^3)}{87{,}52(10^{-6})\text{ m}^4} = 0{,}0996\text{ MN/m}$$

Visto que são usadas *duas linhas de junção* para prender cada tábua, a cola por metro de comprimento de viga em cada linha de junção deve ser forte o suficiente para resitir à *metade* de cada valor calculado de q'. Assim,

$$q_B = 1{,}31\text{ MN/m e } q_C = 0{,}0498\text{ MN/m} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 7.5

A viga-caixão deve ser construída com quatro tábuas pregadas, como mostra a Figura 7.17a. Se cada prego puder suportar uma força de cisalhamento (força cortante) de 30 N, determine o espaçamento máximo s dos pregos em B e em C de modo que a viga suporte a força vertical de 80 N.

SOLUÇÃO

Cisalhamento interno. Se a viga for secionada em um *ponto arbitrário* ao longo de seu comprimento, o cisalhamento interno exigido para equilíbrio é sempre $V = 80$ N, portanto o diagrama de força cortante é o mostrado na Figura 7.17b.

Propriedades da seção. O momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo neutro pode ser determinado considerando-se um quadrado de 7,5 cm × 7,5 cm menos um quadrado de 4,5 cm × 4,5 cm.

$$I = \frac{1}{12}(7{,}5\text{ mm})(7{,}5\text{ mm})^3 - \frac{1}{12}(4{,}5\text{ mm})(4{,}5\text{ mm})^3$$
$$= 229{,}5\text{ mm}^3$$

O fluxo de cisalhamento em B é determinado usando-se Q_B definido pela área sombreada mais escura mostrada na Figura 7.17c. É essa porção "simétrica" da viga que deve manter-se "presa" ao resto da viga por pregos no lado esquerdo e pelas fibras da tábua no lado direito. Assim,

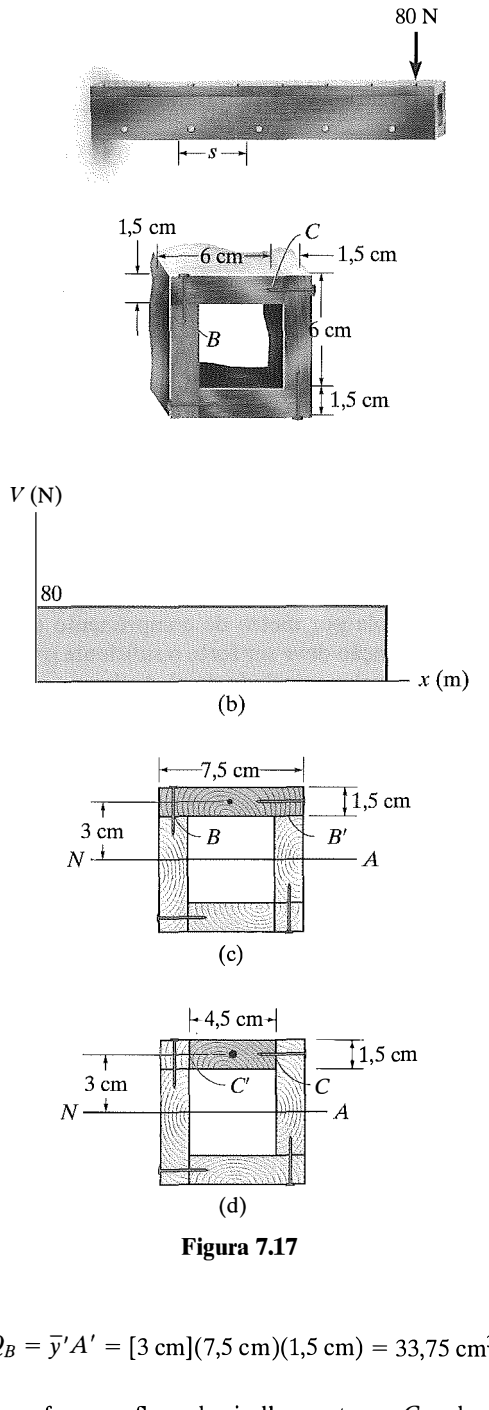


Figura 7.17

$$Q_B = \bar{y}'A' = [3\text{ cm}](7{,}5\text{ cm})(1{,}5\text{ cm}) = 33{,}75\text{ cm}^3$$

Da mesma forma, o fluxo de cisalhamento em C pode ser determinado com a utilização da área sombreada "simétrica" mostrada na Figura 7.17d. Temos

$$Q_C = \bar{y}'A' = [3\text{ cm}](4{,}5\text{ cm})(1{,}5\text{ cm}) = 20{,}25\text{ cm}^3$$

Fluxo de cisalhamento.

$$q_B = \frac{VQ_B}{I} = \frac{80\text{ N}(33{,}75\text{ cm}^3)}{229{,}5\text{ cm}^4} = 11{,}76\text{ N/cm}$$

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{80\text{ N}(20{,}25\text{ cm}^3)}{229{,}5\text{ cm}^4} = 7{,}059\text{ N/cm}$$

Esses valores representam a força de cisalhamento por unidade de comprimento da viga à qual os pregos em B e as fibras em B' na Figura 7.17c e os pregos em C e as fibras em C' na Figura 7.17d devem resistir, respectivamente. Visto que, em cada caso, o fluxo de cisalhamento encontra a resistência de *duas* superfícies e cada prego pode resistir a 30 N, o espaçamento para B é

$$s_B = \frac{30\text{ N}}{(11{,}76/2)\text{ N/cm}} = 5{,}10\text{ cm} \qquad \text{Use } s_B = 5\text{ cm}$$

Resposta

E para C,

$$s_C = \frac{30\text{ N}}{(7{,}059/2)\text{ N/cm}} = 8{,}50\text{ cm} \qquad \text{Use } s_C = 8{,}5\text{ cm}$$

Resposta

EXEMPLO 7.6

Pregos com resistência ao cisalhamento total de 40 N são usados em uma viga que pode ser construída de dois modos: Caso I ou Caso II (Figura 7.18). Se os pregos forem espaçados de 9 cm, determine o maior cisalhamento verti-

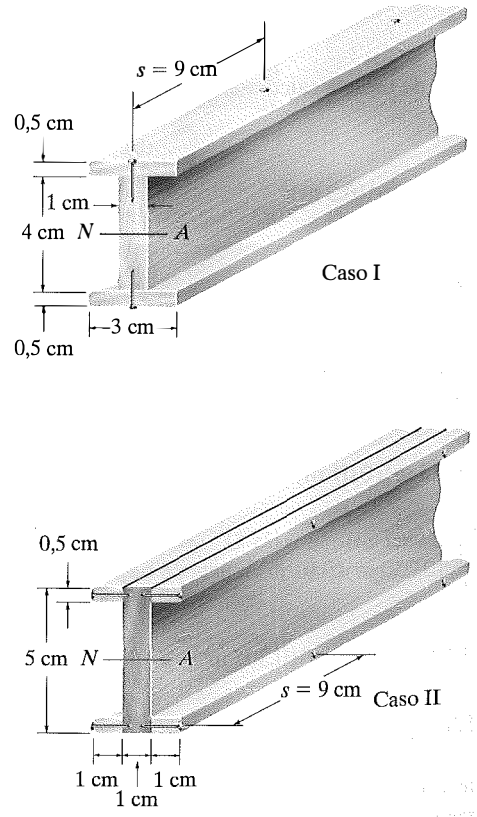


Figura 7.18

cal que pode ser suportado em cada caso de modo que os elementos de fixação não falhem.

SOLUÇÃO

Visto que a geometria é a mesma em ambos os casos, o momento de inércia em torno do eixo neutro é

$$I = \frac{1}{12}(3\text{ mm})(5\text{ mm})^3 - 2\left[\frac{1}{12}(1\text{ mm})(4\text{ mm})^3\right] = 20{,}58\text{ mm}^4$$

Caso I. Nesse projeto, uma única fileira de pregos prende a parte superior ou a parte inferior da aba à alma. Para uma dessas abas,

$$Q = \bar{y}'A' = [2{,}25\text{ cm}][3\text{ cm}(0{,}5\text{ cm})] = 3{,}375\text{ cm}^3$$

de modo que

$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\frac{40\text{ N}}{9\text{ cm}} = \frac{V(3{,}375\text{ cm}^3)}{20{,}58\text{ cm}^4}$$

$$V = 27{,}1\text{ N} \qquad \textit{Resposta}$$

Caso II. Nesse caso, uma única fileira de pregos prende um dos lados das tábuas à alma. Assim,

$$Q = \bar{y}'A' = [2{,}25\text{ cm}][1\text{ cm}(0{,}5\text{ cm})] = 1{,}125\text{ cm}^3$$

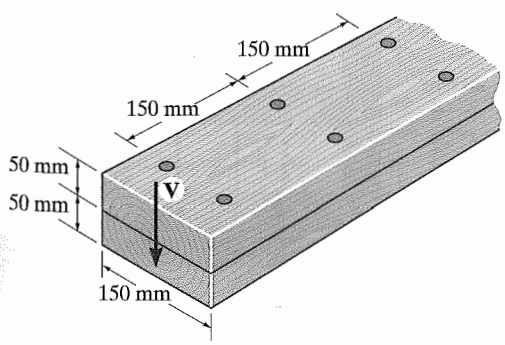
$$q = \frac{VQ}{I}$$

$$\frac{40\text{ N}}{9\text{ cm}} = \frac{V(1{,}125\text{ cm}^3)}{20{,}58\text{ cm}^4}$$

$$V = 81{,}3\text{ N} \qquad \textit{Resposta}$$

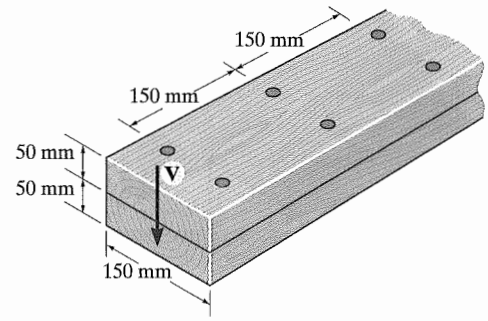
PROBLEMAS

7.36. A viga é construída com duas tábuas presas uma à outra na parte superior e na parte inferior por duas fileiras de pregos espaçados de 150 mm. Se cada prego puder suportar uma força de cisalhamento de 2,5 kN, determine a força de cisalhamento máxima V que pode ser aplicada à viga.



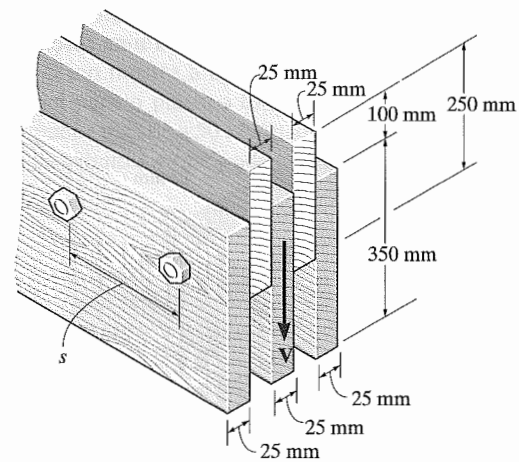
Problema 7.36

7.37. A viga é construída com duas tábuas presas uma à outra na parte superior e na parte inferior por duas fileiras de pregos espaçados de 150 mm. Se uma força de cisalhamento interna $V = 3$ kN for aplicada às tábuas, determine a força de cisalhamento à qual cada prego resistirá.



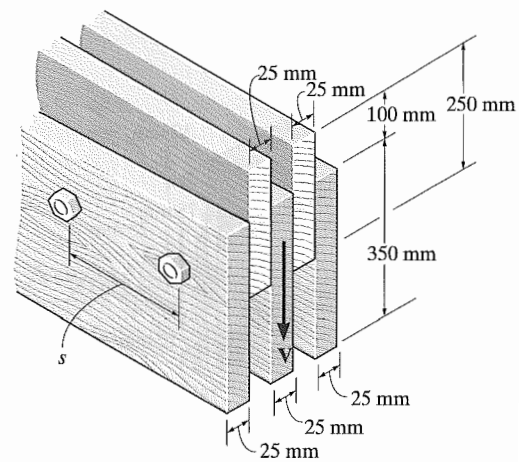
Problema 7.37

7.38. A viga é construída com cinco tábuas parafusadas como mostra a figura. Determine a força de cisalhamento máxima desenvolvida em cada parafuso se o espaço entre eles for $s = 250$ mm e o cisalhamento aplicado for $V = 35$ kN.



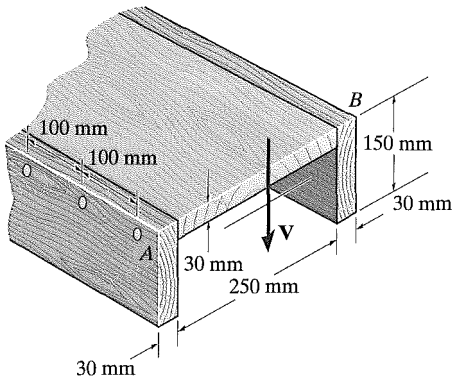
Problema 7.38

7.39. A viga é construída com cinco tábuas parafusadas como mostra a figura. Determine o espaçamento máximo s para os parafusos se cada um deles puder resistir a um cisalhamento de 20 kN e o cisalhamento aplicado for $V = 45$ kN.



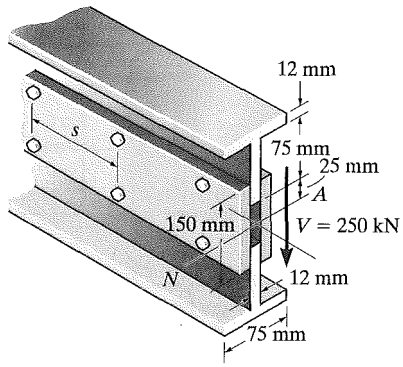
Problema 7.39

*7.40. A viga está sujeita a um cisalhamento $V = 800$ N. Determine a tensão de cisalhamento média desenvolvida nos pregos ao longo dos lados A e B se eles estiverem espaçados de $s = 100$ mm. Cada prego tem diâmetro de 2 mm.



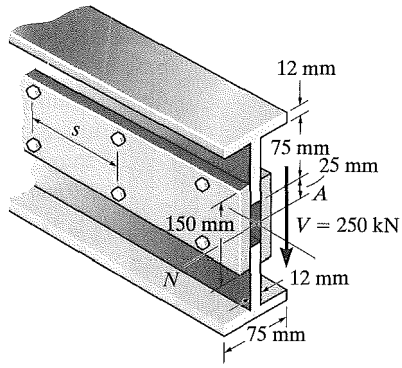
Problema 7.40

7.41. A viga é fabricada com dois T estruturais equivalentes e duas chapas. Cada chapa tem altura de 150 mm e espessura de 12 mm. Se um cisalhamento $V = 250$ kN for aplicado à seção transversal, determine o espaçamento máximo dos parafusos. Cada parafuso pode resistir a uma força de cisalhamento de 75 kN.



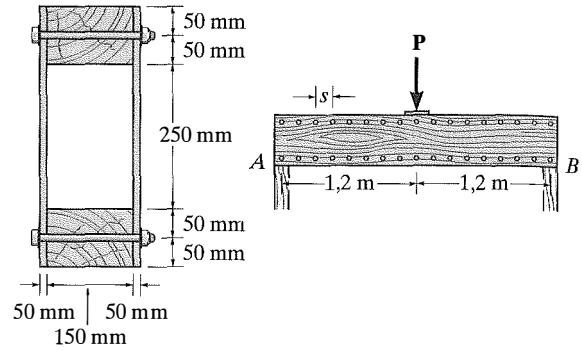
Problema 7.41

7.42. A viga é fabricada com dois T estruturais equivalentes e duas chapas. Cada chapa tem altura de 150 mm e espessura de 12 mm. Se os parafusos estiverem espaçados de $s = 200$ mm, determine a força de cisalhamento máxima **V** que pode ser aplicada à seção transversal. Cada parafuso pode resistir a uma força de cisalhamento de 75 kN.



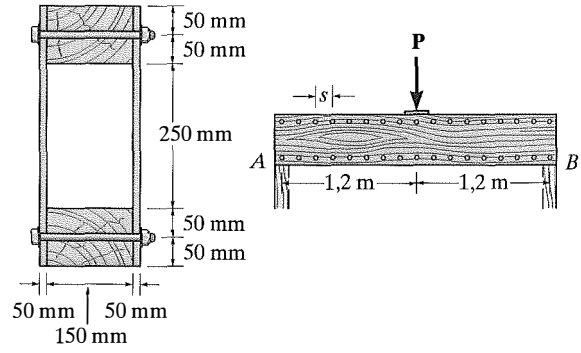
Problema 7.42

7.43. A viga-mestra de alma dupla é composta por duas chapas de compensado presas a elementos de madeira na parte superior e na parte inferior. Se cada elemento de fixação puder suportar 3 kN em cisalhamento simples, determine o espaçamento s exigido entre os elementos de fixação para suportar o carregamento $P = 15$ kN. Considere que A é presa por pino e B é um rolete.



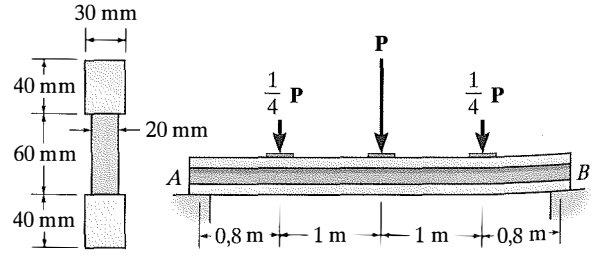
Problema 7.43

*7.44. A viga-mestra de alma dupla é composta por duas folhas de compensado presas a elementos de madeira na parte superior e na parte inferior. A tensão de flexão admissível para a madeira é $\sigma_{adm} = 56$ MPa, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 21$ MPa. Se os elementos de fixação forem espaçados de $s = 150$ mm e cada um puder suportar 3 kN em cisalhamento simples, determine a carga máxima P que pode ser aplicada à viga.



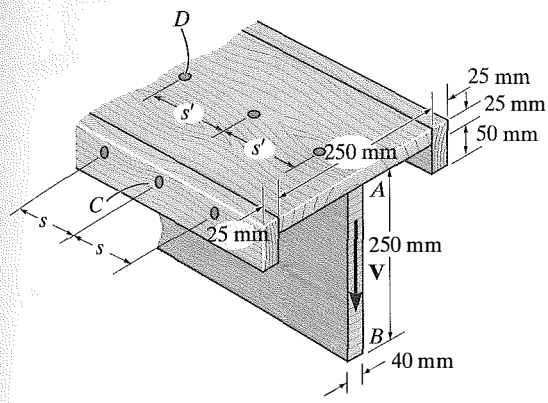
Problema 7.44

7.45. A viga é composta por três tiras de poliestireno coladas como mostra a figura. Se a cola tiver uma resistência ao cisalhamento de 80 kPa, determine a carga máxima P que pode ser aplicada sem que a cola perca sua capacidade de aderência.



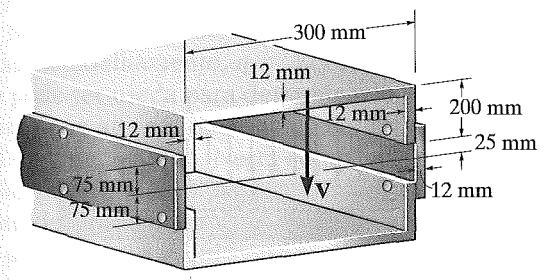
Problema 7.45

7.46. A viga é feita com quatro tábuas pregadas como mostra a figura. Se cada um dos pregos puder suportar uma força de cisalhamento de 500 N, determine os espaçamentos s' e s exigidos entre eles se a viga for submetida a um cisalhamento $V = 3{,}5$ kN.



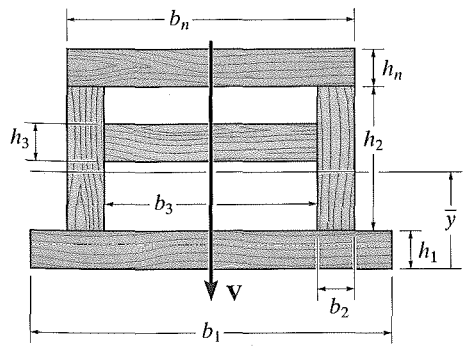
Problema 7.46

7.47. A viga é fabricada com dois perfis em U equivalentes e duas chapas. Cada chapa tem altura de 150 mm e espessura de 12 mm. Se um cisalhamento $V = 250$ kN for aplicado à seção transversal, determine o espaçamento máximo entre os parafusos. Cada parafuso pode resistir a uma força de cisalhamento de 75 kN.



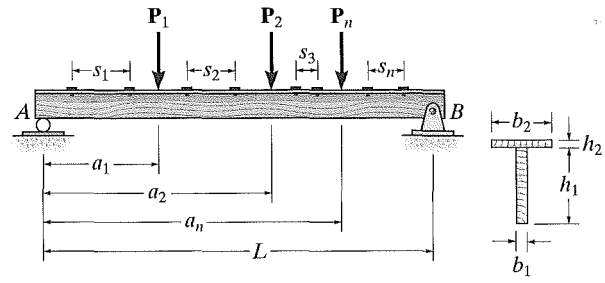
Problema 7.47

7.48. Uma viga de madeira é composta por n tábuas, cada uma com seção transversal retangular. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar a tensão de cisalhamento máxima na viga quando ela for submetida a qualquer cisalhamento V. Mostre uma aplicação do código usando uma seção transversal em "T" e uma seção transversal em caixão.



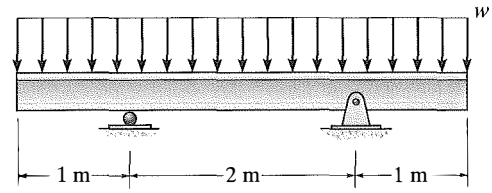
Problema 7.48

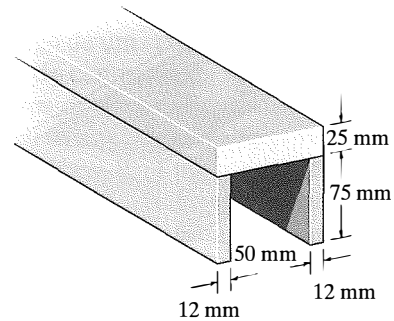
7.49. A viga de madeira T está sujeita a uma carga composta por n forças concentradas, P_n. Se a tensão de cisalhamento admissível V_{prego} para cada um dos pregos for conhecida, escreva um código computacional que especifique o espaçamento dos pregos entre cada carga. Mostre uma aplicação do código usando os valores $L = 4{,}5$ m, $a_1 = 1{,}2$ m, $P_1 = 3$ kN, $a_2 = 2{,}4$ m, $P_2 = 7{,}5$ kN, $b_1 = 37{,}5$ mm, $h_1 = 250$ mm, $b_2 = 200$ mm, $h_2 = 25$ mm, e $V_{prego} = 1$ kN.



Problema 7.49

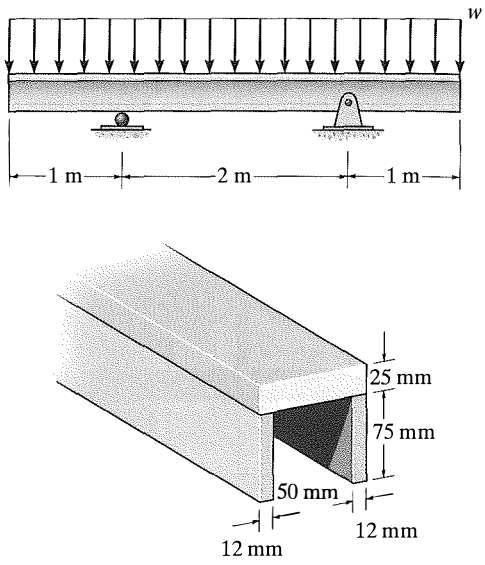
7.50. A escora é construída com três peças de plástico coladas como mostra a figura. Se a tensão de cisalhamento admissível para o plástico for $\tau_{adm} = 5{,}6$ MPa e cada junta colada puder resistir a 50 kN/m, determine o maior carregamento distribuído w que pode ser aplicado à escora.





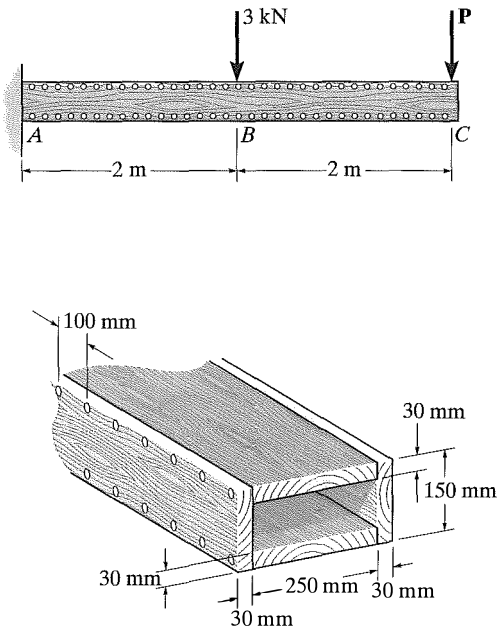
Problema 7.50

7.51. A escora é construída com três peças de plástico coladas como mostra a figura. Se a carga distribuída for $w = 3$ kN/m, determine o fluxo de cisalhamento ao qual cada junta colada deve resitir.



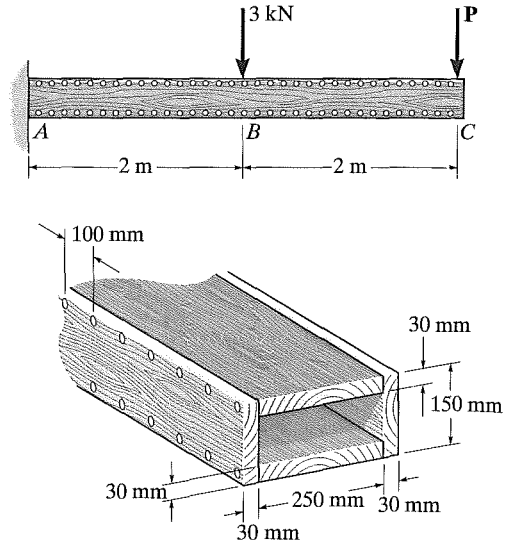
Problema 7.51

*__7.52.__ A viga está sujeita ao carregamento mostrado na figura, onde $P = 7$ kN. Determine a tensão de cisalhamento média desenvolvida nos pregos no interior da região AB da viga. Os pregos estão localizados em cada lado da viga e espaçados de 100 mm. Cada prego tem diâmetro de 5 mm.



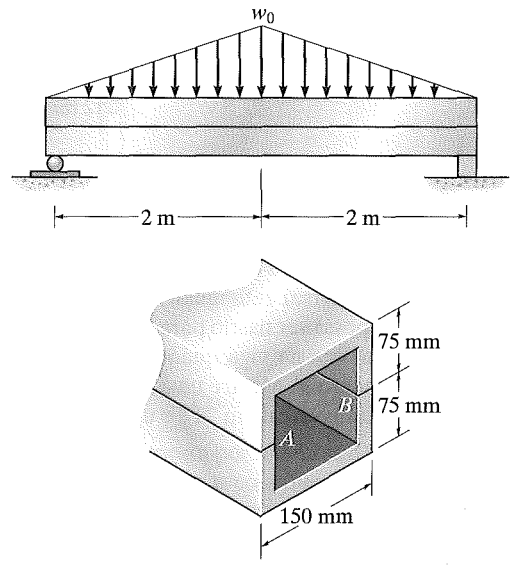
Problema 7.52

__7.53.__ A viga é composta por quatro tábuas pregadas. Se os pregos estiverem de ambos os lados da viga e cada um puder resistir a um cisalhamento de 3 kN, determine a carga máxima P que pode ser aplicada à extremidade da viga.



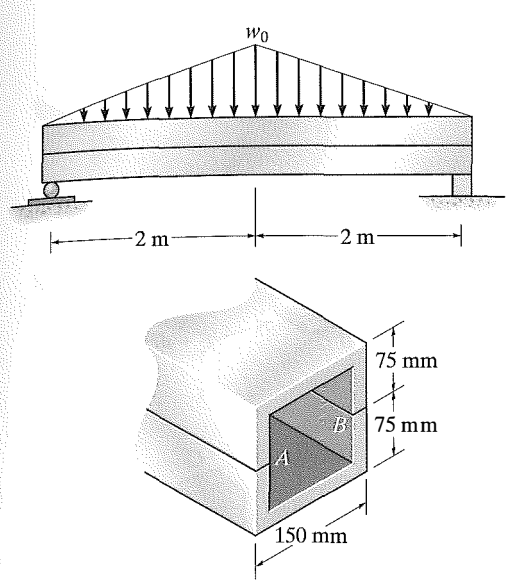
Problema 7.53

__7.54.__ O elemento consiste em dois canais [U] de plástico com 12 mm de espessura colados em A e B. Se a cola puder suportar uma tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 4{,}2$ MPa, determine a intensidade máxima w_0 do carregamento distribuído triangular que pode ser aplicado ao elemento tomando como base a resistência da cola.



Problema 7.54

__7.55.__ O elemento consiste em dois canais [U] de plástico com 12 mm de espessura colados em A e B. Se a carga distribuída tiver intensidade máxima $w_0 = 50$ kN/m, determine a tensão de cisalhamento máxima à qual a cola resiste.



Problema 7.55

7.5 Fluxo de cisalhamento em elementos de paredes finas

Na seção anterior, desenvolvemos a equação do fluxo de cisalhamento, $q = VQ/I$, e mostramos como ela pode ser usada para determinar o fluxo de cisalhamento que age ao longo de qualquer plano longitudinal de um elemento. Nesta seção, mostraremos como aplicar essa equação para determinar a *distribuição* do fluxo de cisalhamento pela área da seção transversal de um elemento. Aqui, consideraremos que o elemento tem *paredes finas*, isto é, a espessura da parede é pequena em comparação com a altura ou largura do elemento. Como mostraremos na próxima seção, essa análise tem importantes aplicações no projeto estrutural e mecânico.

Antes de determinar a distribuição do fluxo de cisalhamento em uma seção transversal, em primeiro lugar mostraremos como o fluxo de cisalhamento está relacionado com a tensão de cisalhamento. Para tal, considere o segmento dx de uma viga com abas largas na Figura 7.19a. Um diagrama de corpo livre de uma porção da aba é mostrado na Figura 7.19b. A força dF é desenvolvida ao longo da seção longitudinal sombreada de modo a equilibrar as forças normais F e $F + dF$ criadas pelos momentos M e $M + dM$, respectivamente. Visto que o segmento tem comprimento dx, então o fluxo de cisalhamento ou força por comprimento ao longo da seção é $q = dF/dx$. Como a parede da aba é *fina*, a variação da tensão de cisalhamento τ não varia muito ao longo da espessura t da seção; portanto, consideraremos que ela é *constante*. Por consequência, $dF = \tau\, dA = \tau(t\, dx) = q\, dx$, ou

$$q = \tau t \tag{7.7}$$

Esse mesmo resultado também pode ser determinado comparando a equação do fluxo de cisalhamento, $q = VQ/I$, com a fórmula do cisalhamento, $\tau = VQ/It$.

Como a tensão de cisalhamento, o fluxo de cisalhamento age em ambos os planos, longitudinal e transversal. Por exemplo, se o elemento de canto no ponto B na Figura7.19b for removido (Figura 7.19c), o fluxo de cisalhamento age como mostrado na face lateral do elemento. Embora a componente vertical transversal do fluxo de cisalhamento exista, nós a *desprezaremos* porque, como mostra a Figura 7.19d, essa componente, assim como ocorre na tensão de cisalhamento, é aproximadamente zero em toda a espessura do elemento. Isso porque consideramos que as paredes são finas e as superfícies superior e inferior do elemento estão livres de tensão. Resumindo, somente será considerada a componente do fluxo de cisalhamento que age *paralelamente* às paredes do elemento.

Por uma análise semelhante, isolar o segmento do lado esquerdo na aba superior (Figura 7.19e) definirá a direção correta do fluxo de cisalhamento no elemento de canto C do segmento (Figura 7.19f). Mostre, por esse método, que o fluxo de cisalhamento nos pontos correspondentes B' e C' na aba inferior é dirigido como mostra a Figura 7.19g.

Esse exemplo ilustra como a *direção* do fluxo de cisalhamento pode ser definida em qualquer ponto da seção transversal de uma viga. Agora, usando a fórmula do fluxo de cisalhamento, $q = VQ/I$, mostraremos como determinar a distribuição do fluxo de cisalhamento por toda a seção transversal. É de esperar que essa fórmula dê resultados razoáveis para o fluxo de cisalhamento já que, como afirmamos na Seção 7.3, a precisão dessa equação melhora para elementos que têm seções transversais retangulares finas. Contudo, para qualquer aplicação, a força de cisalhamento **V** deve agir ao longo de um eixo de simetria ou eixo principal de inércia do centroide da seção transversal.

Começaremos determinando a distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo da aba superior direita da viga T na Figura 7.20a. Para tal, considere o fluxo de cisalhamento q que age no elemento cinza-escuro localizado a uma distância arbitrária x da linha central da seção transversal (Figura 7.20b). Esse fluxo é determinado pela Equação 7.6 com $Q = \bar{y}'A' = [d/2](b/2 - x)t$. Assim,

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V[d/2]((b/2) - x)t}{I} = \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right) \tag{7.8}$$

Por inspeção, essa distribuição é *linear* e varia de $q = 0$ em $x = b/2$ a $(q_{máx})_{aba} = Vt\,db/4I$ em $x = 0$. (A limitação de $x = 0$ é possível aqui, visto que consideramos que o elemento tem "paredes finas" e, portanto, a

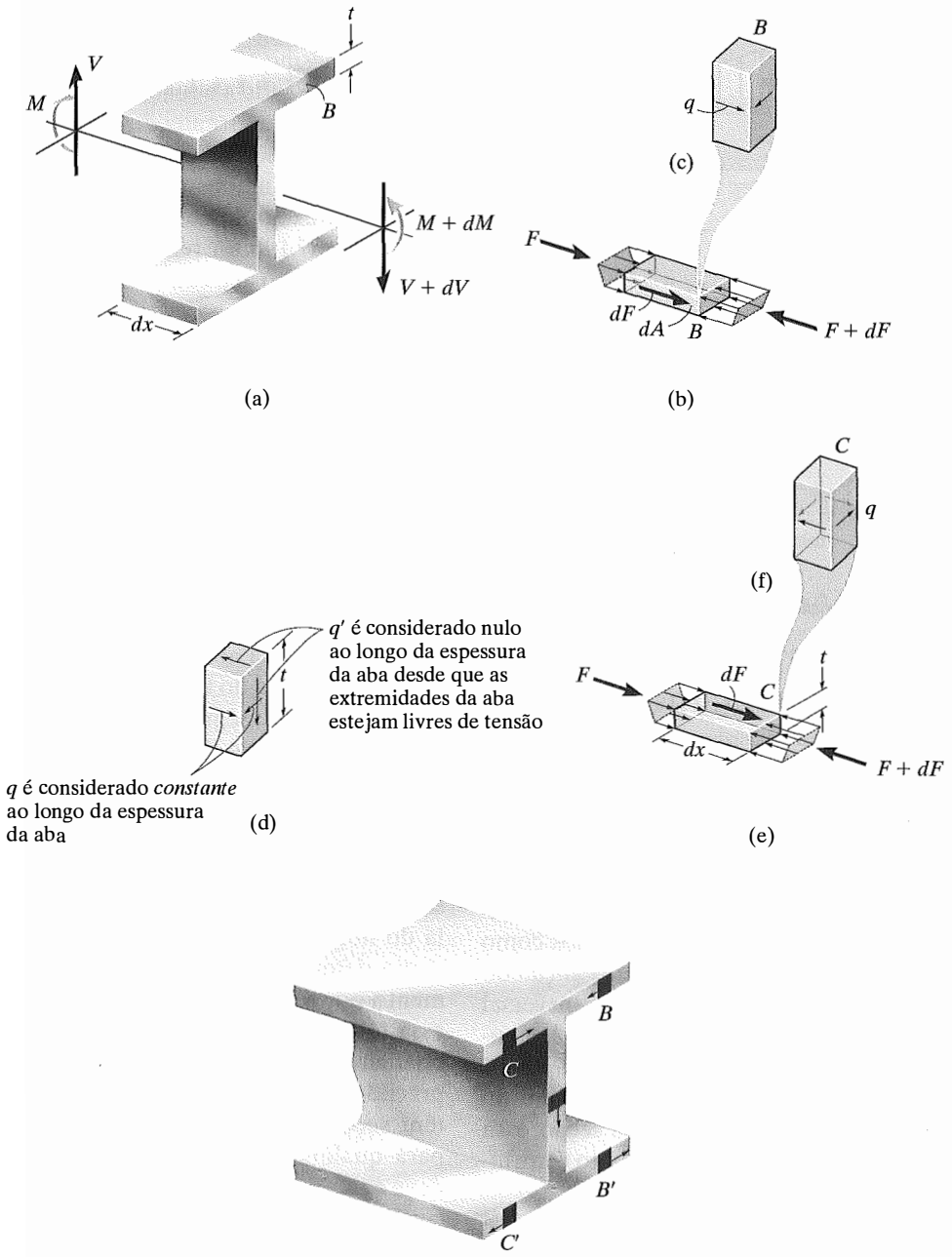


Figura 7.19

espessura da alma é desprezada.) Devido à simetria, uma análise semelhante produz a mesma distribuição de fluxo de cisalhamento para as outras abas, de modo que os resultados são como os mostrados na Figura 7.20d.

A força total desenvolvida nas porções esquerda e direita de uma aba pode ser determinada por integração. Visto que a força no elemento cinza-escuro na Figura 7.20b é $dF = q\,dx$, então

$$F_{\text{aba}} = \int q\,dx = \int_0^{b/2} \frac{Vtd}{2I}\left(\frac{b}{2} - x\right)dx = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

Também podemos determinar esse resultado pelo cálculo da área sob o triângulo na Figura 7.20d, visto que q é uma distribuição de força/comprimento. Por consequência,

$$F_{\text{aba}} = \frac{1}{2}(q_{\text{máx}})_{\text{aba}}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{Vtdb^2}{16I}$$

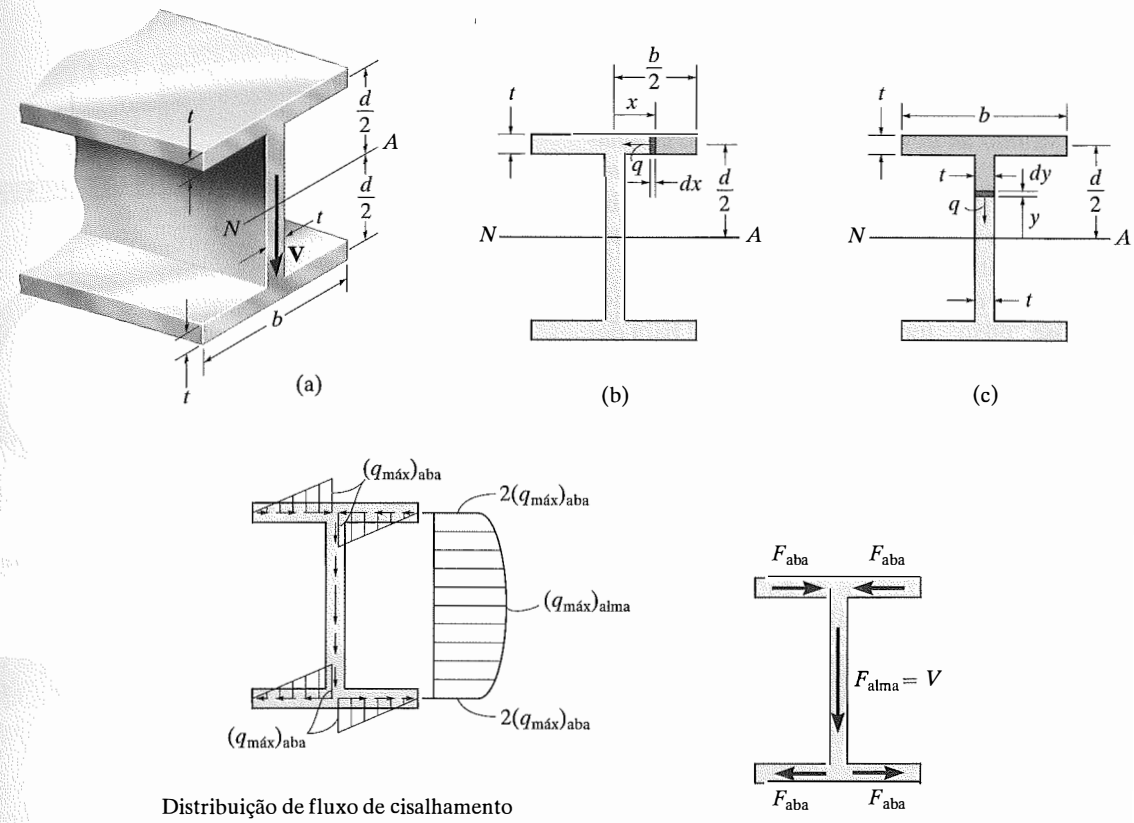


Figura 7.20

Todas as quatro forças que agem nessas abas são mostradas na Figura 7.20e, e, pela direção delas, podemos ver que o equilíbrio da força horizontal na seção transversal é mantido.

Uma análise semelhante pode ser realizada para a alma (Figura 7.20c). Nesse caso, temos $Q = \Sigma \bar{y}' A' = [d/2](bt) + [y + (1/2)(d/2 - y)]t(d/2 - y) = bt\, d/2 + (t/2)(d^2/4 - y^2)$, de modo que

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] \qquad (7.9)$$

Para a alma, o fluxo de cisalhamento varia de maneira *parabólica*, de $q = 2(q_{máx})_{aba} = Vt\, db/2I$ em $y = d/2$ até um máximo $q = (q_{máx})_{alma} = (Vt\, d/I)(b/2 + d/8)$ em $y = 0$ (Figura 7.20d).

Para determinar a força na alma, F_{alma}, temos de integrar a Equação 7.9, isto é,

$$F_{alma} = \int q\, dy = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right] dy$$

$$= \frac{Vt}{I}\left[\frac{db}{2}y + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4}y - \frac{1}{3}y^3\right)\right]\Bigg|_{-d/2}^{d/2}$$

$$= \frac{Vtd^2}{4I}\left(2b + \frac{1}{3}d\right)$$

É possível simplificar essa expressão observando que o momento de inércia para a área da seção transversal é

$$I = 2\left[\frac{1}{12}bt^3 + bt\left(\frac{d}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{12}td^3$$

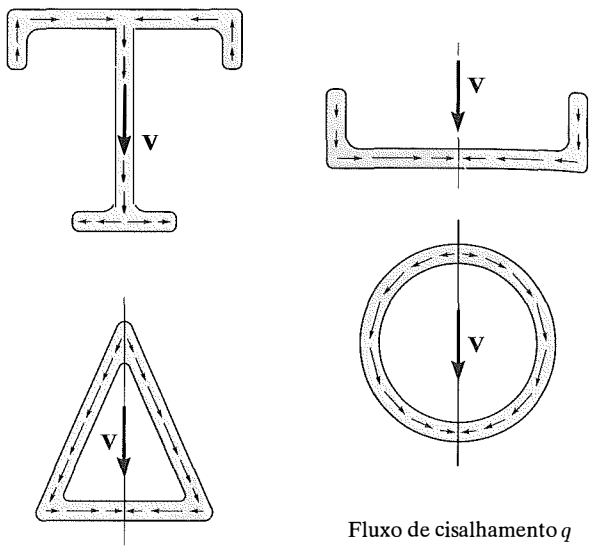
Desprezando o primeiro termo, visto que a espessura de cada aba é pequena, obtemos

$$I = \frac{td^2}{4}\left(2b + \frac{1}{3}d\right)$$

Substituindo na equação acima, vemos que $F_{alma} = V$, o que era esperado (Figura 7.20e).

Pela análise precedente, três pontos importantes devem ser observados. O primeiro é que o valor de q muda na seção transversal, visto que Q será diferente para cada segmento de área A' para o qual for determinado. Em particular, q variará *linearmente* ao longo dos segmentos (abas) *perpendiculares* à direção de **V** e *parabolicamente*

ao longo de segmentos (alma) *inclinados ou paralelos* em relação a **V**. O segundo é que *q sempre age paralelamente às paredes* do elemento, visto que a seção na qual q é calculado é tomada perpendicularmente às paredes. E o terceiro é que o *sentido da direção* de q é tal que o cisalhamento parece "fluir" pela seção transversal, *para dentro* na aba superior da viga, "combinando-se" e, então, "fluindo" *para baixo* pela alma, uma vez que deve contribuir para a força de cisalhamento **V**, e, então, separando-se e "fluindo" *para fora* na aba inferior. Se conseguirmos "visualizar" esse "fluxo", teremos um meio fácil para definir não somente a direção de q, mas *também* a direção correspondente de τ. Outros exemplos da direção que q toma ao longo de segmentos de elementos de paredes finas são mostrados na Figura 7.21. Em todos os casos, a simetria prevalece em torno de um eixo colinear com **V**; o resultado é que q "flui" em uma direção tal que dará as componentes necessárias da força vertical equivalentes a **V** e ainda satisfará os requisitos do equilíbrio da força horizontal para a seção transversal.



Fluxo de cisalhamento q

Figura 7.21

PONTOS IMPORTANTES

- Se um elemento for composto por segmentos com paredes finas, só o fluxo de cisalhamento *paralelo* às paredes do elemento é importante.
- O fluxo de cisalhamento varia *linearmente* ao longo de segmentos *perpendiculares* à direção do cisalhamento **V**.
- O fluxo de cisalhamento varia *parabolicamente* ao longo de segmentos *inclinados* ou *paralelos* em relação à direção do cisalhamento **V**.
- Na seção transversal, o cisalhamento "flui" ao longo dos segmentos de modo que contribui para o cisalhamento **V** e, ainda, satisfaz o equilíbrio de força horizontal e vertical.

EXEMPLO 7.7

A viga-caixão de paredes finas na Figura 7.22a está sujeita a um cisalhamento de 10 kN. Determine a variação do fluxo de cisalhamento em toda a seção transversal.

SOLUÇÃO

Por simetria, o eixo neutro passa pelo centro da seção transversal. O momento de inércia é

$$I = \frac{1}{12}(6\text{ mm})(8\text{ mm})^3 - \frac{1}{12}(4\text{ mm})(6\text{ mm})^3 = 184\text{ mm}^4$$

Só o fluxo de cisalhamento nos pontos B, C e D deve ser determinado. Para o ponto B, a área $A' \approx 0$ (Figura 7.22b), visto que podemos considerar que ela está localizada inteiramente no ponto B. Como alternativa, A' também pode representar *toda* a área da seção transversal, caso em que $Q_B = y'A' = 0$, uma vez que $y' = 0$. Como $Q_B = 0$, então

$$q_B = 0$$

Para o ponto C, a área A' é a sombreada escura na Figura 7.22c. Aqui, usamos as dimensões médias, visto que o ponto C está na linha central de cada segmento. Temos

$$Q_C = \bar{y}'A' = (3{,}5\text{ cm})(5\text{ cm})(1\text{ cm}) = 17{,}5\text{ cm}^3$$

Assim,

$$q_C = \frac{VQ_C}{I} = \frac{10\text{ N}(17{,}5\text{ cm}^3/2)}{184\text{ cm}^4}$$

$$= 0{,}951\text{ kN/cm} = 95{,}1\text{ N/mm}$$

O fluxo de cisalhamento em D é calculado pelos três retângulos sombreados, mostrados na Figura 7.22d. Temos

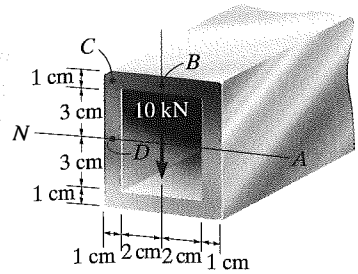
$$Q_D = \Sigma\bar{y}'A' = 2[2\text{ cm}](1\text{ cm})(4\text{ cm})$$

$$- [3{,}5\text{ cm}](4\text{ cm})(1\text{ cm}) = 30\text{ cm}^3$$

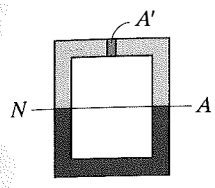
Portanto,

$$q_D = \frac{VQ_D}{I} = \frac{10\text{ N}(30\text{ cm}^3/2)}{184\text{ cm}^4} = 1{,}63\text{ kN/cm} = 163\text{ N/mm}$$

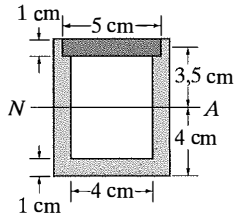
Com esses resultados e a simetria da seção transversal, a distribuição do fluxo de cisalhamento é representada na Figura 7.22e. Como esperado, a distribuição é linear ao longo dos segmentos horizontais (perpendiculares a **V**) e parabólica ao longo dos segmentos verticais (paralelos a **V**).



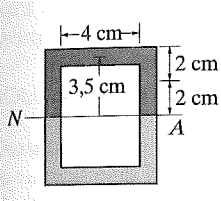
(a)



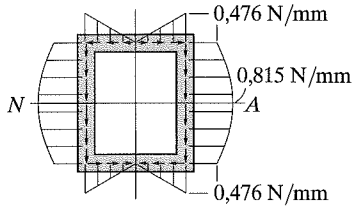
(b)



(c)



(d)



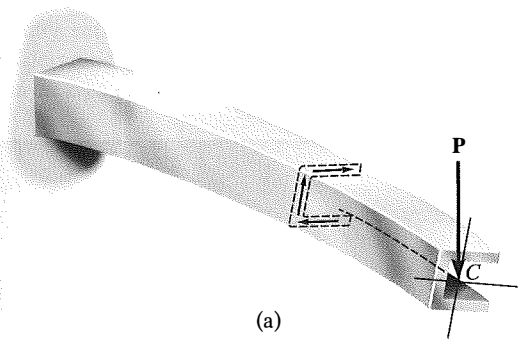
(e)

Figura 7.22

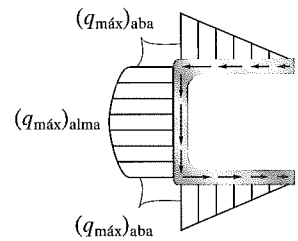
*7.6 Centro de cisalhamento para seções transversais abertas

Na seção anterior, consideramos que o cisalhamento interno **V** era aplicado ao longo de um eixo principal de inércia do centroide que *também* representa um eixo de *simetria* para a seção transversal. Nesta seção, consideraremos o efeito da aplicação do cisalhamento ao longo de um eixo principal do centroide que *não* é um eixo de simetria para uma seção transversal aberta. Como antes, só analisaremos elementos com paredes finas, portanto, usaremos as dimensões até a linha central das paredes dos elementos. Um exemplo típico desse caso é a seção do perfil em U (canal) mostrada na Figura 7.23a, que tem uma extremidade engastada e a outra em balanço e é submetida a uma força **P**. Se essa força for aplicada ao longo do eixo anteriormente vertical e assimétrico que passa pelo *centroide C* da área da seção transversal, o perfil não somente se curvará para baixo, *mas também será torcido em sentido horário*, como mostra a figura.

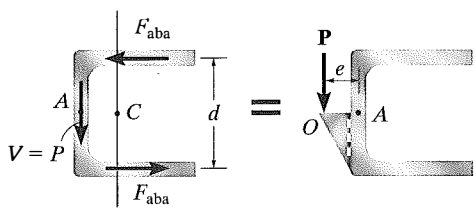
Para entender por que o elemento sofre torção, é preciso estudar a distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo das abas e da alma do perfil em questão (Figura 7.23b). Quando essa distribuição é integrada ao longo das áreas da aba e da alma, dará forças resultantes F_{aba} em cada aba e uma força $V = P$ na alma



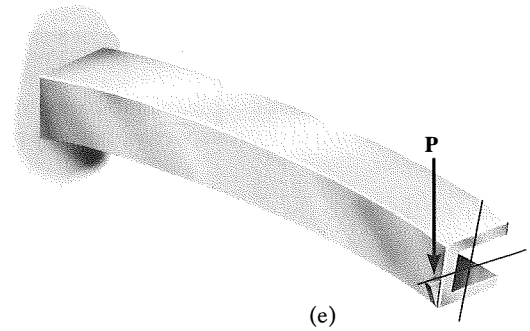
(a)



Distribuição do fluxo de cisalhamento
(b)



(c) (d)



(e)

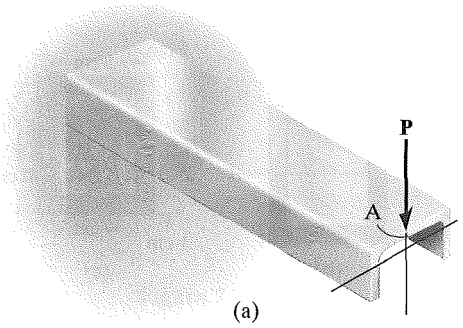
Figura 7.23

(Figura 7.23c). Se os momentos dessas forças forem somados ao redor do ponto A, podemos ver que o conjugado ou torque criado pelas forças na aba é responsável pela torção do elemento. A torção verdadeira é no sentido horário quando vista da frente da viga, como mostra a Figura 7.23a, já que as forças *de reação* de "equilíbrio" interno F_{aba} provocam a torção. Portanto, para *impedir* essa torção, é necessário aplicar **P** a um ponto O localizado à distância e da alma do perfil (Figura 7.23d). Exige-se $\Sigma M_A = F_{aba}d = Pe$ ou

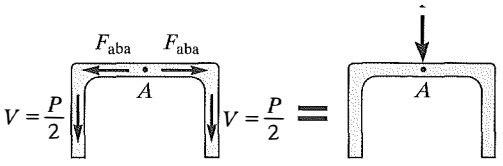
$$e = \frac{F_{aba}d}{P}$$

Pelo método discutido na Seção 7.5, F_{aba} pode ser avaliada em termos de P $(= V)$ e das dimensões das abas e da alma. Isso feito, então, P será cancelada após a substituição na equação acima, o que possibilitará expressar e simplesmente em função da geometria da seção transversal e *não* em função de P ou de sua localização ao longo do comprimento da viga (ver Exemplo 7.9). O ponto O assim localizado é denominado **centro de cisalhamento** ou **centro de flexão**. Quando **P** é aplicada no centro de cisalhamento, **a viga sofrerá flexão sem torção**, como mostra a Figura 7.23e. Os manuais de projeto costumam apresentar listas com a localização desse ponto para vários tipos de vigas com seções transversais de paredes finas comumente utilizadas na prática.

Ao fazermos essa análise, devemos observar que **o centro de cisalhamento sempre estará localizado sobre um eixo de simetria** da área da seção transversal de um elemento. Por exemplo, se girarmos de 90° o perfil na Figura 7.23a e **P** for aplicada em A (Figura 7.24a), não ocorrerá nenhuma torção, visto que o fluxo de cisalhamento na alma e nas abas para esse caso é *simétrico* e, portanto, as forças resultantes nesses elementos criarão momentos nulos em torno de A (Figura 7.24b). É óbvio que, se um elemento tiver uma seção com *dois* eixos de simetria, como no caso de uma viga de abas largas, o centro de cisalhamento coincidirá com a interseção desses eixos (o centroide).



(a)



(b)

Figura 7.24

PONTOS IMPORTANTES

- O *centro de cisalhamento* é o ponto no qual se pode aplicar uma força que causará a deflexão de uma viga sem provocar torção.
- O centro de cisalhamento sempre estará localizado em um eixo de simetria da seção transversal.
- A localização do centro de cisalhamento é função apenas da geometria da seção transversal e não depende do carregamento aplicado.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A localização do centro de cisalhamento para um elemento de paredes finas no qual o cisalhamento interno está na *mesma direção* de um eixo principal do centroide para a seção transversal pode ser determinado pelo procedimento descrito a seguir.

Resultantes do fluxo de cisalhamento

- Determine a direção do fluxo de cisalhamento em vários segmentos da seção transversal, faça um rascunho das forças resultantes em cada segmento da seção transversal. (Por exemplo, veja a Figura 7.23c.) Visto que o centro de cisalhamento é determinado pelo cálculo dos momentos dessas forças resultantes em torno de um ponto (A), escolha esse ponto em uma localização que elimine os momentos do maior número possível de forças resultantes.

- Os valores das forças resultantes que criam um momento em torno de A devem ser calculados. Para qualquer segmento, esse cálculo corresponde à determinação do fluxo de cisalhamento q em um ponto arbitrário no segmento e à integração de q ao longo do comprimento do segmento. Observe que **V** criará uma variação *linear* do fluxo de cisalhamento em segmentos *perpendiculares* a **V** e uma variação *parabólica* do fluxo de cisalhamento em segmentos *paralelos* ou *inclinados* em relação a **V**.

Centro de cisalhamento

- Some os momentos das resultantes do fluxo de cisalhamento em torno do ponto A e iguale esse momento ao momento de **V** em torno de A. A resolução dessa equação permite-nos determinar a distância do braço do momento e, que localiza a linha de ação de **V** em relação a A.
- Se existir um *eixo de simetria* para a seção transversal, o centro de cisalhamento encontra-se no ponto onde esse eixo intercepta a linha de ação de **V**. Contudo, se não existir nenhum eixo de simetria, gire a seção transversal de 90° e repita o processo para obter outra linha de ação para **V**. Então, o centro de cisalhamento encontra-se no ponto de interseção das duas linhas a 90°.

EXEMPLO 7.8

Determine a localização do centro de cisalhamento para o perfil em U de paredes finas cujas dimensões são mostradas na Figura 7.25a.

SOLUÇÃO

Resultantes do fluxo de cisalhamento. Um cisalhamento vertical para baixo **V** aplicado à seção provoca o fluxo de cisalhamento pelas abas e alma mostrado na Figura 7.25b, o que provoca as forças resultantes F_{aba} e V nas abas e alma, como mostra a Figura 7.25c. Os momentos serão calculados em torno do ponto A porque, assim, teremos de determinar apenas a força F_{aba} na aba inferior.

A área da seção transversal pode ser dividida em três componentes retângulares — uma alma e duas abas. Visto que consideramos que cada componente é fino, o momento de inércia da área em torno do eixo neutro é

$$I = \frac{1}{12}th^3 + 2\left[bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{th^2}{2}\left(\frac{h}{6} + b\right)$$

Pela Figura 7.25d, q na posição arbitrária x é

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V(h/2)[b - x]t}{(th^2/2)[(h/6) + b]} = \frac{V(b - x)}{h[(h/6) + b]}$$

Por consequência, a força F_{aba} é

$$F_{aba} = \int_0^b q\,dx = \frac{V}{h[(h/6) + b]}\int_0^b (b - x)\,dx = \frac{Vb^2}{2h[(h/6) + b]}$$

Esse mesmo resultado também pode ser encontrado determinando-se, em primeiro lugar, $(q_{máx})_{aba}$ (Figura 7.25b) e, então, determinando-se a área triangular $1/2\ b(q_{máx})_{aba} = F_{aba}$.

Centro de cisalhamento. Somando-se os momentos em torno do ponto A (Figura 7.25c), exige-se que

$$Ve = F_{aba}h = \frac{Vb^2h}{2h[(h/6) + b]}$$

Assim,

$$e = \frac{b^2}{[(h/3) + 2b]} \qquad \textit{Resposta}$$

Como afirmamos antes, e depende somente da geometria da seção transversal.

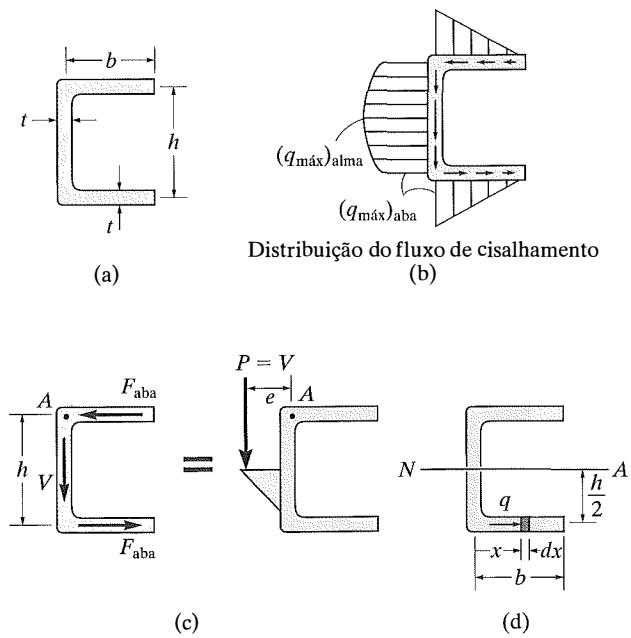


Figura 7.25

EXEMPLO 7.9

Determine a localização do centro de cisalhamento para a cantoneira de abas iguais (Figura 7.26a). Calcule também a força de cisalhamento interna resultante em cada aba.

SOLUÇÃO

Quando uma força de cisalhamento vertical para baixo **V** é aplicada à seção, as direções do fluxo de cisalhamento e das resultantes do fluxo de cisalhamento são as mostradas nas figuras 7.26b e 7.26c, respectivamente. Observe que a força F em cada aba deve ser igual, visto que, para equilíbrio, a soma de suas componentes horizontais deve ser igual a zero. Além disso, as linhas de ação de ambas as forças interceptam o ponto O; portanto, esse ponto *deve ser o centro de cisalhamento* visto que a soma dos momentos dessas forças e **V** em torno de O é zero (Figura 7.26c).

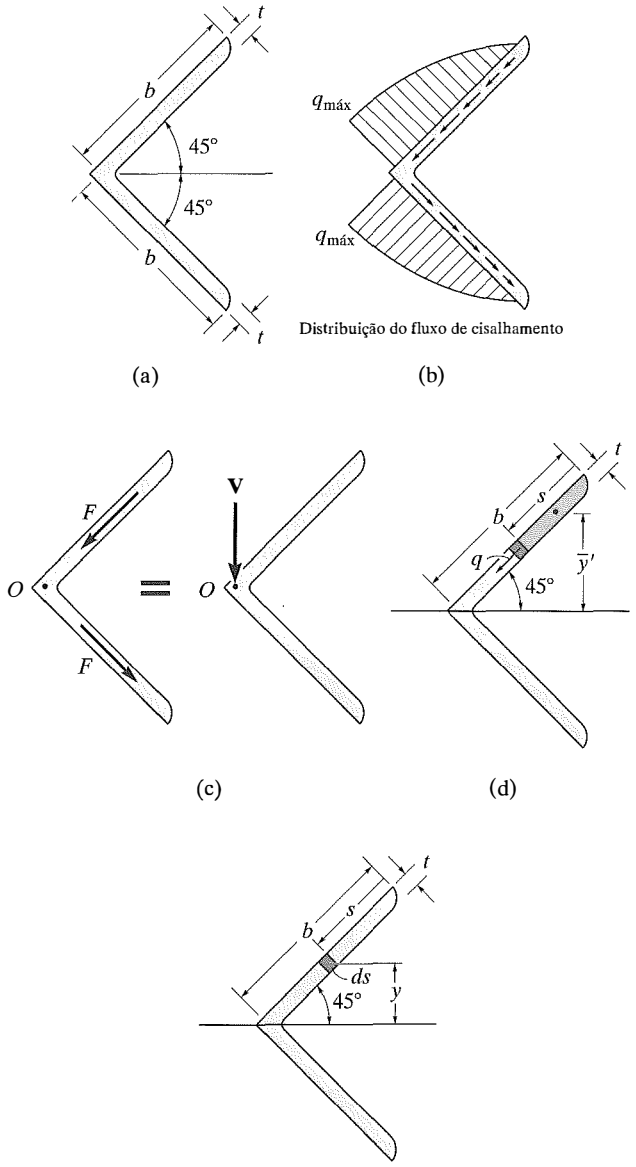


Figura 7.26

O valor de **F** pode ser encontrado determinando, em primeiro lugar, o fluxo de cisalhamento na localização arbitrária s ao longo da aba superior (Figura 7.26d). Aqui,

$$Q = \bar{y}'A' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((b - s) + \frac{s}{2}\right)ts = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right)st$$

O momento de inércia da cantoneira, calculado em torno do eixo neutro, deve ser determinado pelos "princípios fundamentais", visto que as abas estão inclinadas em relação ao eixo neutro. Para o elemento de área $dA = t\,ds$ (Figura 7.26e), temos

$$I = \int_A y^2\,dA = 2\int_0^b \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(b - s)\right]^2 t\,ds$$

$$= t\left(b^2 s - bs^2 + \frac{1}{3}s^3\right)\Big|_0^b = \frac{tb^3}{3}$$

Assim, o fluxo de cisalhamento é

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{V}{(tb^3/3)}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b - \frac{s}{2}\right)st\right]$$

$$= \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}s\left(b - \frac{s}{2}\right)$$

A variação de q é parabólica e atinge um valor máximo quando $s = b$, como mostra a Figura 7.26b. A força F é, portanto,

$$F = \int_0^b q\,ds = \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}\int_0^b s\left(b - \frac{s}{2}\right)ds$$

$$= \frac{3V}{\sqrt{2}b^3}\left(b\frac{s^2}{2} - \frac{1}{6}s^3\right)\Big|_0^b$$

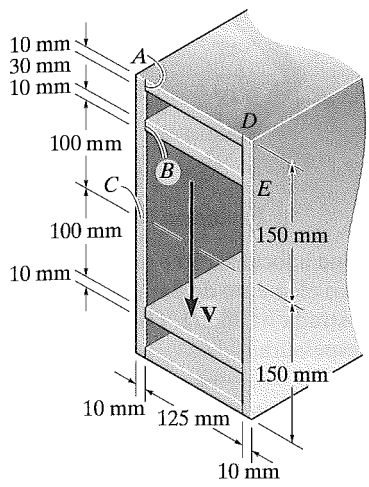
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}V \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Esse resultado pode ser facilmente verificado, pois a soma das componentes verticais da força F em cada aba deve ser igual a V e, como afirmamos antes, a soma das componentes horizontais é nula.

PROBLEMAS

***7.56.** Uma força de cisalhamento $V = 18$ kN é aplicada à viga-caixão simétrica. Determine o fluxo de cisalhamento em A e B.

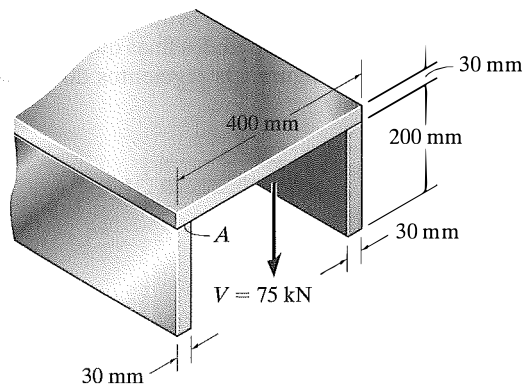
7.57. A força de cisalhamento $V = 18$ kN é aplicada à viga-caixão. Determine o fluxo de cisalhamento em C.



Problemas 7.56/57

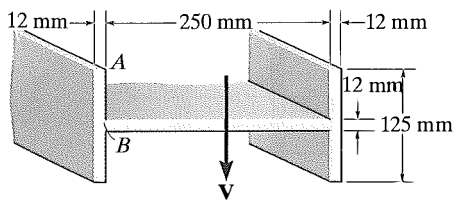
7.58. O perfil em U é submetido a um cisalhamento $V = 75$ kN. Determine o fluxo de cisalhamento desenvolvido no ponto A.

7.59. O perfil em U é submetido a um cisalhamento $V = 75$ kN. Determine o fluxo de cisalhamento máximo no perfil.



Problemas 7.58/59

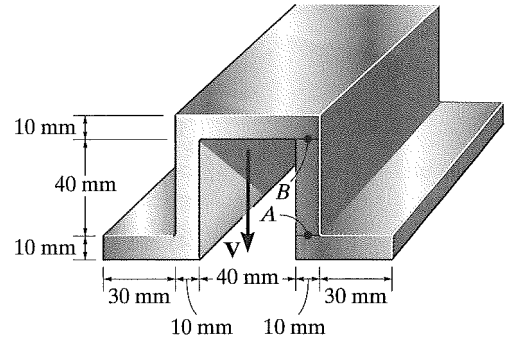
***7.60.** A viga suporta um cisalhamento vertical $V = 35$ kN. Determine a força resultante desenvolvida no segmento AB da viga.



Problema 7.60

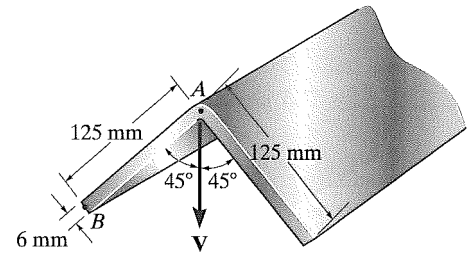
7.61. A escora de alumínio tem 10 mm de espessura e a seção transversal mostrada na figura. Se for submetida a um cisalhamento $V = 150$ N, determine o fluxo de cisalhamento nos pontos A e B.

7.62. A escora de alumínio tem 10 mm de espessura e a seção transversal mostrada na figura. Se for submetida a um cisalhamento $V = 150$ N, determine o fluxo de cisalhamento máximo na escora.



Problemas 7.61/62

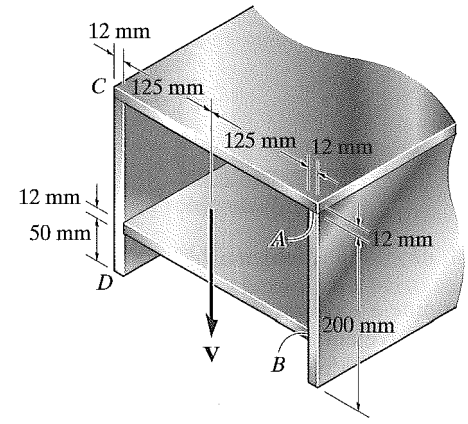
7.63. A cantoneira está sujeita a um cisalhamento $V = 10$ kN. Faça um rascunho da distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo da aba AB. Indique valores numéricos em todos os picos.



Problema 7.63

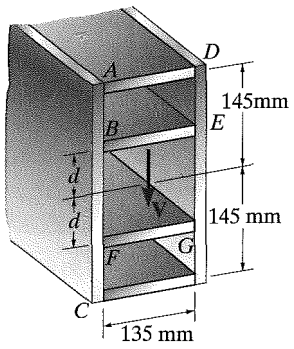
***7.64.** A viga está sujeita a uma força de cisalhamento $V = 25$ kN. Determine o fluxo de cisalhamento nos pontos A e B.

7.65. A viga é composta por quatro chapas e está sujeita a uma força de cisalhamento $V = 25$ kN. Determine o fluxo de cisalhamento máximo na seção transversal.



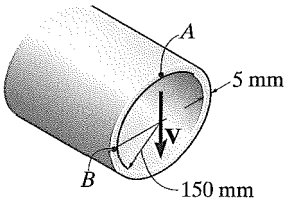
Problemas 7.64/65

7.66. A força de cisalhamento $V = 18$ kN é aplicada à viga-mestra-caixão. Determine a posição d das chapas de reforço BE e FG de modo que o fluxo de cisalhamento em A seja duas vezes maior do que o fluxo de cisalhamento em B. Use as dimensões da linha central para o cálculo. Todas as chapas têm 10 mm de espessura.



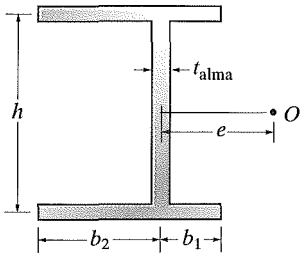
Problema 7.66

7.67. O tubo está sujeito a uma força de cisalhamento $V = 40$ kN. Determine o fluxo de cisalhamento no tubo nos pontos A e B.



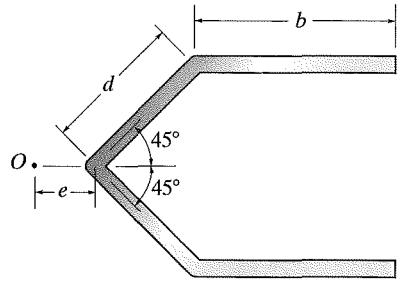
Problema 7.67

***7.68.** Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas com a seção transversal mostrada na figura, onde $b_2 > b_1$. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



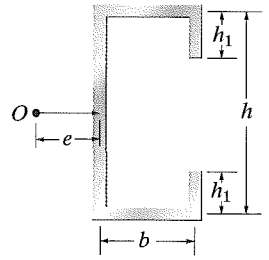
Problema 7.68

7.69. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



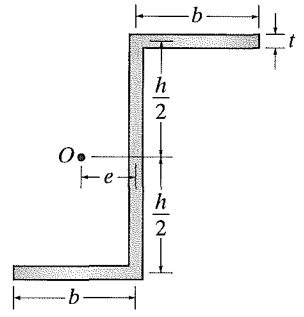
Problema 7.69

7.70. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



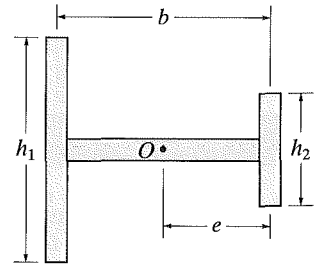
Problema 7.70

7.71. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



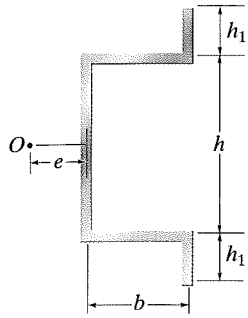
Problema 7.71

7.72. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



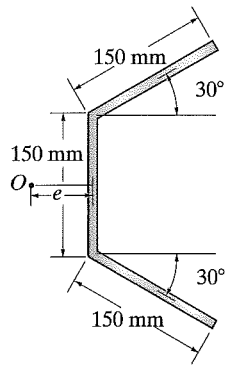
Problema 7.72

7.73. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



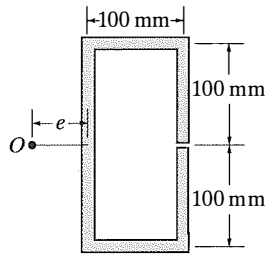
Problema 7.73

7.74. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



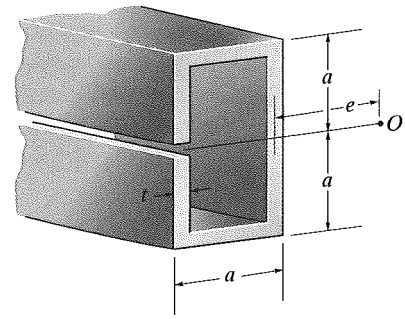
Problema 7.74

7.75. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem uma fenda ao longo de sua lateral.



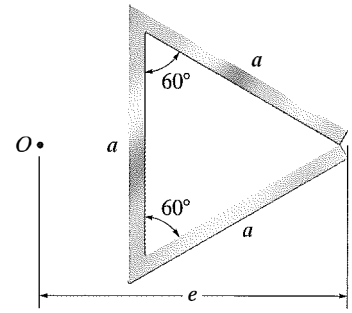
Problema 7.75

***7.76.** Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem uma fenda ao longo de sua lateral. Cada elemento tem espessura constante t.



Problema 7.76

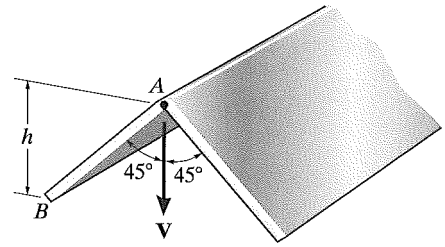
7.77. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura.



Problema 7.77

7.78. Se a cantoneira tiver espessura de 3 mm, altura $h = 100$ mm e for submetida a um cisalhamento $V = 50$ N, determine o fluxo de cisalhamento no ponto A e o fluxo de cisalhamento máximo na cantoneira.

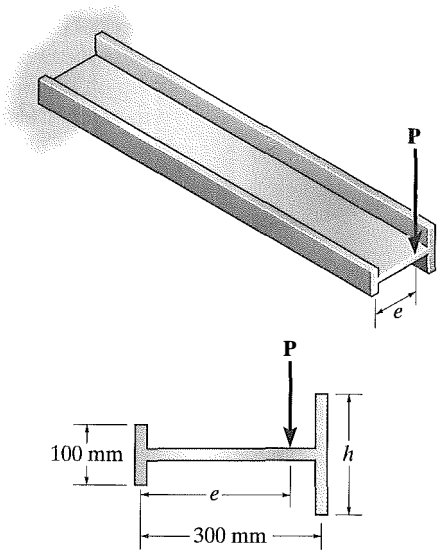
7.79. A cantoneira está sujeita a um cisalhamento $V = 10$ kN. Faça um rascunho da distribuição do fluxo de cisalhamento ao longo da aba AB. Indique os valores numéricos em todos os picos. A espessura é 6 mm, e as abas (AB) têm 125 mm.



Problemas 7.78/79

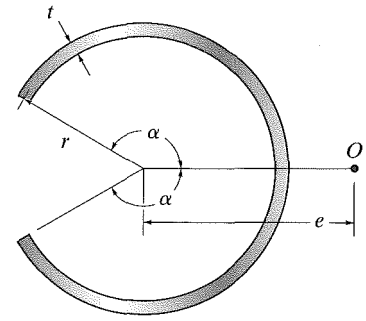
***7.80.** Determine a posição e para a aplicação da força **P** de modo que a viga sofra deflexão para baixo sem torção. Considere $h = 200$ mm.

7.81. A força **P** é aplicada à alma da viga como mostra a figura. Se $e = 250$ mm, determine a altura h da aba direita de modo que a viga sofra deflexão para baixo sem torção. Os segmentos do elemento têm a mesma espessura t.



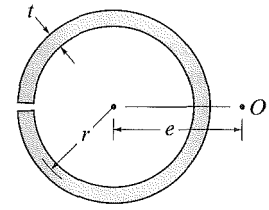
Problemas 7.80/81

7.82. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura.



Problema 7.82

7.83. Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o tubo que tem uma fenda ao longo de seu comprimento.



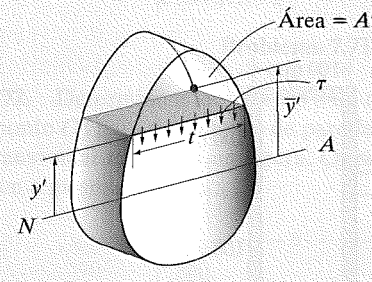
Problema 7.83

Revisão do capítulo

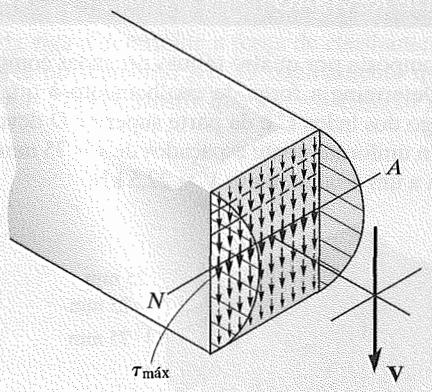
A tensão de cisalhamento transversal em vigas é determinada indiretamente pela fórmula da flexão e pela relação entre momento e cisalhamento ($V = dM/dx$). O resultado é a fórmula do cisalhamento

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Em particular, o valor para Q é o momento da área A' em torno do eixo neutro. Essa área é a porção da área da seção transversal "que é mantida" em uma viga acima da espessura t onde τ deve ser determinada.



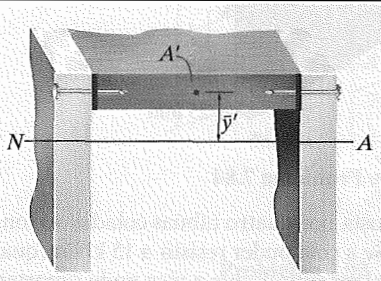
Se a viga tiver seção transversal *retangular*, a distribuição da tensão de cisalhamento será parabólica e atingirá um valor máximo no eixo neutro.



Distribuição da tensão de cisalhamento

Elementos de fixação, colas ou soldas são usados para ligar as partes da seção de uma estrutura composta por vários elementos. A resistência desses elementos de fixação é determinada pelo fluxo de cisalhamento, q, ou força por unidade de comprimento, que deve ser sustentado pela viga.

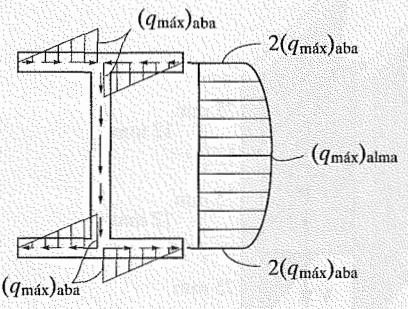
$$q = \frac{VQ}{I}$$



Se uma viga tiver seção transversal de paredes finas, então o fluxo de cisalhamento que passa pela seção transversal poderá ser determinado por

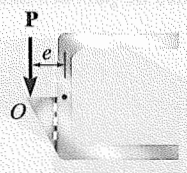
$$q = \frac{VQ}{I}$$

O fluxo de cisalhamento varia linearmente ao longo de segmentos horizontais e parabolicamente ao longo de segmentos inclinados ou verticais.



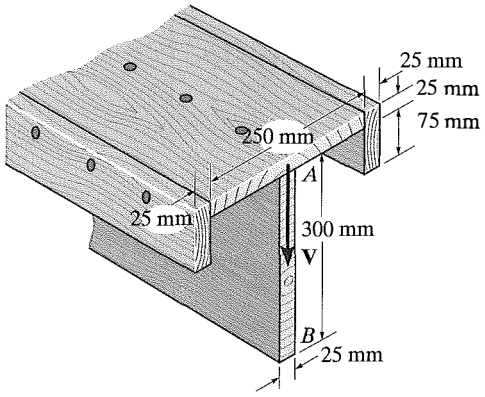
Distribuição do fluxo de cisalhamento

Contanto que a distribuição da tensão de cisalhamento em cada elemento de uma seção de paredes finas seja conhecida, a localização O do centro de cisalhamento para a seção transversal poderá ser determinada pelo equilíbrio de momentos. Quando uma carga aplicada ao elemento passar por esse ponto, o elemento sofrerá flexão, mas não torção.



PROBLEMAS DE REVISÃO

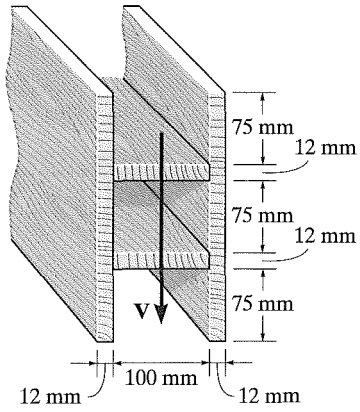
***7.84.** A viga é composta por quatro tábuas pregadas como mostra a figura. Determine a força de cisalhamento à qual cada prego ao longo dos lados C e da parte superior D deve resistir se estiverem uniformemente espaçados de $s = 75$ mm. A viga está sujeita a um cisalhamento $V = 22{,}5$ kN.



Problema 7.84

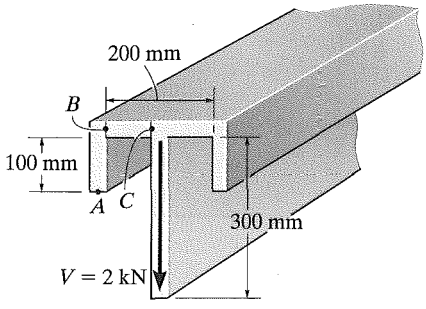
7.85. A viga é composta por quatro tábuas coladas ao longo das linhas de junção. Se a cola puder resistir a 15 kN/m, qual é o cisalhamento vertical máximo V que a viga pode suportar?

7.86. Resolva o Problema 7.85 se a viga sofrer uma rotação de 90° em relação à posição mostrada na figura.



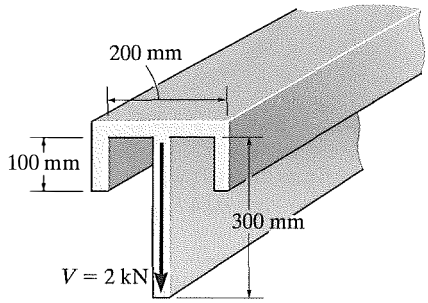
Problemas 7.85/86

7.87. O elemento está sujeito a uma força de cisalhamento $V = 2$ kN. Determine o fluxo de cisalhamento nos pontos A, B e C. A espessura de cada segmento de paredes finas é 15 mm.



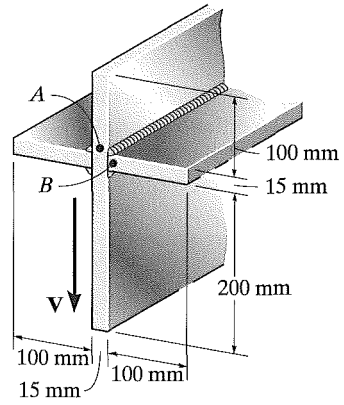
Problema 7.87

***7.88.** O elemento está sujeito a uma força de cisalhamento $V = 2$ kN. Determine o fluxo de cisalhamento máximo no elemento. Todos os segmentos da seção transversal têm 15 mm de espessura.



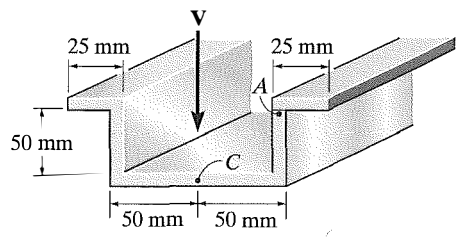
Problema 7.88

7.89. A viga é composta por três chapas finas soldadas, como mostra a figura. Se for submetida a um cisalhamento $V = 48$ kN, determine o fluxo de cisalhamento nos pontos A e B. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima na viga.



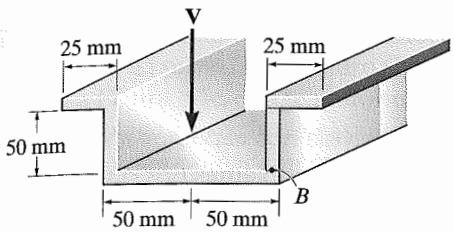
Problema 7.89

7.90. Uma chapa de aço com espessura 6 mm é dobrada para formar a seção de paredes finas mostrada na figura. Se for submetida a uma força de cisalhamento $V = 1{,}25$ kN, determine a tensão de cisalhamento nos pontos A e C. Indique os resultados nos elementos de volume localizados nesses pontos.



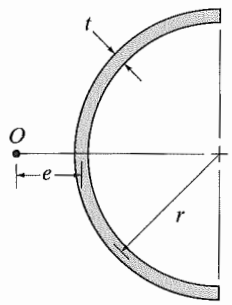
Problema 7.90

7.91. Uma chapa de aço de espessura 6 mm é dobrada para formar a seção de paredes finas mostrada na figura. Se for submetida a uma força de cisalhamento $V = 1{,}25$ kN, determine a tensão de cisalhamento no ponto B.



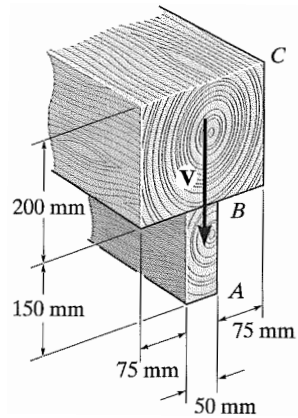
Problema 7.91

***7.92.** Determine a localização e do centro de cisalhamento (ponto O) para o elemento de paredes finas que tem a seção transversal mostrada na figura.



Problema 7.92

7.93. Faça um rascunho da intensidade da distribuição da tensão de cisalhamento que age na área da seção transversal da viga e determine a força de cisalhamento resultante que age no segmento AB. O cisalhamento que age na seção é $V = 175$ kN. Mostre que $I_{NA} = 340{,}82(10^6)$ mm^4.



Problema 7.93

8 Cargas combinadas

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Este capítulo serve como revisão da análise de tensão que foi desenvolvida nos capítulos anteriores referentes a carga axial, torção, flexão e cisalhamento. Discutiremos a solução de problemas nos quais várias dessas cargas ocorrem simultaneamente sobre a seção transversal de um elemento. Entretanto, antes disso, o capítulo começa com uma análise da tensão desenvolvida em vasos de pressão de paredes finas.

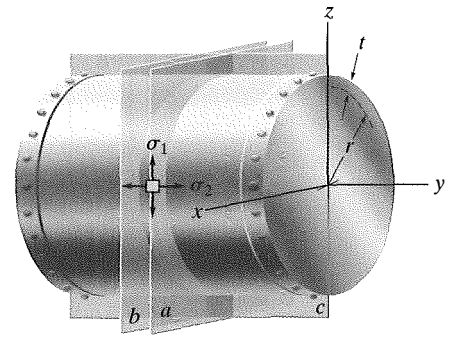
8.1 Vasos de pressão de paredes finas

Vasos cilíndricos ou esféricos são muito usados na indústria como caldeiras, tanques ou reservatórios. Quando estão sob pressão, o material de que são feitos é submetido a cargas em todas as direções. Mesmo que seja esse o caso, o vaso de pressão pode ser analisado de uma maneira mais simples, contanto que tenha paredes finas. Em geral, "***paredes finas***" refere-se a um vaso para o qual a relação raio interno–espessura da parede tem valor igual ou superior a 10 ($r/t \geq 10$). Especificamente, quando $r/t = 10$, os resultados de uma análise de parede fina preverão uma tensão aproximadamente 4% *menor* que a tensão máxima real no vaso. Para relações maiores, esse erro será até menor.

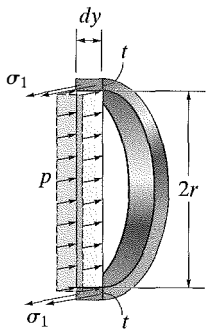
Quando a parede do vaso é "fina," a variação da distribuição de tensão pela sua espessura não será significativa, portanto consideraremos que ela é *uniforme* ou *constante.* Adotada essa premissa, analisaremos, agora, o estado de tensão em vasos de pressão de paredes finas cilíndricos e esféricos. Em ambos os casos, entende-se que a pressão no vaso é a *pressão manométrica*, visto que ela mede a pressão *acima* da pressão atmosférica que consideramos existir dentro e fora da parede do vaso.

Vaso cilíndricos. Considere o vaso cilíndrico com parede de espessura t e raio interno r como mostra a Figura 8.1a. A pressão manométrica p é desenvolvida no interior do vaso por um gás ou fluido nele contido, cujo peso consideramos insignificante. Devido à uniformidade dessa carga, um elemento do vaso que esteja afastado o suficiente das extremidades e orientado como mostra a figura é submetido a tensões normais σ_1 na **direção *circunferencial ou do aro*** e σ_2 no ***sentido longitudinal ou axial.*** Ambas essas componentes da tensão exercem tração sobre o material. Queremos determinar o valor de cada uma dessas componentes em termos da geometria do vaso e de sua pressão interna. Para isto, temos de usar o método das seções e aplicar as equações de equilíbrio de força.

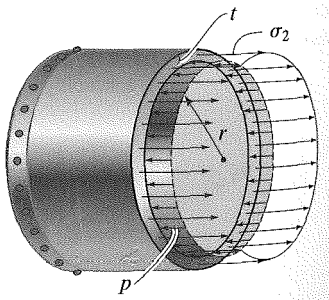
Para a tensão circunferencial (ou de aro), considere que o vaso é secionado pelos planos *a*, *b* e *c*. Um diagrama de corpo livre do segmento posterior juntamente com o gás ou fluido contido no vaso é mostrado na Figura 8.1b. Aqui são mostradas apenas as cargas na direção x. Elas são desenvolvidas pela tensão circunferencial uniforme σ_1 que age em toda a parede do vaso e pela pressão que age na face vertical do gás ou fluido secionado. Para equilíbrio na direção x, exige-se



(a)



(b)



(c)

Figura 8.1

$$\Sigma F_x = 0; \qquad 2[\sigma_1(t\,dy)] - p(2r\,dy) = 0$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{pr}{t}} \tag{8.1}$$

Para obter a tensão longitudinal σ_2, consideraremos a porção esquerda da seção b do cilindro (Figura 8.1a). Como mostra a Figura 8.1c, σ_2 age uniformemente em toda a parede, e p age na seção do gás ou fluido. Visto que o raio médio é aproximadamente igual ao raio interno do vaso, o equilíbrio na direção y requer

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{pr}{2t}} \tag{8.2}$$

Nessas equações,

σ_1, σ_2 = tensão normal nas direções circunferencial e longitudinal, respectivamente. Consideramos que cada uma delas é *constante* em toda a parede do cilindro e que cada uma submete o material à tração

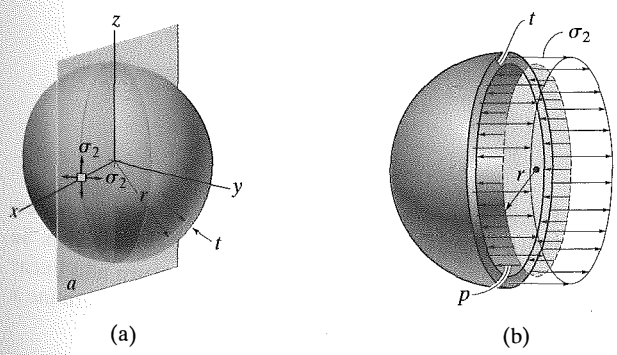
p = pressão manométrica interna desenvolvida pelo gás ou fluido

r = raio interno do cilindro

t = espessura da parede ($r/t \geq 10$)

Comparando as equações 8.1 e 8.2, devemos observar que a tensão circunferencial ou de aro é duas vezes maior do que a tensão longitudinal ou axial. Por consequência, quando vasos de pressão cilíndricos são fabricados com chapas laminadas, as juntas longitudinais devem ser projetadas para suportar duas vezes mais tensão do que as juntas circunferenciais.

Vasos esféricos. Podemos analisar um vaso de pressão esférico de maneira semelhante. Por exemplo, considere que o vaso tem espessura de parede t e raio interno r e que está sujeito a uma pressão manométrica interna p (Figura 8.2a). Se o vaso for secionado pela metade usando a seção a, o diagrama de corpo livre resultante é o mostrado na Figura 8.2b. Como no vaso cilíndrico, o equilíbrio na direção y requer



(a) (b)

Figura 8.2

$$\Sigma F_y = 0; \qquad \sigma_2(2\pi rt) - p(\pi r^2) = 0$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{pr}{2t}} \tag{8.3}$$

Por comparação, esse é o *mesmo resultado* obtido para a tensão longitudinal no vaso de pressão cilíndrico. Além do mais, pela análise, essa tensão será a *mesma independentemente* da orientação do diagrama de corpo livre hemisférico. Por consequência, um elemento do material está sujeito ao estado de tensão mostrado na Figura 8.2a.

Essa análise indica que um elemento de material tomado de um vaso de pressão cilíndrico ou esférico está sujeito à ***tensão biaxial***, isto é, tensão normal existente em duas direções apenas. Na verdade, o material do vaso também está sujeito a uma ***tensão radial***, σ_3, que age ao longo de uma linha radial. Essa tensão tem um valor máximo igual à pressão p na parede interna e diminui até zero à medida que atravessa a parede e alcança a superfície externa do vaso, visto que a pressão manométrica nesse lugar é nula. Entretanto, para vasos de paredes finas, *ignoraremos* a componente da tensão radial, uma vez que a premissa limitadora que adotamos, $r/t = 10$, resulta em σ_2 e σ_1 como sendo, respectivamente, 5 e 10 vezes *mais altas* do que a tensão radial máxima, $(\sigma_3)_{máx} = p$. Por último, entenda que as fórmulas que acabamos de deduzir só devem ser usadas para vasos sujeitos a uma pressão manométrica interna. Se o vaso estiver sujeito a uma pressão externa, a tensão de compressão desenvolvida no interior da parede fina pode tornar o vaso instável e sujeito a falhas.

EXEMPLO 8.1

Um vaso de pressão cilíndrico tem diâmetro interno de 1,2 m e espessura de 12 mm. Determine a pressão interna máxima que ele pode suportar de modo que nem a componente de tensão circunferencial nem a de tensão longitudinal ultrapasse 140 MPa. Sob as mesmas condições, qual é a pressão interna máxima que um vaso esférico de tamanho semelhante pode sustentar?

SOLUÇÃO

Vaso de pressão cilíndrico. A tensão máxima ocorre na direção circunferencial. Pela Equação 8.1, temos

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}; \qquad 140\ \text{N/mm}^2 = \frac{p(600\ \text{mm})}{12\ \text{mm}}$$

$$p = 2{,}8\ \text{N/mm}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que, quando essa pressão é alcançada, a Equação 8.2 mostra que a tensão na direção longitudinal será $\sigma_2 = 1/2\ (140\ \text{MPa}) = 70\ \text{MPa}$. Além do mais, a *tensão máxima* na *direção radial* ocorre no material da parede interna do vaso e é $(\sigma_3)_{máx} = p = 2{,}8\ \text{MPa}$. Esse valor é 50 vezes menor que a tensão circunferencial (140 MPa) e, como afirmamos antes, seus efeitos serão desprezados.

Vaso esférico. Aqui, a tensão máxima ocorre em qualquer das duas direções perpendiculares em um elemento do vaso (Figura 8.2a). Pela Equação 8.3, temos

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}; \qquad 140\ \text{N/mm}^2 = \frac{p(600\ \text{mm})}{2(12\ \text{mm})}$$

$$p = 5{,}6\ \text{N/mm}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

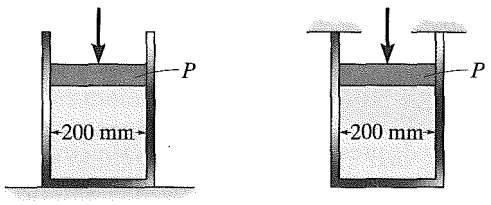
OBSERVAÇÃO: Embora seja mais difícil de fabricar, o vaso de pressão esférico suportará duas vezes mais pressão do que um vaso cilíndrico.

PROBLEMAS

8.1. Um tanque esférico de gás tem raio interno $r = 1{,}5$ m. Se for submetido a uma pressão interna $p = 300$ kPa, determine a espessura exigida para que a tensão normal máxima não ultrapasse 12 MPa.

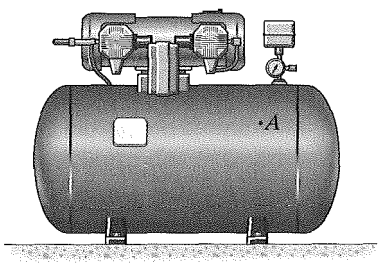
8.2. Um tanque esférico pressurizado deverá ser fabricado com aço de 12 mm de espessura. Se for submetido a uma pressão interna $p = 1{,}4$ MPa, determine seu raio externo para que a tensão normal máxima não ultrapasse 105 MPa.

8.3. A figura mostra duas alternativas para apoiar o cilindro de parede fina. Determine o estado de tensão na parede do cilindro para ambas as alternativas, se o pistão P provocar uma pressão interna de 0,5 MPa. A parede tem espessura de 6 mm, e o diâmetro interno do cilindro é 200 mm.



Problema 8.3

*8.4. O tanque do compressor de ar está sujeito a uma pressão interna de 0,63 MPa. Se o diâmetro interno do tanque for 550 mm e a espessura da parede for 6 mm, determine as componentes da tensão que agem no ponto A. Desenhe um elemento de volume do material nesse ponto e mostre os resultados no elemento.

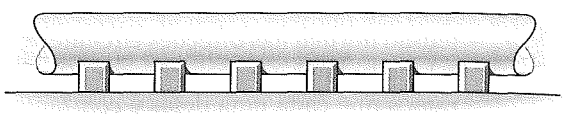


Problema 8.4

8.5. O tubo de extremidade aberta tem parede de espessura 2 mm e diâmetro interno 40 mm. Calcule a pressão que o gelo exerceu na parede interna do tubo para provocar a ruptura mostrada na figura. A tensão máxima que o material pode suportar na temperatura de congelamento é $\sigma_{máx} = 360$ MPa. Mostre como a tensão age sobre um pequeno elemento de material imediatamente antes de o tubo falhar.

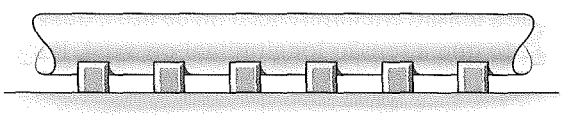
Problema 8.5

8.6. O tubo de extremidade aberta feito de cloreto de polivinil tem diâmetro interno de 100 mm e espessura de 5 mm. Se transportar água corrente à pressão de 0,42 MPa, determine o estado de tensão nas paredes do tubo.



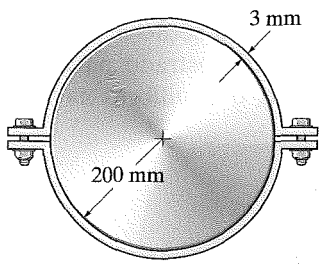
Problema 8.6

8.7. Se o fluxo de água no interior do tubo do Problema 8.6 for interrompido devido ao fechamento de uma válvula, determine o estado de tensão nas paredes do tubo. Despreze o peso da água. Considere que os apoios exercem somente forças verticais sobre o tubo.



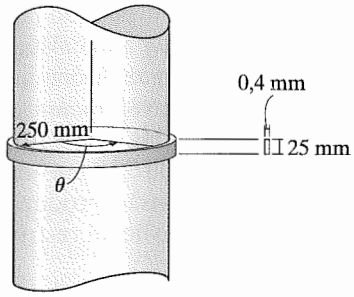
Problema 8.7

*8.8. A cinta de aço A-36 tem 50 mm de largura e está presa ao redor do cilindro rígido liso. Se os parafusos forem apertados de modo que a tração neles seja 2 kN, determine a tensão normal na cinta, a pressão exercida sobre o cilindro e a distância até onde metade da cinta estica.



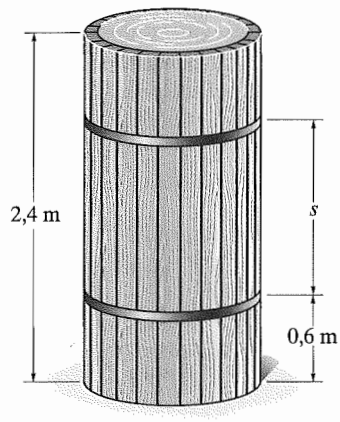
Problema 8.8

8.9. Inicialmente, a cinta de aço inoxidável 304 está perfeitamente ajustada em torno do cilindro rígido liso. Se ela for submetida a uma queda de temperatura não linear $\Delta T = 12\ \text{sen}^2\ \theta°\text{C}$, onde θ é dado em radianos, determine a tensão circunferencial na cinta.



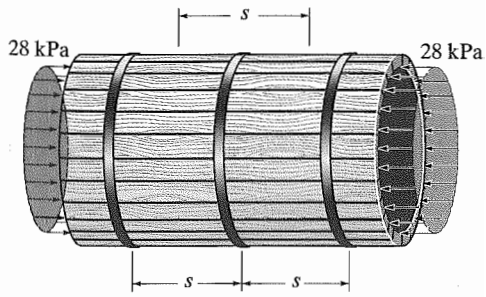
Problema 8.9

8.10. O barril está cheio de água, até em cima. Determine a distância s entre o aro superior e o aro inferior de modo que a força de tração em cada aro seja a mesma. Determine também a força em cada aro. O barril tem diâmetro interno de 1,2 m. Despreze a espessura da parede. Considere que somente os aros resistem à pressão da água. *Observação*: A água desenvolve pressão no barril de acordo com a lei de Pascal, $p = (900z)$ Pa, onde z é a profundidade da água em relação à superfície, medida em metros.



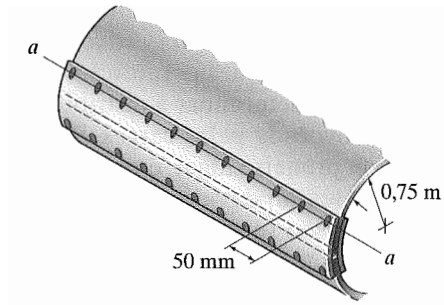
Problema 8.10

8.11. Um tubo de madeira com diâmetro interno de 0,9 m é atado com aros de aço cuja área de seção transversal é 125 mm². Se a tensão admissível para os aros for $\sigma_{adm} = 84$ MPa, determine o espaçamento máximo s dos aros ao longo da seção do tubo de modo que este possa resistir a uma pressão manométrica interna de 28 kPa. Considere que cada aro suporta a pressão do carregamento que age ao longo do comprimento s do tubo.



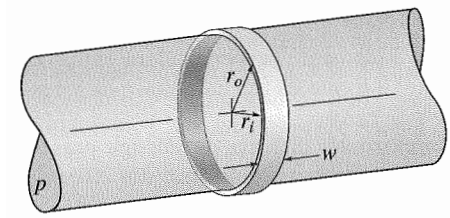
Problema 8.11

*__8.12.__ Uma caldeira é feita de chapas de aço de 8 mm de espessura ligadas nas extremidades por uma junta de topo que consiste em duas chapas de cobertura de 8 mm e rebites com diâmetro de 10 mm e espaçados de 50 mm, como mostra a figura. Se a pressão do vapor no interior da caldeira for 1,35 MPa, determine: (a) a tensão circunferencial na chapa da caldeira separada da costura, (b) a tensão circunferencial na chapa de cobertura externa ao longo da linha de rebites a–a e (c) a tensão de cisalhamento nos rebites.



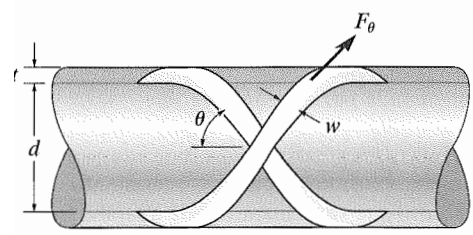
Problema 8.12

8.13. O anel cujas dimensões são mostradas na figura é colocado sobre uma membrana flexível bombeada com uma pressão p. Determine a mudança no raio interno do anel após a aplicação dessa pressão. O módulo de elasticidade para o anel é E.



Problema 8.13

8.14. Um vaso de pressão com extremidades fechadas é fabricado com filamentos de vidro trançados sobre um mandril de modo que, no final, a espessura da parede t do vaso é composta inteiramente de filamento e adesivo epóxi, como mostra a figura. Considere um segmento do vaso de largura w trançado a um ângulo θ. Se o vaso for submetido a uma pressão interna p, mostre que a força no segmento é $F\theta = \sigma_0 wt$, onde σ_0 é a tensão nos filamentos. Além disso, mostre que as tensões nas direções circunferencial e longitudinal são $\sigma_h = \sigma_0 \operatorname{sen}^2 \theta$ e $\sigma_l = \sigma_0 \cos^2 \theta$, respectivamente. A que ângulo θ (ângulo de trançamento ótimo) os filamentos teriam de ser trançados para obterem-se tensões circunferencial e longitudinal equivalentes?



Problema 8.14

8.2 Estado de tensão causado por cargas combinadas

Nos capítulos anteriores, desenvolvemos métodos para determinar as distribuições de tensão em um elemento submetido a uma força axial interna, a uma força de cisalhamento, a um momento fletor ou a um momento de torção. Entretanto, na maioria das vezes, a seção transversal de um elemento está sujeita a vários desses tipos de cargas *simultaneamente*, e o resultado é que o método da superposição, se aplicável, pode ser usado para determinar a distribuição da tensão *resultante* provocada pelas cargas. Para aplicar a superposição, em primeiro lugar, é preciso determinar a distribuição de tensão devido a cada *carga* e, então, essas distribuições são superpostas para determinar a distribuição de tensão resultante. Como afirmamos na Seção 4.3, o princípio da superposição pode ser usado para essa finalidade contanto que exista uma *relação linear* entre a *tensão* e as *cargas*. Além disso, a geometria do elemento *não* deve sofrer *mudança significativa* quando as cargas são aplicadas. Isso é necessário para assegurar que a tensão produzida por uma carga não esteja relacionada com a tensão produzida por qualquer outra carga. A discussão ficará restrita ao cumprimento desses dois critérios.

Os problemas nesta seção, que envolvem cargas combinadas, servem como uma *revisão* básica da aplicação de muitas das equações de tensão importantes mencionadas anteriormente. É necessário compreender muito bem como essas equações são aplicadas, como indicado nos capítulos anteriores, se quisermos resolver com sucesso os problemas apresentados no final desta seção. Os exemplos a seguir devem ser cuidadosamente estudados antes de passarmos para a resolução dos problemas.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento nos dá um modo geral para definir as componentes da tensão normal e da tensão de cisalhamento em um ponto de um elemento quando ele é submetido a vários tipos diferentes de cargas simultaneamente. Consideramos que o material é homogêneo e se comporta de um modo linear elástico. Além disso, o princípio de Saint-Venant exige que o ponto onde a tensão deve ser determinada esteja bem distante de quaisquer descontinuidades na seção transversal ou de pontos de carga aplicada.

Carga interna

- Secione o elemento perpendicularmente a seu eixo no ponto onde a tensão deve ser determinada e obtenha as componentes internas da força normal e da força de cisalhamento resultantes, bem como as componentes dos momentos fletor e de torção.
- As componentes da força devem agir passando pelo *centroide* da seção transversal, e as componentes do momento devem ser calculadas em torno dos *eixos do centroide,* os quais representam os eixos principais de inércia para a seção transversal.

Tensão normal média

- Calcule a componente da tensão associada a *cada* carga interna. Para cada caso, represente o efeito como uma distribuição de tensão que age sobre toda a área da seção transversal ou mostre a tensão sobre um elemento do material localizado em um ponto específico na seção transversal.

Força normal

- A força normal interna é desenvolvida por uma distribuição de tensão normal uniforme determinada por $\sigma = P/A$.

Força de cisalhamento

- A força de cisalhamento interna em um elemento submetido a flexão é desenvolvida por uma distribuição da tensão de cisalhamento determinada pela fórmula do cisalhamento, $\tau = VQ/It$. Todavia, deve-se tomar um cuidado especial ao aplicar essa equação, como observamos na Seção 7.3.

Momento fletor

- Para *elementos retos,* o momento fletor interno é desenvolvido por uma distribuição de tensão normal que varia linearmente de zero no eixo neutro a máxima no contorno externo do elemento. A distribuição de tensão é determinada pela fórmula da flexão, $\sigma = -My/I$. Se o elemento for *curvo,* a distribuição de tensão é não linear e é determinada por $\sigma = My/[Ae(R - y)]$.

Momento de torção

- Para eixos e tubos circulares, o momento de torção interno é desenvolvido por uma distribuição da tensão de cisalhamento que varia linearmente da linha central do eixo até um máximo no contorno externo do eixo. A distribuição da tensão de cisalhamento é determinada pela fórmula da torção, $\tau = T\rho/J$. Se o elemento for um tubo fechado de parede fina, use $\sigma = T/2A_m t$.

Vasos de pressão de parede fina

- Se o vaso de pressão for cilíndrico de parede fina, a pressão interna p provocará um estado de tensão biaxial no material de modo que a componente da tensão de aro ou circunferencial é $\sigma_1 = pr/t$ e a componente da tensão longitudinal é $\sigma_2 = pr/2t$. Se o vaso de pressão for esférico de parede fina, então o estado de tensão biaxial é representado por duas componentes equivalentes, cada uma com valor $\sigma_2 = pr/2t$.

Superposição

- Uma vez calculadas as componentes da tensão normal e da tensão de cisalhamento para cada carga, use o princípio da superposição e determine as componentes da tensão normal e da tensão de cisalhamento resultantes.
- Represente os resultados em um elemento de material localizado no ponto ou mostre os resultados como uma distribuição de tensão que age sobre a área da seção transversal do elemento.

EXEMPLO 8.2

Uma força de 15.000 N é aplicada à borda do elemento mostrado na Figura 8.3a. Despreze o peso do elemento e determine o estado de tensão nos pontos B e C.

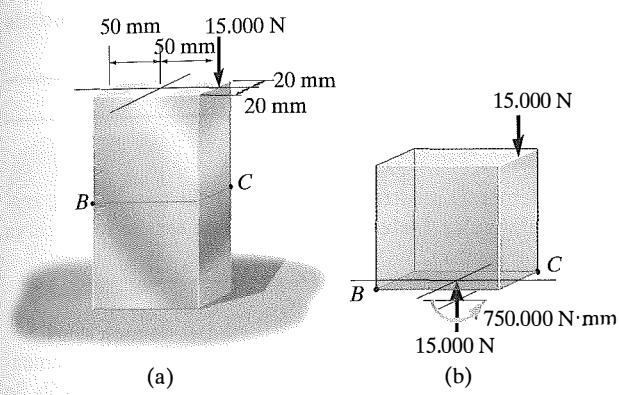


Figura 8.3

SOLUÇÃO

Cargas internas. O elemento é secionado passando por B e C. Para equilíbrio na seção, é preciso haver uma força axial de 15.000 N agindo no centroide e um momento fletor de 750.000 N·mm em torno do eixo do centroide ou principal (Figura 8.3b).

Componentes da tensão.

Força normal. A distribuição da tensão normal uniforme devida à força normal é mostrada na Figura 8.3c. Aqui,

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{15.000\ \text{N}}{(100\ \text{mm})(40\ \text{mm})} = 3{,}75\ \text{N/mm}^2 = 3{,}75\ \text{MPa}$$

Momento fletor. A distribuição da tensão normal devida ao momento fletor é mostrada na Figura 8.3d. A tensão máxima é

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{750.000\ \text{N·mm}(50\ \text{mm})}{[\frac{1}{12}(40\ \text{mm})(100\ \text{mm})^3]}$$

$$= 11{,}25\ \text{N/mm}^2 = 11{,}25\ \text{MPa}$$

Superposição. Se as distribuições da tensão normais acima forem somadas algebricamente, a distribuição da tensão resultante é a mostrada na Figura 8.3e. Embora aqui isso não seja necessário, a localização da linha de tensão nula pode ser determinada por cálculo proporcional de triângulos; isto é,

$$\frac{7{,}5\ \text{MPa}}{x} = \frac{15\ \text{MPa}}{(100\ \text{mm} - x)}$$

$$x = 33{,}3\ \text{mm}$$

Elementos de material em B e C estão submetidos somente a tensão normal ou *tensão uniaxial*, como mostram as figuras 8.3f e 8.3g. Por consequência,

$\sigma_B = 7{,}5\ \text{MPa}$ (tração) *Resposta*

$\sigma_C = 15\ \text{MPa}$ (compressão) *Resposta*

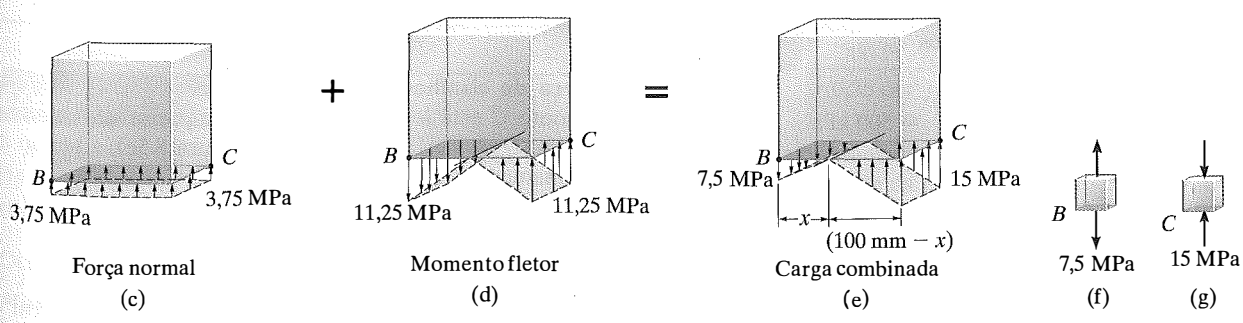


Figura 8.3 (cont.)

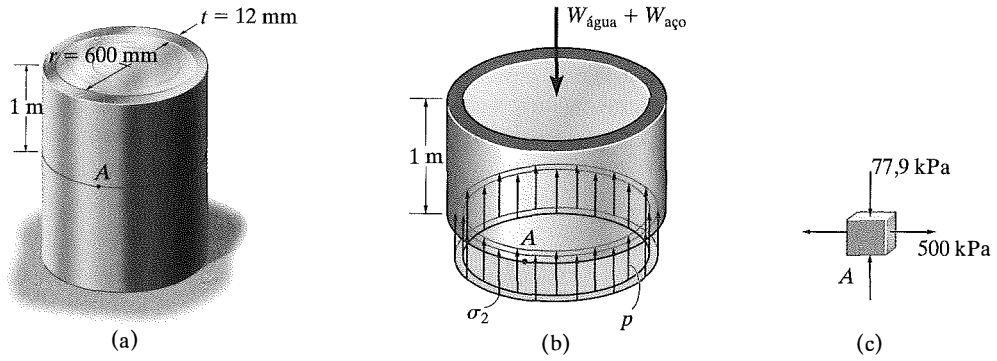


Figura 8.4

EXEMPLO 8.3

O tanque na Figura 8.4a tem raio interno de 600 mm e espessura de 12 mm. Está cheio até em cima com água cujo peso específico é $\gamma_{água} = 10$ kN/m³. Se o tanque for feito de aço com peso específico $\gamma_{aço} = 78$ kN/m³, determine o estado de tensão no ponto A. A parte superior do tanque é aberta.

SOLUÇÃO

Cargas internas. O diagrama de corpo livre da seção do tanque e da água acima do ponto A é mostrado na Figura 8.4b. Observe que o peso da água é suportado pela superfície da água imediatamente *abaixo* da seção e *não* pelas paredes do tanque. Na direção vertical, as paredes simplesmente apoiam o peso do tanque. Esse peso é

$$W_{aço} = \gamma_{aço} V_{aço} = (78 \text{ kN/m}^3)\left[\pi\left(\frac{612}{1.000}\text{m}\right)^2 - \pi\left(\frac{600}{1.000}\text{m}\right)^2\right](1 \text{ m}) = 3{,}56 \text{ kN}$$

A tensão na direção circunferencial é desenvolvida pela pressão da água no nível A. Para obter essa pressão, devemos usar a *lei* de *Pascal,* segundo a qual a pressão em um ponto localizado a uma profundidade z na água é $p = \gamma_{água} z$. Por consequência, a pressão no tanque no nível A é

$$p = \gamma_{água} z = (10 \text{ kN/m}^3)(1 \text{ m}) = 10 \text{ kN/m}^2 = 10 \text{ kPa}$$

Componentes da tensão.

Tensão circunferencial. Aplicando a Equação 8.1, usando o raio interno $r = 600$ mm, temos

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{10 \text{ kN/m}^2\,(\frac{600}{1.000}\text{ m})}{(\frac{12}{1.000}\text{ m})} = 500 \text{ kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Tensão longitudinal. Visto que o peso do tanque é suportado uniformemente pelas paredes, temos

$$\sigma_2 = \frac{W_{aço}}{A_{aço}} = \frac{3{,}56 \text{ kN}}{\pi[(\frac{612}{1.000}\text{ m})^2 - (\frac{600}{1.000}\text{ m})^2]} = 77{,}9 \text{ kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: A Equação 8.2, $\sigma_2 = pr/2t$, *não se aplica* aqui, visto que o tanque é aberto na parte superior e, portanto, como já dissemos, a água não pode desenvolver uma carga nas paredes na direção longitudinal.

Portanto, o ponto A está sujeito à tensão biaxial mostrada na Figura 8.4c.

EXEMPLO 8.4

O elemento mostrado na Figura 8.5a tem seção transversal retangular. Determine o estado de tensão que a carga produz no ponto C.

SOLUÇÃO

Cargas internas. As reações dos apoios sobre o elemento foram determinadas e são mostradas na Figura 8.5b. Se considerarmos o segmento AC da esquerda do elemento (Figura 8.5c), as cargas internas resultantes na seção consistem em uma força normal, uma força de cisalhamento e um momento fletor. Resolvendo,

$$N = 16{,}45 \text{ kN} \qquad V = 21{,}93 \text{ kN} \qquad M = 32{,}89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Componentes da tensão.

Força normal. A distribuição uniforme da tensão normal que age sobre a seção transversal é produzida pela força normal (Figura 8.5d). No ponto C,

$$\sigma_C = \frac{P}{A} = \frac{16{,}45 \text{ kN}}{(0{,}050 \text{ m})(0{,}250 \text{ m})} = 1{,}32 \text{ MPa}$$

Força de cisalhamento. Aqui, a área $A' = 0$, visto que o ponto C está localizado na parte superior do elemento. Assim, $Q = \bar{y}'A' = 0$ e, para C (Figura 8.5e), a tensão de cisalhamento vale

$$\tau_C = 0$$

Momento fletor. O ponto C está localizado a $y = c = 125$ mm do eixo neutro, portanto, a tensão normal em C (Figura 8.5f) é

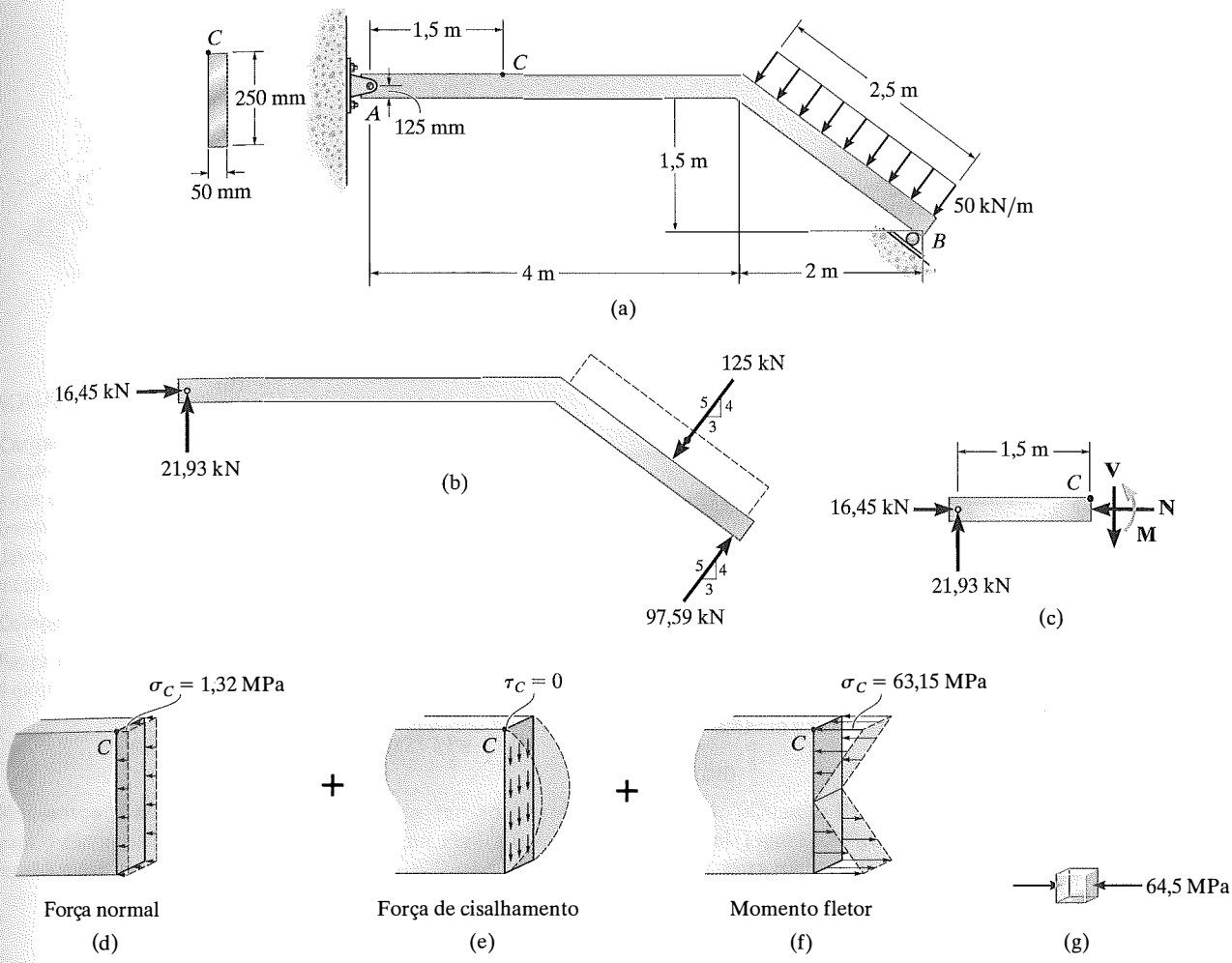


Figura 8.5

$$\sigma_C = \frac{Mc}{I} = \frac{(32{,}89\ \text{kN}\cdot\text{m})(0{,}125\ \text{m})}{\left[\frac{1}{12}(0{,}050\ \text{m})(0{,}250)^3\right]} = 63{,}16\ \text{MPa}$$

Superposição. A tensão de cisalhamento é nula. A soma das tensões normais determinadas acima dá uma tensão de compressão em C com valor de

$$\sigma_C = 1{,}32\ \text{MPa} + 63{,}16\ \text{MPa} = 64{,}5\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Este resultado, agindo sobre um elemento em C, é mostrado na Figura 8.5g.

EXEMPLO 8.5

A haste maciça mostrada na Figura 8.6a tem raio de 0,75 cm. Se estiver sujeita à carga mostrada, determine o estado de tensão no ponto A.

SOLUÇÃO

Cargas internas. A haste é secionada no ponto A. Pelo diagrama de corpo livre do segmento AB (Figura 8.6b), as cargas internas resultantes podem ser determinadas pelas seis equações de equilíbrio. Verifique esses resultados. A força normal (500 N) e a força de cisalhamento (800 N) devem agir no centroide da seção transversal, e as componentes do momento fletor (8.000 N · cm e 7.000 N · cm) são aplicadas em torno dos eixos do centroide (principais). Para "visualizar" melhor as distribuições da tensão devidas a cada uma dessas cargas, consideraremos as *resultantes iguais, mas opostas* que agem em AC (Figura 8.6c).

Componentes da tensão.

Força normal. A distribuição da tensão normal é mostrada na Figura 8.6d. Para o ponto A, temos

$$\sigma_A = \frac{P}{A} = \frac{500\ \text{N}}{\pi(0{,}75\ \text{cm}^2)} = 283\ \text{N/cm}^2 = 2{,}83\ \text{MPa}$$

Força de cisalhamento. A distribuição da tensão de cisalhamento é mostrada na Figura 8.6e. Para o ponto A, Q é determinada pela área *semicircular* sombreada. Pela tabela apresentada no final deste livro, temos

$$Q = \bar{y}'A' = \frac{4(0{,}75\ \text{cm})}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\pi(0{,}75\ \text{cm}^2)\right] = 0{,}2831\ \text{cm}^3$$

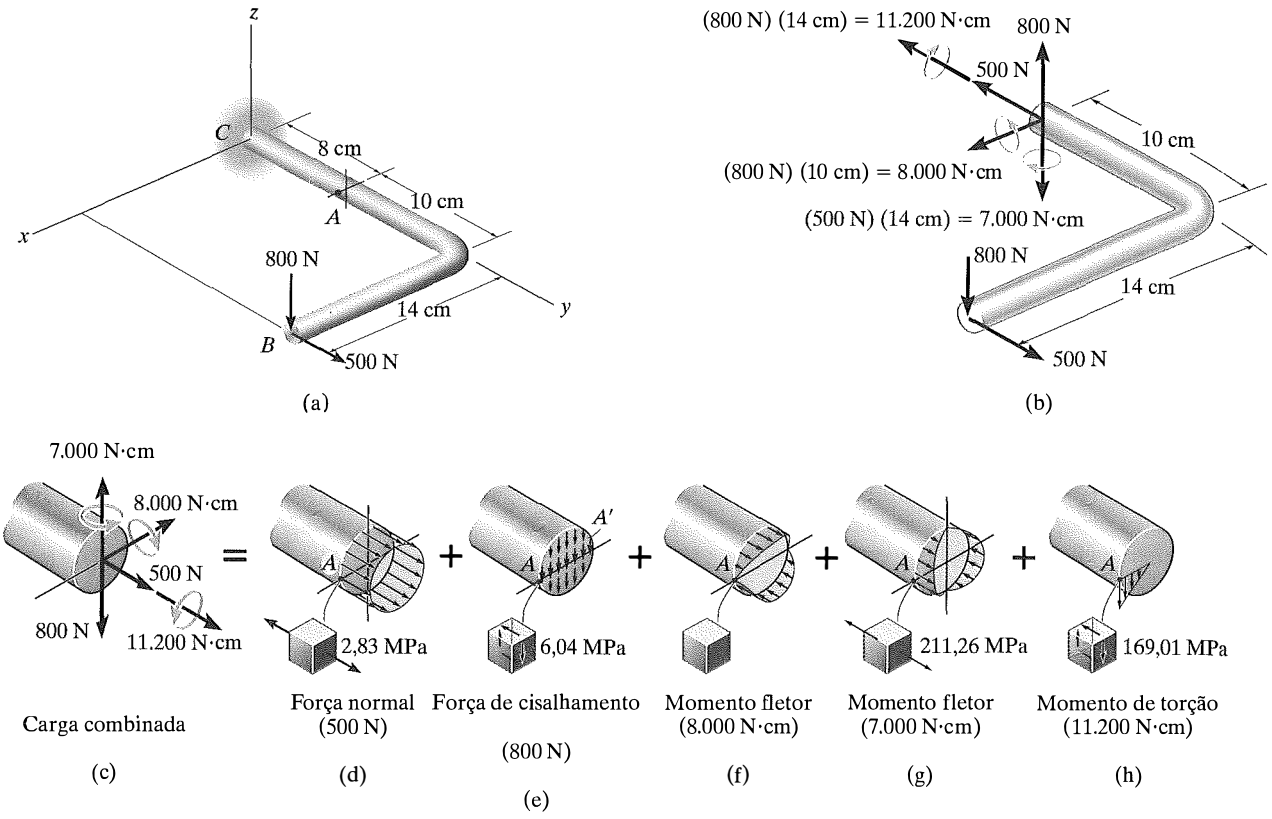


Figura 8.6

de modo que

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{800\ \text{N}(0{,}2813\ \text{cm}^3)}{[\frac{1}{4}\pi(0{,}75\ \text{cm})^4] - (0{,}75\ \text{cm})} =$$

$$604\ \text{N/cm}^2 = 6{,}04\ \text{MPa}$$

Momentos fletores. Para a componente de 8.000 N · cm, o ponto A encontra-se no eixo neutro (Figura 8.6f), portanto, a tensão normal é

$$\sigma_A = 0$$

Para o momento de 7.000 N · cm, $c = 0{,}75$ cm, portanto, a tensão normal no ponto A (Figura 8.6g) é

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{7.000\ \text{N} \cdot \text{cm}(0{,}75\ \text{cm})}{[\frac{1}{4}\pi(0{,}75\ \text{cm})^4]} =$$

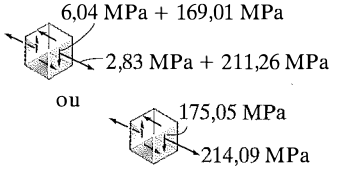
$$21.126\ \text{N/cm}^2 = 211{,}26\ \text{MPa}$$

Momento de torção. No ponto A, $\rho_A = c = 0{,}75$ cm (Figura 8.6h). Assim, a tensão de cisalhamento é

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{11.200\ \text{N} \cdot \text{cm}(0{,}75\ \text{cm})}{[\frac{1}{2}\pi(0{,}75\ \text{cm})^4]} =$$

$$16{,}901\ \text{N/cm}^2 = 169{,}01\ \text{MPa}$$

Superposição. Quando os resultados acima são superpostos, vemos que um elemento de material em A está sujeito às componentes da tensão normal, bem como da tensão de cisalhamento (Figura 8.6i).

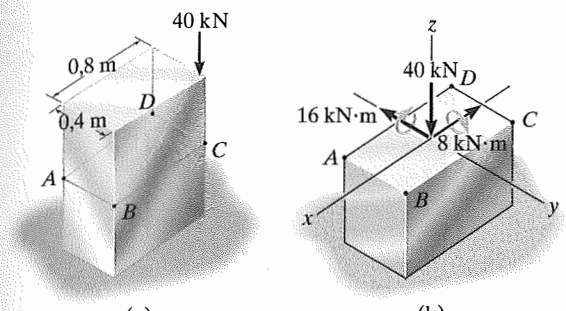


(i)

Figura 8.6 (cont.)

EXEMPLO 8.6

O bloco retangular de peso desprezível mostrado na Figura 8.7a está sujeito a uma força vertical de 40 kN aplicada em seu canto. Determine a distribuição da tensão normal que age sobre uma seção que passa por ABCD.



(a) (b)

Figura 8.7

SOLUÇÃO

Cargas internas. Se considerarmos o equilíbrio do segmento na parte inferior do bloco (Figura 8.7b), vemos que a força de 40 kN deve agir passando pelo centroide da seção transversal, e *duas* componentes do momento fletor também devem agir em torno dos eixos do centroide ou principais de inércia para a seção. Verifique esses resultados.

Componentes da tensão.

Força normal. A distribuição uniforme da tensão normal é mostrada na Figura 8.7c. Temos

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{40\text{ kN}}{(0{,}8\text{ m})(0{,}4\text{ m})} = 125\text{ kPa}$$

Momentos fletores. A distribuição da tensão normal para o momento de 8 kN·m é mostrada na Figura 8.7d. A tensão máxima é

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_x c_y}{I_x} = \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}(0.2\text{ m})}{\left[\frac{1}{12}(0{,}8\text{ m})(0{,}4\text{ m})^3\right]} = 375\text{ kPa}$$

Da mesma forma, para o momento de 16 kN·m, Figura 8.7e, a tensão normal máxima é

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M_y c_x}{I_y} = \frac{16\text{ kN}\cdot\text{m}(0{,}4\text{ m})}{\left[\frac{1}{12}(0{,}4\text{ m})(0{,}8\text{ m})^3\right]} = 375\text{ kPa}$$

Superposição. A tensão normal em cada ponto do canto pode ser determinada por adição algébrica. Considerando que a tensão de tração é positiva, temos

$$\sigma_A = -125\text{ kPa} + 375\text{ kPa} + 375\text{ kPa} = 625\text{ kPa}$$
$$\sigma_B = -125\text{ kPa} - 375\text{ kPa} + 375\text{ kPa} = -125\text{ kPa}$$
$$\sigma_C = -125\text{ kPa} - 375\text{ kPa} - 375\text{ kPa} = -875\text{ kPa}$$
$$\sigma_D = -125\text{ kPa} + 375\text{ kPa} - 375\text{ kPa} = -125\text{ kPa}$$

Visto que as distribuições da tensão devidas ao momento fletor são lineares, a distribuição da tensão resultante também é linear e, portanto, é semelhante à mostrada na Figura 8.7f. A linha de tensão nula pode ser localizada ao longo de cada lado por triângulos proporcionais. Pela figura, exige-se

$$\frac{(0{,}4\text{ m} - e)}{625\text{ kPa}} = \frac{e}{125\text{ kPa}} \quad \text{e} \quad \frac{(0{,}8\text{ m} - h)}{625\text{ kPa}} = \frac{h}{125\text{ kPa}}$$
$$e = 0{,}0667\text{ m} \qquad h = 0{,}133\text{ m}$$

EXEMPLO 8.7

Um bloco retangular tem peso desprezível e está sujeito a uma força vertical **P** (Figura 8.8a). (a) Determine a faixa de valores para a excentricidade e_y da carga ao longo do eixo y, de modo a não provocar nenhuma tensão de tração no bloco. (b) Especifique a região na seção transversal onde **P** pode ser aplicada sem causar uma tensão de tração no bloco.

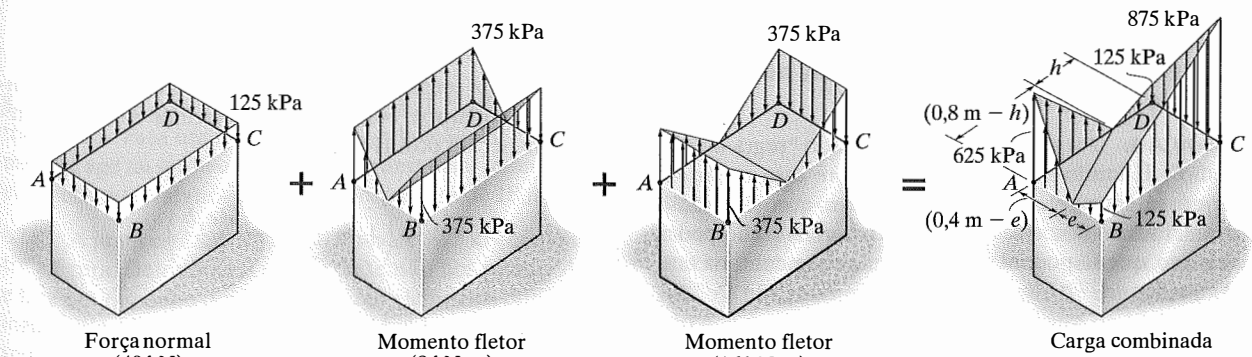
SOLUÇÃO

Parte (a). Quando **P** se desloca para o centroide da seção transversal (Figura 8.8b), é necessário adicionar um conjugado $M_x = Pe_y$ para manter uma carga estaticamente equivalente. A tensão normal combinada em qualquer lugar da coordenada y na seção transversal provocada por essas duas cargas é

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{(Pe_y)y}{I_x} = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{Ae_y y}{I_x}\right)$$

Nesta expressão, o sinal negativo indica tensão de compressão. Para e_y positiva (Figura 8.8a), a *menor* tensão de compressão ocorrerá ao longo da borda AB, onde $y = -h/2$ (Figura 8.8b). (Por inspeção, **P** provoca compressão naquele lugar, mas $\mathbf{M}_x$ causa tração.) Por consequência,

$$\sigma_{\text{mín}} = -\frac{P}{A}\left(1 - \frac{Ae_y h}{2I_x}\right)$$



Força normal (40 kN) (c) | Momento fletor (8 kN·m) (d) | Momento fletor (16 kN·m) (e) | Carga combinada (f)

Figura 8.7 (cont.)

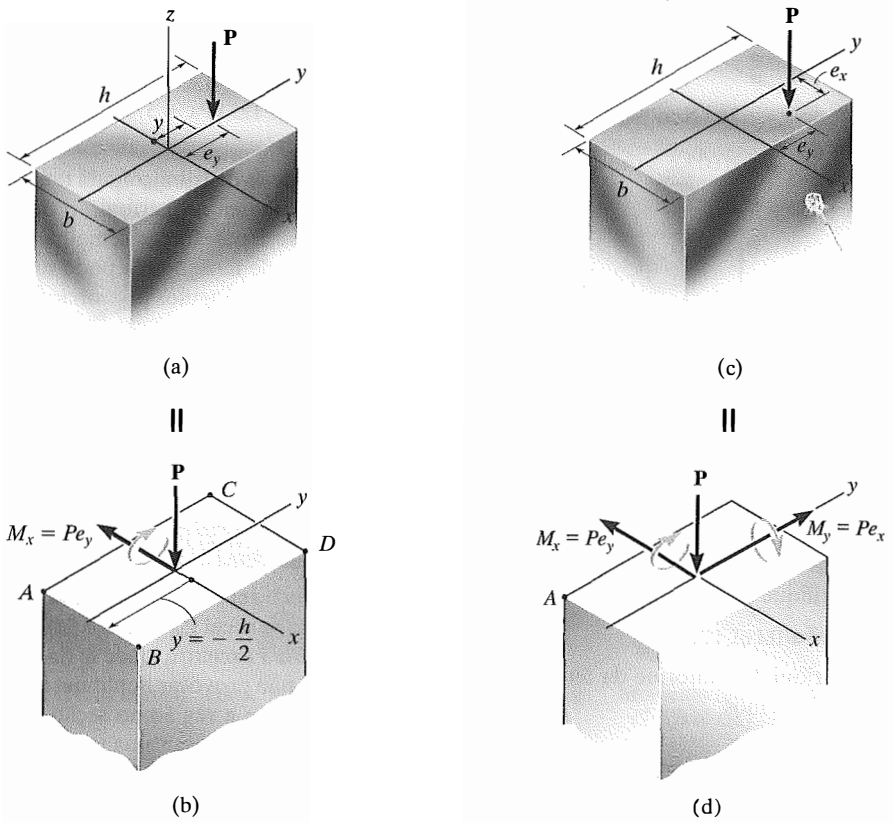


Figura 8.8

Essa tensão permanecerá negativa, isto é, de compressão, contanto que o termo entre parênteses seja positivo, isto é,

$$1 > \frac{Ae_y h}{2I_x}$$

Visto que $A = bh$ e $I_x = 1/12\ bh^3$, então

$$1 > \frac{6e_y}{h}$$

ou

$$e_y < \frac{1}{6}h \qquad \textit{Resposta}$$

Em outras palavras, se $-1/6\ h \leq e_y \leq 1/6\ h$, a tensão no bloco ao longo da borda AB ou CD será nula ou permanecerá como tensão *de compressão.*

OBSERVAÇÃO: Às vezes, isso é denominado "regra do terço médio". É muito importante ter sempre essa regra em mente ao se carregarem colunas ou arcos que têm seção transversal retangular e são feitos de materiais como pedra ou concreto, que só podem suportar pouca ou nenhuma tensão de tração.

Parte (b). Podemos estender a análise que fizemos na parte (a) em duas direções, considerando que **P** age no quadrante positivo do plano x–y (Figura 8.8c). A carga estática equivalente quando **P** age no centroide é mostrada na Figura 8.8d.

Em qualquer coordenada x, y na seção transversal, a tensão normal combinada devida às cargas normal e de flexão é

$$\sigma = -\frac{P}{A} - \frac{Pe_y y}{I_x} - \frac{Pe_x x}{I_y} = -\frac{P}{A}\left(1 + \frac{Ae_y y}{I_x} + \frac{Ae_x x}{I_y}\right)$$

Por inspeção (Figura 8.8d), os momentos criam tensão de tração no ponto A, e a força normal cria uma tensão de compressão nesse mesmo lugar. Por consequência, a menor tensão de compressão ocorrerá no ponto A, para o qual $x = -b/2$ e $y = -h/2$. Assim,

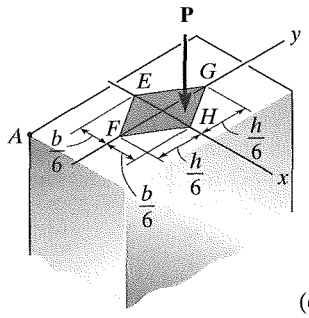
$$\sigma_A = -\frac{P}{A}\left(1 - \frac{Ae_y h}{2I_x} - \frac{Ae_x b}{2I_y}\right)$$

Como antes, a tensão normal continua negativa ou de compressão no ponto A, contanto que os termos entre parênteses permaneçam positivos, isto é,

$$0 < \left(1 - \frac{Ae_y h}{2I_x} - \frac{Ae_x b}{2I_y}\right)$$

Substituindo $A = bh, I_x = 1/12\ bh^3, I_y = 1/12\ hb^3$, obtemos

$$0 < 1 - \frac{6e_y}{h} - \frac{6e_x}{b} \qquad \textit{Resposta}$$



(e)

Figura 8.8 (cont.)

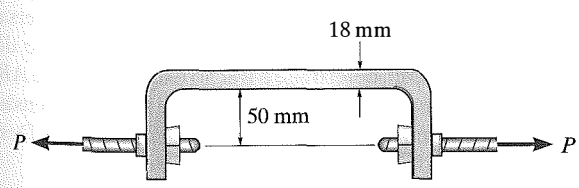
Por consequência, independentemente do valor de **P**, se ela for aplicada em qualquer ponto dentro dos limites da reta *GH* mostrada na Figura 8.8e, a tensão normal no ponto *A* permanecerá de compressão. De maneira semelhante, a tensão normal nos outros cantos da seção transversal será de compressão se **P** estiver confinada aos limites das retas *EG*, *FE* e *HF*.

OBSERVAÇÃO: O paralelogramo sombreado definido dessa maneira é denominado núcleo (ou *kern*) da seção. Pela "regra do terço médio" da parte (a), as diagonais do paralelogramo terão comprimentos $b/3$ e $h/3$.

PROBLEMAS

8.15. O suporte de aço é usado para ligar as extremidades de dois cabos. Se a tensão normal admissível para o aço for $\sigma_{adm} = 120$ kN, determine a maior força de tração *P* que pode ser aplicada aos cabos. O suporte tem espessura de 12 mm e largura de 18 mm.

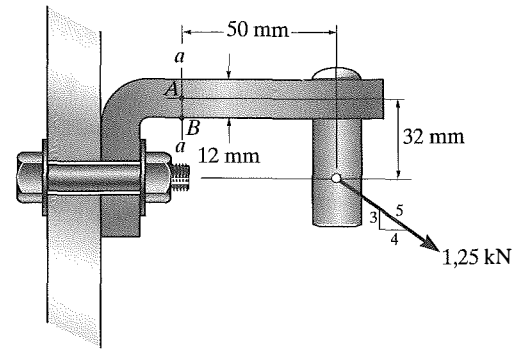
***8.16.** O suporte de aço é usado para ligar as extremidades de dois cabos. Se a força $P = 2{,}5$ kN for aplicada, determine a tensão normal máxima no suporte. O suporte tem espessura de 12 mm e largura de 18 mm.



Problemas 8.15/16

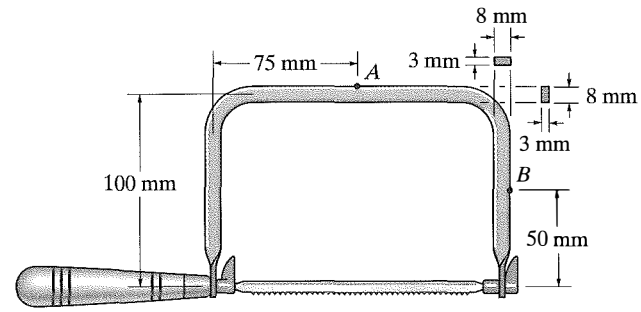
8.17. A junta está sujeita a uma força de 1,25 kN, como mostra a figura. Faça um rascunho da distribuição da tensão normal que age na seção *a–a* se a seção transversal retangular do elemento tiver largura de 12 mm e espessura de 18 mm.

8.18. A junta está sujeita a uma força de 1,25 kN, como mostra a figura. Determine o estado de tensão nos pontos *A* e *B* e faça um rascunho dos resultados em elementos diferenciais localizados nesses pontos. O dispositivo tem área de seção transversal retangular de largura 12 mm e espessura 18 mm.



Problemas 8.17/18

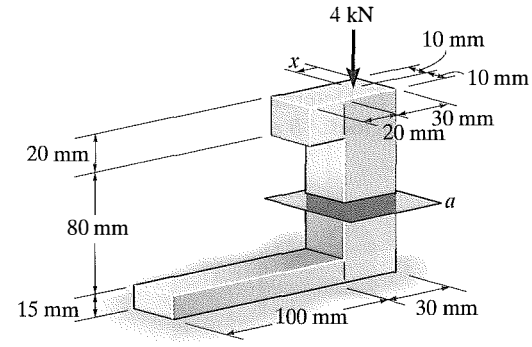
8.19. A serra tem uma lâmina ajustável que está apertada com uma tensão de 40 N. Determine o estado de tensão nos pontos *A* e *B* da estrutura.



Problema 8.19

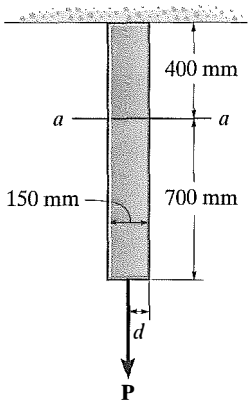
***8.20.** Determine as tensões normais mínima e máxima na seção *a* do suporte quando a carga é aplicada em $x = 0$.

8.21. Determine as tensões normais mínima e máxima na seção *a* do suporte quando a carga é aplicada em $x = 50$ mm.



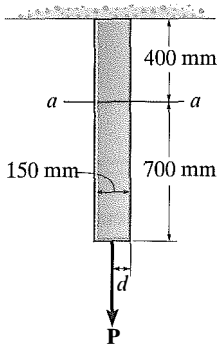
Problemas 8.20/21

8.22. A força vertical **P** age na parte inferior da chapa cujo peso é desprezível. Determine a distância máxima *d* até a borda da chapa na qual aquela força pode ser aplicada de modo a não produzir nenhuma tensão de compressão na seção *a–a* da chapa. A chapa tem espessura de 10 mm, e **P** age ao longo da linha central dessa espessura.



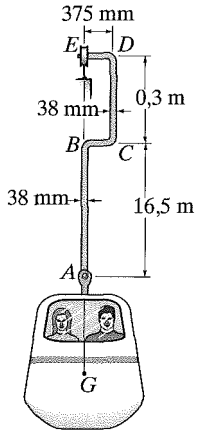
Problema 8.22

8.23. A força vertical $P = 600$ N age na parte inferior da chapa, cujo peso é desprezível. A chapa tem espessura de 10 mm, e **P** age ao longo da linha central dessa espessura, de modo que $d = 100$ mm. Desenhe um gráfico da distribuição da tensão normal que age ao longo da seção *a–a*.



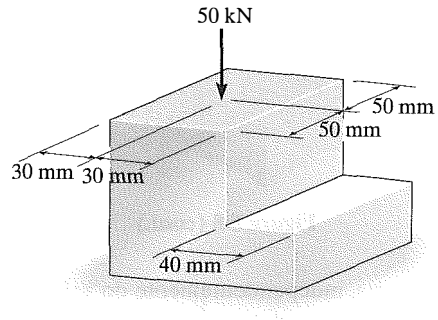
Problema 8.23

*__8.24.__ A cabine de teleférico e seus passageiros pesam 7,5 kN, e o centro de gravidade do conjunto está em *G*. O braço de suspensão *AE* tem área da seção transversal quadrada de 38 mm por 38 mm e está preso por pinos acoplados às suas extremidades *A* e *E*. Determine a maior tensão de tração desenvolvida nas regiões *AB* e *DC* do braço.



Problema 8.24

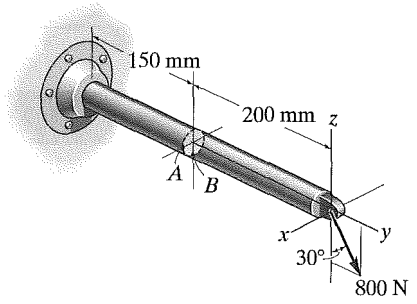
8.25. O suporte em degrau está sujeito à carga de apoio de 50 kN. Determine as tensões de compressão máxima e mínima no material.



Problema 8.25

8.26. A barra tem diâmetro de 40 mm. Se for submetida a uma força de 800 N, como mostra a figura, determine as componentes da tensão que agem no ponto *A* e mostre os resultados em um elemento de volume localizado nesse ponto.

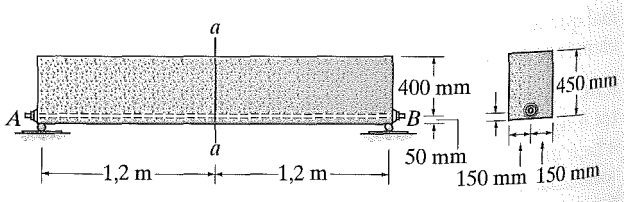
8.27. Resolva o Problema 8.26 para o ponto *B*.



Problemas 8.26/27

*__8.28.__ Visto que o concreto só pode suportar pouca ou nenhuma tração, esse problema pode ser evitado se o concreto for protendido com cabos ou hastes. Considere a viga simplesmente apoiada mostrada na figura, que tem seção transversal retangular de 450 mm por 300 mm. Se o peso específico do concreto for 24 kN/m³, determine a tração exigida na haste *AB*, que se estende por toda a viga, de modo que nenhuma tensão de tração seja desenvolvida na seção central *a–a* da viga. Despreze o tamanho da haste e qualquer deflexão da viga.

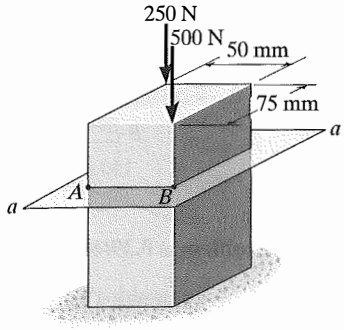
8.29. Resolva o Problema 8.28 se o diâmetro da haste for 12 mm. Use o método da área transformada discutido na Seção 6.6. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_c = 25$ GPa.



Problemas 8.28/29

8.30. O bloco está sujeito às duas cargas axiais mostradas na figura. Determine a tensão normal desenvolvida nos pontos A e B. Despreze o peso do bloco.

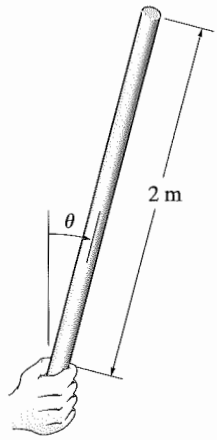
8.31. O bloco está sujeito às duas cargas axiais mostradas na figura. Faça um rascunho da distribuição da tensão normal que age na seção transversal no corte a–a. Despreze o peso do bloco.



Problemas 8.30/31

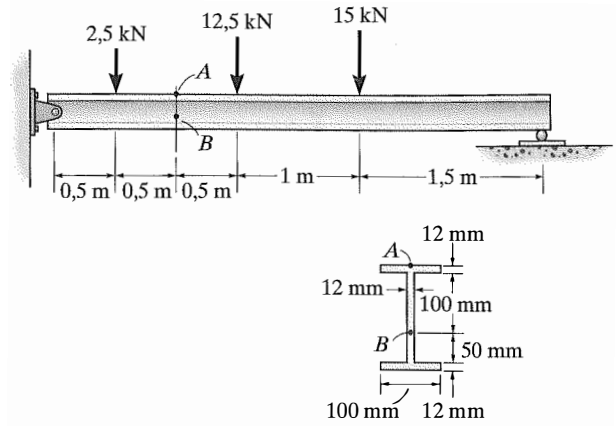
***8.32.** Uma barra de seção transversal quadrada de 30 mm por 30 mm tem 2 m de comprimento e é segura pela mão por uma das extremidades, com a outra voltada para cima. Se tiver massa de 5 kg/m, determine o maior ângulo θ medido em relação à vertical no qual ela pode ser segura sem sofrer tensão de tração perto da mão.

8.33. Resolva o Problema 8.32 se a barra tiver seção transversal circular de 30 mm de diâmetro.



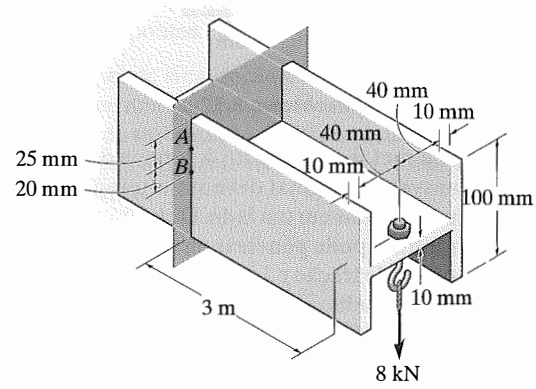
Problemas 8.32/33

8.34. A viga de abas largas está sujeita à carga mostrada na figura. Determine as componentes da tensão nos pontos A e B e mostre os resultados em um elemento de volume em cada um desses pontos. Use a fórmula do cisalhamento para calcular a tensão de cisalhamento.



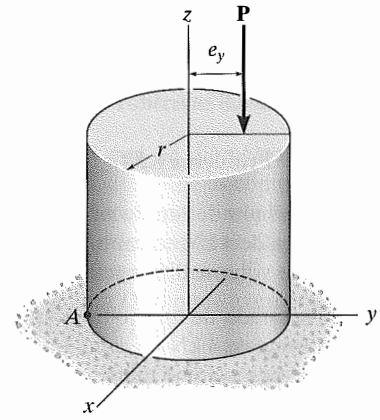
Problema 8.34

8.35. A viga em balanço é usada para suportar a carga de 8 kN. Determine o estado de tensão nos pontos A e B e trace um rascunho dos resultados sobre os elementos diferenciais localizados em cada um desses pontos.



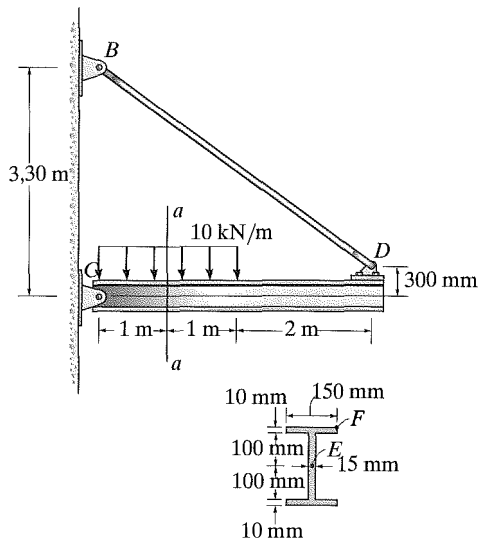
Problema 8.35

***8.36.** O cilindro de peso desprezível repousa sobre um piso liso. Determine a distância excêntrica e_y na qual a carga pode ser posicionada de modo que a tensão normal no ponto A seja nula.



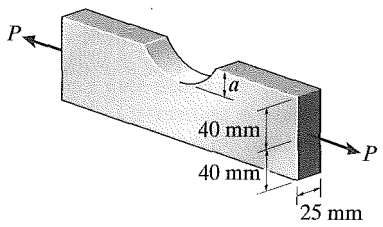
Problema 8.36

8.37. A viga suporta a carga mostrada na figura. Determine o estado de tensão nos pontos E e F na seção a–a e represente os resultados em um elemento de volume diferencial localizado em cada um desses pontos.



Problema 8.37

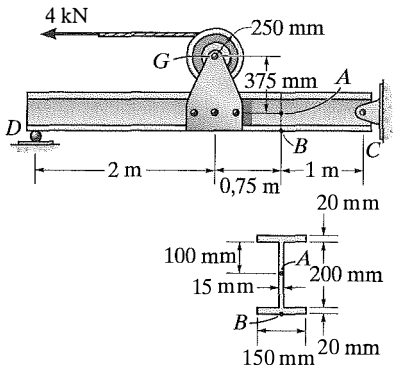
8.38. O elo de metal está sujeito à força axial $P = 7$ kN. Sua seção transversal original deve ser alterada pelo corte de uma ranhura circular em um lado. Determine a distância a até onde a ranhura pode penetrar na seção transversal de modo que a tensão de tração não ultrapasse $\sigma_{adm} = 175$ MPa. Indique um modo melhor de remover o material até essa profundidade da seção transversal e calcule a tensão de tração para esse caso. Despreze os efeitos da concentração de tensão.



Problema 8.38

8.39. Determine o estado de tensão no ponto A quando a viga está sujeita à força de 4 kN no cabo. Indique o resultado como um elemento de volume diferencial.

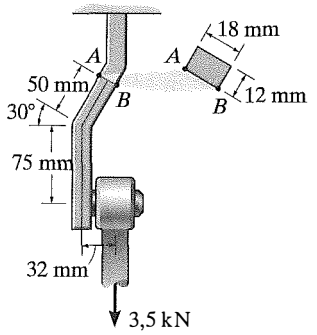
***8.40.** Determine o estado de tensão no ponto B quando a viga é submetida à força de 4 kN no cabo. Indique o resultado como um elemento de volume diferencial.



Problemas 8.39/40

8.41. O pino de suporte sustenta a carga de 3,5 kN. Determine as componentes da tensão no elemento estrutural do suporte no ponto A. O suporte tem 12 mm de espessura.

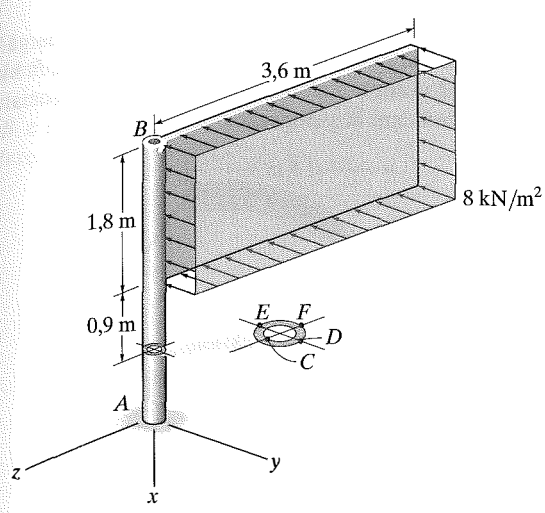
8.42. O pino de suporte sustenta a carga de 3,5 kN. Determine as componentes da tensão no elemento estrutural do suporte no ponto B. O suporte tem 12 mm de espessura.



Problemas 8.41/42

8.43. O painel de sinalização uniforme pesa 7,5 kN e é suportado pelo tubo AB que tem raio interno de 68 mm e raio externo de 75 mm. Se a parte frontal do painel estiver sujeita a uma pressão uniforme do vento $p = 8$ kN/m², determine o estado de tensão nos pontos C e D. Mostre os resultados em um elemento de volume diferencial localizado em cada um desses pontos. Despreze a espessura do painel de sinalização e considere que ele está apoiado ao longo da borda do tubo.

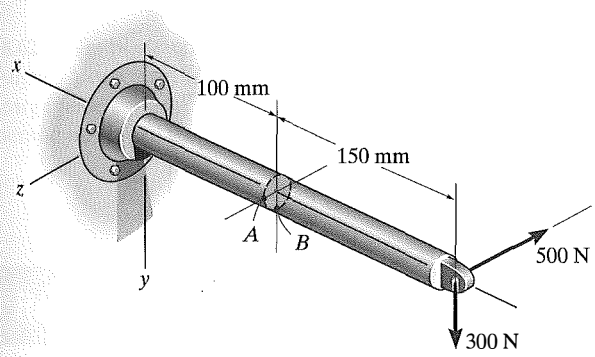
***8.44.** Resolva o Problema 8.43 para os pontos E e F.



Problemas 8.43/44

8.45. A barra tem diâmetro de 40 mm. Se sua extremidade for submetida às duas componentes de força mostradas na figura, determine o estado de tensão no ponto *A* e mostre os resultados em um elemento de volume diferencial localizado nesse ponto.

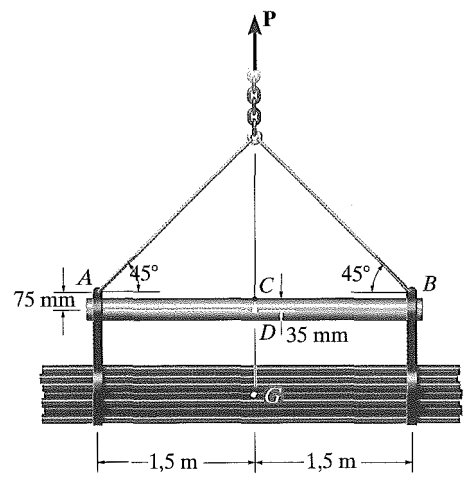
8.46. Resolva o Problema 8.45 para o ponto *B*.



Problemas 8.45/46

8.47. O guindaste *AB* consiste em um tubo que é usado para levantar o feixe de hastes que tem massa total de 3 Mg e centro de massa em *G*. Se o tubo tiver diâmetro externo de 70 mm e 10 mm de espessura de parede, determine o estado de tensão que age no ponto *C*. Mostre os resultados em um elemento de volume diferencial localizado nesse ponto. Despreze o peso do tubo.

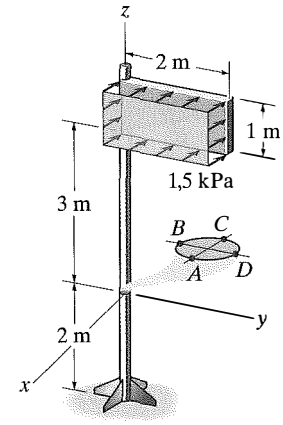
***8.48.** O guindaste *AB* consiste em um tubo que é usado para levantar o feixe de hastes que tem massa total de 3 Mg e centro de massa em *G*. Se o tubo tiver diâmetro externo de 70 mm e 10 mm de espessura da parede, determine o estado de tensão que age no ponto *D*. Mostre os resultados em um elemento de volume diferencial localizado nesse ponto. Despreze o peso do tubo.



Problemas 8.47/48

8.49. O painel de sinalização está sujeito à carga uniforme do vento. Determine as componentes da tensão nos pontos *A* e *B* no poste de sustentação de 100 mm de diâmetro. Mostre os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.

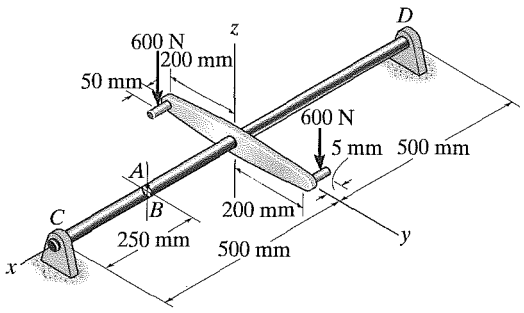
8.50. O painel de sinalização está sujeito a carga uniforme do vento. Determine as componentes da tensão nos pontos *C* e *D* no poste de sustentação de 100 mm de diâmetro. Mostre os resultados em um elemento de volume localizado em cada um desses pontos.



Problemas 8.49/50

8.51. O eixo de 18 mm de diâmetro é submetido à carga mostrada na figura. Determine as componentes da tensão no ponto *A*. Trace um rascunho dos resultados em um elemento de volume localizado nesse ponto. O mancal em *C* só pode exercer as componentes de força $\mathbf{C}_y$ e $\mathbf{C}_z$ sobre o eixo, e o mancal de encosto em *D* só pode exercer as componentes de força $\mathbf{D}_x$, $\mathbf{D}_y$ e $\mathbf{D}_z$ sobre o eixo.

***8.52.** Resolva o Problema 8.51 para as componentes da tensão no ponto *B*.

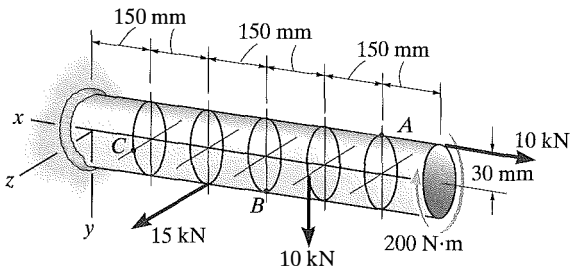


Problemas 8.51/52

8.53. A haste maciça está sujeita à carga mostrada na figura. Determine o estado de tensão desenvolvido no material no ponto *A* e mostre os resultados em um elemento de volume diferencial nesse ponto.

8.54. A haste maciça está sujeita à carga mostrada na figura. Determine o estado de tensão desenvolvido no material no ponto B e mostre os resultados em um elemento de volume diferencial nesse ponto.

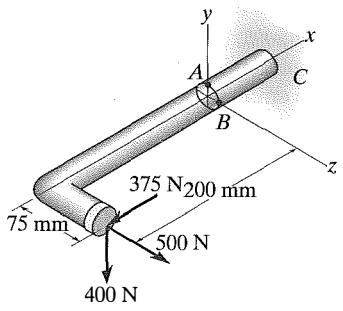
8.55. A haste maciça está sujeita à carga mostrada na figura. Determine o estado de tensão desenvolvido no material no ponto *C* e mostre os resultados em um elemento de volume diferencial nesse ponto.



Problemas 8.53/54/55

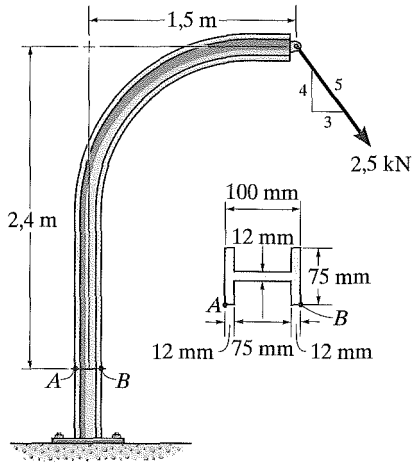
***8.56.** A haste maciça de 25 mm de diâmetro está sujeita às cargas mostradas na figura. Determine o estado de tensão no ponto *A* e mostre os resultados em um elemento diferencial localizado nesse ponto.

8.57. A haste maciça de 25 mm de diâmetro está sujeita às cargas mostradas na figura. Determine o estado de tensão no ponto *B* e mostre os resultados em um elemento diferencial localizado nesse ponto.



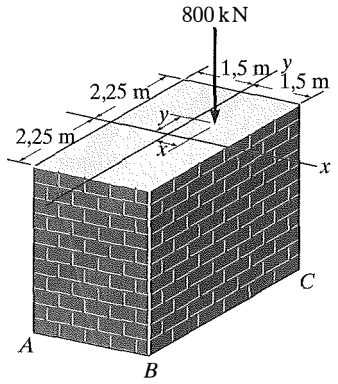
Problemas 8.56/57

8.58. A lança de guindaste é submetida a uma carga de 2,5 kN. Determine o estado de tensão nos pontos *A* e *B*. Mostre os resultados em um elemento de volume diferencial localizado em cada um desses pontos.



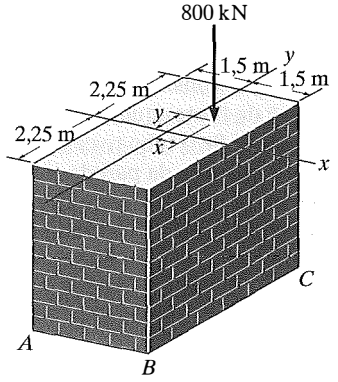
Problema 8.58

8.59. A pilastra de alvenaria está sujeita à carga de 800 kN. Determine a equação da reta $y = f(x)$ ao longo da qual a carga pode ser posicionada sem provocar tensão de tração na pilastra. Despreze o peso da pilastra.



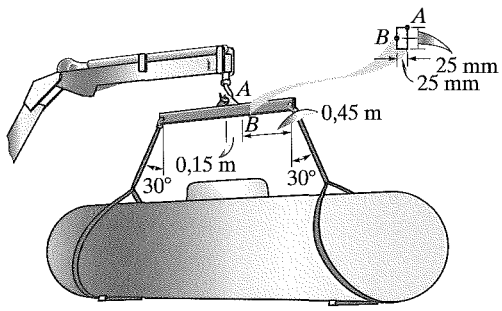
Problemas 8.59

***8.60.** A pilastra de alvenaria está sujeita à carga de 800 kN. Se $x = 0{,}25$ m e $y = 0{,}5$ m, determine a tensão normal em cada canto *A*, *B*, *C*, *D* (não mostrado na figura) e trace a distribuição da tensão na seção transversal. Despreze o peso da pilastra.



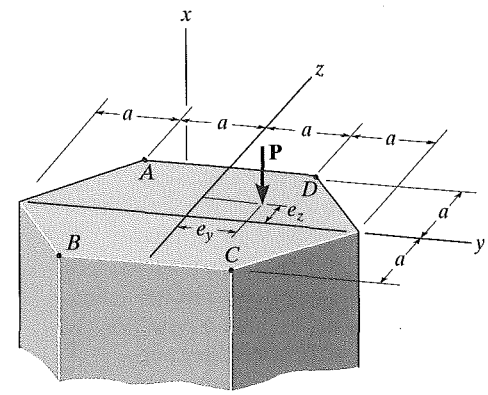
Problema 8.60

8.61. A barra de distribuição de peso carregada simetricamente é usada para levantar o tanque de 10 kN (≈ 1 tonelada). Determine o estado de tensão nos pontos *A* e *B* e indique os resultados em elementos de volumes diferenciais.



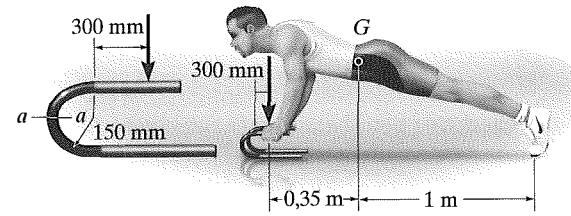
Problema 8.61

8.62. Um poste com as dimensões mostradas na figura está sujeito à carga de apoio **P**. Especifique a região na qual essa carga pode ser aplicada sem provocar o desenvolvimento de tensão de tração nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*.



Problema 8.62

8.63. O homem tem massa de 100 kg e centro de massa em *G*. Se ele se mantiver na posição mostrada na figura, determine a tensão de tração máxima e a tensão de compressão máxima desenvolvidas na seção *a–a* da barra curva. Ele é suportado uniformemente pelas duas barras, e cada uma delas tem diâmetro de 25 mm. Considere que o piso é liso.



Problema 8.63

Revisão do capítulo

Considera-se que um vaso de pressão tem paredes finas desde que $r/t \geq 10$. Para um vaso cilíndrico de parede fina, a tensão circunferencial ou de aro é

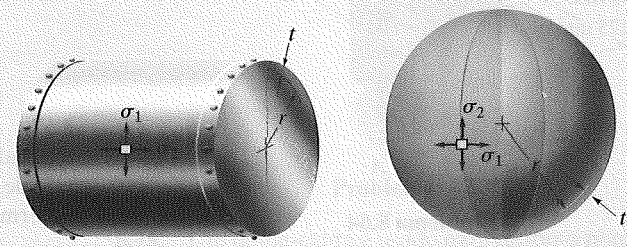
$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

Essa tensão é duas vezes maior que a tensão longitudinal,

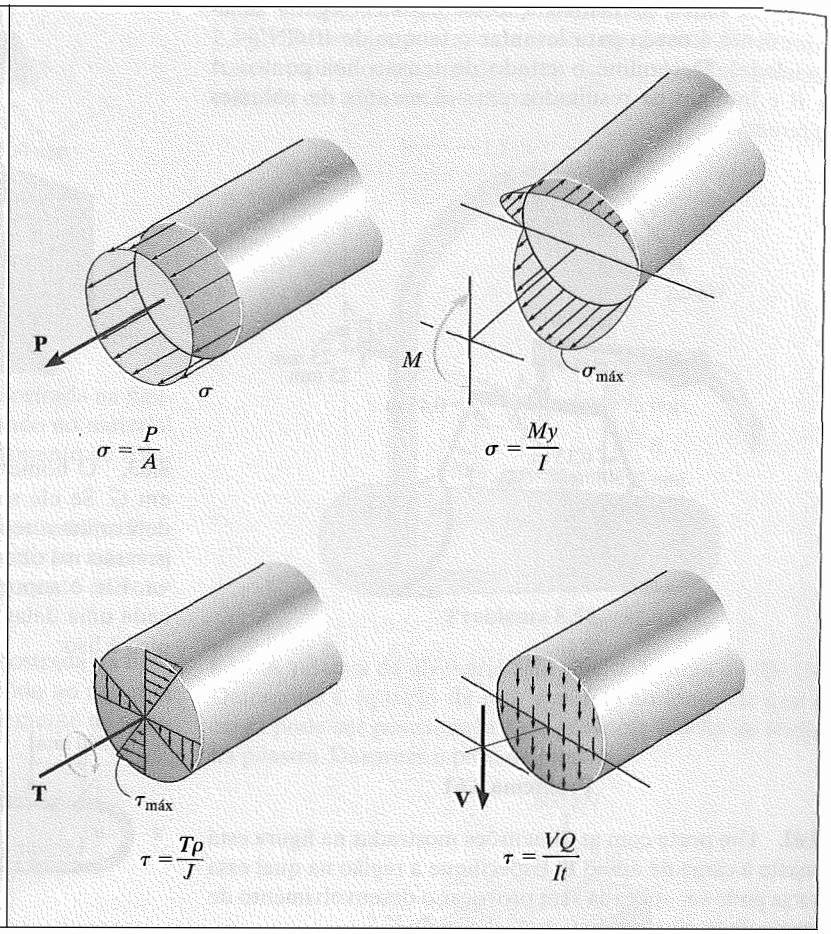
$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

A tensão no interior das paredes de vasos esféricos de parede fina é a mesma em todas as direções, de modo que

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

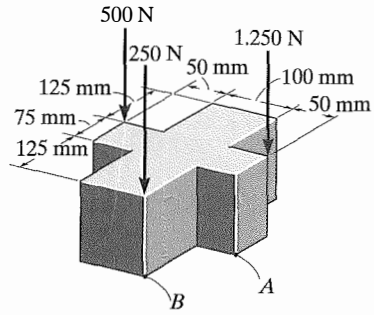


A superposição das componentes da tensão pode ser usada para se determinarem a tensão normal e a tensão de cisalhamento em um ponto localizado em um elemento submetido a uma carga combinada. Para resolver, em primeiro lugar, é necessário determinar a força axial e a força de cisalhamento resultantes e o momento fletor e de torção resultantes na seção onde o ponto está localizado. Então, as tensões normal e de cisalhamento resultantes são determinadas pela soma algébrica das componentes da tensão normal e da tensão de cisalhamento no ponto.



PROBLEMAS DE REVISÃO

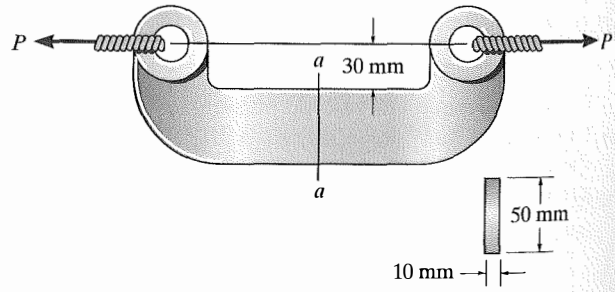
***8.64.** O bloco está sujeito às três cargas axiais mostradas na figura. Determine a tensão normal desenvolvida nos pontos *A* e *B*. Despreze o peso do bloco.



Problema 8.64

8.65. Se $P = 15$ kN, desenhe o gráfico da distribuição de tensão que age na seção transversal *a–a* do elo fora de centro.

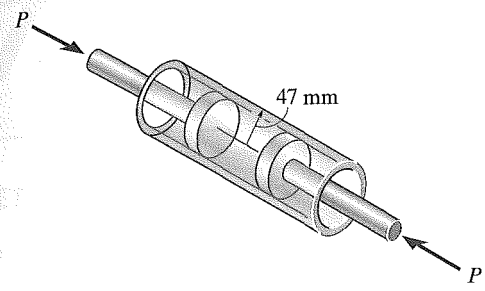
8.66. Determine o valor da carga **P** que provocará a tensão normal máxima $\sigma_{máx} = 200$ MPa na seção *a–a* do elo.



Problemas 8.65/66

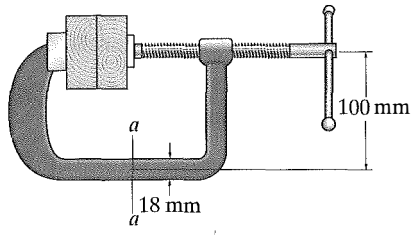
8.67. A pressão do ar no cilindro será aumentada se forem exercidas as forças $P = 2$ kN nos dois pistões, cada qual com raio de 45 mm. Se a espessura da parede do cilindro for 2 mm, determine o estado de tensão na parede do cilindro.

***8.68.** Determine a força máxima *P* que pode ser exercida em cada um dos dois pistões de modo que a componente da tensão circunferencial no cilindro não ultrapasse 3 MPa. Cada pistão tem raio de 45 mm e a espessura da parede do cilindro é 2 mm.



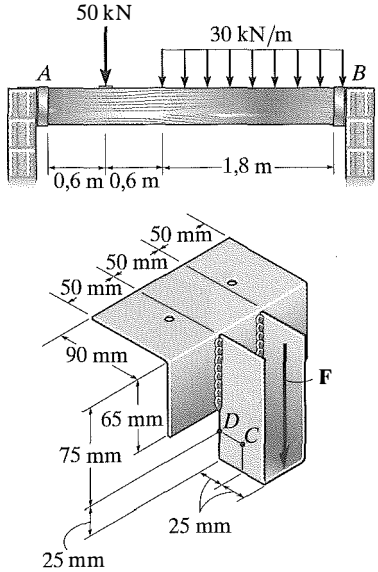
Problemas 8.67/68

8.69. O parafuso da prensa exerce uma força de compressão de 2,5 kN nos blocos de madeira. Determine a tensão normal máxima desenvolvida ao longo da seção *a–a*. Nesse lugar, a seção transversal é retangular com dimensões 18 mm por 12 mm.



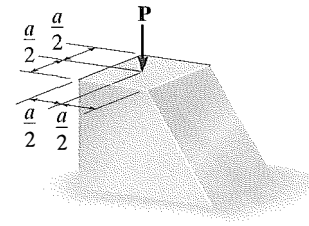
Problema 8.69

8.70. O suporte de parede tem espessura de 6 mm e é usado para suportar as reações verticais da viga carregada, como mostra a figura. Se a carga for transferida uniformemente para cada alça do suporte, determine o estado de tensão nos pontos *C* e *D* da alça *B*. Considere que a reação vertical *F* nessa extremidade age no centro e na borda do suporte, como mostra a figura.



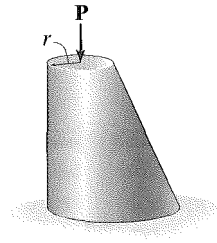
Problema 8.70

8.71. O apoio está sujeito à carga de compressão **P**. Determine as tensões normais absolutas máxima e mínima que agem no material.



Problema 8.71

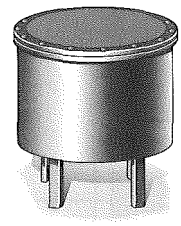
*__8.72.__ O apoio tem seção transversal circular, cujo raio aumenta linearmente com a profundidade. Se for submetido à carga de compressão **P**, determine as tensões normais máxima e mínima que agem no material.



Problema 8.72

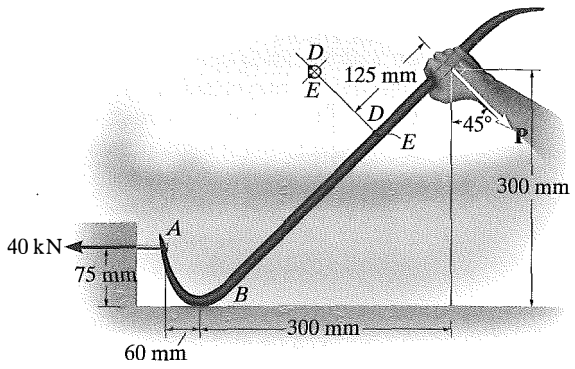
8.73. A tampa do tanque cilíndrico é parafusada ao tanque ao longo das abas. O tanque tem diâmetro interno de 1,5 m e espessura da parede de 18 mm. Considerando que a maior tensão normal não deve ultrapassar 150 MPa, determine a pressão máxima que o tanque pode sustentar. Calcule também o número de parafusos necessários para prender a tampa ao tanque se cada um deles tiver diâmetro de 20 mm. A tensão admissível para os parafusos é $(\sigma_{adm})_p = 180$ MPa.

8.74. A tampa do tanque cilíndrico é parafusada ao tanque ao longo das abas. O tanque tem diâmetro interno de 1,5 m, e a espessura da parede é 18 mm. Se a pressão no interior do tanque for $p = 1{,}20$ MPa, determine a força nos 16 parafusos utilizados para prender a tampa ao tanque. Além disso, especifique o estado de tensão na parede do tanque.



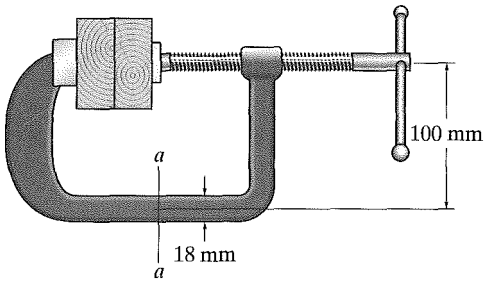
Problemas 8.73/74

8.75. Um pé-de-cabra é usado para retirar o prego em *A*. Se for necessária uma força de 40 N, determine as componentes da tensão na barra nos pontos *D* e *E*. Mostre os resultados em um elemento de volume diferencial localizado em cada um desses pontos. A barra tem seção transversal circular com diâmetro de 12 mm. Não ocorre deslizamento em *B*.



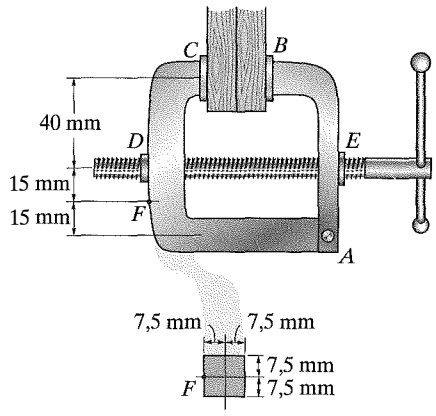
Problema 8.75

8.76. O parafuso da prensa exerce uma força de compressão de 2,5 kN nos blocos de madeira. Faça um rascunho da distribuição de tensão ao longo da seção *a–a* da prensa. Nesse lugar, a seção transversal é retangular com dimensões 18 mm por 12 mm.



Problema 8.76

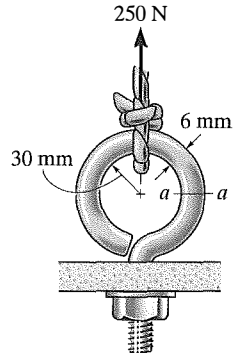
8.77. O parafuso da prensa é composto pelos elementos estruturais *AB* e *AC* conectados por um pino em *A*. Se a força de compressão em *C* e *B* for 180 N, determine o estado de tensão no ponto *F* e indique os resultados em um elemento de volume diferencial. O parafuso *DE* está sujeito somente a uma força de tração ao longo de seu eixo.



Problema 8.77

8.78. O olhal está sujeito à força de 250 N. Determine as tensões de tração e compressão máximas na seção *a–a*. A seção transversal é circular e tem 6 mm de diâmetro. Use a fórmula da viga curva para calcular a tensão de flexão.

8.79. Resolva o Problema 8.78 se a seção transversal for quadrada, de dimensões 6 mm por 6 mm.



Problemas 8.78/79

9 Transformação de tensão

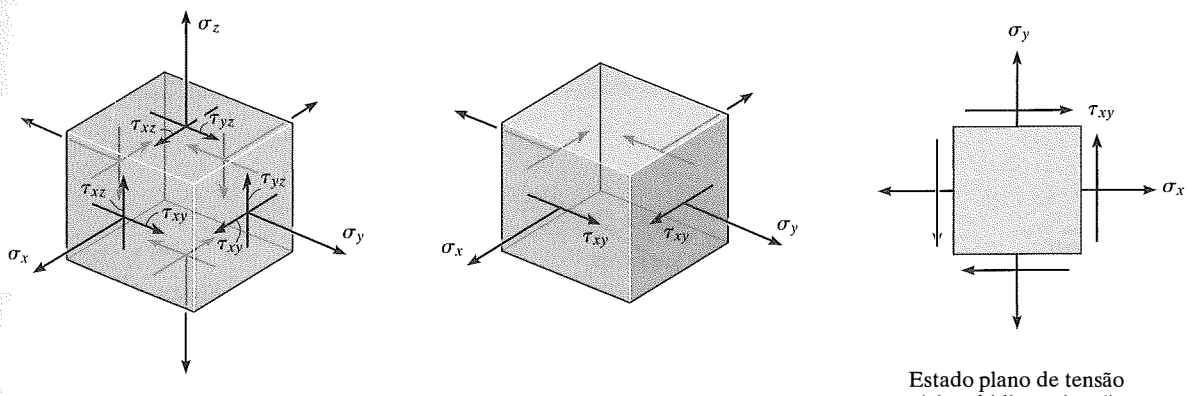
OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, mostraremos como transformar as componentes de tensão associadas a um determinado sistema de coordenadas em componentes associadas a um sistema de coordenadas com uma orientação diferente. Uma vez definidas as equações de transformação necessárias, poderemos obter a tensão normal máxima e a tensão de cisalhamento máxima em um ponto e determinar a orientação dos elementos sobre os quais elas agem. A transformação de tensão no plano será discutida na primeira parte deste capítulo, uma vez que essa condição é muito comum na prática da engenharia. No final do capítulo, discutiremos um método para determinar a tensão de cisalhamento absoluta máxima no ponto em que o material está sujeito a estados plano e tridimensional de tensão.

9.1 Transformação de tensão no plano

Na Seção 1.3 mostramos que o estado geral de tensão em um ponto é caracterizado por *seis* componentes independentes da tensão normal e de cisalhamento que agem nas faces de um elemento de material localizado no ponto (Figura 9.1a). Todavia, esse estado de tensão não é comum na prática da engenharia. Ao contrário, os engenheiros frequentemente fazem aproximações ou simplificações das cargas sobre um corpo de modo que a tensão produzida em um elemento estrutural ou mecânico possa ser analisada em um *único plano*. Quando isso ocorre, diz-se que o material está sujeito a *tensões no plano* (Figura 9.1b). Por exemplo, se não houver nenhuma carga na superfície de um corpo, as componentes de tensão normal e de cisalhamento serão iguais a zero na face de um elemento que estiver na superfície. Por consequência, as componentes de tensão correspondentes na face oposta também serão nulas e, portanto, o material no ponto estará sujeito a tensão no plano.

O estado geral de ***tensão no plano*** em um ponto é, portanto, representado por uma combinação de duas componentes de tensão normal, σ_x e σ_y, e uma componente de tensão de cisalhamento, σ_{xy}, que agem nas quatro faces do elemento. Por conveniência, neste livro estudaremos esse estado de tensão no plano x-y, (Figura 9.1c). Entenda que, se o estado de tensão em um ponto for definido pelas três componentes de tensão mostradas no elemento na Figura 9.2a, então, um elemento que tenha uma orientação diferente, como na Figura 9.2b, estará sujeito a três componentes diferentes de tensão. Em outras palavras, ***o estado plano de tensão em um ponto é representado exclusivamen-***



Estado geral de tensão
(a)

Estado plano de tensão
(b)

Estado plano de tensão
(visão bidimensional)
(c)

Figura 9.1

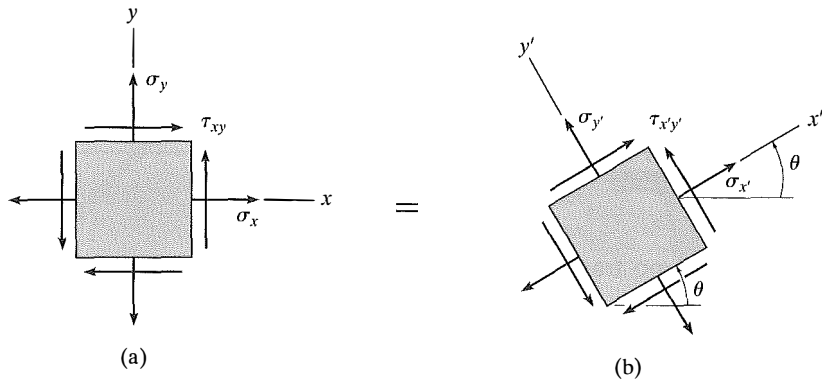


Figura 9.2

te por três componentes que agem sobre um elemento que tenha uma orientação específica neste ponto.

Nesta seção, mostraremos por meio de exemplos numéricos como *transformar* as componentes de tensão que tenham um elemento com determinada orientação em um elemento que tenha uma orientação diferente. Isto é, se o estado de tensão for definido pelas componentes σ_x, σ_y e σ_{xy}, orientadas ao longo dos *eixos x, y*, (Figura 9.2a), mostraremos como obter as componentes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\sigma_{x'y'}$, orientadas ao longo dos eixos, x', y' (Figura 9.2b), de modo que representem o *mesmo* estado de tensão no ponto. Isso equivale a conhecer duas componentes de força, digamos, $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$, dirigidas ao longo dos eixos x, y, que produzem uma força resultante $\mathbf{F}_R$, e então tentar determinar as componentes de força $\mathbf{F}_{x'}$ e $\mathbf{F}_{y'}$ dirigidas ao longo dos eixos x' e y', de modo que produzam a *mesma* resultante. A transformação de componentes de tensão, entretanto, é mais difícil do que a de componentes de força, visto que, no caso da *tensão,* a transformação deve levar em conta o valor e a direção de cada componente da tensão *e* a orientação da área sobre a qual cada componente age. No caso da força, a transformação deve levar em conta somente o valor e a direção da componente de força.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Se o estado de tensão em um ponto for conhecido para uma determinada orientação de um elemento de material (Figura 9.3a), então o estado de tensão para alguma outra orientação (Figura 9.3b) pode ser determinado pelo procedimento descrito a seguir.

- Para determinar as componentes de tensão normal e de cisalhamento $\sigma_{x'}$, $\sigma_{x'y'}$ que agem na face x' do elemento (Figura 9.3b), secione o elemento na Figura 9.3a como mostra a Figura 9.3c. Se considerarmos que a área secionada é ΔA, as áreas adjacentes do segmento serão ΔA sen θ e ΔA cos θ.
- Faça o diagrama de corpo livre do segmento, o que requer mostrar as *forças* que agem no elemento. Para tal, multiplique as componentes de tensão em cada face pela área sobre a qual elas agem.
- Aplique as equações de equilíbrio de força nas direções x' e y' para obter as duas componentes de tensão desconhecidas $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$.
- Se tivermos de determinar $\sigma_{y'}$, que age na face $+y'$ do elemento na Figura 9.3b, será necessário considerar um segmento do elemento como mostrado na Figura 9.3d e seguir o mesmo procedimento que acabamos de descrever. Entretanto, aqui, a tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$ não terá de ser determinada, se tiver sido calculada anteriormente, uma vez que ela é complementar, isto é, tem a mesma amplitude em cada uma das quatro faces do elemento (Figura 9.3b).

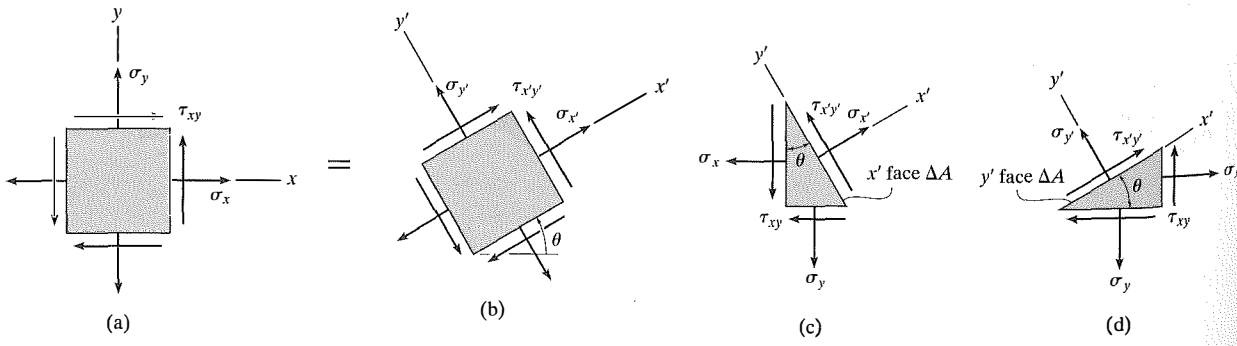


Figura 9.3

EXEMPLO 9.1

O estado plano de tensão em um ponto na superfície da fuselagem do avião é representado no elemento orientado como mostra a Figura 9.4a. Represente o estado de tensão no ponto em um elemento orientado a 30° no sentido horário em relação à posição mostrada.

SOLUÇÃO

O elemento é secionado pela reta *a–a* na Figura 9.4a, o segmento inferior removido e, considerando que o plano seccionado (inclinado) tem área ΔA, os planos horizontal e vertical têm as áreas mostradas na Figura 9.4b. O diagrama de corpo livre do segmento é mostrado na Figura 9.4c. Aplicando as equações de equilíbrio de força nas direções x' e y' para evitar uma solução simultânea para as duas incógnitas $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, temos

$$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (50\,\Delta A \cos 30°)\cos 30°$$

$$+ (25\,\Delta A \cos 30°)\,\text{sen}\,30° + (80\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\,\text{sen}\,30°$$

$$+ (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\cos 30° = 0$$

$$\sigma_{x'} = -4{,}15\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

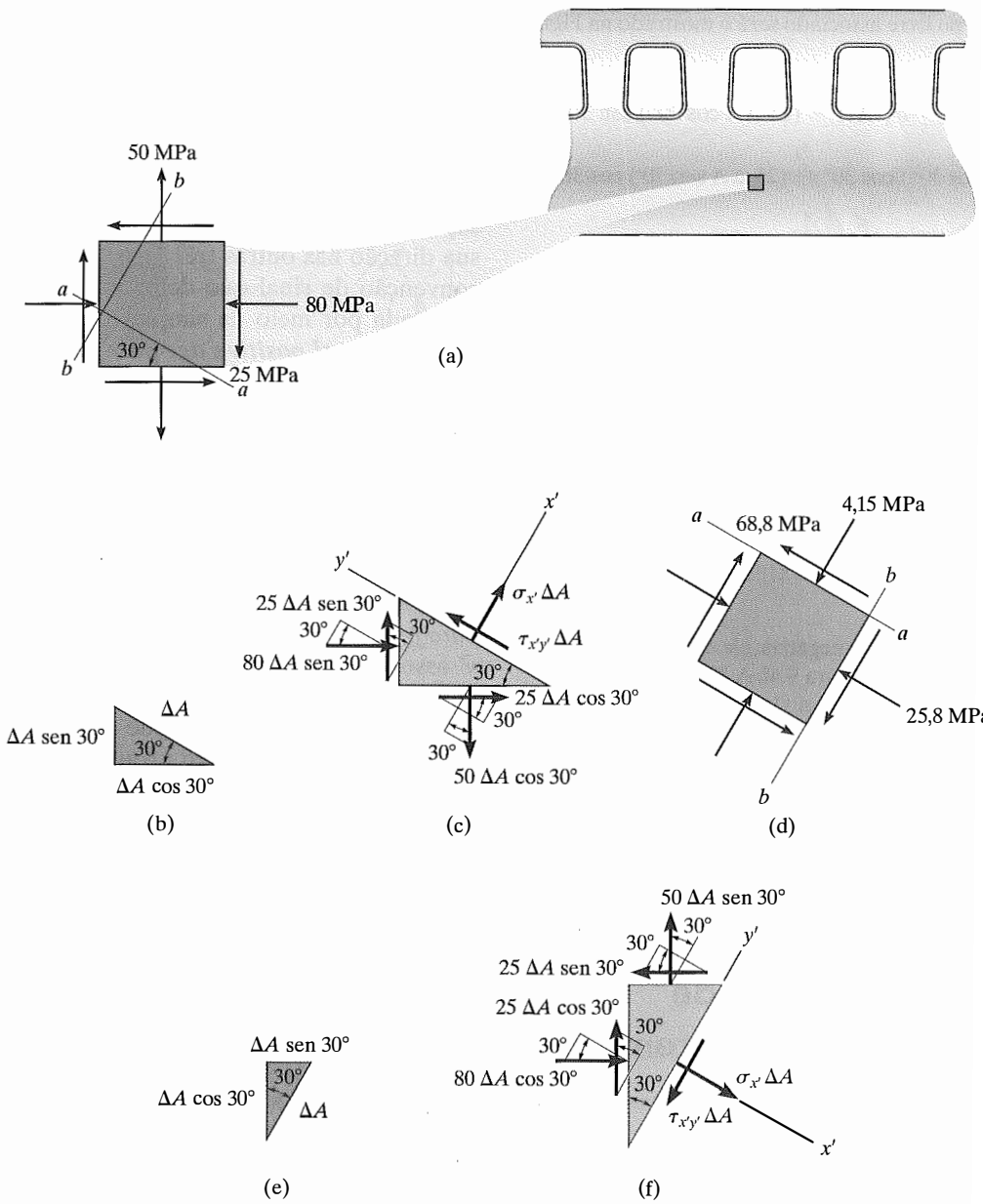


Figura 9.4

$$+\nwarrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\,\Delta A - (50\,\Delta A \cos 30°)\,\text{sen}\,30°$$

$$- (25\,\Delta A \cos 30°)\cos 30° - (80\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\cos 30°$$

$$+ (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\,\text{sen}\,30° = 0$$

$$\tau_{x'y'} = 68{,}8\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Como $\sigma_{x'}$ é negativa, ela age na direção oposta à mostrada na Figura 9.4c. Os resultados são mostrados na *parte superior* do elemento na Figura 9.4d, uma vez que essa superfície é a considerada na Figura 9.4c.

Agora, temos de repetir o procedimento para obter a tensão no plano *perpendicular b–b*. O corte do elemento na Figura 9.4a ao longo de *b–b* resulta em um segmento cujos lados têm as áreas mostradas na Figura 9.4e. Se orientarmos o eixo $+x'$ para fora, perpendicularmente à face secionada, o diagrama de corpo livre associado será o mostrado na Figura 9.4f. Assim,

$$+\searrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (25\,\Delta A \cos 30°)\,\text{sen}\,30°$$

$$+ (80\,\Delta A \cos 30°)\cos 30° - (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\cos 30°$$

$$- (50\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\,\text{sen}\,30° = 0$$

$$\sigma_{x'} = -25{,}8\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad -\tau_{x'y'}\,\Delta A + (25\,\Delta A \cos 30°)\cos 30°$$

$$+ (80\,\Delta A \cos 30°)\,\text{sen}\,30° - (25\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\,\text{sen}\,30°$$

$$+ (50\,\Delta A\,\text{sen}\,30°)\cos 30° = 0$$

$$\tau_{x'y'} = 68{,}8\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Como $\sigma_{x'}$ é uma quantidade negativa, ela age no sentido oposto à direção mostrada na Figura 9.4f. A Figura 9.4d mostra as componentes de tensão agindo no lado *direito* do elemento.

Portanto, por essa análise podemos concluir que o estado de tensão no ponto pode ser representado escolhendo um elemento orientado como mostra a Figura 9.4a ou escolhendo um elemento orientado como mostra a Figura 9.4d. Em outras palavras, os estados de tensão são equivalentes.

9.2 Equações gerais de transformação de tensão no plano

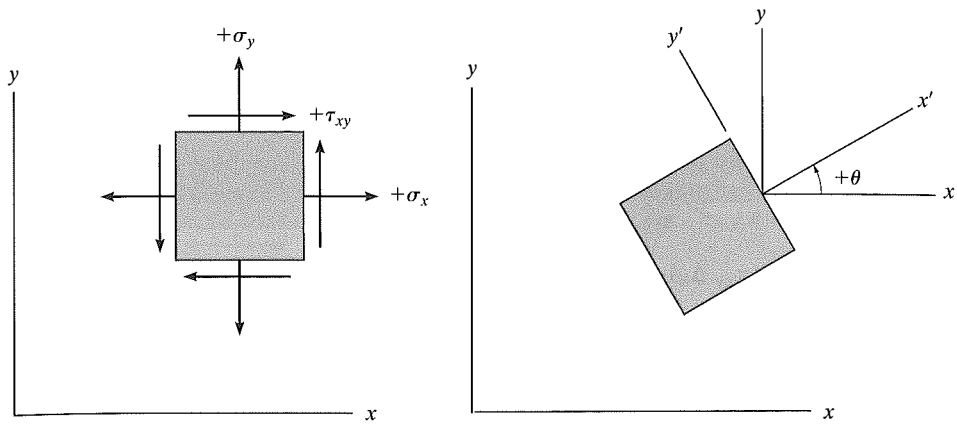
O método para transformar as componentes de tensão normal e de cisalhamento dos eixos coordenados x, y para os eixos coordenados x', y', como discutimos na seção anterior, agora será desenvolvido de um modo geral e expresso como um conjunto de equações de transformação de tensão.

Convenção de sinal. Antes de deduzir as equações de transformação, devemos definir uma convenção de sinal para as componentes de tensão. Aqui, adotaremos a mesma usada na Seção 1.3. Em resumo, uma vez definidos os eixos x, y ou x', y', uma componente de tensão normal ou de cisalhamento é *positiva* contanto que aja na direção *positiva* da coordenada na face *positiva* do elemento ou na direção *negativa da* coordenada na face *negativa* do elemento, Figura 9.5a. Por exemplo, σ_x é positiva, porque age para a direita na face vertical direita e para a esquerda (direção $-x$) na face vertical esquerda. A Figura 9.5a mostra a tensão de cisalhamento agindo na direção positiva em todas as quatro faces do elemento. Na face direita, τ_{xy} age para cima (direção $+y$); na face inferior, τ_{xy} age para a esquerda (direção $-x$) e assim por diante.

Todas as componentes de tensão mostradas na Figura 9.5a mantêm o equilíbrio do elemento e, por isso, saber a direção de τ_{xy} em uma face do elemento define sua direção nas outras três faces. Por consequência, a convenção de sinal que definimos também pode ser lembrada por meio da simples observação de que a ***tensão normal positiva age para fora de todas as faces e a tensão de cisalhamento positiva age para cima na face direita do elemento.***

Dado o estado plano de tensão mostrado na Figura 9.5a, a orientação do plano inclinado no qual as componentes de tensão normal e de cisalhamento devem ser determinadas serão definidas usando o ângulo θ. Para mostrar esse ângulo de maneira adequada, em primeiro lugar é preciso definir um eixo x' positivo *dirigido para fora, perpendicular* ou normal ao plano, e um eixo y' associado dirigido ao longo do plano (Figura 9.5b). Observe que ambos os conjuntos de eixos sem linha e com linha formam sistemas de coordenadas voltados para a direita; isto é, o eixo z (ou z') positivo é definido pela regra da mão direita. Curvando os dedos de x (ou x') na direção de y (ou y'), obtemos a direção para o eixo z (ou z') positivo que aponta para fora. O *ângulo* θ é medido do eixo x positivo para o eixo x' positivo. Ele é *positivo* desde que siga a curvatura dos dedos da mão direita, isto é, no sentido anti-horário, como mostra a Figura 9.5b.

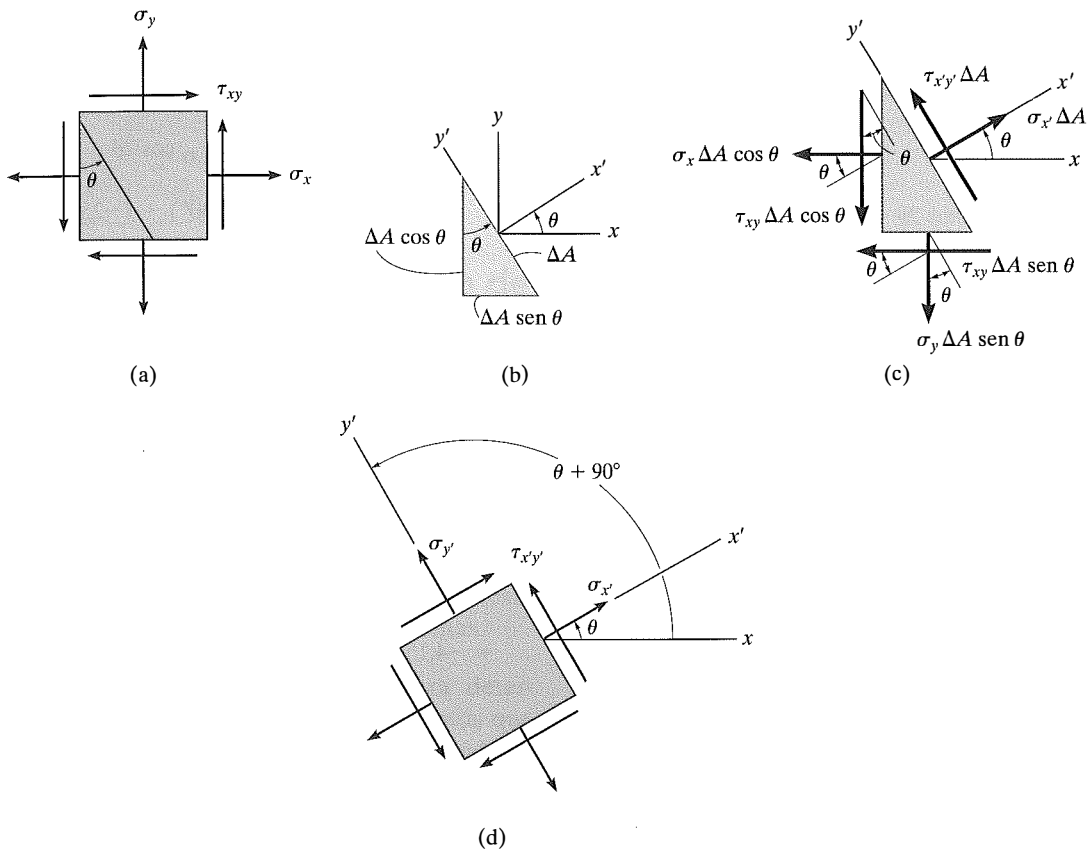
Componentes de tensão normal e de cisalhamento. Usando a convenção de sinal definida, o elemento na Figura 9.6a é secionado ao longo do plano inclinado e o segmento mostrado na Figura 9.6b é isolado. Considerando que a área secionada é ΔA, as áreas das faces horizontal e vertical do segmento são $\Delta A\,\text{sen}\,\theta$ e $\Delta A \cos\theta$, respectivamente.



(a) (b)

Convenção de sinal positivo

Figura 9.5



(a) (b) (c)

(d)

Figura 9.6

O *diagrama de corpo livre* resultante para o segmento é mostrado na Figura 9.6c. Aplicando as equações de equilíbrio de força para determinar as componentes da tensão normal e de cisalhamento desconhecidas, $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$, obtemos

$$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\,\Delta A - (\tau_{xy}\,\Delta A \operatorname{sen}\theta)\cos\theta - (\sigma_y\,\Delta A \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - (\tau_{xy}\,\Delta A\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - (\sigma_x\,\Delta A\cos\theta)\cos\theta = 0$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + \tau_{xy}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Para aplicar as equações de transformação de tensão 9.1 e 9.2, basta entrar com os valores conhecidos de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ e θ de acordo com a convenção de sinal definida, Figura 9.5. Se o cálculo de $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ produzir quantidades positivas, essas tensões agirão na direção positiva dos eixos x' e y'.

Por conveniência, essas equações podem ser facilmente programadas em uma calculadora de bolso.

$$+\nwarrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\,\Delta A + (\tau_{xy}\,\Delta A \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta - (\sigma_y\,\Delta A \operatorname{sen}\theta)\cos\theta - (\tau_{xy}\,\Delta A \cos\theta)\cos\theta + (\sigma_x\,\Delta A \cos\theta)\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

Essas duas equações podem ser simplificadas pelas identidades trigonométricas $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, $\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ e $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ e, nesse caso, obtemos

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \tag{9.1}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{9.2}$$

Se a tensão normal que age na direção y' for necessária, ela poderá ser obtida pela simples substituição de $(\theta = \theta + 90°)$ para θ na Equação 9.1 (Figura 9.6d), o que resulta em

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta \tag{9.3}$$

Se o cálculo de $\sigma_{y'}$ produzir uma quantidade positiva, isso indicará que ela age na direção y' positiva como mostra a Figura 9.6d.

EXEMPLO 9.2

O estado plano de tensão em um ponto é representado pelo elemento mostrado na Figura 9.7a. Determine o estado de tensão no ponto em outro elemento orientado a 30° no sentido horário em relação à posição mostrada.

SOLUÇÃO

Este problema foi resolvido no Exemplo 9.1 usando os princípios básicos. Aqui, aplicaremos as equações 9.1 e 9.2. Pela convenção de sinal definida (Figura 9.5), vemos que

$$\sigma_x = -80\ \text{MPa} \qquad \sigma_y = 50\ \text{MPa} \qquad \tau_{xy} = -25\ \text{MPa}$$

Plano *CD*. Para obter as componentes de tensão no plano CD (Figura 9.7b), o eixo x' positivo é dirigido para fora, perpendicularmente a CD, e o eixo y' associado é dirigido ao longo de CD. O ângulo medido de x até o eixo x' é $\theta = -30°$ (em sentido horário). Aplicando as equações 9.1 e 9.2 obtemos

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(-30°) + (-25)\operatorname{sen} 2(-30°)$$

$$= -25{,}8\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\frac{-80 - 50}{2}\operatorname{sen} 2(-30°) + (-25)\cos 2(-30°)$$

$$= -68{,}8\ \text{MPa}$$

Os sinais negativos indicam que $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ agem nas direções de x' e y' negativos, respectivamente. A Figura 9.7d mostra os resultados agindo no elemento.

Plano *BC*. De modo semelhante, as componentes de tensão que agem na face BC, Figura 9.7c, são obtidas usando $\theta = 60°$. Aplicando as equações 9.1 e 9.2*, obtemos

$$\sigma_{x'} = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(60°) + (-25)\operatorname{sen} 2(60°)$$

$$= -4{,}15\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80 - 50}{2}\operatorname{sen} 2(60°) + (-25)\cos 2(60°)$$

$$= 68{,}8\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Aqui, $\tau_{x'y'}$ foi calculada duas vezes, como confirmação. O sinal negativo para $\sigma_{x'}$ indica que essa tensão age na direção de x' negativo (Figura 9.7c). Os resultados são mostrados no elemento na Figura 9.7d.

* Como alternativa, poderíamos aplicar a Equação 9.3 com $\theta = -30°$ em vez da Equação 9.1.

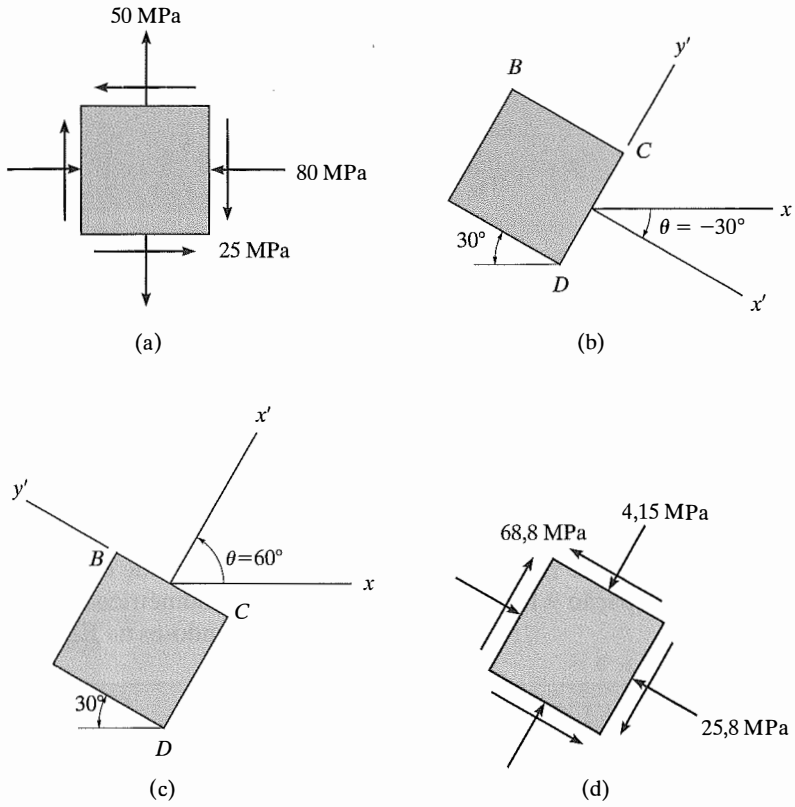


Figura 9.7

9.3 Tensões principais e tensão de cisalhamento máxima no plano

Pelas equações 9.1 e 9.2 podemos ver que $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ dependem do ângulo de inclinação θ dos planos nos quais essas tensões agem. Na prática da engenharia, muitas vezes é importante determinar a orientação dos planos que fazem com que a tensão normal seja máxima e mínima e a orientação dos planos que fazem com que a tensão de cisalhamento seja máxima. Nesta seção, consideraremos cada um desses problemas.

Tensões principais no plano. Para determinar a *tensão normal* máxima e mínima, temos que diferenciar a Equação 9.1 em relação a $\boldsymbol{\theta}$ e igualar o resultado a zero, o que dá

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2 \operatorname{sen} 2\theta) + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Resolvendo essa equação, obtemos a orientação $\theta = \theta_p$ dos planos da tensão normal máxima e mínima.

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \tag{9.4}$$

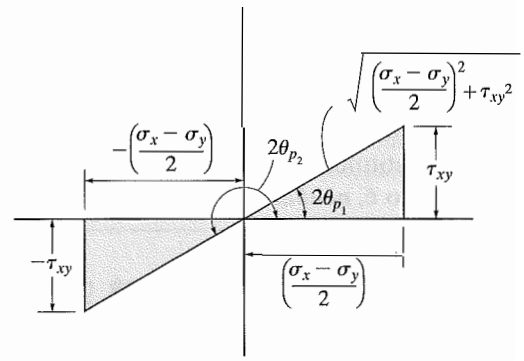


Figura 9.8

A solução tem duas raízes, θ_{p1} e θ_{p2}. Especificamente, os valores de $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ estão afastados um do outro por 180°, portanto, θ_{p1} e θ_{p2} estarão afastados por 90°.

Os valores de θ_{p1} e θ_{p2} devem ser substituídos na Equação 9.1, se quisermos obter as tensões normais exigidas. Podemos obter os necessários seno e cosseno de $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ pelos triângulos sombreados mostrados na Figura 9.8. A construção desses triângulos baseia-se na Equação 9.4, considerando que τ_{xy} e $(\sigma_x - \sigma_y)$ são ambas quantidades positivas ou ambas quantidades negativas. Temos, para θ_{p1},

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p1} = \tau_{xy} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\cos 2\theta_{p1} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

para θ_{p2},

$$\operatorname{sen} 2\theta_{p2} = -\tau_{xy} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\cos 2\theta_{p2} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Se qualquer desses dois conjuntos de relações trigonométricas for substituído na Equação 9.1 e simplificado, obteremos

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{9.5}$$

Dependendo do sinal escolhido, esse resultado dá a tensão normal máxima ou mínima no plano que age em um ponto, onde $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Esse conjunto particular de valores é denominado ***tensões principais*** no plano, e os planos correspondentes sobre os quais agem são denominados ***planos principais*** de tensão (Figura 9.9). Além do mais, se as relações trigonométricas para θ_{p1} e θ_{p2} forem substituídas na Equação 9.2, podemos ver que $\tau_{x'y'} = 0$; isto é, ***nenhuma tensão de cisalhamento age nos planos principais.***

Tensão de cisalhamento máxima no plano.

A orientação de um elemento cujas faces estão sujeitas à tensão de cisalhamento máxima pode ser determinada tomando-se a derivada da Equação 9.2 em relação a θ e igualando o resultado a zero. Isso dá

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \tag{9.6}$$

As duas raízes dessa equação, θ_{s1} e θ_{s2}, podem ser determinadas pelos triângulos sombreados mostrados na Figura 9.10. Por comparação com a Figura 9.8, cada raiz de $2\theta_s$ está a 90° de $2\theta_p$. Logo, as raízes θ_s e θ_p estão a 45° uma da outra, e o resultado é que ***os planos para tensão de cisalhamento máxima podem ser determinados orientando um elemento a 45° em relação à posição de um elemento que define os planos da tensão principal.***

Usando qualquer uma das raízes θ_{s1} ou θ_{s2}, podemos determinar a tensão de cisalhamento máxima tomando os valores trigonométricos de sen $2\theta_s$ e cos $2\theta_s$ da Figura 9.10 e substituindo-os na Equação 9.2. O resultado é

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{9.7}$$

O valor de $\tau_{\text{máx no plano}}$ calculado pela Equação 9.7 é denominado ***tensão de cisalhamento máxima no plano*** porque age sobre o elemento no plano x–y.

Substituindo os valores de sen $2\theta_s$ e cos $2\theta_s$ na Equação 9.1, vemos que também há uma tensão normal nos planos onde ocorre a tensão de cisalhamento máxima. Obtemos

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{9.8}$$

Como ocorre com as equações de transformação de tensão, pode ser conveniente programar essas equações em uma calculadora de bolso.

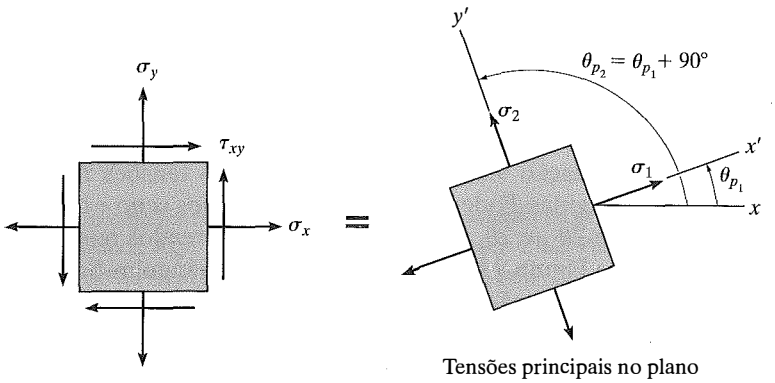


Figura 9.9

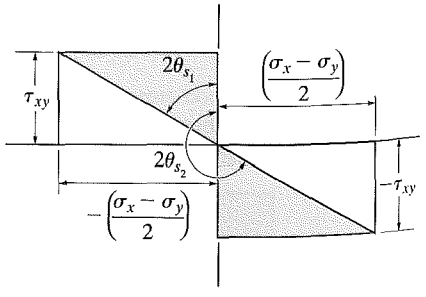


Figura 9.10

PONTOS IMPORTANTES

- As *tensões principais* representam a tensão normal máxima e a tensão normal mínima no ponto.
- Quando o estado de tensão é representado pelas tensões principais, *nenhuma tensão de cisalhamento* age sobre o elemento.
- O estado de tensão no ponto também pode ser representado como a *tensão de cisalhamento máxima no plano*. Nesse caso, uma *tensão normal média* também age no elemento.
- O elemento que representa a tensão de cisalhamento máxima no plano com as tensões normais médias associadas está *orientado a* 45° em relação ao elemento que representa as tensões principais.

EXEMPLO 9.3

Quando a carga de torção T é aplicada à barra na Figura 9.11a, ela produz um estado de tensão de cisalhamento puro no material. Determine (a) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada e (b) as tensões principais.

SOLUÇÃO

Pela convenção de sinal definida,

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -\tau$$

Tensão de cisalhamento máxima no plano. Pelas equações 9.7 e 9.8, temos

$$\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\tau)^2} = \pm\tau$$

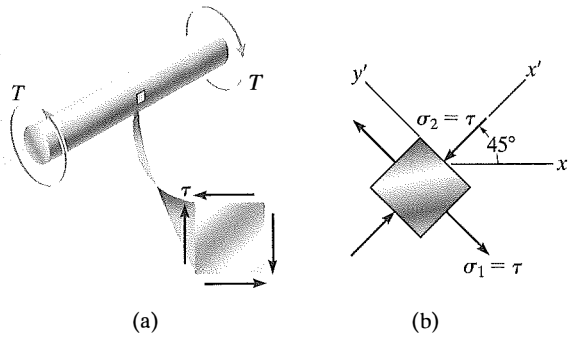
Resposta

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

Resposta

Assim, como esperado, a tensão de cisalhamento máxima no plano é representada pelo elemento na Figura 9.11a.

Foi constatado por métodos experimentais que materiais *dúcteis* falharão devido a *tensão de cisalhamento*. O resultado é que, se for aplicado um torque a uma barra feita de aço doce, a tensão de cisalhamento máxima no plano provocará a ruptura da barra.



(a) (b)

Figura 9.11

Tensão principal. Pelas equações 9.4 e 9.5 temos

$$\text{tg}\, 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-\tau}{(0 - 0)/2}, \quad \sigma_{p2} = 45°, \quad \sigma_{p1} = 135°$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

$$= 0 \pm \sqrt{(0)^2 + \tau^2} = \pm\tau$$

Resposta

Se agora aplicarmos a Equação 9.1 com $\theta_{p2} = 45°$, então

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta$$
$$= 0 + 0 + (-\tau)\,\text{sen}\, 90° = -\tau$$

Assim, $\sigma_2 = -\tau$ age em $\theta_{p2} = 45°$ como mostra a Figura 9.11b, e $\sigma_1 = \tau$ age na outra face, $\theta_{p1} = 135°$.

OBSERVAÇÃO: Materiais *frágeis* falham por conta da *tensão normal*. É por isso que, quando um material frágil, como o ferro fundido, é submetido à torção, falha sob tração à inclinação de 45°.

EXEMPLO 9.4

Quando a carga axial P é aplicada à barra na Figura 9.12a, produz uma tensão de tração no material. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada.

SOLUÇÃO

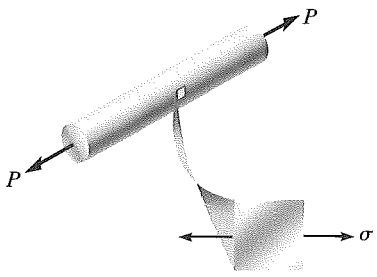
Pela convenção de sinal estabelecida,

$$\sigma_x = \sigma \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

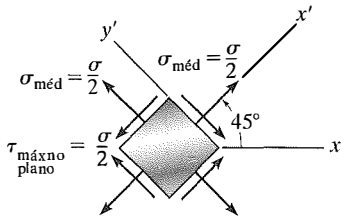
Tensão principal. Por observação, o elemento orientado como mostra a Figura 9.12a ilustra uma condição de tensão principal visto que nenhuma tensão de cisalhamento age nesse elemento. Isso também pode ser mostrado por substituição direta dos valores acima nas equações 9.4 e 9.5. Assim,

$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0$$

Resposta



(a)



(b)

Figura 9.12

Como estudos experimentais constataram que a tensão normal provoca falha em materiais frágeis, se a barra for feita de *material frágil*, como ferro fundido, a tensão normal provocará ruptura.

Tensão de cisalhamento máxima no plano. Pelas equações 9.6, 9.7, e 9.8, temos

$$\text{tg}\,2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(\sigma - 0)/2}{0};\ \theta_{s_1} = 45°,\ \theta_{s_2} = 135°$$

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + (0)^2} = \pm\frac{\sigma}{2}$$

Resposta

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2} \qquad \textit{Resposta}$$

Para determinar a orientação adequada do elemento, aplique a Equação 9.2.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\frac{\sigma - 0}{2}\,\text{sen}\,90° + 0 = -\frac{\sigma}{2}$$

Essa tensão de cisalhamento negativa age na face x', na direção de y' negativo, como mostra a Figura 9.12b.

OBSERVAÇÃO: Se a barra for feita de *material dúctil* como aço doce, então a tensão de cisalhamento provocará a ruptura da barra quando esta for submetida à tração.

EXEMPLO 9.5

O estado plano de tensão em um ponto sobre um corpo é mostrado no elemento na Figura 9.13a. Represente esse estado de tensão em termos das tensões principais.

SOLUÇÃO

Pela convenção de sinal estabelecida, temos

$$\sigma_x = -20\ \text{MPa} \qquad \sigma_y = 90\ \text{MPa} \qquad \tau_{xy} = 60\ \text{MPa}$$

Orientação de elemento. Aplicando a Equação 9.4, temos

$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{60}{(-20 - 90)/2}$$

Resolvendo e denominando essa raiz θ_{p2}, como mostraremos a seguir, obtemos

$$2\theta_{p2} = -47{,}49° \qquad \theta_{p2} = -23{,}7°$$

Como a diferença entre $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ é 180°, temos

$$2\theta_{p1} = 180° + 2\theta_{p2} = 132{,}51° \qquad \theta_{p1} = 66{,}3°$$

Lembre-se de que θ é positivo quando medido em *sentido anti-horário* do eixo x até a normal orientada para fora (eixo x') na face do elemento e, portanto, os resultados são os mostrados na Figura 9.13b.

Tensões principais. Temos

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

$$= 35{,}0 \pm 81{,}4$$

$$\sigma_1 = 116\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

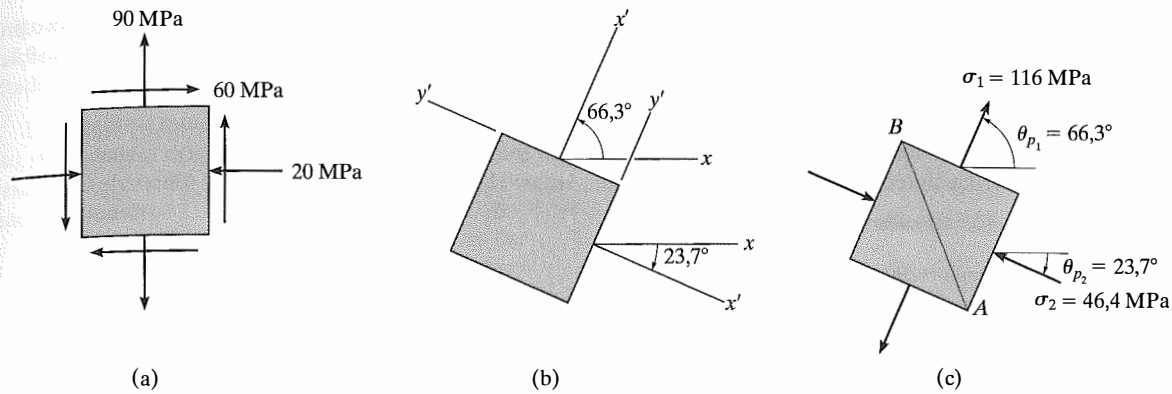
$$\sigma_2 = -46{,}4\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

O plano principal no qual cada tensão normal age pode ser determinado pela Equação 9.1 com, digamos, $\theta = \theta_{p2} = -23{,}7°$. Temos

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$= \frac{-20 + 90}{2} + \frac{-20 - 90}{2}\cos 2(-23{,}7°) + 60\,\text{sen}\,2(-23{,}7°)$$

$$= -46{,}4\ \text{MPa}$$



(a) (b) (c)

Figura 9.13

Por consequência, $\sigma_2 = -46{,}4$ MPa age no plano definido por $\theta_{p2} = -23{,}7°$, ao passo que $\sigma_{p1} = 116$ MPa age no plano definido por $\theta_{p1} = 66{,}3°$. Os resultados são mostrados no elemento na Figura 9.13c. Lembre-se de que nenhuma tensão de cisalhamento age nesse elemento.

EXEMPLO 9.6

O estado plano de tensão em um ponto sobre um corpo é representado no elemento mostrado na Figura 9.14a. Represente esse estado de tensão como a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada.

SOLUÇÃO

Orientação de elemento. Como $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = 90$ MPa e $\tau_{xy} = 60$ MPa e aplicando a Equação 9.6, temos

$$\text{tg}\,2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(-20 - 90)/2}{60}$$

$$2\theta_{s_2} = 42{,}5° \qquad \theta_{s_2} = 21{,}3°$$

$$2\theta_{s_1} = 180° + 2\theta_{s_2} \qquad \theta_{s_1} = 111{,}3°$$

Observe que esses ângulos mostrados na Figura 9.14b estão a 45° dos planos principais de tensão, que foram determinados no Exemplo 9.5.

Tensão de cisalhamento máxima no plano. Aplicando a Equação 9.7,

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

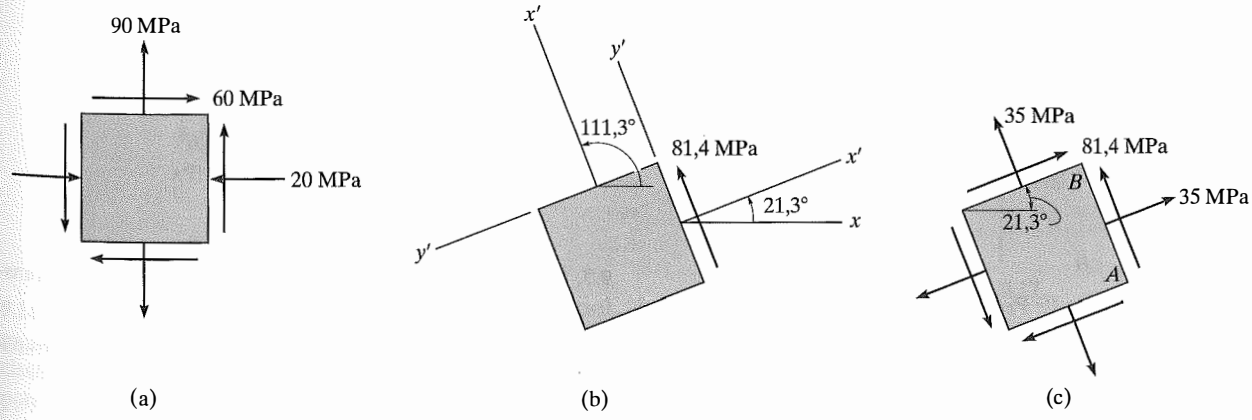
$$= 81{,}4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

A direção adequada de $\tau_{\text{máx no plano}}$ no elemento pode ser determinada considerando $\theta = \theta_{s2} = 21{,}3°$ e aplicando a Equação 9.2. Temos

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)\text{sen}\,2(21{,}3°) + 60\cos 2(21{,}3°)$$

$$= 81{,}4 \text{ MPa}$$



(a) (b) (c)

Figura 9.14

Assim, $\tau_{\text{máx no plano}} = \tau_{x'y'}$ age na direção de y' *positivo* nessa face ($\theta = 21{,}3°$). As tensões de cisalhamento nas outras três faces estão dirigidas como mostra a Figura 9.14c.

Tensão normal média. Além da tensão de cisalhamento máxima que calculamos, o elemento também está sujeito a uma tensão normal média determinada pela Equação 9.8; isto é,

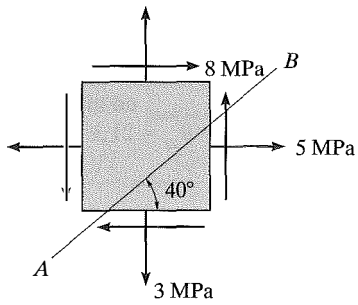
$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa é uma tensão de tração. Os resultados são mostrados na Figura 9.14c.

PROBLEMAS

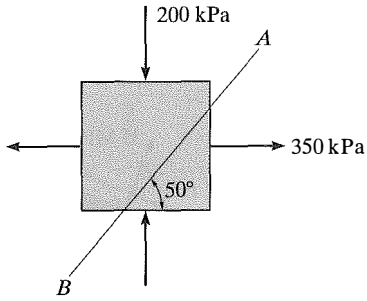
9.1. Prove que a soma das tensões normais $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_y'$ é constante. Veja figuras 9.2a e 9.2b.

9.2. O estado de tensão em um ponto em um elemento estrutural é mostrado no elemento. Determine as componentes de tensão que agem no plano inclinado *AB*. Resolva o problema usando o método do equilíbrio descrito na Seção 9.1.



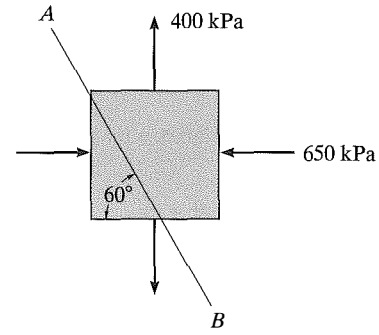
Problema 9.2

9.3. O estado de tensão em um ponto em um elemento estrutural é mostrado no elemento. Determine as componentes da tensão que agem no plano inclinado *AB*. Resolva o problema usando o método de equilíbrio descrito na Seção 9.1.



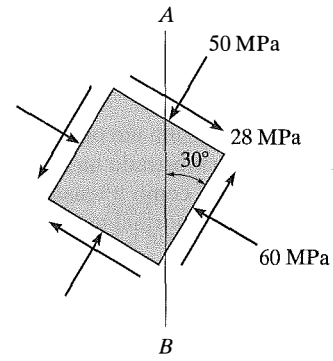
Problema 9.3

*9.4. O estado de tensão em um ponto em um elemento estrutural é mostrado no elemento. Determine as componentes da tensão que agem no plano inclinado *AB*. Resolva o problema usando o método de equilíbrio descrito na Seção 9.1.



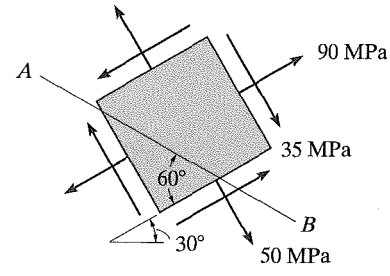
Problema 9.4

9.5. O estado de tensão em um ponto em um elemento estrutural é mostrado no elemento. Determine as componentes da tensão que agem no plano inclinado *AB*. Resolva o problema usando o método de equilíbrio descrito na Seção 9.1.



Problema 9.5

9.6. O estado de tensão em um ponto em um elemento estrutural é mostrado no elemento. Determine as componentes da tensão que agem no plano inclinado *AB*. Resolva o problema usando o método de equilíbrio descrito na Seção 9.1.



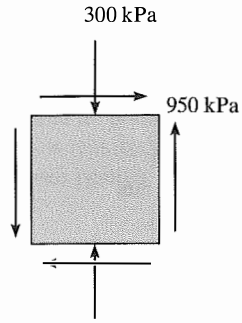
Problema 9.6

9.7. Resolva o Problema 9.2 usando as equações de transformação de tensão desenvolvidas na Seção 9.2.

*9.8. Resolva o Problema 9.4 usando as equações de transformação de tensão desenvolvidas na Seção 9.2.

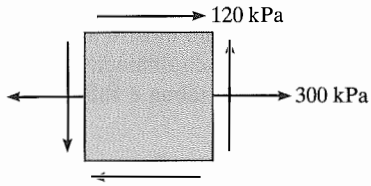
9.9. Resolva o Problema 9.6 usando as equações de transformação de tensão desenvolvidas na Seção 9.2. Mostre o resultado em um desenho.

9.10. Determine o estado de tensão equivalente em um elemento, se ele estiver orientado a 30° em sentido anti-horário em relação ao elemento mostrado. Use as equações de transformação de tensão.



Problema 9.10

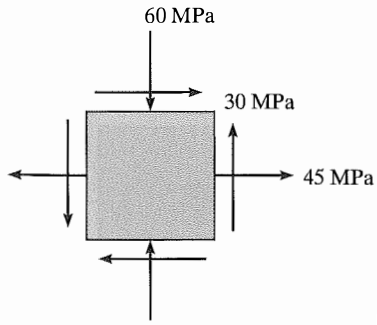
9.11. Determine o estado de tensão equivalente em um elemento, se ele estiver orientado a 60° em sentido horário em relação ao elemento mostrado.



Problema 9.11

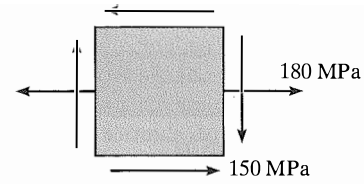
*__9.12.__ Resolva o Problema 9.6 usando as equações de transformação de tensão.

9.13. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



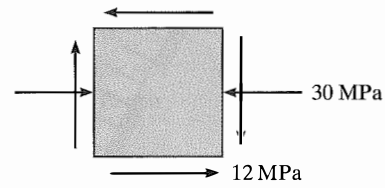
Problema 9.13

9.14. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



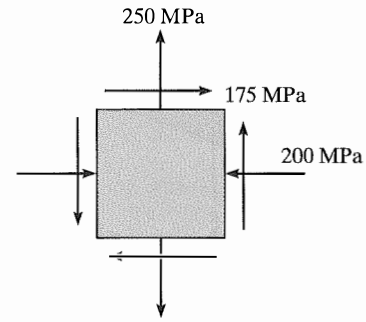
Problema 9.14

9.15. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



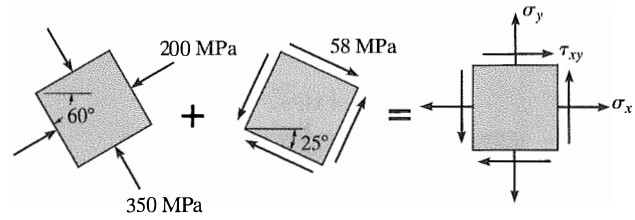
Problema 9.15

*__9.16.__ O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média no ponto. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



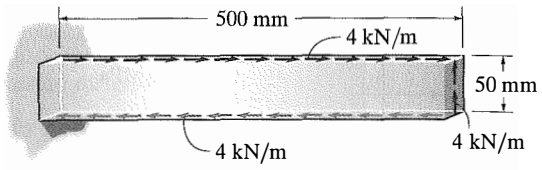
Problema 9.16

9.17. Um ponto sobre uma chapa fina está sujeito aos dois estados de tensão sucessivos mostrados na figura. Determine o estado de tensão resultante representado no elemento orientado como mostrado à direita.



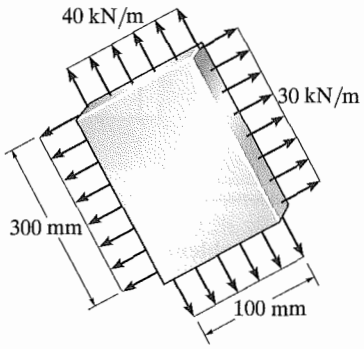
Problema 9.17

9.18. A barra de aço tem espessura de 12 mm e está sujeita à carga periférica mostrada na figura. Determine as tensões principais desenvolvidas na barra.



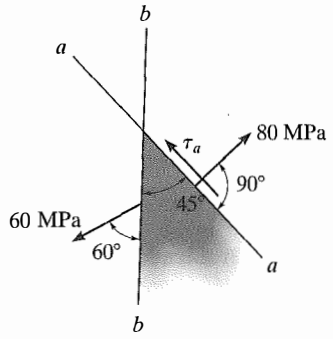
Problema 9.18

9.19. Uma placa de aço tem espessura de 10 mm e está sujeita à carga periférica mostrada na figura. Determine a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média desenvolvidas no aço.



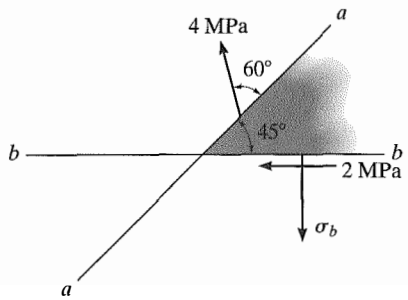
Problema 9.19

***9.20.** A tensão que age nos dois planos em um ponto é indicada na figura. Determine a tensão de cisalhamento no plano a–a e as tensões principais no ponto.



Problema 9.20

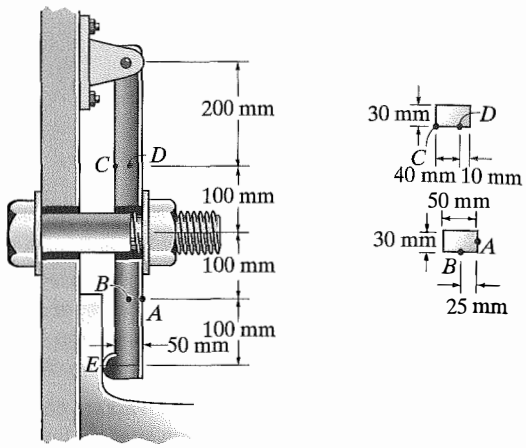
9.21. A tensão que age nos dois planos em um ponto é indicada na figura. Determine a tensão normal σ_b e as tensões principais no ponto.



Problema 9.21

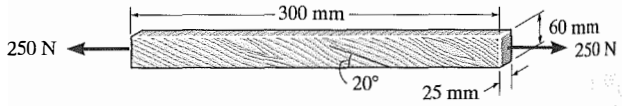
9.22. O grampo de fixação força a superfície lisa contra o ponto E quando o parafuso é apertado. Se a força de tração no parafuso for 40 kN, determine as tensões principais nos pontos A e B e mostre os resultados em elementos localizados em cada em um desses pontos. A área da seção transversal em A e B é mostrada na figura adjacente.

9.23. Resolva o Problema 9.22 para os pontos C e D.



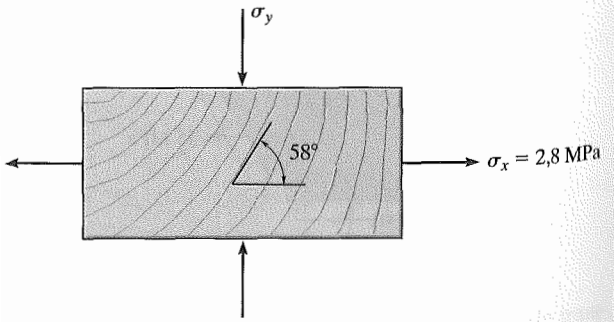
Problemas 9.22/23

***9.24.** As fibras da madeira da tábua formam um ângulo de 20° com a horizontal como mostra a figura. Determine a tensão normal e a tensão de cisalhamento que agem perpendicularmente às fibras, se a tábua é submetida a uma carga axial de 250 N.



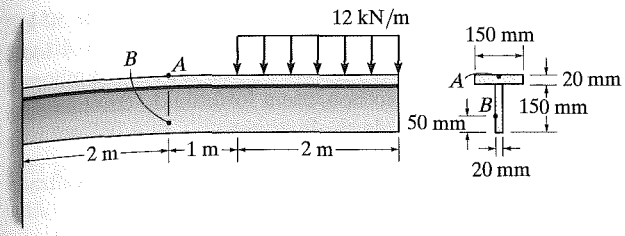
Problema 9.24

9.25. Um bloco de madeira falhará, se a tensão de cisalhamento que age ao longo da fibra for 3,85 MPa. Se a tensão normal $\sigma_x = 2{,}8$ MPa, determine a tensão de compressão σ_y necessária para provocar ruptura.



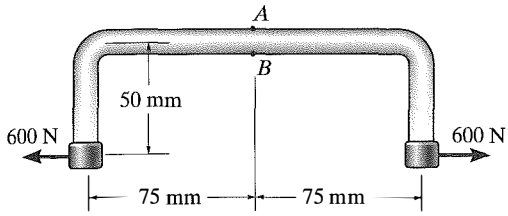
Problema 9.25

9.26. A viga T está sujeita ao carregamento distribuído aplicado ao longo de sua linha central. Determine as tensões principais nos pontos A e B e mostre os resultados em elementos localizados em cada um desses pontos.



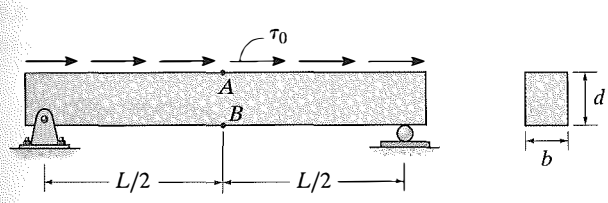
Problema 9.26

9.27. A haste curvada tem diâmetro de 15 mm e está sujeita à força de 600 N. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvidas no ponto A e no ponto B. Mostre os resultados em elementos adequadamente orientados nesses pontos.



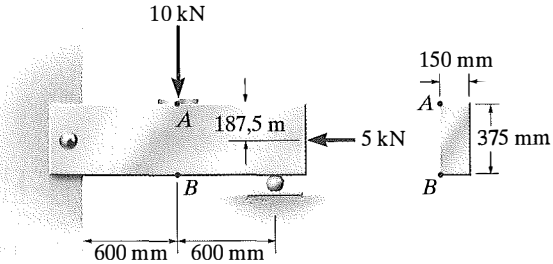
Problema 9.27

***9.28.** A superfície superior da viga simplesmente apoiada está sujeita à tensão de tração τ_0. Determine as tensões principais nos pontos A e B.



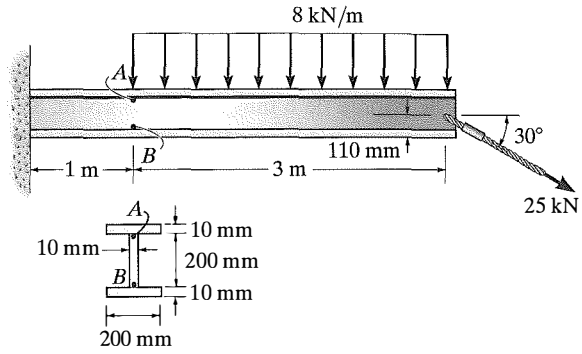
Problema 9.28

9.29. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita às cargas mostradas. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvidas no ponto A e no ponto B. Esses pontos estão imediatamente à esquerda da carga de 10 kN. Mostre os resultados em elementos adequadamente orientados localizados nesses pontos.



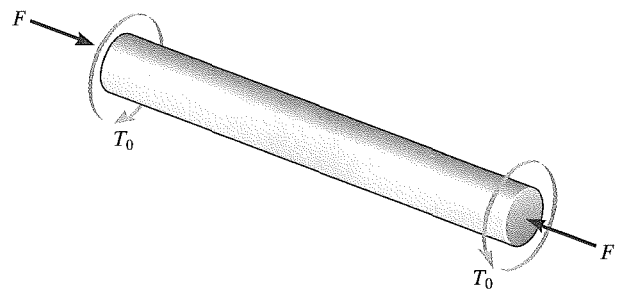
Problema 9.29

9.30. A viga de abas largas está sujeita às cargas mostradas. Determine a tensão principal na viga no ponto A e no ponto B. Esses pontos estão localizados na parte superior e na parte inferior da alma, respectivamente. Embora a precisão não seja muito boa, use a fórmula do cisalhamento para calcular a tensão de cisalhamento.



Problema 9.30

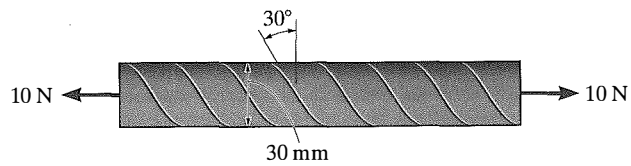
9.31. O eixo tem diâmetro d e está sujeito às cargas mostradas. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvida em qualquer lugar na superfície do eixo.



Problema 9.31

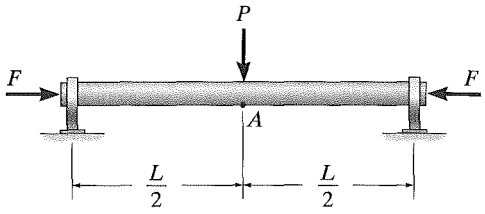
***9.32.** Um tubo de papel é formado enrolando-se uma tira de papel em espiral e colando as bordas como mostra a figura. Determine a tensão de cisalhamento que age ao longo da linha de junção localizada a 30° em relação à vertical, quando o tubo é submetido a uma força axial de 10 N. O papel tem 1 mm de espessura e o tubo tem diâmetro externo de 30 mm.

9.33. Resolva o Problema 9.32 para a tensão normal que age perpendicularmente à linha de junção.



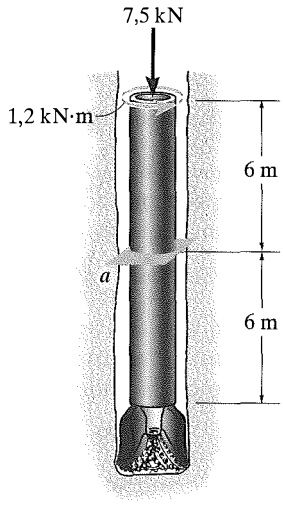
Problemas 9.32/33

9.34. O eixo tem diâmetro d e está sujeito às cargas mostradas. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvidas no ponto A. Os mancais suportam apenas reações verticais.



Problema 9.34

9.35. O tubo da perfuratriz tem diâmetro externo de 75 mm, espessura de parede de 6 mm e pesa 0,8 kN/m. Se for submetido a um torque e a uma carga axial como mostra a figura, determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano em um ponto sobre a sua superfície na seção *a*.

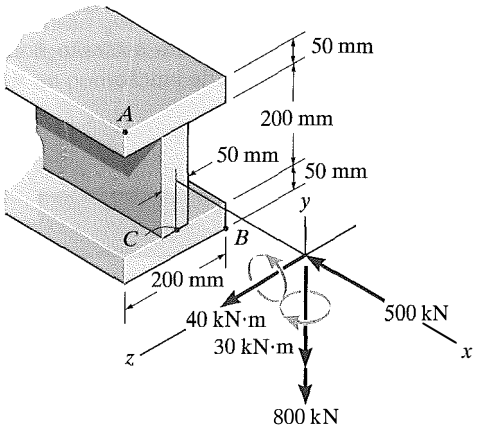


Problema 9.35

***9.36.** As cargas internas em uma seção da viga são mostradas na figura. Determine as tensões principais no ponto *A*. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

9.37. Resolva o Problema 9.36 para o ponto *B*.

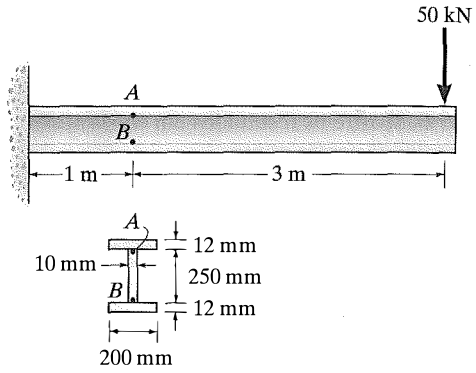
9.38. Resolva o Problema 9.36 para o ponto *C* localizado no centro na superfície inferior da alma.



Problemas 9.36/37/38

9.39. A viga de abas largas está sujeita à força de 50 kN. Determine as tensões principais na viga no ponto *A* localizado na *alma* na parte inferior da aba superior. Embora a precisão não seja muito boa, use a fórmula do cisalhamento para calcular a tensão de cisalhamento.

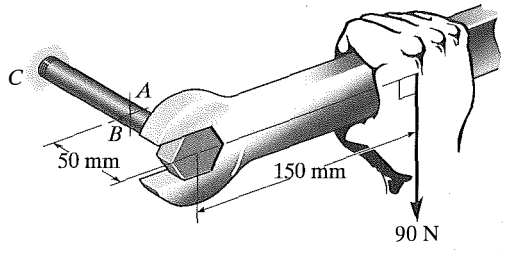
***9.40.** Resolva o Problema 9.39 para o ponto *B* localizado na *alma* na parte superior da aba inferior.



Problemas 9.39/40

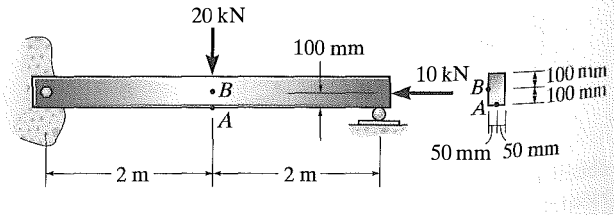
9.41. O parafuso está preso a seu suporte em *C*. Se aplicarmos uma força de 90 N à chave para apertá-lo, determine as tensões principais desenvolvidas na haste do parafuso no ponto *A*. Represente os resultados em um elemento localizado nesse ponto. A haste tem 6 mm de diâmetro.

9.42. Resolva o Problema 9.41 para o ponto *B*.



Problemas 9.41/42

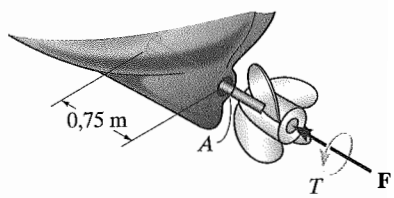
9.43. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita às cargas mostradas. Determine as tensões principais desenvolvidas no ponto *A* e no ponto *B*, localizado imediatamente à esquerda da carga de 20 kN. Mostre os resultados em elementos localizados nesses pontos.



Problema 9.43

*9.44. O eixo maciço da hélice de um navio estende-se para fora do casco. Em operação, ele gira a $\omega = 15$ rad/s quando o motor desenvolve 900 kW de potência, o que causa um impulso de $F = 1{,}23$ MN no eixo. Se o diâmetro externo do eixo for 250 mm, determine as tensões principais em qualquer ponto localizado na superfície do eixo.

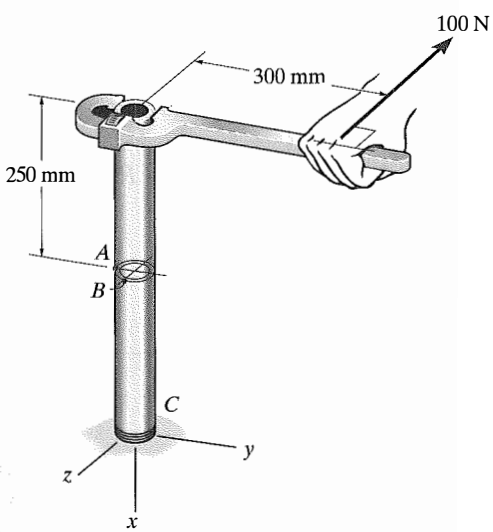
9.45. O eixo maciço da hélice de um navio estende-se para fora do casco. Em operação, ele gira a $\omega = 15$ rad/s quando o motor desenvolve 900 kW de potência, o que causa um impulso de $F = 1{,}23$ MN no eixo. Se o diâmetro externo do eixo for 250 mm, determine a tensão de cisalhamento máxima no plano em qualquer ponto localizado na superfície do eixo.



Problemas 9.44/45

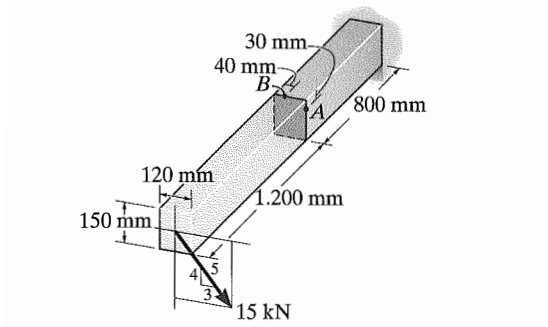
9.46. O tubo de aço tem diâmetro interno de 68 mm e diâmetro externo de 75 mm. Se estiver preso em C e for submetido à força horizontal de 100 N que age na extremidade do cabo da chave, determine as tensões principais no tubo no ponto A localizado na superfície do tubo.

9.47. Resolva o Problema 9.46 para o ponto B localizado na superfície do tubo.



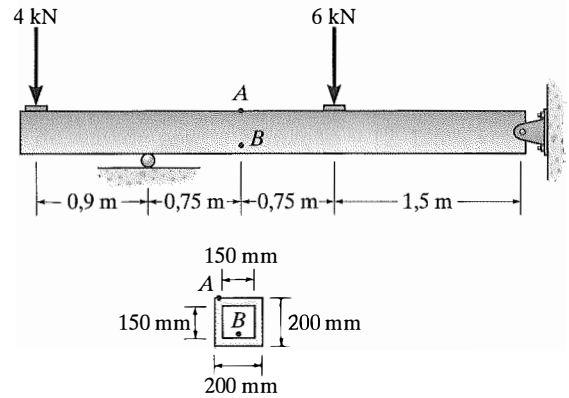
Problemas 9.46/47

*9.48. A extremidade da viga em balanço está sujeita à carga mostrada. Determine as tensões principais na viga nos pontos A e B.



Problema 9.48

9.49. A viga-caixão está sujeita às cargas mostradas na figura. Determine as tensões principais na viga nos pontos A e B.



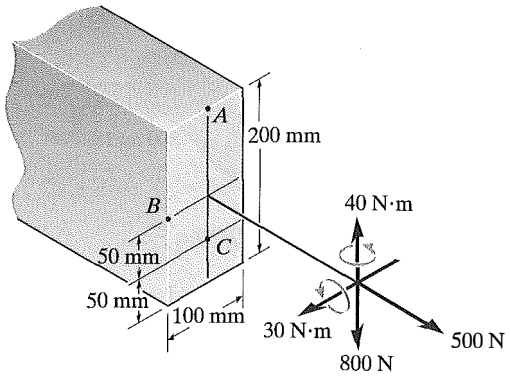
Problema 9.49

9.50. Uma barra tem seção transversal circular com diâmetro de 25 mm e está sujeita a torque e a momento fletor. No ponto de tensão de flexão máxima as tensões principais são 140 MPa e −70 MPa. Determine o torque e o momento fletor.

9.51. As cargas internas em uma seção da viga consistem em uma força axial de 500 N, uma força de cisalhamento de 800 N e duas componentes de momento de 30 N · m e 40 N · m. Determine as tensões principais no ponto A. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

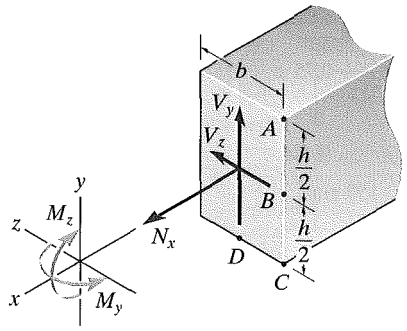
*9.52. As cargas internas em uma seção da viga consistem em uma força axial de 500 N, uma força de cisalhamento de 800 N e duas componentes de momento de 30 N · m e 40 N · m. Determine as tensões principais no ponto B. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

9.53. As cargas internas em uma seção da viga consistem em uma força axial de 500 N, uma força de cisalhamento de 800 N e duas componentes de momento de 30 N · m e 40 N · m. Determine as tensões principais no ponto C. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.



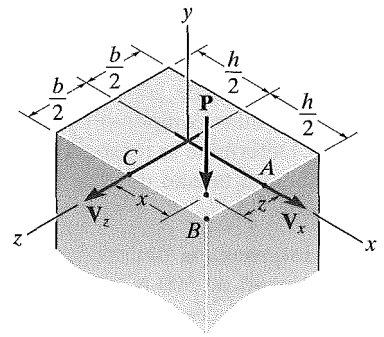
Problemas 9.51/52/53

9.54. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita às cargas mostradas na figura. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar as tensões principais nos pontos A, B, C e D. Mostre uma aplicação do código usando os valores $h = 300$ mm, $b = 200$ mm, $N_x = 2$ kN, $V_y = 1{,}5$ kN, $V_z = 0$, $M_y = 0$ e $M_z = -225$ N · m.



Problema 9.54

9.55. O elemento estrutural tem seção transversal retangular e está sujeito à carga mostrada na figura. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar as tensões principais nos pontos A, B e C. Mostre uma aplicação do código usando os valores $b = 150$ mm, $h = 200$ mm, $P = 1{,}5$ kN, $x = 75$ mm, $z = -50$ mm, $V_x = 300$ N, e $V_z = 600$ N.



Problema 9.55

9.4 Círculo de Mohr — tensão no plano

Nesta seção, mostraremos que as equações para transformação da tensão no plano têm uma solução gráfica que muitas vezes é conveniente usar e fácil de lembrar. Além do mais, essa abordagem nos permitirá 'visualizar' qual será a variação das componentes de tensão normal e tensão de cisalhamento $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ à medida que o plano em que agem é orientado em diferentes direções (Figura 9.15a).

As equações 9.1 e 9.2 podem ser reescritas na forma

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \tag{9.9}$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{9.10}$$

O parâmetro θ pode ser *eliminado* elevando cada equação ao quadrado e somando as duas equações. O resultado é

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Para um problema específico, σ_x, σ_y e τ_{xy} são *constantes conhecidas*. Assim, a equação acima pode ser escrita de uma forma mais compacta como

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{méd}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \tag{9.11}$$

onde

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{9.12}$$

Se definirmos eixos coordenados com σ *positiva para a direita e* τ *positiva para baixo* e então construirmos o gráfico da Equação 9.11, veremos que essa equação representa um *círculo* de raio R e centro no eixo σ no ponto $C(\sigma_{\text{méd}}, 0)$ (Figura 9.15b). Esse círculo é denominado *círculo de Mohr* porque foi desenvolvido pelo engenheiro alemão Otto Mohr.

Para construir o círculo de Mohr, em primeiro lugar é necessário definir os eixos σ e τ (Figura 9.16c). Como as componentes de tensão σ_x, σ_y, τ_{xy} são conhe-

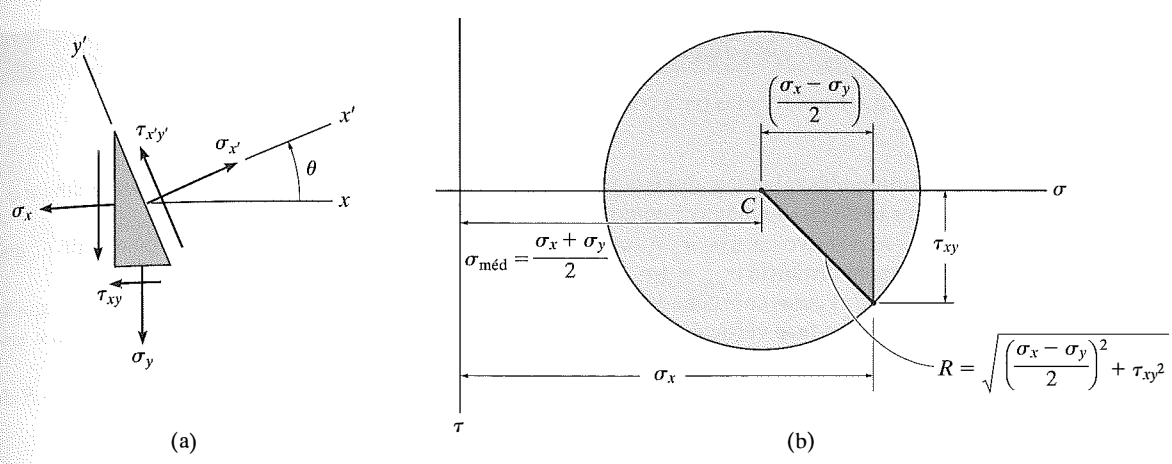


Figura 9.15

cidas, o centro do círculo pode ser marcado no gráfico $C(\sigma_{méd}, 0)$. Para obter o raio, precisamos conhecer no mínimo um ponto no círculo. Considere o caso em que o eixo x' coincide com o eixo x como mostra a Figura 9.16a. Então, $\theta = 0°$ e $\sigma_{x'} = \sigma_x$, $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$. Esse ponto será denominado 'ponto de referência' A e marcaremos suas coordenadas $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ na Figura 9.16c. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado, agora podemos determinar o raio R, que está de acordo com a Equação 9.12. Uma vez conhecidos os pontos C e A, o círculo pode ser obtido como mostra a figura.

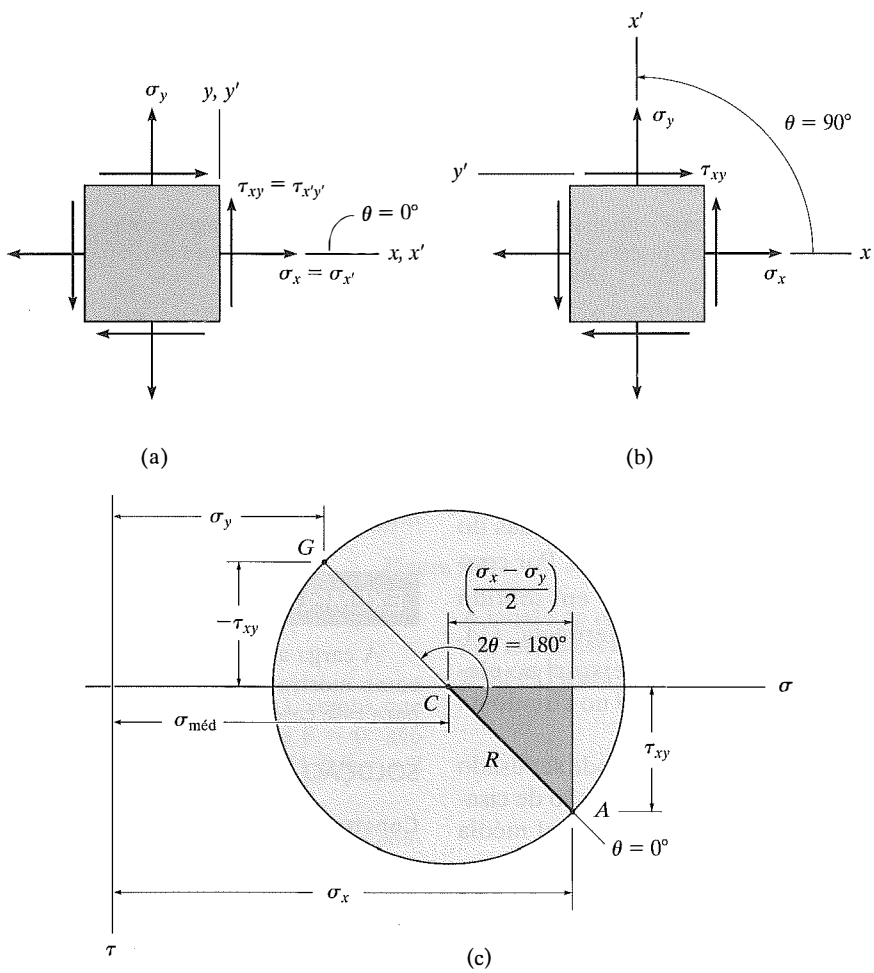


Figura 9.16

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

As seguintes etapas devem ser observadas para construir e usar o círculo de Mohr.

Construção do círculo

- Defina um sistema de coordenadas tal que a abscissa represente a tensão normal σ como *positiva para a direita* e a ordenada represente a tensão de cisalhamento τ como *positiva para baixo* (Figura 9.17a).*
- Usando a convenção de sinal positivo para $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$ como mostra a Figura 9.17b, marque o centro do círculo C, que está localizado no eixo σ a uma distância $\sigma_{méd} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ da origem (Figura 9.17a).
- Marque o 'ponto de referência' A cujas coordenadas são $A(\sigma_x, \tau_{xy})$. Esse ponto representa as componentes de tensão normal e de cisalhamento sobre a face vertical direita do elemento e, visto que o eixo x' coincide com o eixo x, isso representa $\theta = 0°$ (Figura 9.17b).
- Ligue o ponto A ao centro C do círculo e determine CA por trigonometria. Essa distância representa o raio R do círculo (Figura 9.17a).
- Uma vez determinado R, desenhe o círculo.

Tensão principal

- As tensões principais σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) são representadas pelos dois pontos B e D onde o círculo intercepta o eixo σ, isto é, onde $\tau = 0$ (Figura 9.17a).
- Essas tensões agem em planos definidos por ângulos θ_{p1} e θ_{p2} (Figura 9.17c). Elas são representadas no círculo por ângulos $2\theta_{p1}$ (mostrado) e $2\theta_{p2}$ (não mostrado) e são medidas *da* linha de referência radial *até* as linhas CB e CD, respectivamente.
- Usando trigonometria, somente um desses ângulos precisa ser calculado pelo círculo, já que θ_{p1} e θ_{p2} estão a 90° um do outro. Lembre-se de que a direção de rotação $2\theta_p$ no círculo (aqui, sentido anti-horário) representa a *mesma* direção de rotação θ_p do eixo de referência ($+x$) até plano da tensão principal, ($+x'$) (Figura 9.17c).*

Tensão de cisalhamento máxima no plano

- As componentes de tensão normal média e de tensão de cisalhamento máxima no plano são determinadas pelo círculo como as coordenadas do ponto E ou F (Figura 9.17a).
- Nesse caso, os ângulos θ_{s1} e θ_{s2} dão a orientação dos planos que contêm essas componentes (Figura 9.17d). O ângulo $2\theta_{s1}$ é mostrado na Figura 9.17a e pode ser determinado por trigonometria. Aqui, a rotação é em sentido horário e, portanto, θ_{s1} deve ser em sentido horário no elemento (Figura 9.17d).*

Tensões em um plano arbitrário

- As componentes de tensão normal e de tensão de cisalhamento $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ que agem sobre um plano específico definido pelo ângulo θ (Figura 9.17e), podem ser obtidas pelo círculo usando trigonometria para determinar as coordenadas de ponto P (Figura 9.17a).
- Para localizar P, o ângulo conhecido θ para o plano (nesse caso, em sentido anti-horário) (Figura 9.17e), deve ser medido no círculo na *mesma direção* 2θ (sentido anti-horário), *da* linha de referência *radial* CA *até* a linha radial CP (Figura 9.17a).*

Agora, considere girar o eixo x' de 90° no sentido anti-horário (Figura 9.16b). Nesse caso, $\sigma_{x'} = \sigma_y, \tau_{x'y'} = -\tau_{xy}$. Esses valores são as coordenadas do ponto $G(\sigma_y, -\tau_{xy})$ no círculo (Figura 9.16c). Por consequência, a linha radial CG está a 180° em sentido anti-horário em relação à 'linha de referência' CA. Em outras palavras, uma rotação θ do eixo x' no elemento corresponderá a uma rotação 2θ no círculo na *mesma direção*.*

Uma vez definido, o círculo de Mohr pode ser usado para determinar as tensões principais, a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada, ou a tensão em qualquer plano arbitrário. O método para fazer isso é explicado no *procedimento de análise a seguir.*

EXEMPLO 9.7

A carga axial P produz o estado de tensão no material como mostra a Figura 9.18a. Construa o círculo de Mohr para esse caso.

SOLUÇÃO

Construção do círculo. Pela Figura 9.18a,

$$\sigma_x = \sigma \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

Os eixos σ e σ estão definidos na Figura 9.18b. O centro do círculo C encontra-se no eixo σ em

* Se, ao contrário, construíssemos o eixo τ *positivo para cima*, então o ângulo 2θ no círculo seria medido na *direção oposta* à orientação θ do plano.

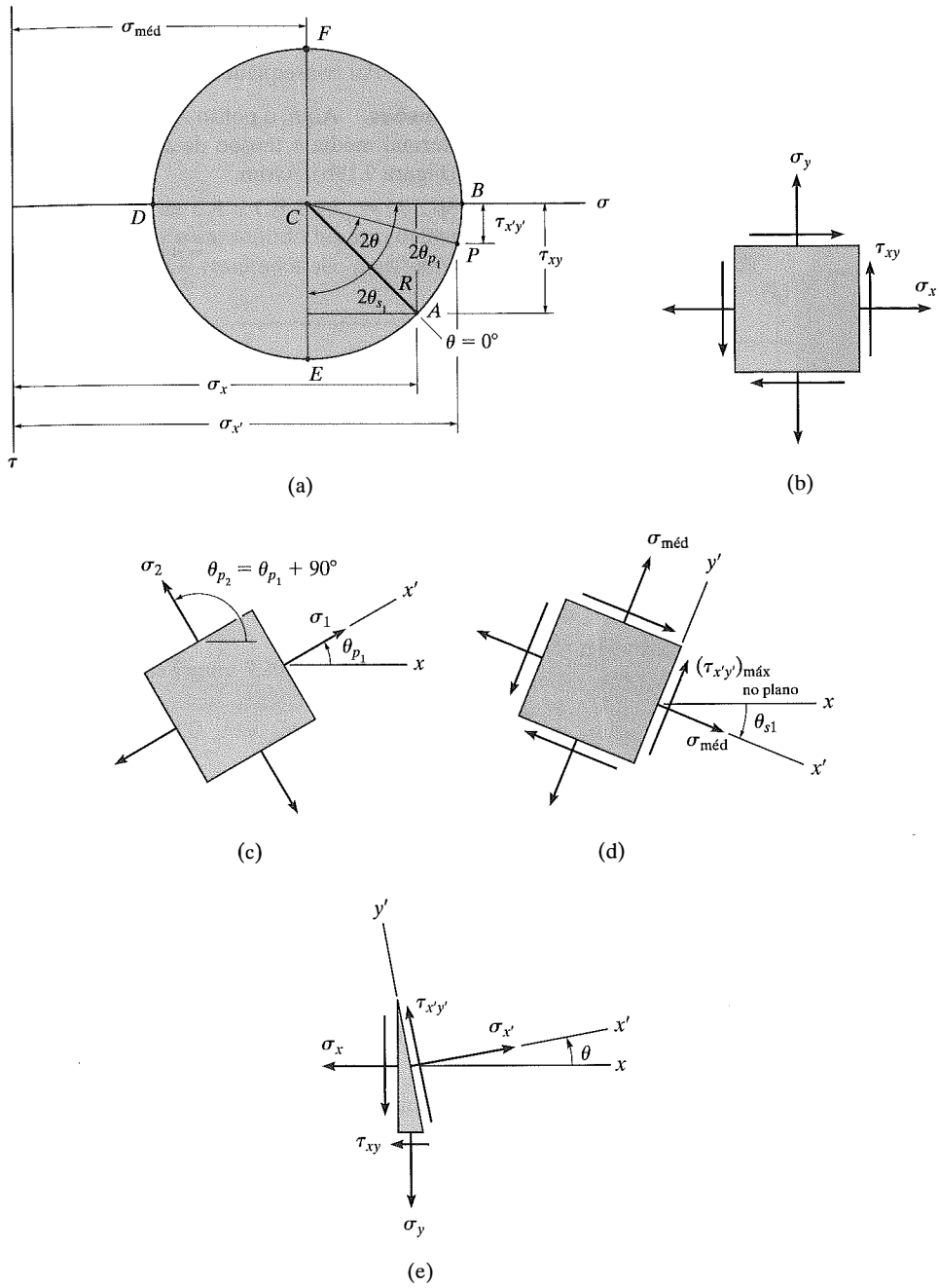


Figura 9.17

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

Pela face direita do elemento (Figura 9.18a), vemos que as coordenadas do ponto de referência para $\theta = 0°$ são $A(\sigma, 0)$. Por consequência, o raio do círculo CA é $R = \sigma/2$ (Figura 9.18b).

Tensões. Observe que as tensões principais estão nos pontos A e D.

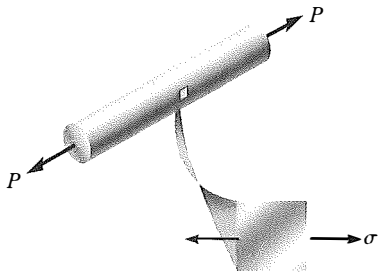
$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0$$

O elemento na Figura 9.18a representa esse estado de tensão principal.

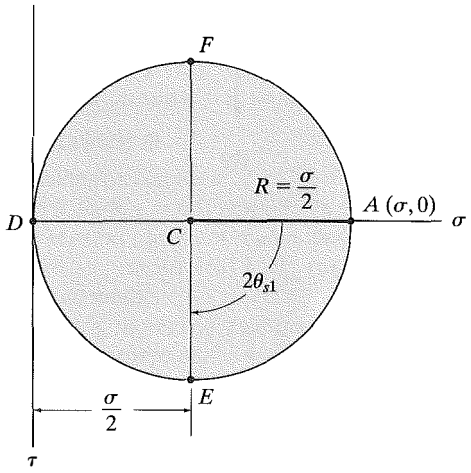
A tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média associada são identificadas no círculo como ponto E ou F (Figura 9.*18*b). Em E temos

$$\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = \frac{\sigma}{2}$$
$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma}{2}$$

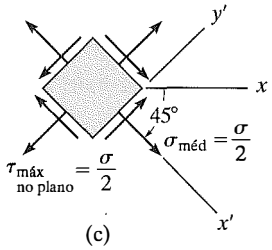
Por observação, o ângulo em sentido horário $2\theta_{s1} = 90°$. Portanto, $\theta_{s1} = 45°$, de modo que o eixo x' está orientado a 45° em sentido horário em relação ao eixo x (Figura 9.18c). Como E tem coordenadas positivas, então $\sigma_{méd}$ e $\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}}$ agem nas direções x' e y' positivas, respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 9.18

EXEMPLO 9.8

A carga de torção T produz o estado de tensão no eixo como mostra a Figura 9.19a. Construa o círculo de Mohr para esse caso.

SOLUÇÃO

Construção do círculo. Pela Figura 9.19a,

$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -\tau$$

Os eixos σ e τ estão definidos na Figura 9.19b. O centro do círculo C encontra-se no eixo σ em

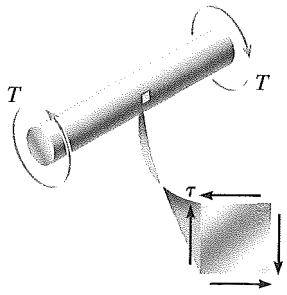
$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

Pela face direita do elemento (Figura 9.19a), as coordenadas do ponto de referência para $\theta = 0°$ são $A(0, -\tau)$ (Figura 9.19b). Por consequência, o raio CA é $R = \tau$.

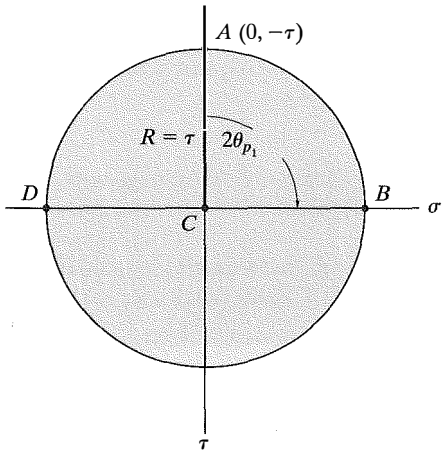
Tensões. Aqui, o ponto A representa um ponto de tensão normal média e tensão de cisalhamento máxima no plano (Figura 9.19b). Assim,

$$\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = -\tau$$

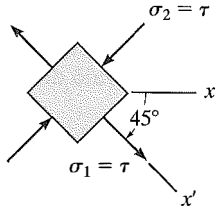
$$\sigma_{méd} = 0$$



(a)



(b)



(c)

Figura 9.19

As tensões principais são identificadas como pontos B e D no círculo. Assim,

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = -\tau$$

O ângulo em sentido horário de CA a CB é $2\theta_{p1} = 90°$, de modo que $\theta_{p1} = 45°$. Esse ângulo em sentido horário define a direção de σ_1 (ou o eixo x'). Os resultados são mostrados na Figura 9.19c.

EXEMPLO 9.9

Devido à carga aplicada, o elemento no ponto A sobre o cilindro maciço na Figura 9.20a está sujeito ao estado de tensão mostrado na figura. Determine as tensões principais que agem nesse ponto.

SOLUÇÃO

Construção do círculo. Pela Figura 9.20a,

$$\sigma_x = -12\ \text{MPa} \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 26\ \text{MPa}$$

O centro do círculo encontra-se em

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{-12 + 0}{2} = -6\ \text{MPa}$$

O ponto inicial $A(-12, -6)$ e o centro $C(-6, 0)$ são marcados na Figura 9.20b. O círculo é construído com raio

$$R = \sqrt{(12 - 6)^2 + (6)^2} = 8{,}49\ \text{MPa}$$

Tensões principais. As tensões principais são indicadas pelas coordenadas dos pontos B e D. Temos, para $\sigma_1 > \sigma_2$,

$$\sigma_1 = 8{,}49 - 6 = 2{,}49\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_2 = -6 - 8{,}49 = -14{,}5\ \text{MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

A orientação do elemento pode ser determinada pelo cálculo do ângulo em *sentido anti-horário* $2\theta_{p2}$ na Figura 9.20b, que define a direção θ_{p2} de σ_2 e seu plano principal associado. Temos

$$2\theta_{p_2} = \text{tg}^{-1}\frac{6}{(12 - 6)} = 45{,}0°$$

$$\theta_{p_2} = 22{,}5°$$

O elemento está orientado de modo tal que o eixo x' ou σ_2 está dirigido a 22,5° em *sentido anti-horário* em relação à horizontal (eixo x) como mostra a Figura 9.20c.

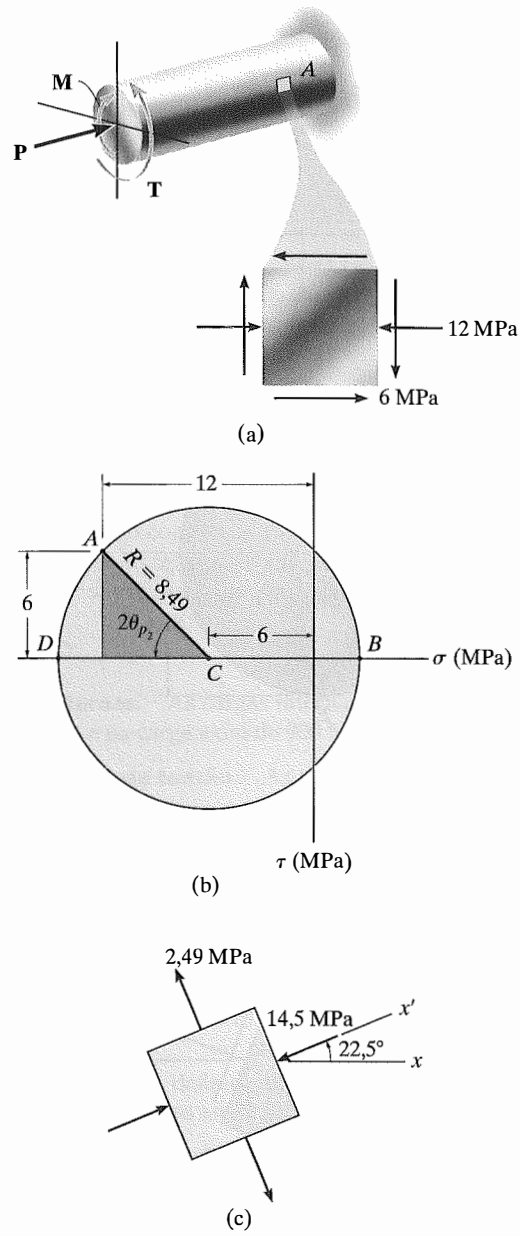


Figura 9.20

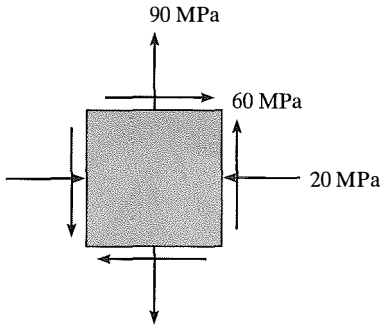
EXEMPLO 9.10

O estado plano de tensão em um ponto é mostrado no elemento na Figura 9.21a. Determine a tensão de cisalhamento máxima no plano e a orientação do elemento sobre o qual ela age.

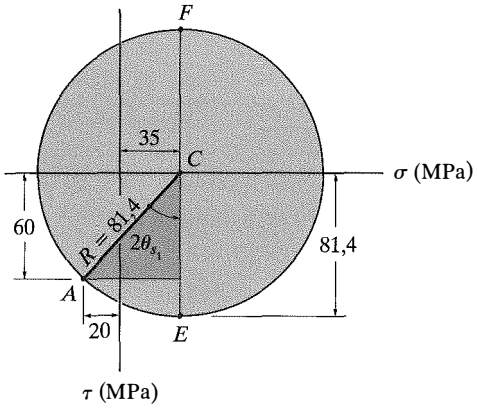
SOLUÇÃO

Construção do círculo. Pelos dados do problema,

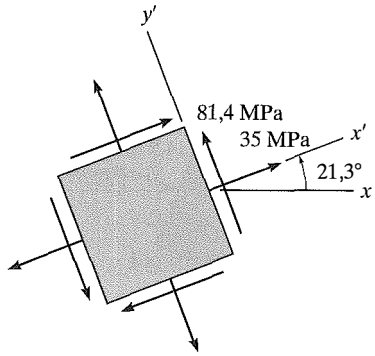
$$\sigma_x = -20\ \text{MPa} \qquad \sigma_y = 90\ \text{MPa} \qquad \tau_{xy} = 60\ \text{MPa}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 9.21

Os eixos σ, τ estão definidos na Figura 9.21b. O centro do círculo C está localizado sobre o eixo σ, no ponto

$$\sigma_{méd} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

O ponto C e o ponto de referência $A(-20, 60)$ são marcados. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado para determinar o raio do círculo CA, temos

$$R = \sqrt{(60)^2 + (55)^2} = 81{,}4 \text{ MPa}$$

Tensão de cisalhamento máxima no plano. A tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média são identificadas pelo ponto E ou F no círculo. Em particular, as coordenadas do ponto $E(35,81{,}4)$ dão

$$\tau_{\substack{máx \\ no\ plano}} = 81{,}4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{méd} = 35 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

O ângulo em *sentido anti-horário* θ_{s_1} pode ser determinado pelo círculo, identificado como $2\theta_{s_1}$. Temos

$$2\theta_{s_1} = \text{tg}^{-1}\left(\frac{20 + 35}{60}\right) = 42{,}5°$$

$$\theta_{s_1} = 21{,}3° \qquad \textit{Resposta}$$

Esse ângulo em *sentido anti-horário* define a direção do eixo x' (Figura 9.21c). Como o ponto E tem *coordenadas positivas,* ambas, a tensão normal média e a tensão de cisalhamento máxima no plano, agem nas direções x' e y' *positivas* como mostra a figura.

EXEMPLO 9.11

O estado plano de tensão em um ponto é mostrado no elemento na Figura 9.22a. Represente esse estado de tensão em um elemento orientado a 30° em sentido anti-horário em relação à posição mostrada na figura.

SOLUÇÃO

Construção do círculo. Pelos dados do problema,

$$\sigma_x = -8 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 12 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = -6 \text{ MPa}$$

Os eixos σ, τ estão definidos na Figura 9.21b. O centro do círculo C está localizado sobre o eixo σ em

$$\sigma_{méd} = \frac{-8 + 12}{2} = 2 \text{ MPa}$$

As coordenadas do ponto inicial para $\theta = 0°$ são $A(-8, -6)$. Por consequência, pelo triângulo sombreado, o raio CA é

$$R = \sqrt{(10)^2 + (6)^2} = 11{,}66$$

Tensões no elemento a 30°. Como o elemento deve sofrer rotação de 30° em *sentido anti-horário*, temos de traçar a linha radial CP, $2(30°) = 60°$ em *sentido anti-horário*, medida em relação a $CA(\theta = 0°)$ (Figura 9.22b). Agora, temos de obter as coordenadas do ponto $P(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$. Pela geometria do círculo,

$$\phi = \text{tg}^{-1}\frac{6}{10} = 30{,}96° \qquad \psi = 60° - 30{,}96° = 29{,}04°$$

$$\sigma_{x'} = 2 - 11{,}6 \cos 29{,}04° = -8{,}20 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\tau_{x'y'} = 11{,}66 \text{ sen } 29{,}04° = 5{,}66 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

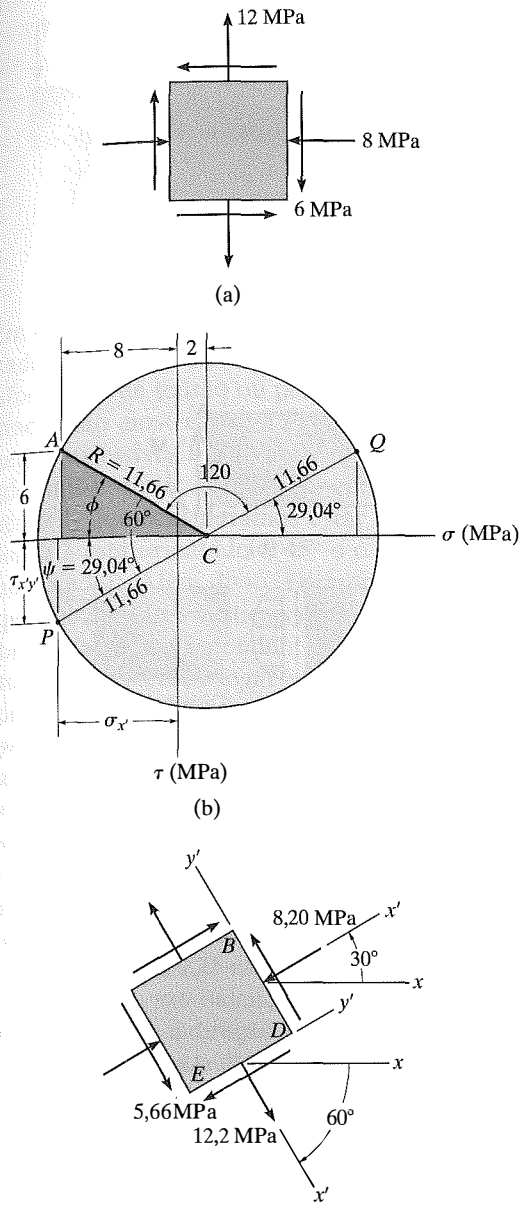


Figura 9.22

Essas duas componentes de tensão agem na face BD do elemento mostrado na Figura 9.22c, visto que o eixo x' para essa face está orientado a 30° em sentido anti-horário em relação ao eixo x.

As componentes de tensão que agem na face adjacente DE do elemento, que está a 60° *em sentido horário* em relação ao eixo x positivo (Figura 9.22c), são representadas pelas coordenadas do ponto Q no círculo. Esse ponto encontra-se na linha radial CQ, que está a 180° em relação a CP. As coordenadas do ponto Q são

$$\sigma_{x'} = 2 + 11{,}66 \cos 29{,}04° = 12{,}2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -(11{,}66 \operatorname{sen} 29{,}04°) = -5{,}66 \text{ MPa (confirme)} \quad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Aqui, $\tau_{x'y'}$ age na direção $-y'$.

9.5 Tensão em eixos provocada por carga axial e torção

Às vezes, eixos circulares estão sujeitos aos efeitos combinados de carga axial e torção. Contanto que o material permaneça linear elástico e esteja sujeito apenas a pequenas deformações, podemos usar o princípio da superposição para obter a tensão resultante no eixo provocada por ambas as cargas. Desse modo, as tensões principais podem ser determinadas por meio das equações de transformação de tensão ou pelo círculo de Mohr.

EXEMPLO 9.12

Uma força axial de 900 N e um torque de 2,50 N · m são aplicados ao eixo como mostra a Figura 9.23a. Se o diâmetro do eixo for 40 mm, determine as tensões principais em um ponto P sobre sua superfície.

SOLUÇÃO

Cargas internas. As cargas internas consistem no torque de 2,50 N·m e na carga axial de 900 N (Figura 9.23b).

Componentes de tensão. As tensões produzidas no ponto P são, portanto,

$$\tau = \frac{Tc}{J} = \frac{2{,}50 \text{ N} \cdot \text{m}(0{,}02 \text{ m})}{\frac{\pi}{2}(0{,}02 \text{ m})^4} = 198{,}9 \text{ kPa}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{900 \text{ N}}{\pi(0{,}02 \text{ m})^2} = 716{,}2 \text{ kPa}$$

O estado de tensão definido por essas duas componentes é mostrado no elemento em P na Figura 9.23c.

Tensões principais. As tensões principais podem ser determinadas pelo círculo de Mohr (Figura 9.23d). Aqui, o centro do círculo C encontra-se no ponto

$$\sigma_{méd} = \frac{0 + 716{,}2}{2} = 358{,}1 \text{ kPa}$$

Marcando o ponto C (358,1, 0) e o ponto de referência A (0, 198,9), vemos que o raio do círculo é R = 409,7. As tensões principais são representadas pelos pontos B e D. Portanto,

$$\sigma_1 = 358{,}1 + 409{,}7 = 767{,}7 \text{ kPa} \quad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_2 = 358{,}1 - 409{,}7 = -51{,}5 \text{ kPa} \quad \textit{Resposta}$$

O ângulo em sentido horário $2\theta_{p2}$ pode ser determinado pelo círculo. Ele é $2\theta_{p2} = 29{,}1°$. O elemento está orientado de modo tal que o eixo x' ou σ_2 está dirigido no sentido horário $\theta_{p1} = 14{,}5°$ em relação ao eixo x como mostra a Figura 9.23e.

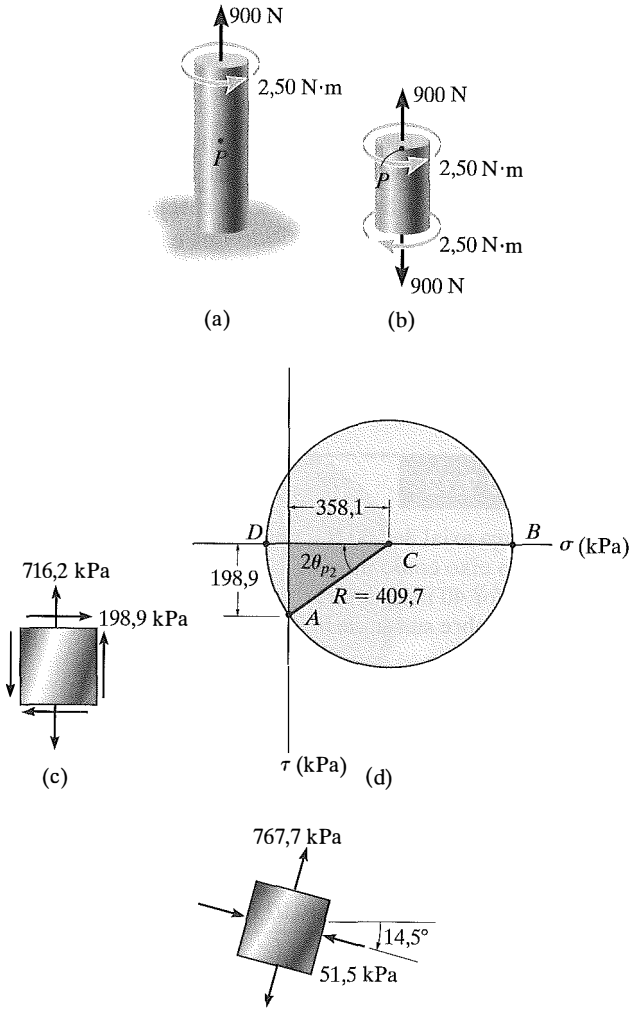


Figura 9.23

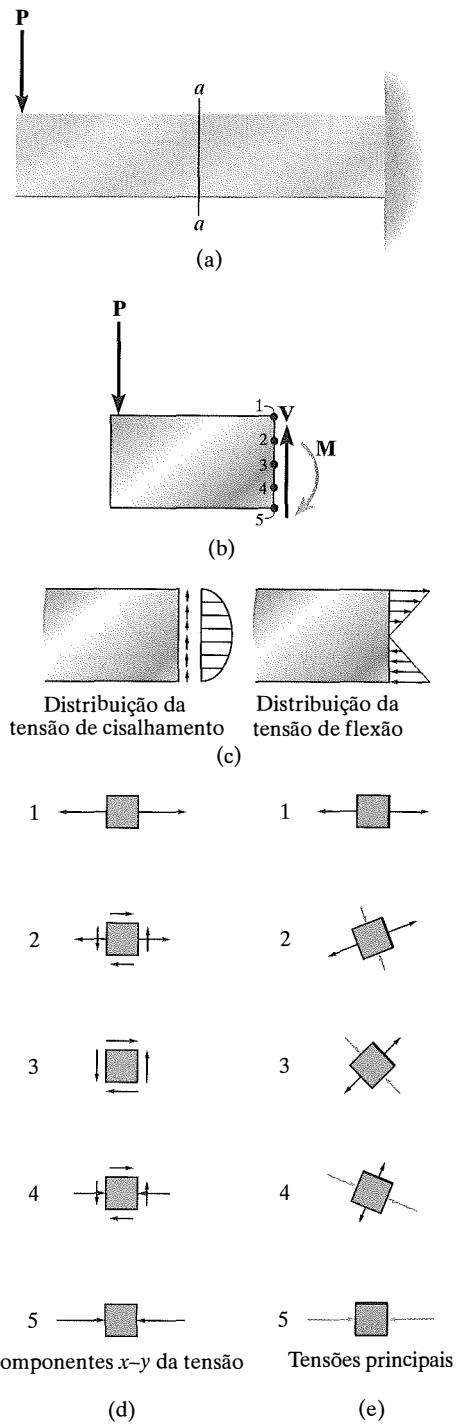
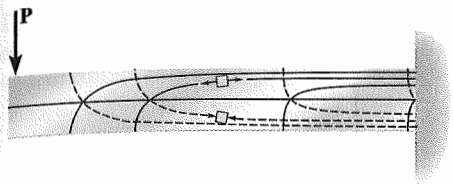


Figura 9.24

9.6 Variações de tensão ao longo de uma viga prismática

Como as vigas resistem a cargas internas de cisalhamento e momento, sua análise de tensão requer a aplicação das fórmulas do cisalhamento e da flexão. Aqui, discutiremos os resultados gerais obtidos quando essas equações são aplicadas a vários pontos de uma viga em balanço que tem seção transversal retangular e suporta uma carga **P** em sua extremidade (Figura 9.24a).

Em geral, em uma seção arbitrária *a–a* ao longo do eixo da viga (Figura 9.24b), o cisalhamento interno **V** e o momento **M** são desenvolvidos de uma distribuição de tensão de cisalhamento *parabólica* e uma distribuição de tensão normal *linear* (Figura 9.24c). O resultado é que as tensões que agem sobre elementos localizados nos pontos 1 a 5 ao longo da seção serão como mostra a Figura 9.24d. Observe que os elementos 1 e 5 estão sujeitos apenas à tensão normal máxima, ao passo que o elemento 3, que está sobre o eixo neutro, está sujeito apenas à tensão de cisalhamento máxima. Os elementos intermediários 2 e 4 resistem a *ambas*, tensão normal e tensão de cisalhamento.



Trajetórias das tensões para uma viga em balanço

Figura 9.25

Em cada caso, o estado de tensão pode ser transformado em *tensões principais* pelas equações de transformação de tensão ou pelo círculo de Mohr. Os resultados são mostrados na Figura 9.24e. Aqui, cada elemento sucessivo, 1 a 5, sofre uma orientação no sentido anti-horário. Especificamente em relação ao elemento 1, que consideramos estar na posição 0°, o elemento 3 está orientado a 45° e o elemento 5 está orientado a 90°. Além disso, a *tensão de tração máxima*, que age nas faces verticais do elemento 1 torna-se menor nas faces correspondentes de cada um dos elementos sucessivos, até chegar a zero nas faces horizontais do elemento 5. De modo semelhante, a *tensão de compressão máxima* nas faces verticais do elemento 5 reduz-se a zero nas faces horizontais do elemento 1.

Se essa análise for estendida a muitas seções verticais ao longo da viga, exceto a seção *a–a*, um perfil dos resultados poderá ser representado por curvas denominadas *trajetórias de tensão*. Cada uma dessas curvas indica a *direção* de uma tensão principal que tem valor constante. A Figura 9.25 mostra algumas dessas trajetórias para a viga em balanço. Nessa figura, as linhas cheias representam a direção das tensões principais de tração e as tracejadas, a direção das tensões principais de compressão. Como esperado, as linhas interceptam o eixo neutro a ângulos de 45°, e as linhas cheias e tracejadas sempre se interceptam a 90°. Por quê? Saber qual é a direção dessas linhas pode ajudar os engenheiros a decidir onde reforçar uma viga de modo que ela não falhe nem se torne instável.

EXEMPLO 9.13

A viga mostrada na Figura 9.26a está sujeita ao carregamento distribuído $w = 120$ kN/m. Determine as tensões principais na viga no ponto P, que se encontra na parte superior da alma. Despreze o tamanho dos filetes e as concentrações de tensão nesse ponto. $I = 67{,}4(10^{-6})\text{m}^4$.

SOLUÇÃO

Cargas internas. A reação de apoio sobre a viga em B é determinada, e o equilíbrio da viga secionada mostrado na Figura 9.26b produz

$$V = 84\text{ kN} \qquad M = 30{,}6\text{ kN·m}$$

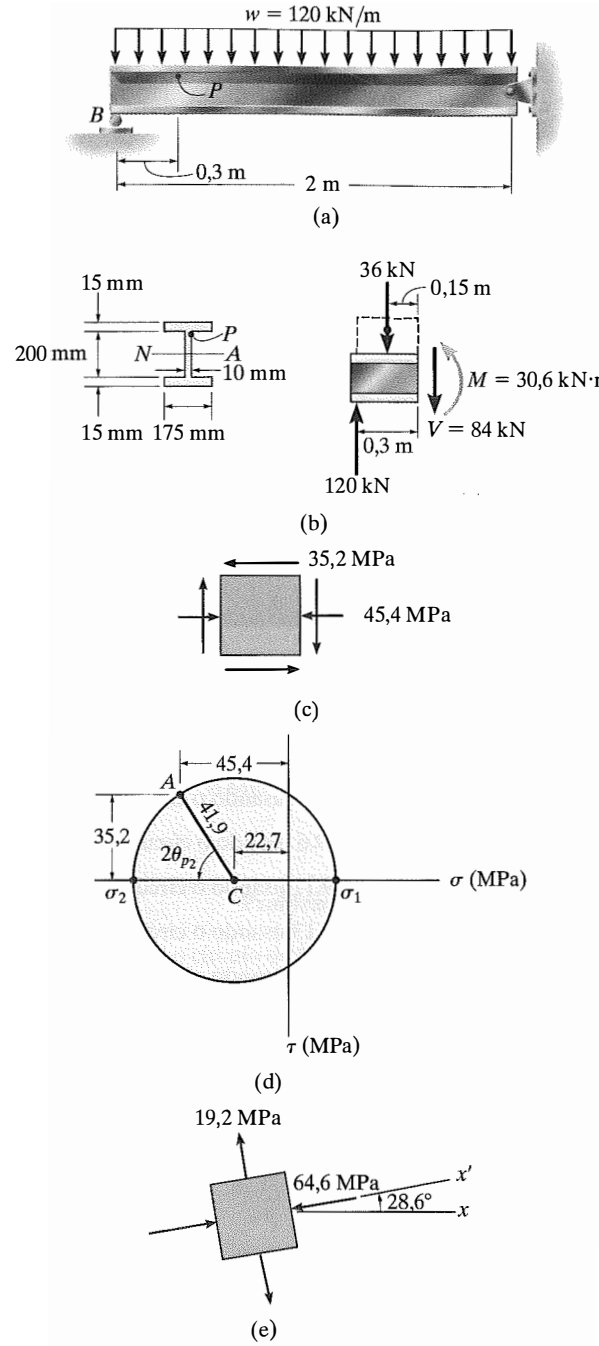


Figura 9.26

Componentes de tensão. No ponto P,

$$\sigma = \frac{-My}{I} = \frac{30{,}6(10^3)\text{ N}\cdot\text{m}(0{,}100\text{ m})}{67{,}4(10^{-6})\text{ m}^4} = -45{,}4\text{ MPa}$$

Resposta

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{84(10^3)\text{ N}[(0{,}1075\text{ m})(0{,}175\text{ m})(0{,}015\text{ m})]}{67{,}4(10^{-6})\text{ m}^4(0{,}010\text{ m})}$$

$$= 35{,}2\text{ MPa}$$

Resposta

Esses resultados são mostrados na Figura 9.26*c*.

Tensões principais. As tensões principais em P podem ser determinadas pelo círculo de Mohr. Como mostra a Figura 9.26d, o centro do círculo encontra-se em $(-45,4 + 0)/2 = -22,7$ e as coordenadas do ponto A são $A(-45,4, -35,2)$. Mostre que o raio é $R = 41,9$ e, portanto,

$$\sigma_1 = (41,9 - 22,7) = 19,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -(22,7 + 41,9) = -64,6 \text{ MPa}$$

O ângulo em sentido anti-horário $2\theta_{p2} = 57,2°$, de modo que

$$\theta_{p2} = 28,6°$$

Esses resultados são mostrados na Figura 9.26e.

PROBLEMAS

*__9.56.__ Resolva o Problema 9.4 usando o círculo de Mohr.

__9.57.__ Resolva o Problema 9.2 usando o círculo de Mohr.

__9.58.__ Resolva o Problema 9.3 usando o círculo de Mohr.

__9.59.__ Resolva o Problema 9.10 usando o círculo de Mohr.

*__9.60.__ Resolva o Problema 9.6 usando o círculo de Mohr.

__9.61.__ Resolva o Problema 9.11 usando o círculo de Mohr.

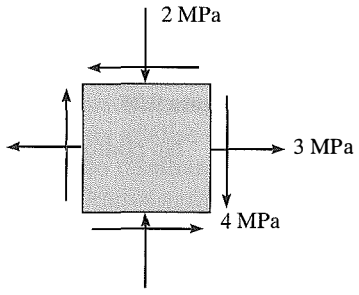
__9.62.__ Resolva o Problema 9.13 usando o círculo de Mohr.

__9.63.__ Resolva o Problema 9.14 usando o círculo de Mohr.

*__9.64.__ Resolva o Problema 9.16 usando o círculo de Mohr.

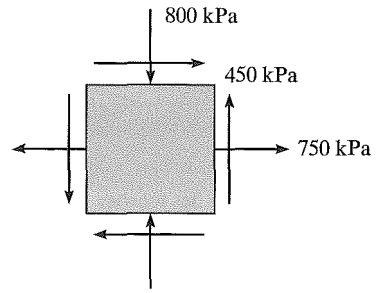
__9.65.__ Resolva o Problema 9.15 usando o círculo de Mohr.

__9.66.__ Determine o estado de tensão equivalente se um elemento estiver orientado a 20° em sentido horário em relação ao elemento mostrado. Mostre o resultado no elemento.



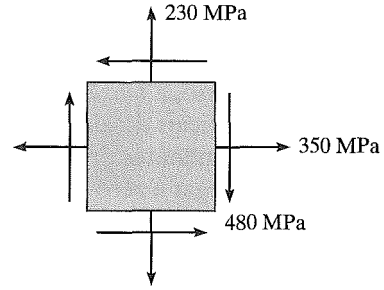
Problema 9.66

__9.67.__ Determine o estado de tensão equivalente se um elemento estiver orientado a 60° em sentido anti-horário em relação ao elemento mostrado.



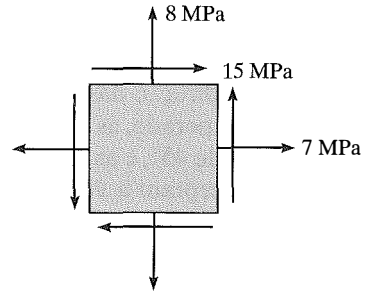
Problema 9.67

*__9.68.__ Determine o estado de tensão equivalente se um elemento estiver orientado a 30° em sentido horário em relação ao elemento mostrado.



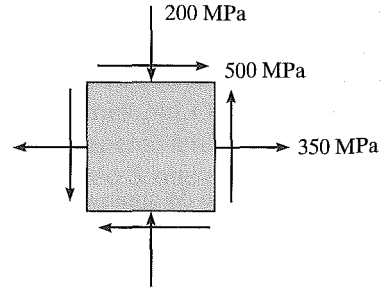
Problema 9.68

__9.69.__ Determine o estado de tensão equivalente, se um elemento estiver orientado a 30° em sentido horário em relação ao elemento mostrado. Mostre o resultado no elemento.



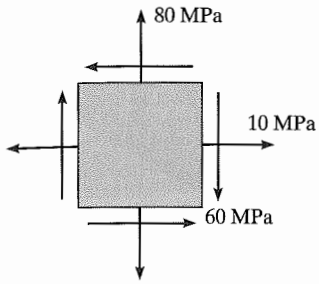
Problema 9.69

__9.70.__ Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



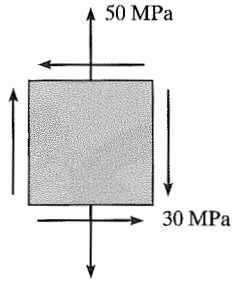
Problema 9.70

9.71. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



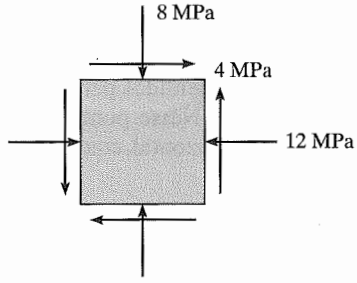
Problema 9.71

*__9.72.__ Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



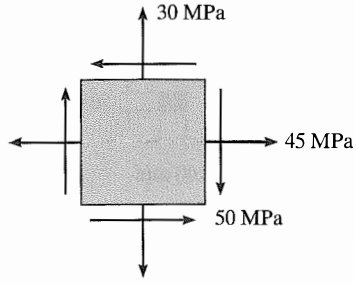
Problema 9.72

9.73. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



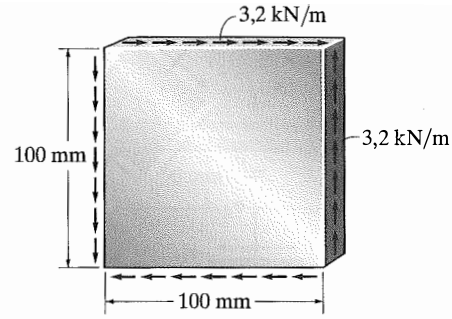
Problema 9.73

9.74. Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



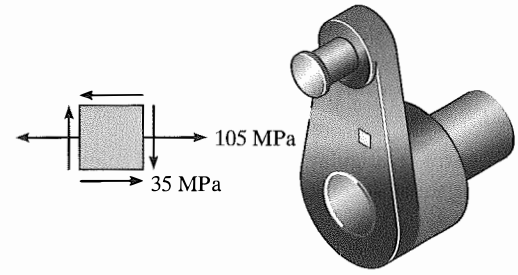
Problema 9.74

9.75. A chapa quadrada de metal tem espessura de 12 mm e está sujeita ao carregamento mostrado. Determine as tensões principais desenvolvidas no aço.



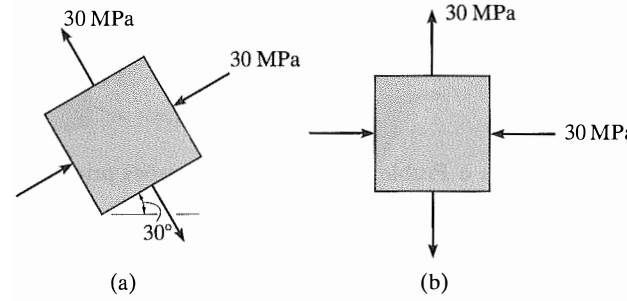
Problema 9.75

*__9.76.__ Determine (a) as tensões principais e (b) a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão normal média. Especifique a orientação do elemento em cada caso.



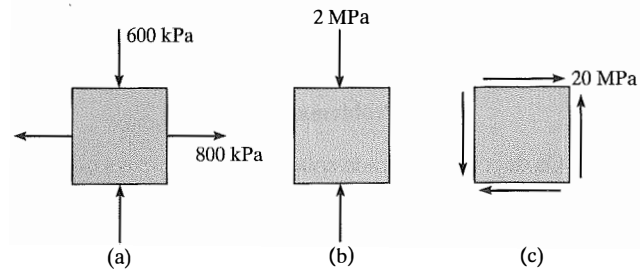
Problema 9.76

9.77. Obtenha o círculo de Mohr que descreve cada um dos seguintes estados de tensão.



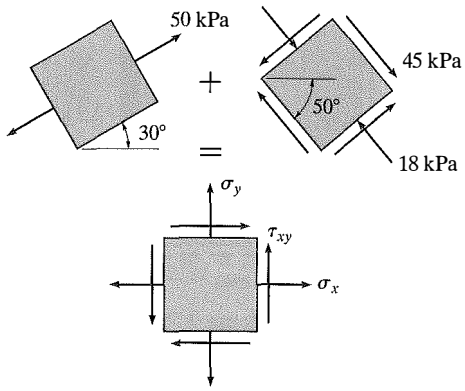
Problema 9.77

9.78. Obtenha o círculo de Mohr que descreve cada um dos seguintes estados de tensão.



Problema 9.78

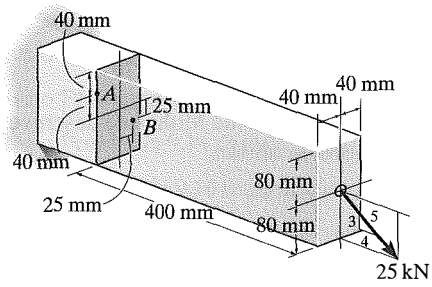
9.79. Um ponto sobre uma chapa fina está sujeito a dois estados de tensão sucessivos como mostra a figura. Determine o estado de tensão resultante com referência a um elemento orientado como mostrado na parte inferior da figura.



Problema 9.79

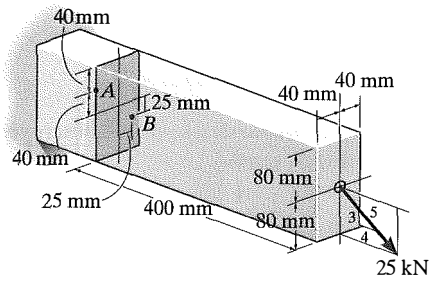
*__9.80.__ O círculo de Mohr para o estado de tensão na Figura 9.15a é mostrado na Figura 9.15b. Mostre que determinar as coordenadas do ponto $P(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$ no círculo dá o mesmo valor que as equações de transformação de tensão (equações 9.1 e 9.2).

9.81. A barra retangular em balanço está sujeita à força de 25 kN. Determine as tensões principais no ponto A.



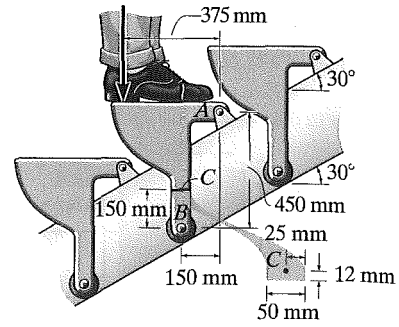
Problema 9.81

9.82. Resolva o Problema 9.81 para as tensões principais no ponto B.



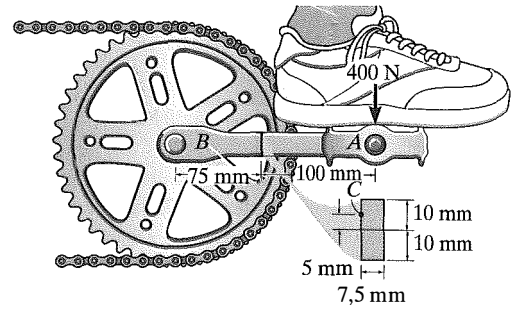
Problema 9.82

9.83. Os degraus da escada rolante estão apoiados nos dois lados pelo pino móvel em A e pelo rolete em B. Se um homem que pesa 1.500 N (≈ 150 kg) estiver em pé no centro do degrau, determine as tensões principais desenvolvidas na seção transversal no ponto C. Os degraus movem-se à velocidade constante.



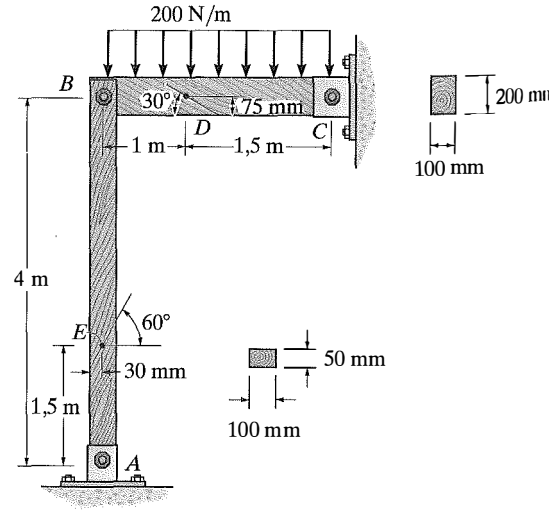
Problema 9.83

*__9.84.__ A manivela do pedal de uma bicicleta tem a seção transversal mostrada na figura. Se ela estiver presa à engrenagem em B e não girar quando submetida a uma força de 400 N, determine as tensões principais no material na seção transversal no ponto C.



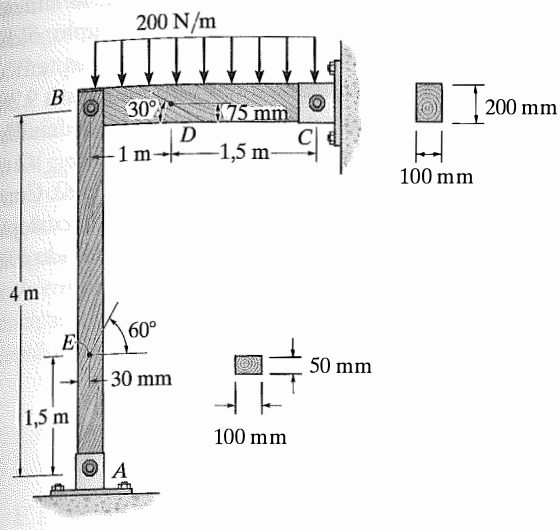
Problema 9.84

9.85. A estrutura suporta a carga distribuída de 200 N/m. Determine a tensão normal e a tensão de cisalhamento no ponto D que agem nos sentidos perpendicular e paralelo às fibras, respectivamente. Nesse ponto, as fibras formam um ângulo de 30° com a horizontal, como mostra a figura.



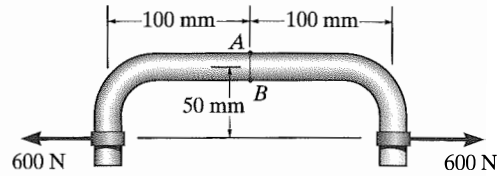
Problema 9.85

9.86. A estrutura suporta a carga distribuída de 200 N/m. Determine a tensão normal e a tensão de cisalhamento no ponto E que agem nos sentidos perpendicular e paralelo às fibras, respectivamente. Nesse ponto, as fibras formam um ângulo de 60° com a horizontal, como mostra a figura.



Problema 9.86

9.87. A haste curva tem diâmetro de 15 mm e está sujeita à força de 600 N. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano desenvolvidas no ponto A e no ponto B. Mostre os resultados em elementos localizados nesses pontos.



Problema 9.87

9.7 Tensão de cisalhamento máxima absoluta

Quando um ponto em um corpo está sujeito a um estado de tensão geral tridimensional, um elemento de material tem uma componente de tensão normal e duas componentes de tensão de cisalhamento que agem em cada uma de suas faces (Figura 9.27a). Como no caso

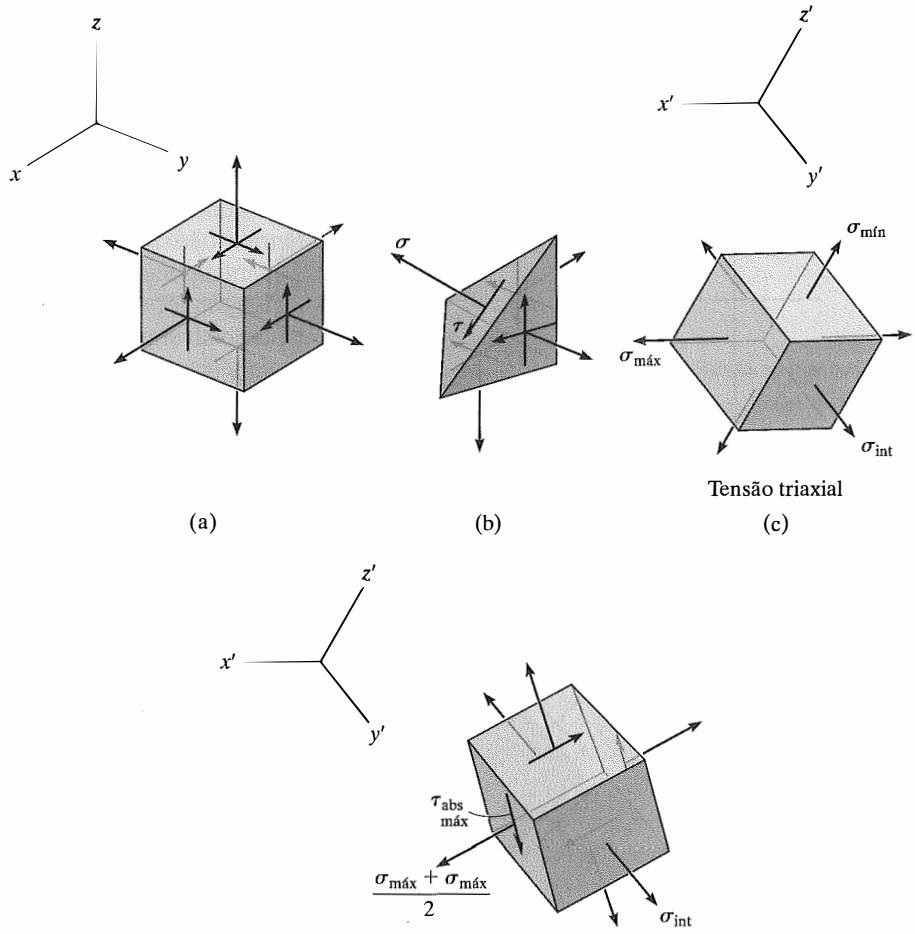


Figura 9.27

da tensão no plano, é possível desenvolver equações de transformação de tensão que podem ser usadas para determinar as componentes de tensão normal σ de cisalhamento τ que agem em *qualquer* plano oblíquo do elemento (Figura 9.27b). Além do mais, também é possível determinar no ponto a orientação exclusiva de um elemento sobre cujas faces ajam somente tensões principais. Como mostra a Figura 9.27c, considera-se que essas tensões principais têm amplitudes de intensidade máxima, intermediária e mínima, isto é, $\sigma_{máx} \geq \sigma_{int} \geq \sigma_{mín}$.

A discussão da transformação de tensão em três dimensões não está no escopo deste livro; todavia, ela é discutida em livros que tratam da teoria da elasticidade. Para nossa finalidade, consideraremos que a orientação principal do elemento e as tensões principais são conhecidas (Figura 9.27c). Essa é uma condição conhecida como ***tensão triaxial.*** Se visualizarmos esse elemento em duas dimensões, isto é, nos planos $y' - z'$, $x' - z'$ e $x' - y'$ (figuras 9.28a, 9.28b e 9.28c), podemos usar o círculo de Mohr para determinar a *tensão de cisalhamento máxima no plano* para cada caso. Por exemplo, o diâmetro do círculo de Mohr estende-se entre as tensões principais σ_{int} e $\sigma_{mín}$ no caso mostrado na Figura 9.28a. Por esse círculo (Figura 9.28d), a tensão de cisalhamento máxima no plano é $(\tau_{y'z'})_{máx} = (\sigma_{int} - \sigma_{mín})/2$ e a tensão normal média associada é $(\sigma_{int} + \sigma_{mín})/2$. Como mostra a Figura 9.28e, o elemento sobre o qual estejam essas componentes de tensão deve estar orientado a 45°

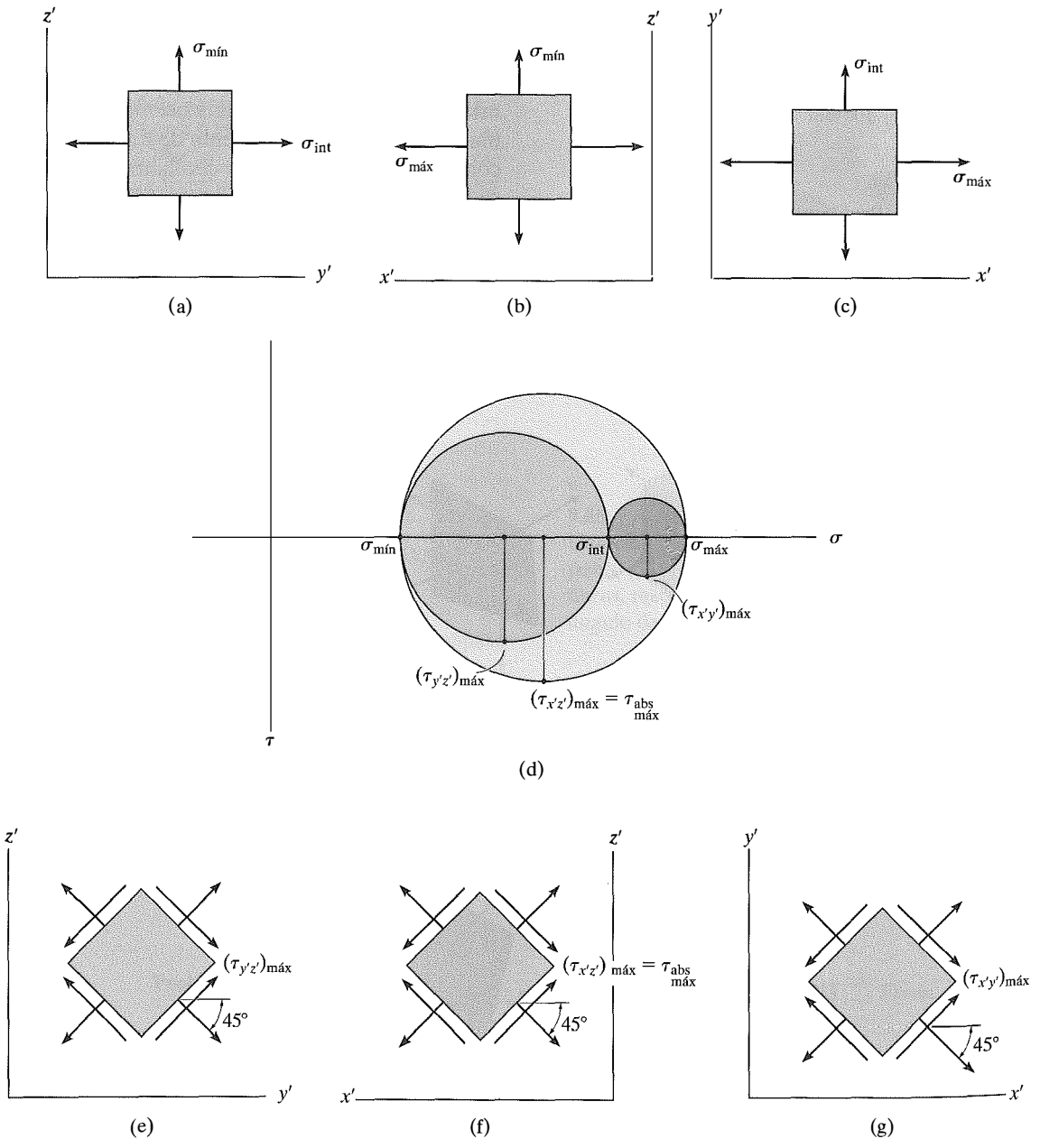


Figura 9.28

em relação à posição do elemento na Figura 9.28a. Os círculos de Mohr para os elementos nas Figuras 9.28b e 9.28c também foram representados na Figura 9.28d. Os elementos correspondentes que estejam orientados a 45° e sujeitos a componentes de tensão de cisalhamento máxima no plano e tensão normal média são mostrados nas Figuras 9.28f e 9.28g, respectivamente.

Comparando os três círculos na Figura 9.28d, vemos que a ***tensão de cisalhamento máxima absoluta,*** $\tau_{\text{abs máx}}$, é definida pelo círculo que tem o maior raio, o que ocorre para o elemento mostrado na Figura 9.28b. Em outras palavras, o elemento na Figura 9.28f está orientado por uma rotação de 45° em torno do eixo y' em relação ao elemento na Figura 9.28b. Observe que essa condição também pode ser *determinada diretamente* apenas escolhendo as tensões principais máxima e mínima na Figura 9.27c, caso em que a tensão de cisalhamento absoluta máxima será

$$\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2} \tag{9.13}$$

E a tensão normal média associada será

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{mín}}}{2} \tag{9.14}$$

A análise considerou somente as componentes de tensão que agem em elementos localizados em posições determinadas por rotações em torno do eixo x', y' ou z'. Se tivéssemos usado as equações de transformação de tensão tridimensionais da teoria da elasticidade para obter valores das componentes de tensão normal e de tensão de cisalhamento que agem sobre qualquer plano oblíquo arbitrário no ponto, como na Figura 9.27b, poderíamos mostrar que, independentemente da orientação do plano, valores específicos da tensão de cisalhamento τ no plano *sempre serão menores* do que a tensão de cisalhamento máxima absoluta determinada pela Equação 9.13. Além disso, a tensão normal σ que age em qualquer plano terá um valor que se encontrará entre as tensões principais máxima e mínima, isto é, $\sigma_{\text{máx}} \geq \sigma \geq \sigma_{\text{mín}}$.

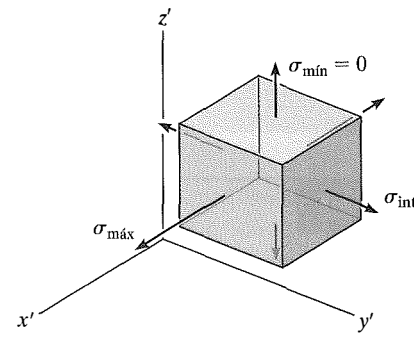
Tensão no plano. Esses resultados têm uma implicação importante para o caso da tensão no plano, em particular quando as tensões principais no plano têm o *mesmo sinal,* isto é, ambas são de tração ou ambas são de compressão. Por exemplo, considere que o material está sujeito à tensão no plano de modo tal que as tensões principais no plano são representadas como $\sigma_{\text{máx}}$ e σ_{int} nas direções x' e y', respectivamente, enquanto a tensão principal fora do plano na direção z' é $\sigma_{\text{mín}} = 0$ (Figura 9.29a). Os círculos de Mohr que descrevem esse estado de tensão para orientações de elemento em torno dos três eixos coordenados são mostrados na Figura 9.29b. Aqui, vemos que, embora a tensão de cisalhamento máxima no plano seja $(\tau_{x'y'})_{\text{máx}} = (\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{int}})/2$, esse valor *não* é a tensão de cisalhamento máxima absoluta à qual o material está sujeito. Em vez disso, pela Equação 9.13 ou Figura 9.29b,

$$\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = (\tau_{x'z'})_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - 0}{2} = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{2} \tag{9.15}$$

No caso em que uma das tensões principais no plano tem *sinal oposto* ao da outra, então essas tensões serão representadas como $\sigma_{\text{máx}}$ e $\sigma_{\text{mín}}$ e a tensão principal fora do plano $\sigma_{\text{int}} = 0$ (Figura 9.30a). Os círculos de Mohr que descrevem esse estado de tensão para orientações de elementos em torno de cada eixo coordenado são mostrados na Figura 9.30b. Claramente, nesse caso,

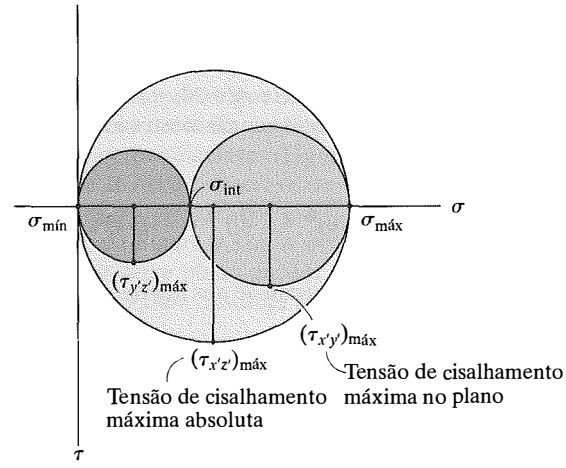
$$\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = (\tau_{x'y'})_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2} \tag{9.16}$$

O cálculo da tensão de cisalhamento máxima absoluta como indicado aqui é importante no projeto de elementos estruturais feitos de material dútil, visto que a resistência do material depende de sua capacidade de resistir à tensão de cisalhamento. Essa situação será discutida também na Seção 10.7.



Tensão no plano x'–y'

(a)



(b)

Figura 9.29

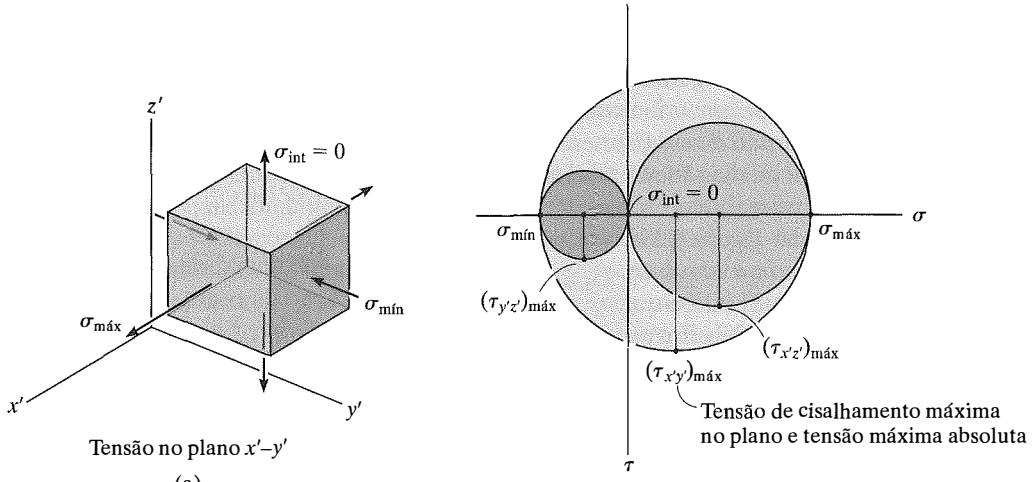


Figura 9.30

PONTOS IMPORTANTES

- O estado de tensão geral tridimensional em um ponto pode ser representado por um elemento orientado de modo que somente três tensões principais ajam sobre ele.
- Por essa orientação, pode-se obter a orientação do elemento que representa a tensão de cisalhamento máxima absoluta pela rotação do elemento 45° em torno do eixo que define a direção de σ_{int}.
- Se ambas as tensões principais no plano tiverem o *mesmo sinal*, a *tensão de cisalhamento máxima absoluta* ocorrerá *fora do plano* e terá um valor $\tau_{abs\,máx} = \sigma_{máx}/2$.
- Se as tensões principais no plano tiverem *sinais opostos*, então a *tensão de cisalhamento máxima absoluta é igual à tensão de cisalhamento máxima no plano*; isto é, $\tau_{abs\,máx} = (\sigma_{máx} - \sigma_{mín})/2$.

EXEMPLO 9.14

Devido ao carregamento aplicado, o elemento no ponto sobre a estrutura na Figura 9.31a está sujeito ao estado plano de tensão mostrado. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta no ponto.

SOLUÇÃO

Tensões principais. As tensões principais no plano podem ser determinadas pelo círculo de Mohr. O centro do círculo encontra-se no eixo σ em $\sigma_{méd} = (-20 + 0)/2 = -10$ kPa. Marcando o ponto de referência $A(-20, -40)$ em gráfico, o círculo de Mohr pode ser obtido como mostra a Figura 9.31b. O raio é

$$R = \sqrt{(20 - 10)^2 + (40)^2} = 41{,}2 \text{ kPa}$$

As tensões principais encontram-se nos pontos onde o círculo intercepta o eixo σ; isto é,

$$\sigma_{máx} = -10 + 41{,}2 = 31{,}2 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{mín} = -10 - 41{,}2 = -51{,}2 \text{ kPa}$$

Pelo círculo, o ângulo 2θ, medido no *sentido anti-horário* de CA ao eixo $-\sigma$, é

$$2\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{40}{20 - 10}\right) = 76{,}0°$$

Portanto,

$$\theta = 38{,}0°$$

Essa rotação em *sentido anti-horário* define a direção do eixo x' ou $\sigma_{mín}$ e seu plano principal associado (Figura 9.31c). Como não há nenhuma tensão principal no elemento na direção z, temos

$$\sigma_{máx} = 31{,}2 \text{ kPa} \quad \sigma_{int} = 0 \quad \sigma_{mín} = -51{,}2 \text{ kPa} \qquad \textit{Resposta}$$

Tensão de cisalhamento máxima absoluta. Pelas equações 9.13 e 9.14, temos

$$\tau_{máx}^{abs} = \frac{\sigma_{máx} - \sigma_{mín}}{2} = \frac{31{,}2 - (-51{,}2)}{2} = 41{,}2 \text{ kPa}$$

Resposta

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_{máx} + \sigma_{mín}}{2} = \frac{31{,}2 - 51{,}2}{2} = -10 \text{ kPa}$$

OBSERVAÇÃO: Esses mesmos resultados também podem ser obtidos pelo círculo de Mohr para cada orientação de um elemento em torno dos eixos x', y' e z' (Figura 9.31d). Como $\sigma_{máx}$ e $\sigma_{mín}$ têm *sinais opostos*, a tensão de cisalhamento má-

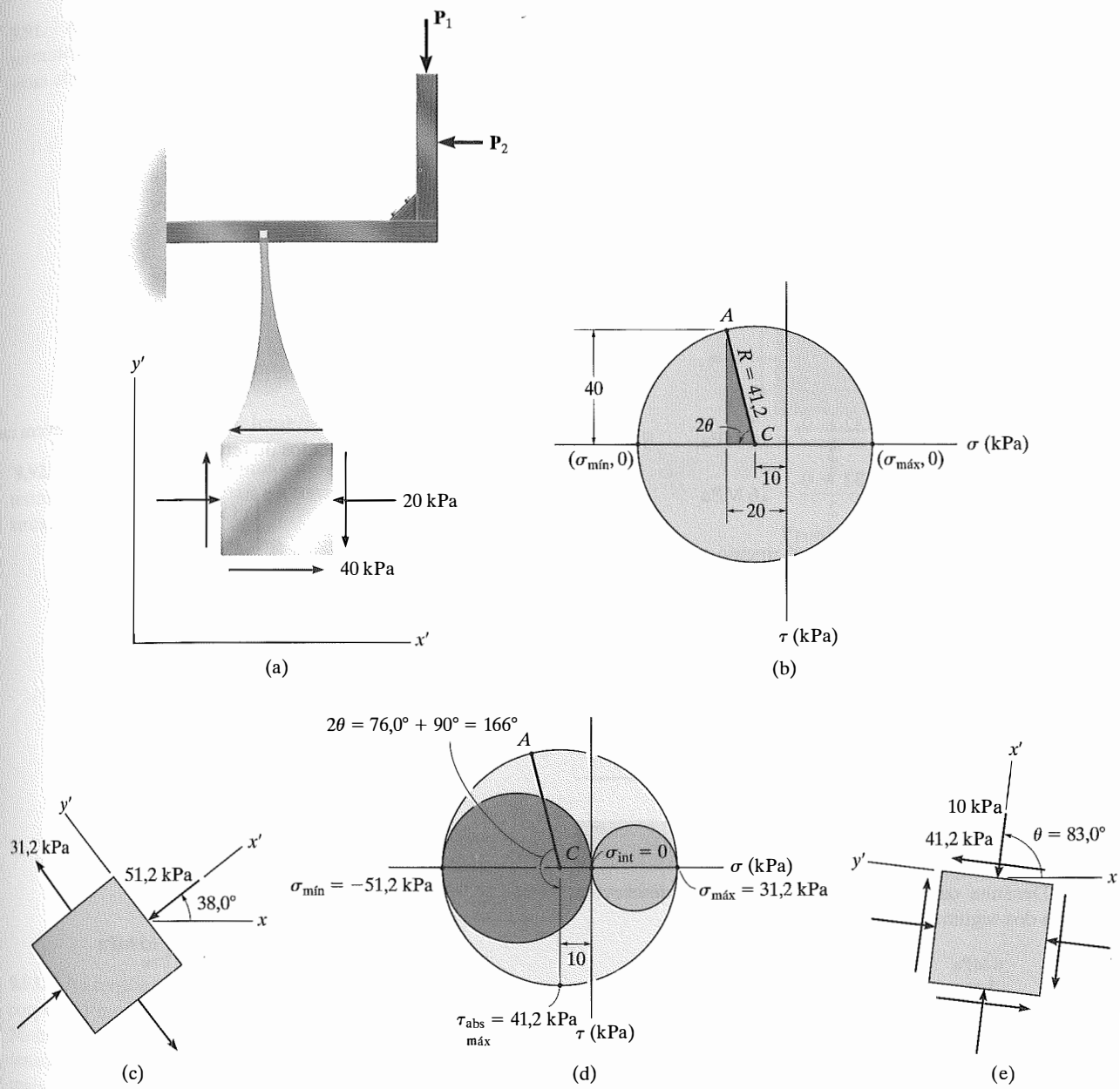


Figura 9.31

xima absoluta é igual à tensão de cisalhamento máxima no plano. Isso resulta de uma rotação de 45° do elemento na Figura 9.31c em torno do eixo z', de modo que o elemento adequadamente orientado é mostrado na Figura 9.31e.

EXEMPLO 9.15

O ponto na superfície do vaso de pressão cilíndrico na Figura 9.32a está sujeito ao estado plano de tensão. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta nesse ponto.

SOLUÇÃO

As tensões principais são $\sigma_{máx} = 32$ MPa, $\sigma_{int} = 16$ MPa e $\sigma_{mín} = 0$. Se essas tensões forem representadas em gráfico ao longo do eixo σ, poderemos construir três círculos de Mohr que descrevem o estado de tensão visto em cada um dos três planos perpendiculares (Figura 9.32b). O maior círculo tem raio de 16 MPa e descreve o estado de tensão no plano que contém $\sigma_{máx} = 32$ MPa e $\sigma_{mín} = 0$ e é mostrado pelo sombreado na Figura 9.32a. A orientação de um elemento a 45° dentro desse plano produz o estado da tensão de cisalhamento máxima absoluta e a tensão normal associada, a saber,

$$\tau_{abs\ máx} = 16 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{méd} = 16 \text{ MPa}$$

Esses mesmos resultados podem ser obtidos pela aplicação direta das equações 9.13 e 9.14; isto é,

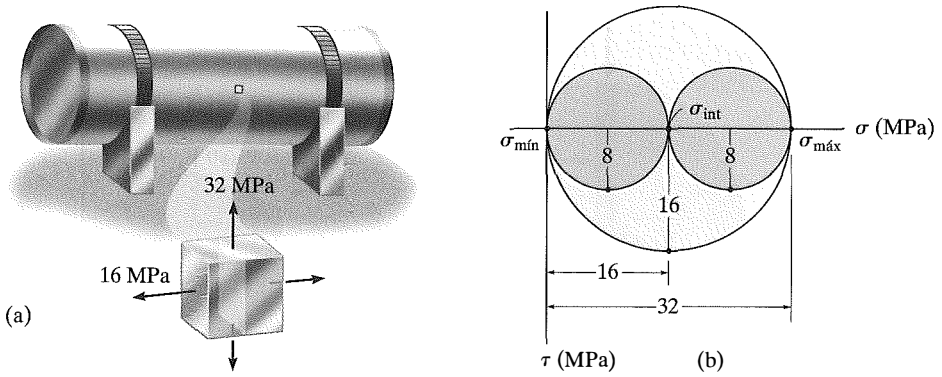


Figura 9.32

$$\tau_{\text{máx}}^{\text{abs}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2} = \frac{32 - 0}{2} = 16 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{mín}}}{2} = \frac{32 + 0}{2} = 16 \text{ MPa}$$

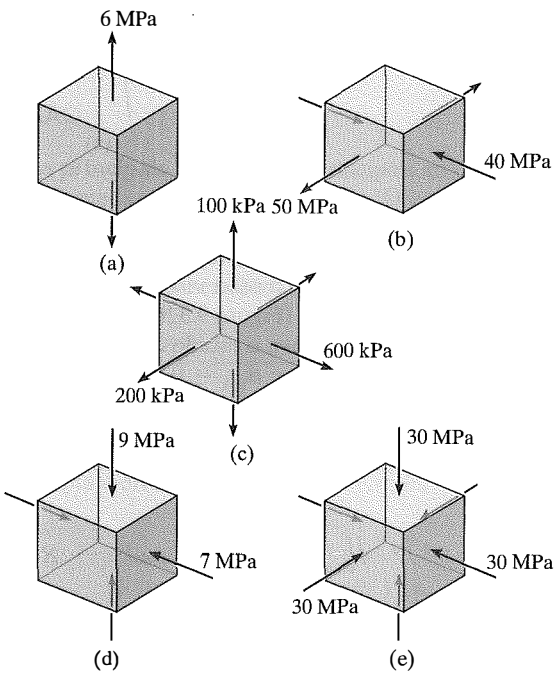
Por comparação, a tensão de cisalhamento máxima no plano pode ser determinada pelo círculo de Mohr desenhado entre $\sigma_{máx} = 32$ MPa e $\sigma_{int} = 16$ MPa (Figura 9.32b). Isso dá um valor de

$$\tau_{\text{máx no plano}} = \frac{32 - 16}{2} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = 16 + \frac{32 - 16}{2} = 24 \text{ MPa}$$

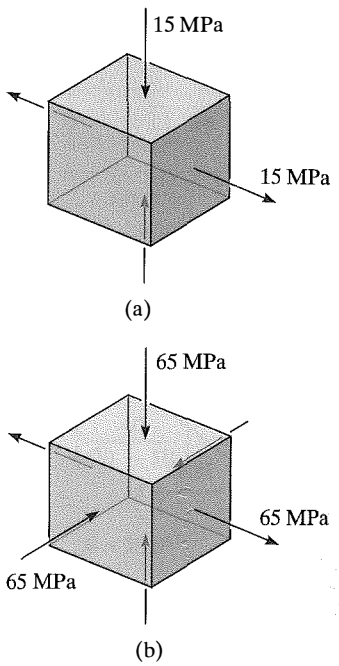
PROBLEMAS

*__9.88.__ Desenhe os três círculos de Mohr que descrevem cada um dos seguintes estados de tensão.



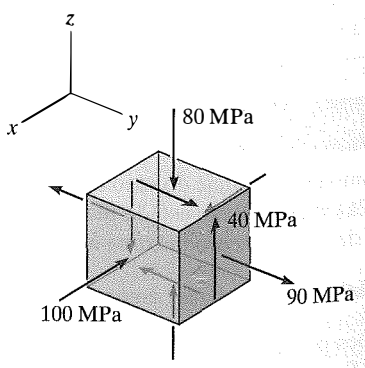
Problema 9.88

__9.89.__ Desenhe os três círculos de Mohr que descrevem cada um dos seguintes estados de tensão.



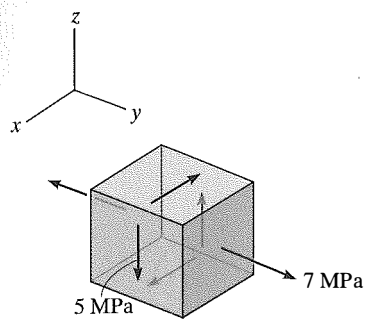
Problema 9.89

__9.90.__ A tensão em um ponto é mostrada no elemento. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



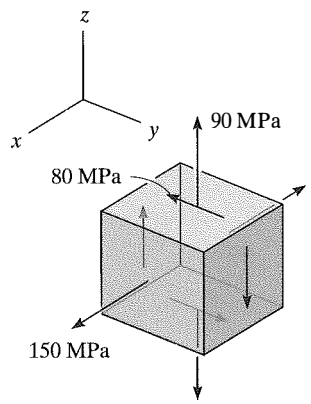
Problema 9.90

9.91. A tensão em um ponto é mostrada no elemento. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



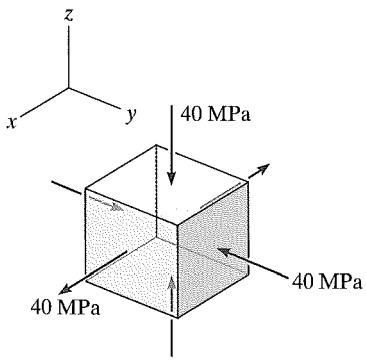
Problema 9.91

*9.92. A tensão em um ponto é mostrada no elemento. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



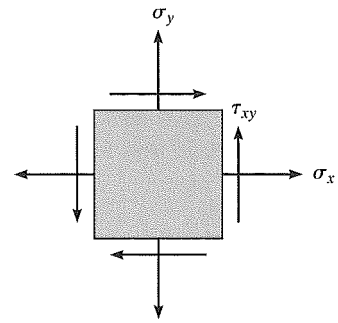
Problema 9.92

9.93. As tensões principais que agem em um ponto em um corpo são mostradas na figura. Desenhe os três círculos de Mohr que descrevem esse estado de tensão e determine as tensões de cisalhamento máximas no plano e as tensões normais médias associadas para os planos x–y, y–z e x–z. Para cada caso, mostre os resultados no elemento orientado na direção adequada.



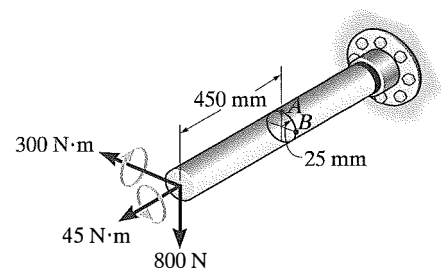
Problema 9.93

9.94. Considere o caso geral de tensão no plano mostrado na figura. Escreva um código computacional que mostrará uma representação gráfica dos três círculos de Mohr para o elemento e também calcule a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



Problema 9.94

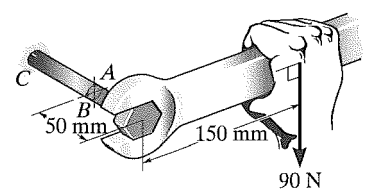
9.95. O eixo maciço está sujeito a torque, momento fletor e força de cisalhamento como mostra a figura. Determine as tensões principais que agem nos pontos A e B e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



Problema 9.95

*9.96. O parafuso está preso a seu suporte em C. Se a força de 90 N for aplicada à chave para apertá-lo, determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta desenvolvidas na haste do parafuso no ponto A. Represente os resultados sobre um elemento localizado nesse ponto. A haste tem diâmetro de 6 mm.

9.97. Resolva o Problema 9.96 para o ponto B.



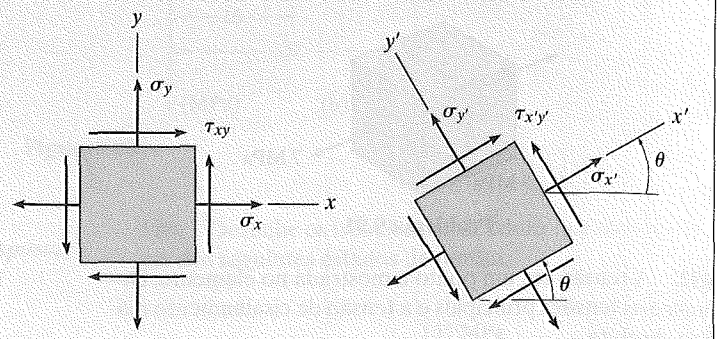
Problemas 9.96/97

Revisão do capítulo

A tensão no plano ocorre quando o material em um ponto está sujeito a duas componentes de tensão normal σ_x e σ_y e a uma de tensão de cisalhamento τ_{xy}. Contanto que essas componentes sejam conhecidas, as componentes de tensão que agem sobre um elemento que tenha orientação diferente podem ser determinadas pelas duas equações de equilíbrio de força ou pelas equações de transformação de tensão.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$



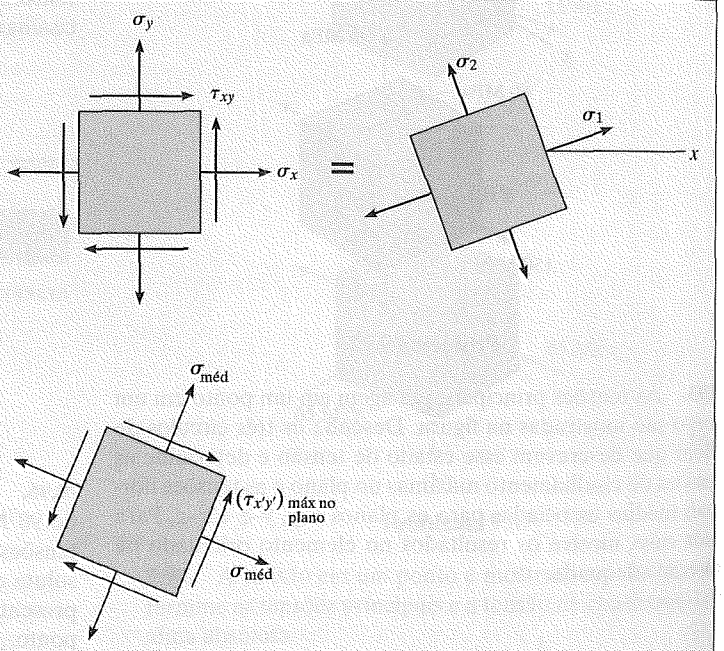
Para projeto, é importante determinar as orientações do elemento que produzam as tensões normais principais máximas e a tensão de cisalhamento máxima no plano. Pelas equações de transformação de tensão, constata-se que nenhuma tensão de cisalhamento age nos planos de tensão principal.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

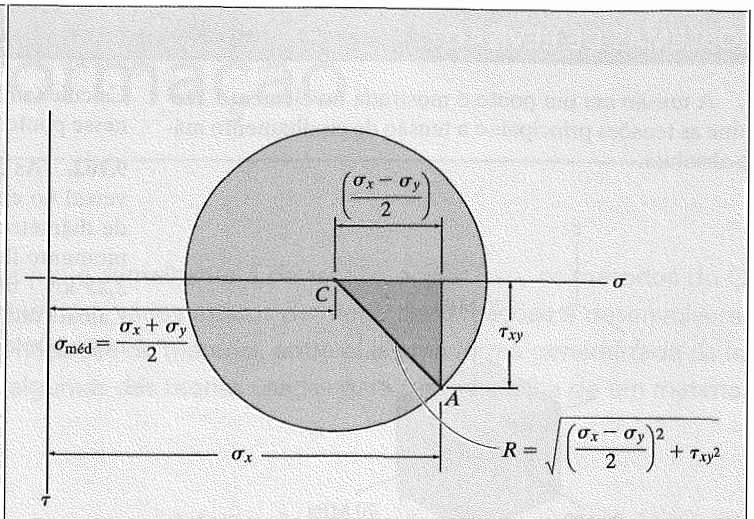
Os planos de tensão de cisalhamento máxima são orientados a 45° em relação a essa orientação e, nesses planos de cisalhamento, há uma tensão normal média associada $(\sigma_x + \sigma_y)/2$.

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{no plano}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

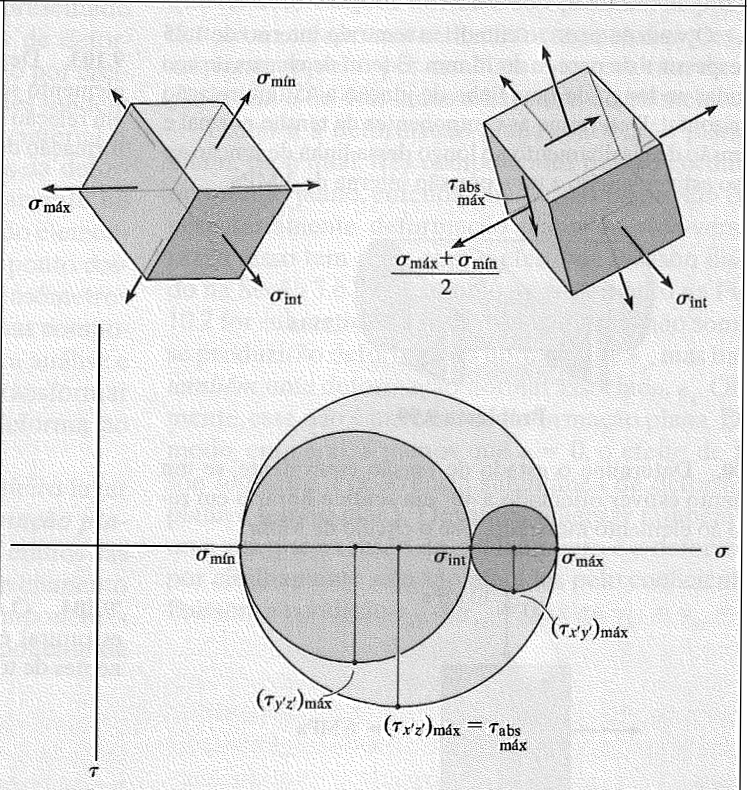
$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



O círculo de Mohr fornece um auxílio gráfico para determinar a tensão em qualquer plano, as tensões normais principais e a tensão de cisalhamento máxima no plano. Para desenhar o círculo, os eixos σ e τ são definidos, e o centro do círculo $C\,[(\sigma_x + \sigma_y)/2, 0]$ e o ponto de referência $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ são representados em gráfico. O raio do círculo estende-se entre esses dois pontos e é determinado por trigonometria.

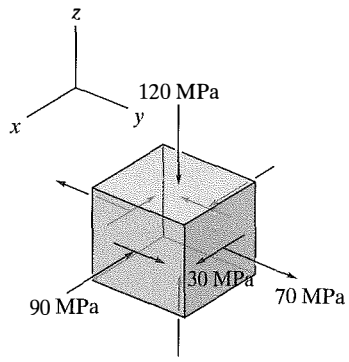


A tensão de cisalhamento máxima absoluta será igual à tensão de cisalhamento máxima no plano, contanto que as tensões principais no plano tenham sinais opostos. Se elas tiverem o mesmo sinal, a tensão de cisalhamento máxima absoluta se encontrará fora do plano.



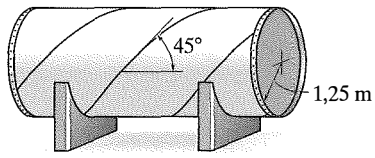
PROBLEMAS DE REVISÃO

9.98. A tensão em um ponto é mostrada no elemento. Determine as tensões principais e a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



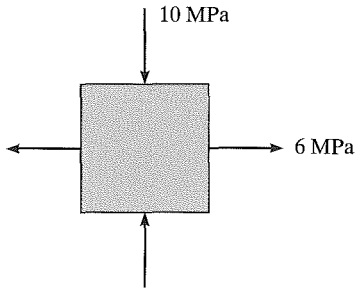
Problema 9.98

9.99. O vaso de pressão cilíndrico tem raio interno de 1,25 m e espessura de parede de 15 mm. É feito de chapas de aço soldadas ao longo de uma linha de junção a 45° em relação à horizontal. Determine as componentes de tensão normal e da tensão de cisalhamento ao longo dessa linha de junção, se o vaso estiver sujeito a uma pressão interna de 3 MPa.



Problema 9.99

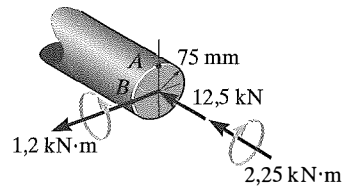
***9.100.** Determine o estado de tensão equivalente, se um elemento estiver orientado a 40° em sentido horário em relação ao elemento mostrado. Use o círculo de Mohr.



Problema 9.100

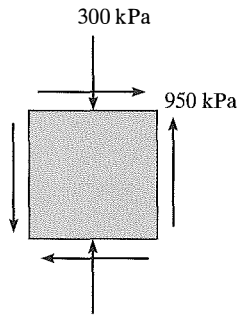
9.101. As cargas internas que agem sobre uma seção transversal no eixo de acionamento de uma turbina de 150 mm de diâmetro consistem em uma força axial de 12,5 kN, um momento fletor de 1,2 kN · m e um momento de torção de 2,25 kN · m. Determine as tensões principais no ponto A. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.

9.102. As cargas internas que agem sobre uma seção transversal no eixo de acionamento de uma turbina de 150 mm de diâmetro consistem em uma força axial de 12,5 kN, um momento fletor de 1,2 kN · m e um momento de torção de 2,25 kN · m. Determine as tensões principais no ponto B. Calcule também a tensão de cisalhamento máxima no plano nesse ponto.



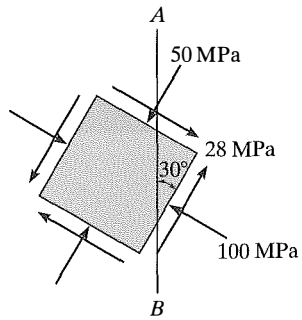
Problemas 9.101/102

9.103. Determine o estado de tensão equivalente em um elemento se ele estiver orientado a 30° em sentido horário em relação ao elemento mostrado. Use as equações de transformação de tensão.



Problema 9.103

***9.104.** O estado de tensão em um ponto em um elemento estrutural é mostrado no elemento. Determine as componentes de tensão que agem no plano inclinado AB.



Problema 9.104

10 Transformação da deformação

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

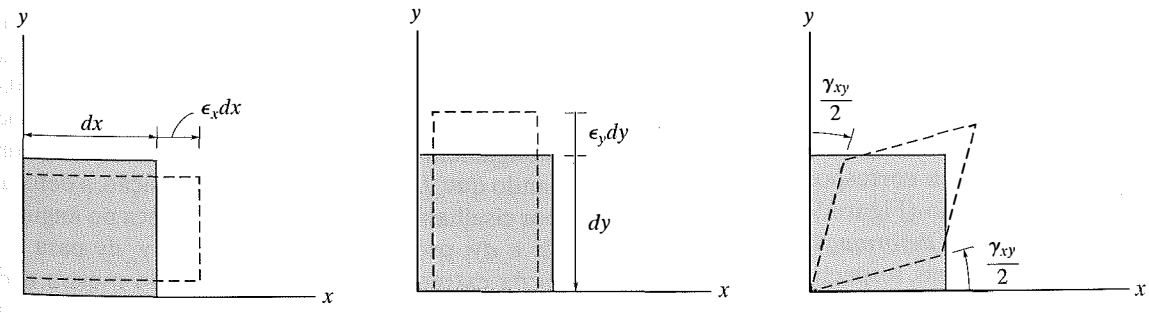
A transformação da deformação em um ponto é semelhante à da tensão e, por isso, os métodos do Capítulo 9 serão aplicados aqui. Discutiremos também vários modos de medir deformações e desenvolveremos algumas relações importantes com as propriedades do material, entre elas uma forma generalizada da lei de Hooke. No final do capítulo, discutiremos algumas das teorias usadas para prever a falha de um material.

10.1 Deformação plana

Como descrevemos na Seção 2.2, o estado geral de deformação em um ponto em um corpo é representado por uma combinação de três componentes de deformação normal, ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z, e três de deformação por cisalhamento, γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}. Essas seis componentes tendem a deformar cada face de um elemento do material e, como ocorre com a tensão, as componentes da deformação normal e da deformação por cisalhamento no ponto variarão de acordo com a orientação do elemento. As componentes da *deformação* em um ponto costumam ser determinadas por meio de extensômetros (medidores de deformação) que medem essas componentes em *direções específicas*. Contudo, para análise e projeto, às vezes os engenheiros precisam transformar esses dados para obter as componentes da deformação em outras direções.

Para entender como isso é feito, em primeiro lugar vamos dedicar atenção ao estudo da ***deformação plana***. Especificamente, não consideraremos os efeitos das componentes ϵ_z, γ_{xz} e γ_{yz}. Logo, em geral, um elemento deformado no plano está sujeito a duas componentes de deformação normal, ϵ_x, ϵ_y, e a uma componente de deformação por cisalhamento, γ_{xy}. As deformações de um elemento provocadas por cada uma dessas tensões de deformações são ilustradas na Figura 10.1. Observe que as deformações normais são produzidas por *mudanças no comprimento* do elemento nas direções x e y enquanto aquelas por cisalhamento resultam da *rotação relativa* de dois lados adjacentes do elemento.

Embora a deformação plana e a tensão plana tenham, cada qual, três componentes que se encontram no mesmo plano, entenda que tensão plana *não causa* necessariamente deformação plana ou vice-versa. A razão disso tem a ver com o efeito de Poisson discutido na Seção 3.6. Por exemplo, se o elemento na Figura 10.2 for submetido a tensão plana σ_x e σ_y, não somente se produzirão deformações normais ϵ_x e ϵ_y, mas haverá *também* uma deformação normal associada, ϵ_z. Obviamente, esse *não* é um caso de deformação plana. Desse modo, em geral, a menos que $\nu = 0$, o efeito de Poisson *impedirá* a ocorrência simultânea de deformação plana e tensão plana. Devemos salientar também que, uma vez que a tensão de cisalhamento e a deformação por cisalhamento *não* são afetadas pelo coeficiente de Poisson, a condição $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ exige $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

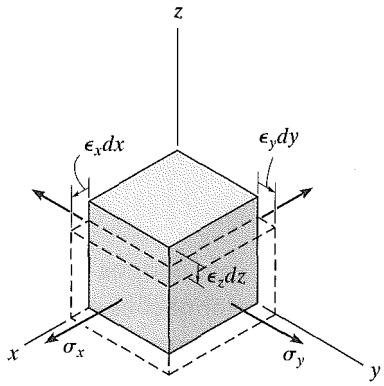


Deformação normal ϵ_x (a)

Deformação normal ϵ_y (b)

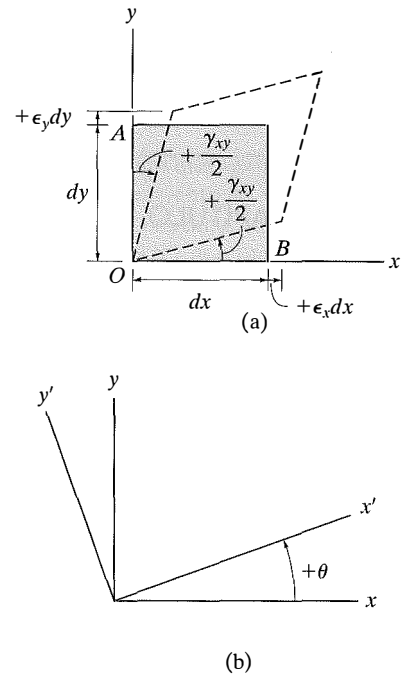
Deformação por cisalhamento γ_{xy} (c)

Figura 10.1



Estado plano de tensão, σ_x, σ_y, não causa estado plano de deformação no plano x–y desde que $\epsilon_z \neq 0$.

Figura 10.2



Convenção de sinal positivo

Figura 10.3

10.2 Equações gerais de transformação no plano de deformação

Na análise do estado plano de deformação, é importante estabelecer equações de transformação que possam ser usadas para determinar as componentes x', y' da deformação normal e daquela por cisalhamento em um ponto, desde que as componentes x, y da deformação sejam conhecidas. Em essência, esse é um problema de geometria e requer relacionar as deformações e rotações de segmentos de reta diferenciais que representam os lados de elementos diferenciais paralelos a cada conjunto de eixos.

Convenção de sinal. Antes de desenvolver as equações de transformação da deformação, é preciso definir uma convenção de sinal para as deformações. Essa convenção é a mesma estabelecida na Seção 2.2 e será definida novamente aqui para a condição de estado plano de deformação. Com referência ao elemento diferencial mostrado na Figura 10.3a, as *deformações normais* ϵ_x e ϵ_y serão *positivas*, se provocarem *alongamento* ao longo dos eixos x e y, respectivamente, e aquelas *por cisalhamento* γ_{xy} serão *positivas*, se o ângulo interno AOB *ficar menor* que 90°. Essa convenção de sinal também segue a correspondente usada para o estado plano de tensão (Figura 9.5a), isto é, σ_x, σ_y, τ_{xy} positivas provocarão *deformação* no elemento nas direções ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} positivas, respectivamente.

Aqui, o problema será determinar, em um ponto, as deformações normais e de cisalhamento $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$, $\gamma_{x'y'}$, medidas em relação aos eixos x' e y', se conhecermos ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} medidas em relação aos eixos x, y. Se o ângulo entre os eixos x e x' for θ então, assim como ocorre com o estado plano de tensão, θ será *positivo*, contanto que siga a curvatura dos dedos da mão direita, isto é, sentido anti-horário, como mostra a Figura 10.3b.

Deformações normal e por cisalhamento. Para desenvolver a equação de transformação da deformação e determinar $\epsilon_{x'}$, temos de determinar o alongamento de um segmento de reta dx' que se encontra ao longo do eixo x' e está sujeito às componentes da deformação ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}. Como mostra a Figura 10.4a, as componentes da reta dx' ao longo dos eixos x e y são

$$\begin{aligned} dx &= dx' \cos\theta \\ dy &= dx' \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{10.1}$$

Quando ocorre a deformação normal positiva ϵ_x (Figura 10.4b), a reta dx sofre um alongamento $\epsilon_x dx$, o que provoca um alongamento $\epsilon_x dx \cos\theta$ na reta dx'. Do mesmo modo, quando ocorre ϵ_y (Figura 10.4c), a reta dy sofre um alongamento $\epsilon_y dy$, o que provoca um alongamento $\epsilon_y dy$ sen θ na reta dx'. Por fim, considerando que dx permaneça fixa na posição, a deformação por cisalhamento γ_{xy}, que é a mudança no ângulo entre dx e dy, provoca o deslocamento $\gamma_{xy} dy$ para a direita da extremidade da reta dy, como mostra a Figura 10.4d. Isso acarreta o alongamento $\gamma_{xy} dy \cos\theta$ na reta dx'. Se esses três alongamentos forem somados, o alongamento resultante de dx' será

$$\delta x' = \epsilon_x\, dx \cos\theta + \epsilon_y\, dy \operatorname{sen}\theta + \gamma_{xy}\, dy \cos\theta$$

Pela Equação 2.2, a deformação normal ao longo da reta dx' é $\epsilon_{x'} = \delta x'/dx'$. Portanto, usando a Equação 10.1, temos

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{10.2}$$

A equação de transformação da deformação para determinar $\gamma_{x'y'}$ pode ser desenvolvida considerando-se a quantidade de rotação que cada um dos segmentos de reta dx' e dy' sofre quando submetido às componentes da deformação $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$. Em primeiro lugar, consideraremos a rotação de dx', definida pelo ângulo em sentido anti-horário α mostrado na Figura 10.4e. Esse ângulo pode ser determinado pelo deslocamento $\delta y'$ pela expressão $\alpha = \delta y'/dx'$. Para obter $\delta y'$, considere as três componentes do deslocamento seguintes que agem na direção y': uma de ϵ_x, que dá $-\epsilon_x dx \operatorname{sen}\theta$ (Figura 10.4b); uma outra de ϵ_y, que dá $\epsilon_y dy \cos\theta$ (Figura 10.4c); e a última de γ_{xy}, que dá $-\gamma_{xy} dy \operatorname{sen}\theta$ (Figura 10.4d). Assim, $\delta y'$, provocada pelas três componentes da deformação, é

$$\delta y' = -\epsilon_x\, dx \operatorname{sen}\theta + \epsilon_y\, dy \cos\theta - \gamma_{xy}\, dy \operatorname{sen}\theta$$

Pela Equação 10.1, com $\alpha = \delta y'/dx'$, temos

$$\alpha = (-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2\theta \tag{10.3}$$

Como mostra a Figura 10.4e, a reta dy' sofre uma rotação de β. Podemos determinar esse ângulo por uma análise semelhante ou simplesmente substituindo θ por $\theta + 90°$ na Equação 10.3. Usando as identidades $\operatorname{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90°) = -\operatorname{sen}\theta$, temos

$$\begin{aligned}\beta &= (-\epsilon_x + \epsilon_y) \operatorname{sen}(\theta + 90°) \cos(\theta + 90°) \\ &\quad - \gamma_{xy} \operatorname{sen}^2(\theta + 90°) \\ &= -(-\epsilon_x + \epsilon_y) \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \gamma_{xy} \cos^2\theta\end{aligned}$$

Visto que α e β representam a rotação dos lados dx' e dy' de um elemento diferencial cujos lados estavam originalmente orientados ao longo dos eixos x' e y' e que β está na direção oposta de α, Figura 10.4e, então o elemento está sujeito a uma deformação por cisalhamento de

$$\begin{aligned}\gamma_{x'y'} = \alpha - \beta &= -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta \\ &\quad + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\end{aligned} \tag{10.4}$$

Usando as identidades trigonométricas $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ e $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, podemos rescrever as equações 10.2 e 10.4 na forma final

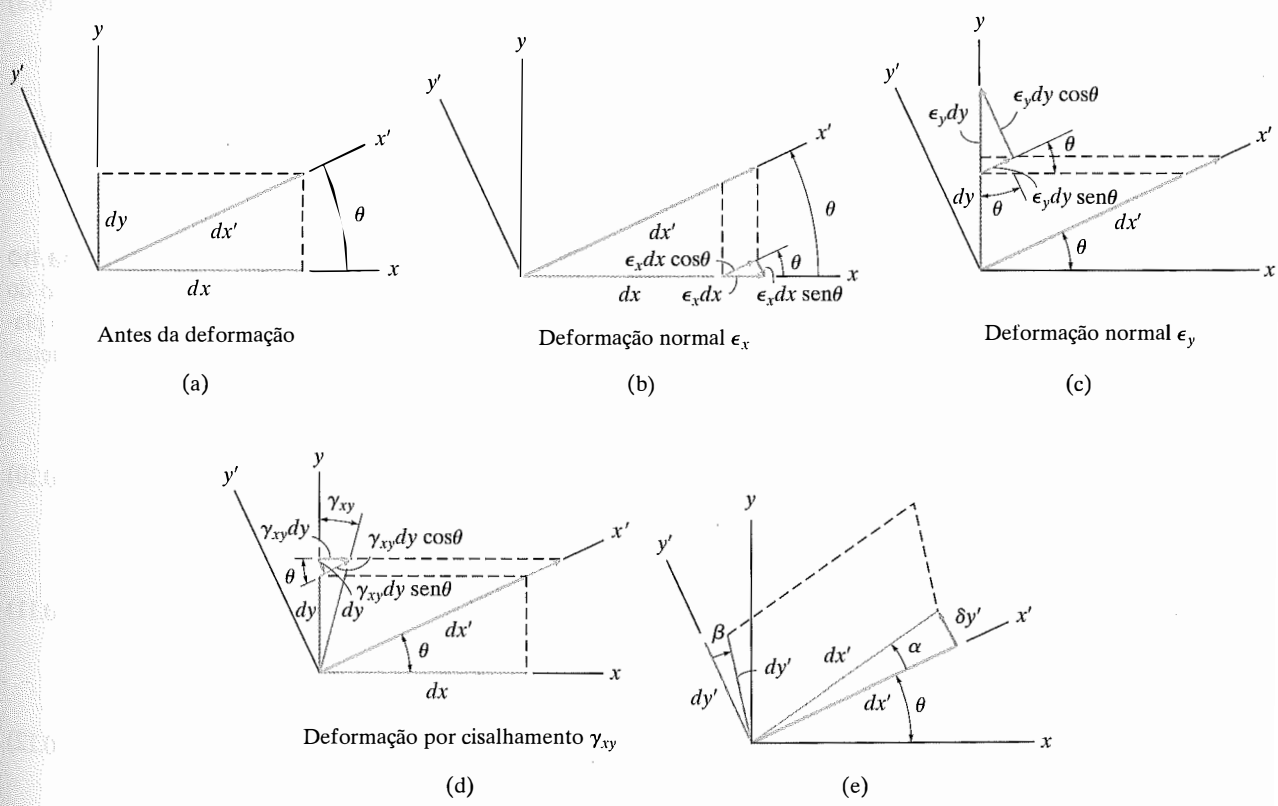
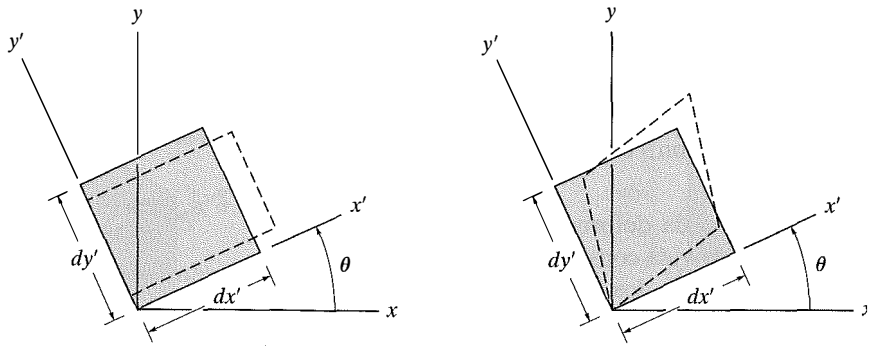


Figura 10.4



Deformação normal positiva, $\epsilon_{x'}$ Deformação por cisalhamento positiva, $\gamma_{x'}$

(a) (b)

Figura. 10.5

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (10.5)$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \qquad (10.6)$$

Essas equações de transformação da deformação dão a deformação normal $\epsilon_{x'}$ na direção x' e a deformação por cisalhamento $\gamma_{x'y'}$ de um elemento orientado a um ângulo θ, como mostra a Figura 10.5. De acordo com a convenção de sinal estabelecida, se $\epsilon_{x'}$ é *positiva*, o elemento *alonga-se na direção* de x' positivo (Figura 10.5a) e, se $\gamma_{x'y'}$ é positiva, o elemento deforma-se como mostra a Figura 10.5b. Observe que essas deformações ocorrem como se a tensão normal positiva $\sigma_{x'}$ e a de cisalhamento positiva $\tau_{x'y'}$ agissem sobre o elemento.

A deformação normal na direção y', se exigida, pode ser obtida pela Equação 10.5 com a simples substituição de θ por $(\theta + 90°)$. O resultado é

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (10.7)$$

Devemos notar a semelhança entre as equações 10.5, 10.6 e 10.7 e as utilizadas na transformação no estado plano de tensão, equações 9.1, 9.2 e 9.3. Por comparação, σ_x, σ_y, $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ correspondem a ϵ_x, ϵ_y, $\epsilon_{x'}$, $\epsilon_{y'}$; e τ_{xy}, $\tau_{x'y'}$ correspondem a $\gamma_{xy}/2$, $\gamma_{x'y'}/2$.

Deformações principais. Como ocorreu com a tensão, a orientação de um elemento em um ponto pode ser determinada de modo tal que a deformação do elemento seja representada por deformações normais, sem *nenhuma* por cisalhamento. Quando isso ocorre, as deformações normais são denominadas *deformações principais* e, se o material for isotrópico, os eixos ao longo dos quais essas deformações ocorrem coincidirão com os eixos que definem os planos da tensão principal.

Pelas equações 9.4 e 9.5 e pela correspondência já mencionada entre tensão e deformação, a direção do eixo e os dois valores das deformações principais ϵ_1 e ϵ_2 são determinados por

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \qquad (10.8)$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (10.9)$$

Deformação por cisalhamento máxima no plano. Pelas equações 9.6, 9.7 e 9.8, a direção do eixo e a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média associada são determinadas pelas seguintes equações:

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) \qquad (10.10)$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (10.11)$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad (10.12)$$

PONTOS IMPORTANTES

- Devido ao efeito de Poisson, o estado plano de deformação não é um estado plano de tensão e vice-versa.
- Um ponto sobre um corpo está sujeito ao estado plano de tensão quando a superfície do corpo estiver livre de tensão. A análise do estado plano de deformação pode ser usada dentro do plano das tensões para analisar os resultados dos extensômetros. Entretanto, lembre-se de que há uma deformação normal que é perpendicular aos extensômetros.
- Quando o estado de deformação é representado pelas deformações principais, nenhuma deformação por cisalhamento agirá sobre o elemento.
- O estado de deformação no ponto também pode ser representado como a deformação por cisalhamento máxima no plano. Nesse caso, uma deformação normal média também agirá sobre o elemento.
- O elemento que representa a deformação por cisalhamento máxima no plano e suas deformações normais médias associadas está a 45° em relação ao elemento que representa as deformações principais.

EXEMPLO 10.1

Um elemento diferencial de material em um ponto está sujeito a um estado plano de deformação dado por $\epsilon_x = 500(10^{-6})$, $\epsilon_y = -300(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 200(10^{-6})$, que tende a distorcer o elemento como mostra a Figura 10.6a. Determine as deformações equivalentes que agem sobre um elemento orientado no ponto a 30° no *sentido horário* em relação à posição original.

SOLUÇÃO

As equações 10.5 e 10.6 de transformação da deformação serão usadas para resolver o problema. Visto que θ é *positivo em sentido anti-horário*, para esse problema $\theta = -30°$. Portanto,

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(-30°)) + \left[\frac{200(10^{-6})}{2}\right]\operatorname{sen}(2(-30°))$$

$$\epsilon_{x'} = 213(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\operatorname{sen}[2(-30°)] + \frac{200(10^{-6})}{2}\cos[2(-30°)]$$

$$\gamma_{x'y'} = 793(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

A deformação na direção y' pode ser obtida pela Equação 10.7 com $\theta = -30°$. Todavia, também podemos obter $\epsilon_{y'}$ pela Equação 10.5 com $\theta = 60°(\theta = -30° + 90°)$ (Figura 10.6b). Substituindo $\epsilon_{x'}$ por $\epsilon_{y'}$, temos

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos[2(60°)]$$

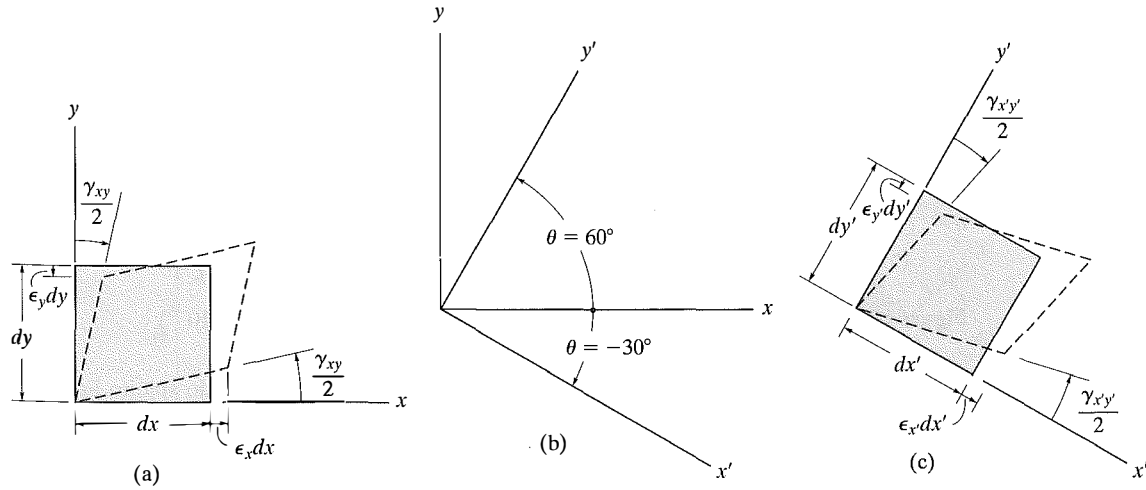


Figura 10.6

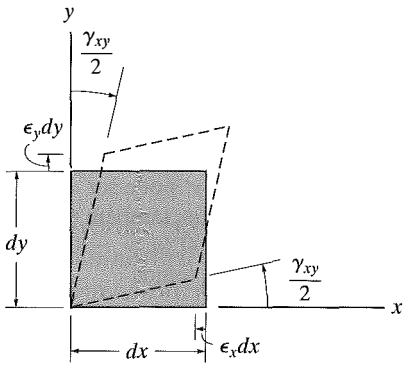
$$+\frac{200(10^{-6})}{2}\text{sen}[2(60°)]$$

$$\epsilon_{y'} = -13{,}4(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

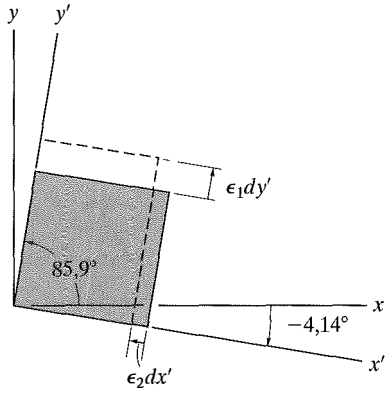
Esses resultados tendem a distorcer o elemento como mostra a Figura 10.6c.

EXEMPLO 10.2

Um elemento diferencial de material em um ponto está sujeito a um estado plano de deformação definido por $\epsilon_x = -350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 80(10^{-6})$, que tende a distorcer o elemento como mostra a Figura 10.7a. Determine as deformações principais no ponto e a orientação do elemento associada.



(a)



(b)

Figura 10.7

SOLUÇÃO

Orientação do elemento. Pela Equação 10.8 temos

$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{80(10^{-6})}{(-350 - 200)(10^{-6})}$$

Assim, $2\theta_p = -8{,}28°$ e $-8{,}28° + 180° = 171{,}72°$, de modo que

$$\theta_p = -4{,}14° \text{ e } 85{,}9° \qquad \textit{Resposta}$$

Cada um desses ângulos é *positivo* se medido no *sentido anti-horário*, do eixo x para as normais dirigidas para fora em cada face do elemento (Figura 10.7b).

Deformações principais. As deformações principais são determinadas pela Equação 10.9. Temos

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(-350 + 200)(10^{-6})}{2} \pm \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$= -75{,}0(10^{-6}) \pm 277{,}9(10^{-6})$$

$$\epsilon_1 = 203(10^{-6}) \qquad \epsilon_2 = -353(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

Podemos determinar qual dessas duas deformações distorce o elemento na direção x' aplicando a Equação 10.5 com $\theta = -4{,}14°$. Assim,

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\text{sen}\,2\theta$$

$$= \left(\frac{-350 + 200}{2}\right)(10^{-6}) + \left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6})\cos 2(-4{,}14°) + \frac{80(10^{-6})}{2}\text{sen}\,2(-4{,}14°)$$

$$\epsilon_{x'} = -353(10^{-6})$$

Por consequência, $\epsilon_{x'} = \epsilon_2$. Quando sujeito às deformações principais, o elemento é distorcido, como mostra a Figura 10.7b.

EXEMPLO 10.3

Um elemento diferencial de material em um ponto está sujeito a um estado plano de deformação definido por $\epsilon_x = -350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 80(10^{-6})$, que tende a distorcer o elemento como mostra a Figura 10.8a. Determine a deformação por cisalhamento máxima no plano no ponto e a orientação do elemento associada.

SOLUÇÃO

Orientação do elemento. Pela Equação 10.10 temos

$$\text{tg}\, 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) = -\frac{(-350 - 200)(10^{-6})}{80(10^{-6})}$$

Assim, $2\theta_s = 81{,}72°$ e $81{,}72° + 180° = 261{,}72°$, de modo que

$$\theta_s = 40{,}9° \text{ e } 131°$$

Observe que essa orientação está a 45° em relação à mostrada na Figura 10.7b no Exemplo 10.2 , como esperado.

Deformação por cisalhamento máxima no plano. Aplicando a Equação 10.11, obtemos

$$\frac{\gamma_{\text{máx no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$\gamma_{\text{máx no plano}} = 556(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal adequado de $\gamma_{\text{máx no plano}}$ pode ser obtido pela aplicação da Equação 10.6 com $\theta_s = 40{,}9°$. Temos

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\text{sen}\, 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6})\,\text{sen}\, 2(40{,}9°)$$

$$+ \frac{80(10^{-6})}{2}\cos 2(40{,}9°)$$

$$\gamma_{x'y'} = 556(10^{-6})$$

Assim, $\gamma_{\text{máx no plano}}$ tende a distorcer o elemento de modo que o ângulo reto entre dx' e dy' diminui (convenção de sinal positivo) (Figura 10.8b).

Além disso, há deformações normais médias associadas impostas ao elemento que são determinadas pela Equação 10.12:

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-350 + 200}{2}(10^{-6}) = -75(10^{-6})$$

Essas deformações tendem a provocar contração no elemento (Figura 10.8b).

*10.3 Círculo de Mohr — plano de deformação

Visto que as equações de transformação do estado plano de deformação são matematicamente semelhantes às de transformação do estado plano de tensão, também podemos resolver problemas que envolvem a transformação da deformação usando o círculo de Mohr. Essa abordagem tem a vantagem de possibilitar a visualização gráfica da variação das componentes das deformações normal e por cisalhamento em um ponto de uma orientação do elemento para outra.

Como no caso da tensão, o parâmetro θ nas equações 10.5 e 10.6 pode ser eliminado e o resultado, rescrito na forma

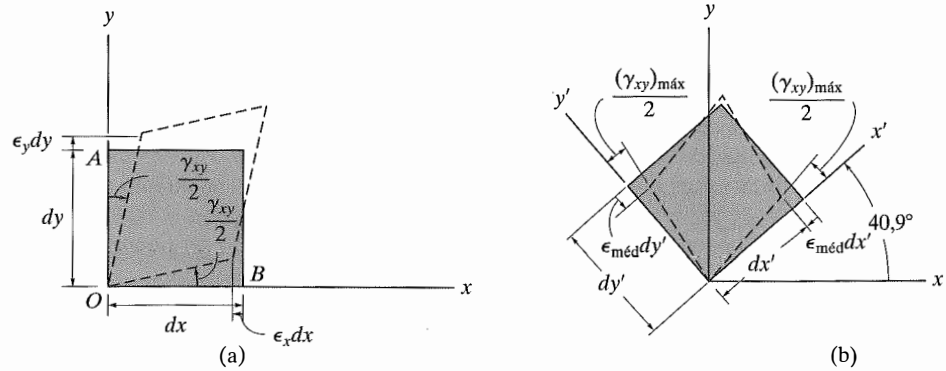


Figura 10.8

$$(\epsilon_{x'} - \epsilon_{méd})^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R \tag{10.13}$$

onde

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

A Equação 10.13 representa a equação do círculo de Mohr para deformação, com centro sobre o eixo ϵ no ponto $C(\epsilon_{méd}, 0)$ e raio R.

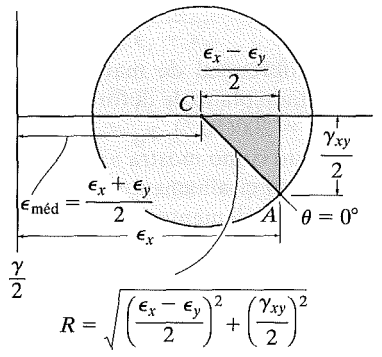


Figura 10.9

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O procedimento para traçar o círculo de Mohr para deformação é o mesmo definido para tensão.

Construção do círculo

- Defina um sistema de coordenadas tal que a abscissa represente a deformação normal ϵ, *positiva para a direita,* e a ordenada represente *metade* do valor da deformação por cisalhamento, $\gamma/2$, *positiva para baixo* (Figura 10.9).
- Usando a convenção de sinal positiva para ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy}, como mostra a Figura 10.3, determine o centro do círculo C, localizado sobre o eixo ϵ a uma distância $\epsilon_{méd} = (\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ da origem (Figura 10.9).
- Marque o ponto de referência A cujas coordenadas são $A(\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$. Esse ponto representa o caso no qual o eixo x' coincide com o eixo x. Daí, $\theta = 0°$ (Figura 10.9).
- Ligue o ponto A ao centro C do círculo e, pelo triângulo sombreado, determine o raio R do círculo (Figura 10.9).
- Uma vez determinado R, trace o círculo.

Deformações principais

- As d formações principais ϵ_1 e ϵ_2 são determinadas pelo círculo como as coordenadas dos pontos B e D, isto é, onde $\gamma/2 = 0$ (Figura 10.10a).
- A orientação do plano sobre o qual ϵ_1 age pode ser determinada pelo círculo calculando $2\theta_{p1}$ por trigonometria. Aqui, esse ângulo é medido em sentido anti-horário da linha de referência radial CA até a linha CB, Figura 10.10a. Lembre-se de que a rotação de θ_{p1} deve ser na mesma direção, do eixo x de referência do elemento até o eixo x', Figura 10.10b.*
- Quando ϵ_1 e ϵ_2 são indicadas como positivas, como na Figura 10.10a, o elemento na F gura 10.10b se alongará nas direções x' e y' como mostra o contorno tracejado.

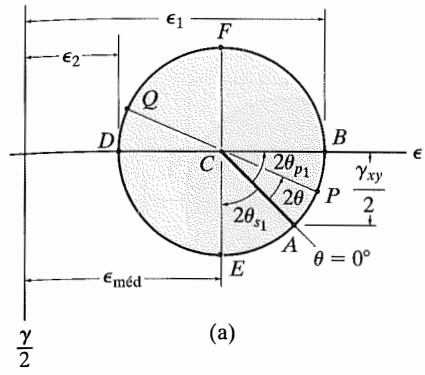
Deformação por cisalhamento máxima no plano

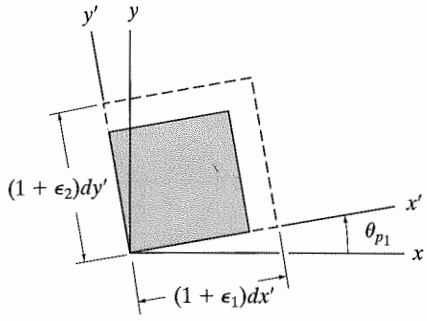
- A deformação normal média e a metade da deformação por cisalhamento máxima no plano são determinadas pelo círculo como as coordenadas dos pontos E e F (Figura 10.10a).
- A orientação do plano no qual $\gamma_{máx\ no\ plano}$ e $\epsilon_{méd}$ agem pode ser determinada pelo círculo calculando $2\theta_{s1}$ por trigonometria. Aqui, esse ângulo é medido em sentido horário *da* linha de referência radial *CA até* a linha *CE* (Figura 10.10a). Lembre-se de que a *rotação* de θ_{s1} deve ser na *m sma direção*, do eixo x de referência do elemento até o eixo x' (Figura 10.10c).*

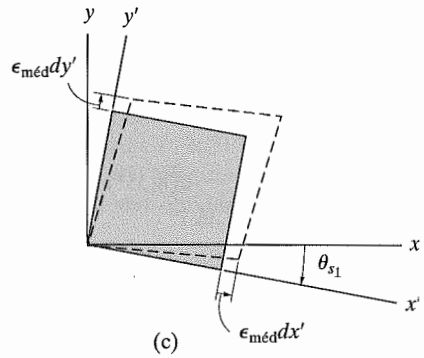
Deformações em plano arbitrário

- As componentes da deformação normal e por cisalhamento $\epsilon_{x'}$ e $\gamma_{x'y'}$ para um plano específico a um ângulo θ (Figura 10.10d), podem ser obtidas pelo círculo usando trigonometria para determinar as coordenadas do ponto P (Figura 10.10a).
- Para localizar P, o ângulo conhecido θ do eixo x' é medido no círculo como 2θ. Essa medição é feita *da* linha de referência radial *CA até a* linha radial *CP*. Lembre-se de que as medições de 2θ no círculo devem estar na mesma direção de θ para o eixo x'.*
- Se for necessário, o valor de $\epsilon_{y'}$ pode ser determinado calculando a coordenada ϵ do ponto Q na Figura 10.10a. A linha CQ encontra-se a 180° de CP e, por isso, representa uma rotação de 90° do eixo x'.

* Se, ao contrário, o eixo $\gamma/2$ fosse construído como *positivo para cima,* então o ângulo 2θ no círculo seria medido na *direção oposta* à da orientação θ do plano.







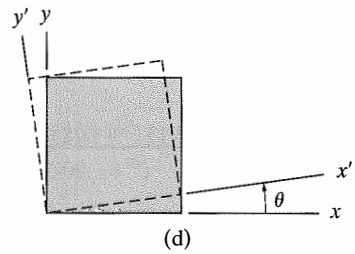
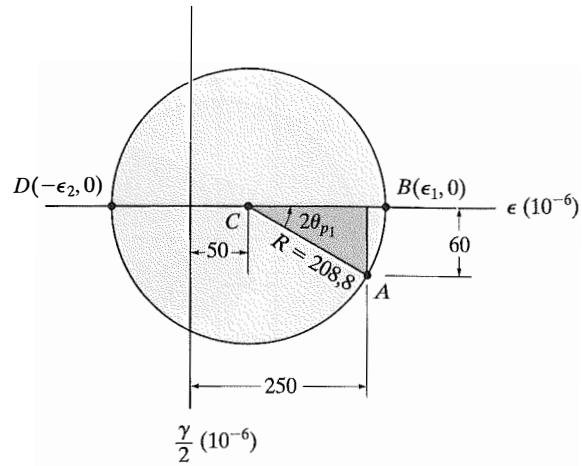


Figura 10.10



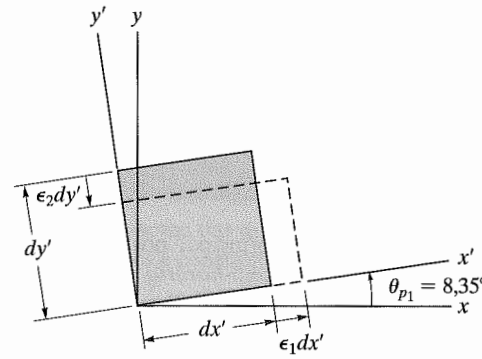


Figura 10.11

EXEMPLO 10.4

O estado plano de deformação em um ponto é representado pelas componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -150(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 120(10^{-6})$. Determine as deformações principais e a orientação do elemento.

SOLUÇÃO

Construção do círculo. Os eixos ϵ e $\gamma/2$ estão definidos na Figura 10.11a. Lembre-se de que o eixo *positivo* $\gamma/2$ deve estar dirigido *para baixo,* de modo que as rotações em *sentido anti-horário* do elemento correspondam à rotação em *sentido anti-horário* ao redor do círculo e vice-versa. O centro do círculo C está localizado sobre o eixo ϵ em

$$\epsilon_{méd} = \frac{250 + (-150)}{2}(10^{-6}) = 50(10^{-6})$$

Visto que $\gamma_{xy}/2 = 60(10^{-6})$, as coordenadas do ponto de referência $A(\theta = 0°)$ são $A[250(10^{-6})], 60(10^{-6})^2]$. Pelo triângulo sombreado na Figura 10.11a, o raio do círculo é CA, isto é,

$$R = \left[\sqrt{(250 - 50)^2 + (60)^2}\right](10^{-6}) = 208{,}8(10^{-6})$$

Deformações principais. As coordenadas ϵ dos pontos B e D representam as deformações principais. Elas são:

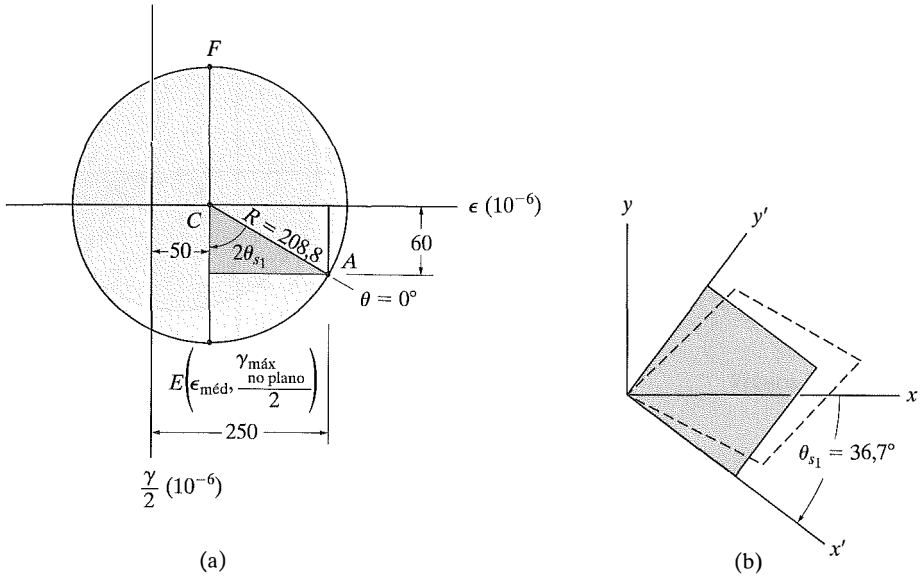


Figura 10.12

$$\epsilon_1 = (50 + 208{,}8)(10^{-6}) = 259(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$\epsilon_2 = (50 - 208{,}8)(10^{-6}) = -159(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

A direção da deformação principal positiva ϵ_1 é definida pelo ângulo $2\theta_{p1}$ em *sentido anti-horário* medido da linha de referência radial CA até a linha CB. Temos

$$\operatorname{tg} 2\theta_{p_1} = \frac{60}{(250 - 50)}$$

$$\theta_{p_1} = 8{,}35° \qquad \textit{Resposta}$$

Por consequência, o lado dx' do elemento está orientado a 8,35° em *sentido anti-horário,* como mostra a Figura 10.11b. Isso define também a direção de ϵ_1. A deformação do elemento também é mostrada na figura.

EXEMPLO 10.5

O estado plano de deformação em um ponto é representado pelas componentes $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -150(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 120(10^{-6})$. Determine as deformações por cisalhamento máximas no plano e a orientação do elemento.

SOLUÇÃO

O círculo foi definido no exemplo anterior e mostrado na Figura 10.12a.

Deformação por cisalhamento máxima no plano. Metade da deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média são representadas pelas coordenadas do ponto E ou F *no* círculo. Pelas coordenadas do ponto E,

$$\frac{(\gamma_{x'y'})^{\text{máx}}_{\text{no plano}}}{2} = 208{,}8(10^{-6})$$

$$(\gamma_{x'y'})^{\text{máx}}_{\text{no plano}} = 418(10^{-6})$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = 50(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

Para orientar o elemento, podemos determinar o ângulo em sentido horário $2\theta_{s1}$ pelo círculo.

$$2\theta_{s_1} = 90° - 2(8{,}35°)$$

$$\theta_{s_1} = 36{,}7° \qquad \textit{Resposta}$$

Esse ângulo é mostrado na Figura 10.12b. Visto que a deformação por cisalhamento definida pelo ponto E no círculo tem valor positivo e a deformação normal média também é positiva, a tensão de cisalhamento positiva e a tensão normal média positiva correspondentes deformam o elemento até a forma tracejada delineada na figura.

EXEMPLO 10.6

O estado plano de deformação em um ponto é representado sobre um elemento que tem as componentes $\epsilon_x = -300(10^{-6})$, $\epsilon_y = -100(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 100(10^{-6})$. Determine o estado de deformação em um elemento orientado a 20° em sentido horário em relação a essa posição informada.

SOLUÇÃO

Construção do círculo. Os eixos ϵ e $\gamma/2$ estão definidos na Figura 10.13a. O centro do círculo encontra-se sobre o eixo ϵ em

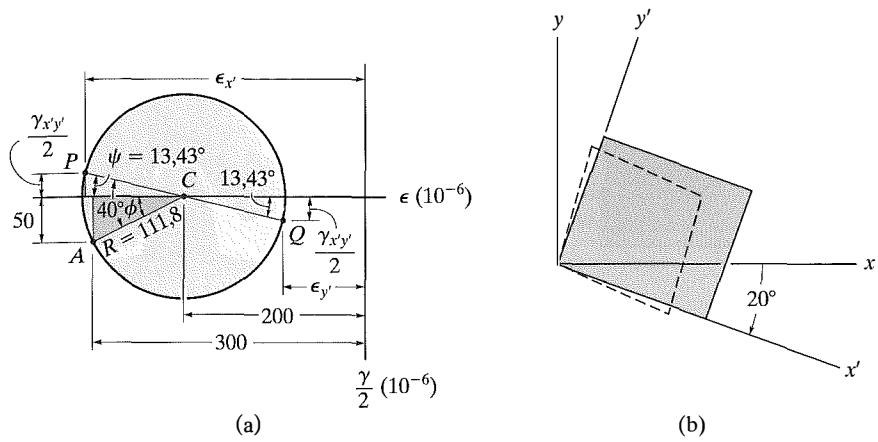


Figura 10.13

$$\epsilon_{méd} = \left(\frac{-300 - 100}{2}\right)(10^{-6}) = -200(10^{-6})$$

As coordenadas do ponto de referência A são $A[-300(10^{-6}), 50(10^{-6})]$. O raio CA determinado pelo triângulo sombreado é, portanto,

$$R = \left[\sqrt{(300 - 200)^2 + (50)^2}\right](10^{-6}) = 111{,}8(10^{-6})$$

Deformações sobre elemento inclinado. Como o elemento deve ser orientado a 20° *em sentido horário*, temos de definir um linha radial CP, $2(20°) = 40°$ em *sentido horário*, medida de CA ($\theta = 0°$) (Figura 10.13a). As coordenadas do ponto P ($\epsilon_{x'}$, $\gamma_{x'y'}/2$) são obtidas pela geometria do círculo. Observe que

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left[\frac{50}{(300 - 200)}\right] = 26{,}57°,$$

$$\psi = 40° - 26{,}57° = 13{,}43°$$

Assim,

$$\epsilon_{x'} = -(200 + 111{,}8 \cos 13{,}43°)(10^{-6})$$
$$= -309(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -(111{,}8 \text{ sen } 13{,}43°)(10^{-6})$$
$$\gamma_{x'y'} = -52{,}0(10^{-6}) \qquad \textit{Resposta}$$

A deformação normal $\epsilon_{y'}$ pode ser determinada pela coordenada ϵ do ponto Q no círculo (Figura 10.13a). Por quê?

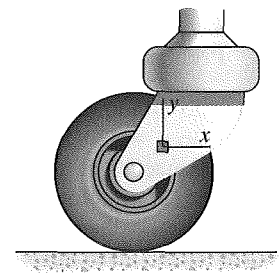
$$\epsilon_{y'} = -(200 - 111{,}8 \cos 13{,}43°)(10^{-6}) = -91{,}3(10^{-6})$$
Resposta

Como resultado dessas deformações, o elemento deforma-se em relação aos eixos x', y', como mostra a Figura 10.13b.

PROBLEMAS

10.1. Prove que a soma das deformações normais nas direções perpendiculares é constante.

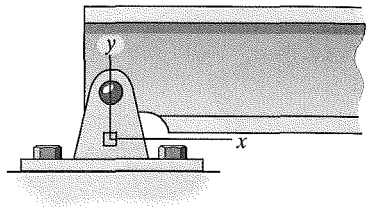
10.2. As componentes do estado plano de deformação no ponto da aba da bequilha são $\epsilon_x = -400(10^{-6})$, $\epsilon_y = 860(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 375(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar as deformações equivalentes no plano sobre um elemento orientado a um ângulo de $\theta = 30°$ em sentido anti-horário em relação à posição original. Trace um esboço do elemento deformado devido a essas deformações dentro do plano x–y.



Problema 10.2

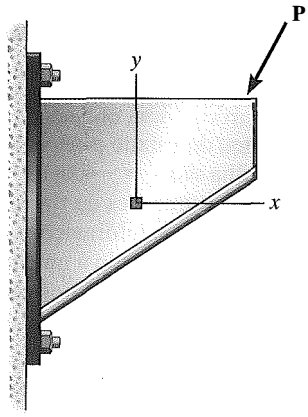
10.3. As componentes do estado plano de deformação no ponto sobre a aba do pino são $\epsilon_x = 200(10^{-6})$, $\epsilon_y = 180(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -300(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação e determine as deformações equivalentes no plano sobre um elemento orientado a um ângulo $\theta = 60°$ em sentido anti-horário em relação à posição original. Trace um esboço do elemento distorcido devido a essas deformações no plano x–y.

*10.4. Resolva o Problema 10.3 para um elemento orientado a um ângulo $\theta = 30°$ em sentido horário.



Problemas 10.3/4

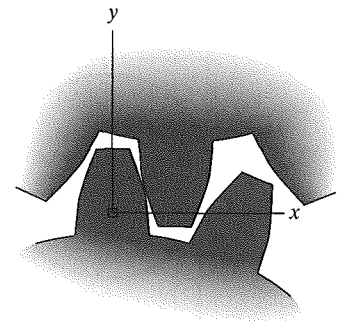
10.5. Devido à carga **P**, as componentes do estado plano de deformação no ponto do suporte são $\epsilon_x = 500(10^{-6})$, $\epsilon_y = 350(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -430(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar as deformações equivalentes no plano sobre um elemento orientado a um ângulo de $\theta = 30°$ em sentido horário em relação à posição original. Trace um esboço do elemento distorcido devido a essas deformações no plano *x–y*.



Problema 10.5

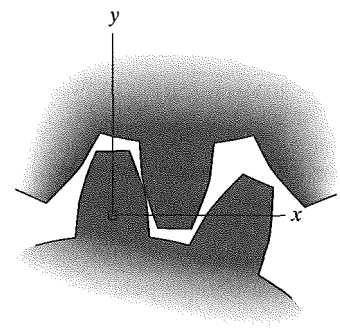
10.6. As componentes do estado plano de deformação no ponto sobre uma chave são $\epsilon_x = 120(10^{-6})$, $\epsilon_y = -180(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento no plano *x–y*.

10.7. As componentes do estado plano de deformação no ponto sobre o dente da engrenagem são $\epsilon_x = 850(10^{-6})$, $\epsilon_y = 480(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 650(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento no plano *x–y*.



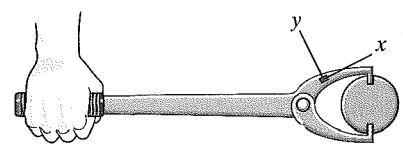
Problema 10.7

*10.8. As componentes do estado plano de deformação no ponto sobre o dente da engrenagem são $\epsilon_x = 520(10^{-6})$, $\epsilon_y = -760(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -750(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento no plano *x–y*.



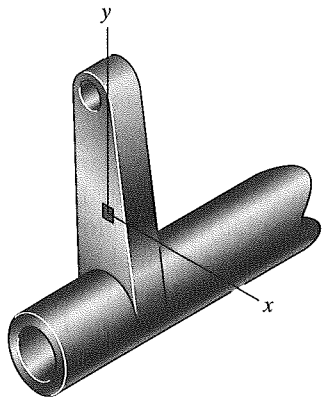
Problema 10.8

10.9. As componentes do estado plano de deformação no ponto sobre a chave de porca são $\epsilon_x = 260(10^{-6})$, $\epsilon_y = 320(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = 180(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento no plano *x–y*.



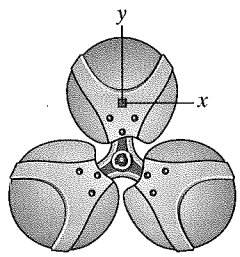
Problema 10.9

10.10. As componentes do estado plano de deformação no braço são $\epsilon_x = 250(10^{-6}), \epsilon_y = -450(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -825(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento no plano x–y.



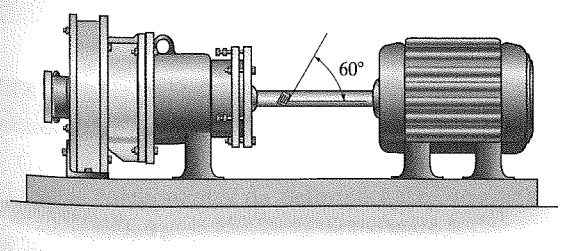
Problema 10.10

10.11. As componentes do estado plano de deformação no ponto sobre a pá do ventilador são $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -450(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -825(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento no plano x–y.



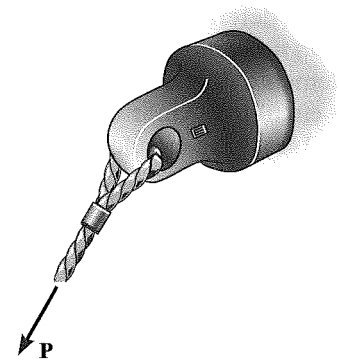
Problema 10.11

***10.12.** Um extensômetro está montado no eixo de aço A-36 de 25 mm de diâmetro como mostra a figura. Quando o eixo está girando a uma velocidade angular $\omega = 1.760$ rev/min e usando um anel corrediço, a leitura no extensômetro é $\epsilon = 800(10^{-6})$. Determine a potência de saída do motor. Considere que o eixo está sujeito somente a um torque.



Problema 10.12

10.13. As componentes do estado plano de deformação no ponto sobre o suporte são $\epsilon_x = 350(10^{-6})$, $\epsilon_y = 400(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -675(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação para determinar (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento no plano x–y.



Problema 10.13

10.14. Considere o caso geral de deformação plana no qual ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} são conhecidas. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar a deformação normal e a deformação por cisalhamento, $\epsilon_{x'}$ e $\gamma_{x'y'}$, no plano de um elemento orientado de θ em relação à horizontal. Calcule também as deformações principais e a orientação do elemento e a deformação por cisalhamento máxima no plano, a deformação normal média e a orientação do elemento.

10.15. Resolva o Problema 10.2 usando o círculo de Mohr.

***10.16.** Resolva o Problema 10.4 usando o círculo de Mohr.

10.17. Resolva o Problema 10.3 usando o círculo de Mohr.

10.18. Resolva o Problema 10.5 usando o círculo de Mohr.

10.19. Resolva o Problema 10.6 usando o círculo de Mohr.

***10.20.** Resolva o Problema 10.8 usando o círculo de Mohr.

10.21. Resolva o Problema 10.7 usando o círculo de Mohr.

10.22. Resolva o Problema 10.9 usando o círculo de Mohr.

*10.4 Deformação por cisalhamento máxima absoluta

Na Seção 9.7, salientamos que o estado de tensão em um ponto pode ser representado em três dimensões por elemento orientado em uma direção específica, tal que fique sujeito apenas a *tensões principais* que tenham valores máximo, intermediário e mínimo, $\sigma_{máx}$, σ_{int} e $\sigma_{mín}$. Essas tensões submetem o material a *deformações principais* associadas $\epsilon_{máx}$, ϵ_{int} e $\epsilon_{mín}$. Além

disso, se o material for homogêneo e também isotrópico, o elemento *não* estará sujeito a deformações por cisalhamento, visto que a tensão de cisalhamento nos planos principais é nula.

Considere que as três deformações principais provocam alongamentos ao longo dos eixos x', y' e z', como mostra a Figura 10.14a. Se virmos o elemento em duas dimensões, isto é, nos planos x'–y', x'–z' e y'–z' (figuras 10.14b, 10.14c e 10.14d), poderemos usar o círculo de Mohr para determinar a *deformação por cisalhamento máxima no plano* para cada caso. Por exemplo, vendo o elemento no plano x'–y' (Figura 10.14b), o diâmetro do círculo de Mohr estende-se entre $\epsilon_{máx}$ e ϵ_{int} (Figura 10.14e). Esse círculo dá as componentes normal e de deformação por cisalhamento em cada elemento orientado em torno do eixo z'. Da mesma forma, os círculos de Mohr para cada elemento orientado em torno dos eixos y' e x' também são mostradas na Figura 10.14e.

Por esses três círculos, podemos ver que a ***deformação por cisalhamento máxima absoluta*** é determinada pelo círculo que tem o maior raio. Ela ocorre no elemento orientado a 45° em torno do eixo y' em relação ao elemento mostrado em sua posição original (Figura 10.14a ou 10.14c). Por essa condição,

$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín} \tag{10.14}$$

e

$$\epsilon_{méd} = \frac{\epsilon_{máx} + \epsilon_{mín}}{2} \tag{10.15}$$

Deformação plana. Como no caso do estado plano de tensão, a análise anterior tem importante implicação quando o material está sujeito a um *estado plano de deformação*, em especial quando as *deformações principais* têm o *mesmo sinal,* isto é, ambas provocam alongamento ou contração. Por exemplo, se as deformações principais no plano forem $\epsilon_{máx}$ e ϵ_{int}, enquanto a deformação principal fora do plano for $\epsilon_{mín} = 0$ (Figura 10.15a), os círculos de Mohr que descrevem as componentes normal e de deformação por cisalhamento para elementos orientados em torno dos eixos x', y' e z' são mostrados na Figura 10.15b. Por inspeção, o maior círculo tem raio $R = (\gamma_{x'z'})_{máx}/2$. Por consequência,

$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = (\gamma_{x'z'})_{máx} = \epsilon_{máx}$$

Esse valor representa a *deformação por cisalhamento máxima absoluta* para o material. Observe que

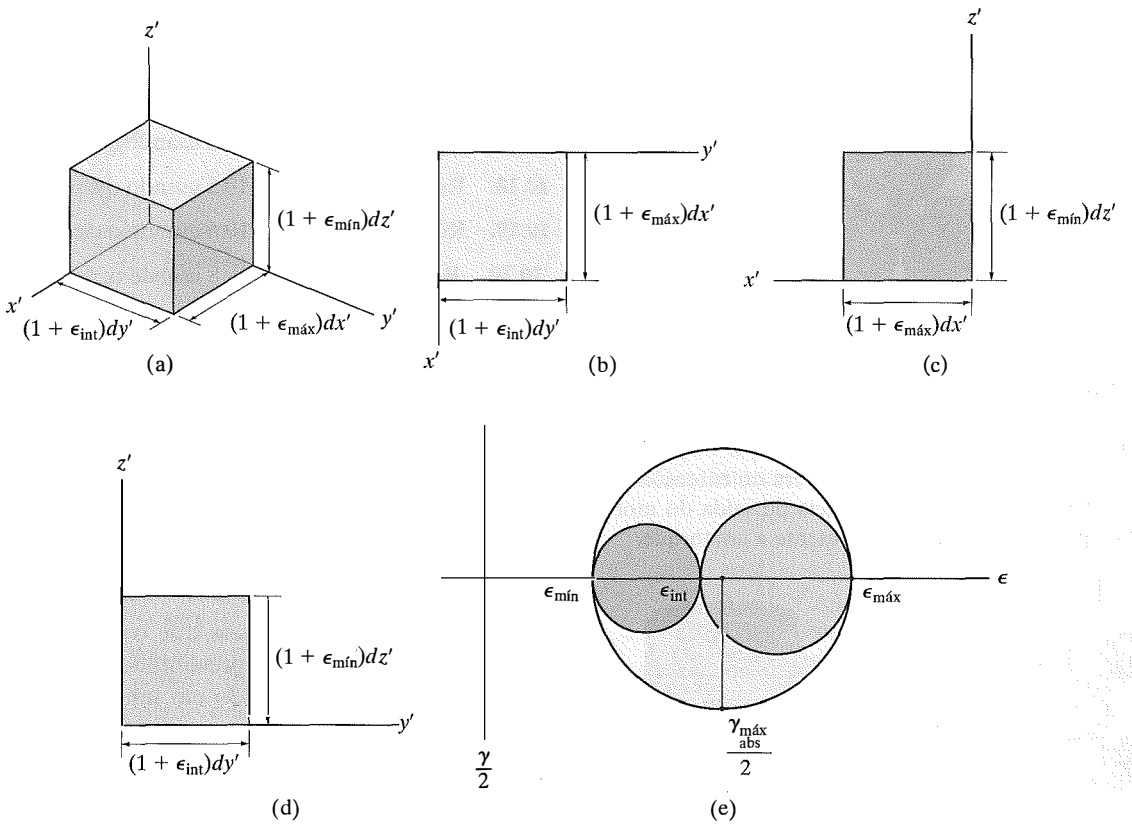


Figura 10.14

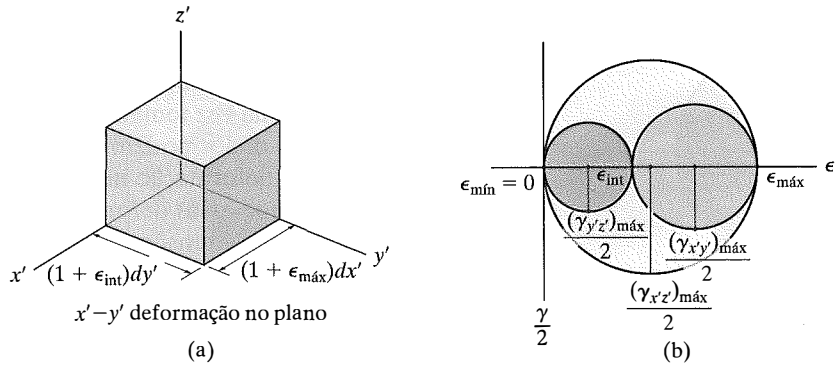


Figura 10.15

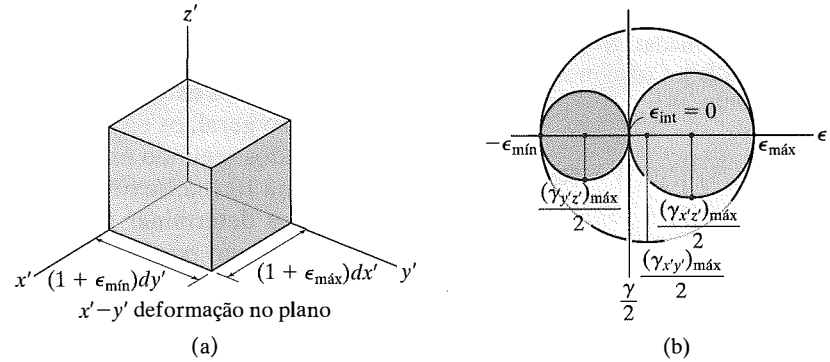


Figura 10.16

ela é *maior* do que a deformação por cisalhamento máxima no plano, que é $(\gamma_{x'y'})_{máx} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{int}$.

Por outro lado, se uma das deformações principais no plano tiver *sinal contrário* ao da outra deformação principal, então $\epsilon_{máx}$ causará alongamento, $\epsilon_{mín}$ provocará contração e a deformação principal fora do plano será $\epsilon_{int} = 0$ (Figura 10.16a). Os círculos de Mohr que descrevem as deformações para cada orientação do elemento em torno dos eixos x', y' e z' são mostrados na Figura 10.16b. Nesse caso,

$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = (\gamma_{x'y'})_{máx} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín}$$

Portanto, podemos resumir esses dois pontos da seguinte maneira: se ambas as deformações principais no plano tiverem o *mesmo sinal*, a *deformação por cisalhamento máxima absoluta* ocorrerá *fora do plano* e terá um valor $\gamma_{máx\,abs} = \epsilon_{máx}$. Todavia, se as deformações principais no plano tiverem *sinais opostos*, a deformação por cisalhamento máxima absoluta será *igual* à deformação por cisalhamento máxima no plano.

PONTOS IMPORTANTES

- O estado de deformação tridimensional geral em um ponto pode ser representado por um elemento orientado de modo tal que somente as três deformações principais ajam sobre ele.
- Por essa orientação, podemos obter a orientação do elemento que representa a deformação por cisalhamento máxima absoluta, girando o elemento 45° em torno do eixo que define a direção de ϵ_{int}.
- A deformação por cisalhamento máxima absoluta será *maior* do que aquela por cisalhamento máxima no plano sempre que as deformações principais no plano tiverem o *mesmo sinal*. Quando isso ocorrer, a deformação por cisalhamento máxima absoluta agirá fora do plano.

EXEMPLO 10.7

O estado plano de deformação em um ponto é representado pelas componentes da deformação $\epsilon_x = -400(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. Determine a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

SOLUÇÃO

Deformação máxima no plano. Resolveremos esse problema usando o círculo de Mohr. Pelas componentes da deformação, o centro do círculo encontra-se sobre o eixo ϵ em

$$\epsilon_{méd} = \frac{-400 + 200}{2}(10^{-6}) = -100(10^{-6})$$

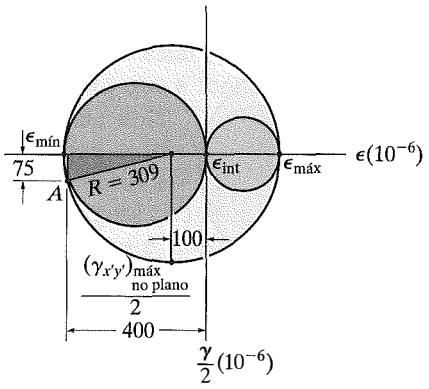


Figura 10.17

Como $\gamma_{xy}/2 = 75(10^{-6})$, as coordenadas do ponto de referência são $A[-400(10^{-6}), 75(10^{-6})^2]$. Como mostra a Figura 10.17, o raio do círculo é, portanto,

$$R = \left[\sqrt{(400 - 100)^2 + (75)^2}\right](10^{-6}) = 309(10^{-6})$$

Calculando as deformações principais no plano, temos

$$\epsilon_{máx} = (-100 + 309)(10^{-6}) = 209(10^{-6})$$
$$\epsilon_{mín} = (-100 - 309)(10^{-6}) = -409(10^{-6})$$

Pelo círculo, a deformação por cisalhamento máxima no plano é

$$\gamma_{\substack{máx \\ no\ plano}} = \epsilon_{máx} - \epsilon_{mín} = [209 - (-409)](10^{-6}) = 618(10^{-6})$$

Resposta

Deformação por cisalhamento máxima absoluta. Pelos resultados acima, temos $\epsilon_{máx} = 209(10^{-6})$, $\epsilon_{int} = 0$, $\epsilon_{mín} = -409(10^{-6})$. Os três gráficos dos círculos de Mohr traçados para as orientações do elemento em torno de cada um dos eixos x', y', z', também são mostrados na Figura 10.17. Observamos que, uma vez que as *deformações principais no plano têm sinais opostos,* a deformação por cisalhamento máxima no plano *também é* a deformação por cisalhamento máxima absoluta; isto é,

$$\gamma_{\substack{máx \\ abs}} = 618(10^{-6})$$

Resposta

10.5 Rosetas de deformação

Na Seção 3.1, mencionamos que a deformação normal em um corpo de prova de tração pode ser medida com a utilização de um ***extensômetro de resistência elétrica***, que consiste em uma grade de filamentos ou um pedaço de lâmina de metal ligado ao corpo de prova. Todavia, no caso de uma carga geral aplicada a um corpo, as *deformações normais* em um ponto sobre sua superfície são frequentemente determinadas por meio de um conjunto de três extensômetros de resistência elétrica agrupados conforme um padrão específico. Esse padrão é denominado ***roseta de deformação ou roseta*** e, uma vez tomadas as leituras dos três extensômetros, os dados podem ser usados para especificar o estado de deformação no ponto. Entretanto, devemos observar que essas deformações são medidas *somente* no plano dos extensômetros e, visto que a superfície do corpo está livre de tensão, os extensômetros podem ser submetidos ao estado plano de *tensão,* mas *não* ao estado plano de deformação. Nesse sentido, a reta normal à superfície livre é um eixo principal de deformação e, portanto, a deformação principal normal ao longo desse eixo *não* é medida pela roseta de deformação. Aqui, o importante é que o deslocamento fora do plano causado por essa deformação principal *não* afetará as medições dos extensômetros no plano.

No caso geral, os eixos dos três extensômetros são posicionados segundo os ângulos θ_a, θ_b, θ_c como mostra a Figura 10.18a. Se tomarmos as leituras de ϵ_a, ϵ_b, ϵ_c, poderemos determinar as componentes da deformação ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} no ponto aplicando a equação de transformação da deformação (Equação 10.2) para cada extensômetro. Temos

$$\begin{aligned}\epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2\theta_a + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_a + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_a \cos\theta_a \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2\theta_b + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_b + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_b \cos\theta_b \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2\theta_c + \epsilon_y \operatorname{sen}^2\theta_c + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta_c \cos\theta_c\end{aligned} \quad (10.16)$$

Os valores de ϵ_x, ϵ_y, γ_{xy} são determinados resolvendo-se as três equações simultaneamente.

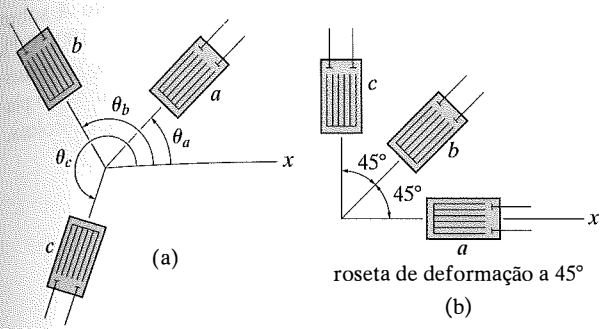
Em geral, as rosetas de deformação são posicionadas a 45° ou a 60°. No caso da roseta de deformação a 45° ou 'retangular' mostrada na Figura 10.18b, $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 45°$, $\theta_c = 90°$, de modo que a Equação 10.16 dá

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \epsilon_c \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - (\epsilon_a + \epsilon_c)\end{aligned}$$

E, no caso da roseta a 60° na Figura 10.18c, $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 60°$, $\theta_c = 120°$. Aqui, a Equação 10.16 dá

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c)\end{aligned} \quad (10.17)$$

Uma vez determinadas ϵ_x, ϵ_y, ϵ_{xy}, as equações de transformação da Seção 10.2 ou o círculo de Mohr podem ser usados para determinar as deformações principais no plano e a deformação por cisalhamento máxima no plano no ponto.



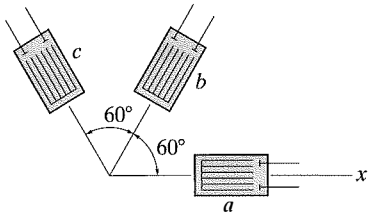


Fig. 10.18

EXEMPLO 10.8

O estado de deformação no ponto A sobre o suporte na Figura 10.19a é medido por meio da roseta de deformação mostrada na Figura 10.19b. Devido às cargas aplicadas, as leituras dos extensômetros dão $\epsilon_a = 60(10^{-6})$, $\epsilon_b = 135(10^{-6})$ e $\epsilon_c = 264(10^{-6})$. Determine as deformações principais no plano no ponto e as direções nas quais elas agem.

SOLUÇÃO

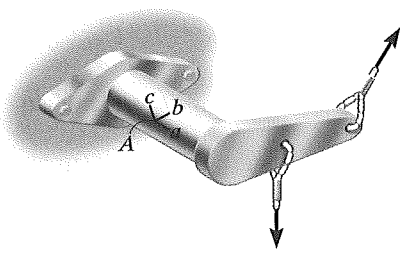
Usaremos a Equação 10.16 para a solução. Definindo um eixo x como mostra a Figura 10.19b e medindo os ângulos em sentido anti-horário do eixo $+x$ até as linhas centrais de cada extensômetro, temos $\theta_a = 0°$, $\theta_b = 60°$ e $\theta_c = 120°$. Substituindo esses resultados e os dados do problema na Equação 10.16, obtemos

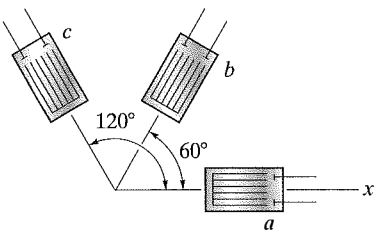
$$60(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 0° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 0° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 0° \cos 0 \qquad (1)$$
$$= \epsilon_x$$

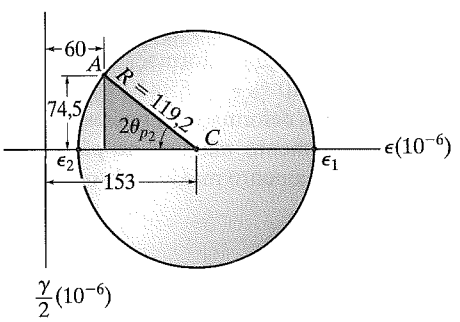
$$135(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 60° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 60° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 60° \cos 60°$$
$$= 0{,}25\epsilon_x + 0{,}75\epsilon_y + 0{,}433\gamma_{xy} \qquad (2)$$

$$264(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 120° + \epsilon_y \operatorname{sen}^2 120° + \gamma_{xy} \operatorname{sen} 120° \cos 120$$
$$= 0{,}25\epsilon_x + 0{,}75\epsilon_y - 0{,}433\gamma_{xy} \qquad (3)$$

Pela Equação 1 e resolvendo as equações 2 e 3 simultaneamente, obtemos







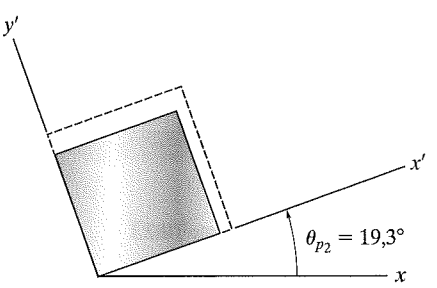


Figura 10.19

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

Esses mesmos resultados também podem ser obtidos de maneira mais direta pela Equação 10.17.

As deformações principais no plano podem ser determinadas pelo círculo de Mohr. O ponto de referência no círculo está em $A[(60(10^{-6}), -74{,}5(10^{-6})^2]$ e o centro do círculo,

C, encontra-se sobre o eixo ϵ em $\epsilon_{méd} = 153(10^{-6})$ (Figura 10.19c). Pelo triângulo sombreado, o raio é

$$R = \left[\sqrt{(153 - 60)^2 + (74{,}5)^2}\right](10^{-6}) = 119{,}1(10^{-6})$$

Assim, as deformações principais no plano são

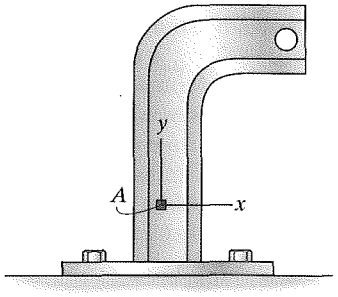
$$\epsilon_1 = 153(10^{-6}) + 119{,}1(10^{-6}) = 272(10^{-6}) \quad \textit{Resposta}$$
$$\epsilon_2 = 153(10^{-6}) - 119{,}1(10^{-6}) = 33{,}9(10^{-6}) \quad \textit{Resposta}$$

$$2\theta_{p_2} = \text{tg}^{-1}\frac{74{,}5}{(153 - 60)} = 38{,}7°$$
$$\theta_{p_2} = 19{,}3° \quad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: O elemento deformado é mostrado na posição tracejada na Figura 10.19d. Entenda que, devido ao efeito de Poisson, o elemento *também* está sujeito a uma deformação fora do plano, isto é, na direção z, embora esse valor não influencie os resultados calculados.

PROBLEMAS

10.23. As componentes da deformação no ponto A sobre o suporte são $\epsilon_x = 300(10^{-6})$, $\epsilon_y = 550(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -650(10^{-6})$, $\epsilon_z = 0$. Determine (a) as deformações principais em A, (b) a deformação por cisalhamento máxima no *plano x–y e* (c) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

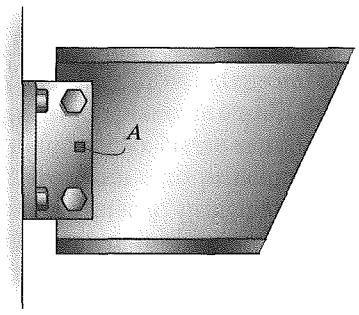


Problema 10.23

*__10.24.__ As componentes da deformação em um ponto são $\epsilon_x = -480(10^{-6})$, $\epsilon_y = 650(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 780(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determine (a) as deformações principais,(b) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (c) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

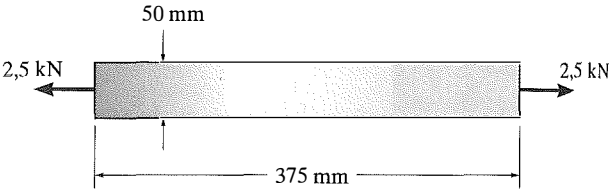
10.25. As componentes da deformação em um ponto sobre a parede de um vaso de pressão são $\epsilon_x = 350(10^{-6})$, $\epsilon_y = -460(10^{-6})$ e $\gamma_{xy} = -560(10^{-6})$ e $\epsilon_z = 0$. Determine (a) as deformações principais no ponto, (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (c) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.

10.26. As componentes de deformação no ponto A sobre a aba da cantoneira são $\epsilon_x = -140(10^{-6})$, $\epsilon_y = 180(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -125(10^{-6})$, $\epsilon_z = 0$. Determine (a) as deformações principais em A, (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y e (c) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.



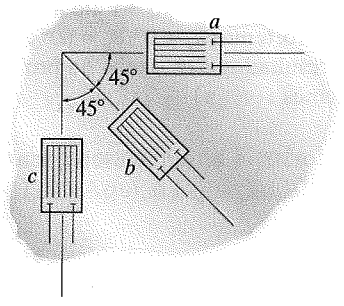
Problema 10.26

10.27. A barra de aço está sujeita à carga de tração de 2,5 kN. Se tiver 12 mm de espessura, determine a deformação por cisalhamento máxima absoluta. $E = 200$ GPa, $\nu = 0{,}3$.



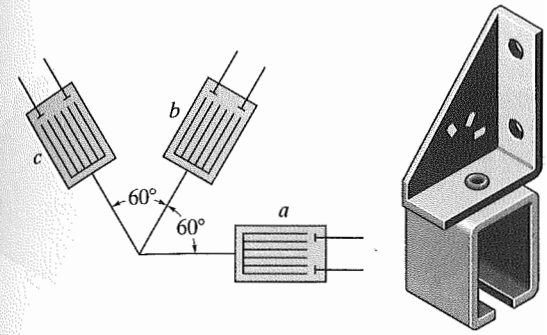
Problema 10.27

*__10.28.__ A roseta de deformação a 45° está montada sobre a superfície de uma chapa de alumínio. As seguintes leituras foram obtidas em cada extensômetro: $\epsilon_a = 475(10^{-6})$, $\epsilon_b = 250(10^{-6})$ e $\epsilon_c = -360(10^{-6})$. Determine as deformações principais no plano.



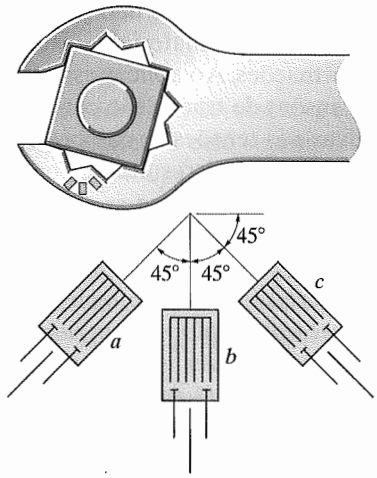
Problema 10.28

10.29. A roseta de deformação a 60° está montada sobre a superfície do suporte. As seguintes leituras foram obtidas em cada extensômetro: $\epsilon_a = -780(10^{-6})$, $\epsilon_b = 400(10^{-6})$, $\epsilon_c = 500(10^{-6})$. Determine (a) as deformações principais e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média associada. Em cada caso, mostre o elemento distorcido devido a essas deformações.



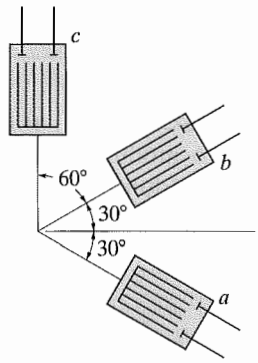
Problema 10.29

10.30. A roseta de deformação a 45° está montada próxima ao dente da ferramenta. As seguintes leituras foram obtidas em cada extensômetro: $\epsilon_a = 800(10^{-6})$, $\epsilon_b = 520(10^{-6})$ e $\epsilon_c = -450(10^{-6})$. Determine (a) as deformações principais no plano e b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média associada. Em cada caso, mostre o elemento distorcido devido a essas deformações.



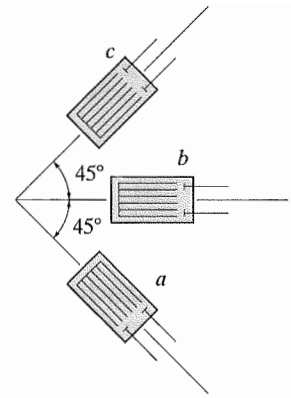
Problema 10.30

10.31. A roseta de deformação a 60° está montada sobre uma viga. As seguintes leituras foram obtidas em cada extensômetro: $\epsilon_a = 150(10^{-6})$, $\epsilon_b = -330(10^{-6})$ e $\epsilon_c = 400(10^{-6})$. Determine (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, mostre o elemento distorcido devido a essas deformações.



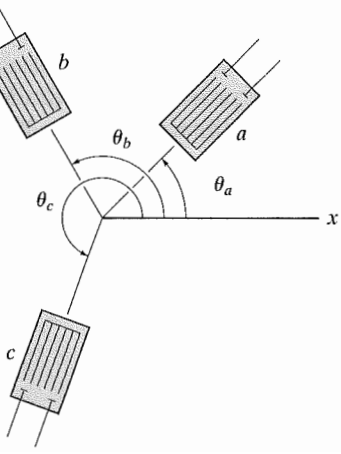
Problema 10.31

***10.32.** A roseta de deformação a 45° está montada sobre um eixo de aço. As seguintes leituras foram obtidas em cada extensômetro: $\epsilon_a = 800(10^{-6})$, $\epsilon_b = 520(10^{-6})$, $\epsilon_c = -450(10^{-6})$. Determine (a) as deformações principais no plano e suas orientações.



Problema 10.32

***10.33.** Considere a orientação geral dos três extensômetros em um ponto como mostra a figura. Escreva um código computacional que possa ser usado para determinar as deformações principais no plano e a deformação por cisalhamento máxima no plano em um ponto. Mostre uma aplicação do código usando os valores $\theta_a = 40°$, $\epsilon_a = 160(10^{-6})$, $\theta_b = 125°$, $\epsilon_b = 100(10^{-6})$, $\theta_c = 220°$, $\epsilon_c = 80(10^{-6})$.



Problema 10.33

10.6 Relações entre o material e suas propriedades

Agora que já apresentamos os princípios gerais da tensão e da deformação multiaxial, usaremos esses princípios para desenvolver algumas relações importantes que envolvem as propriedades dos materiais. Para tal, consideraremos que o material seja homogêneo e isotrópico e comporta-se de um modo linear elástico.

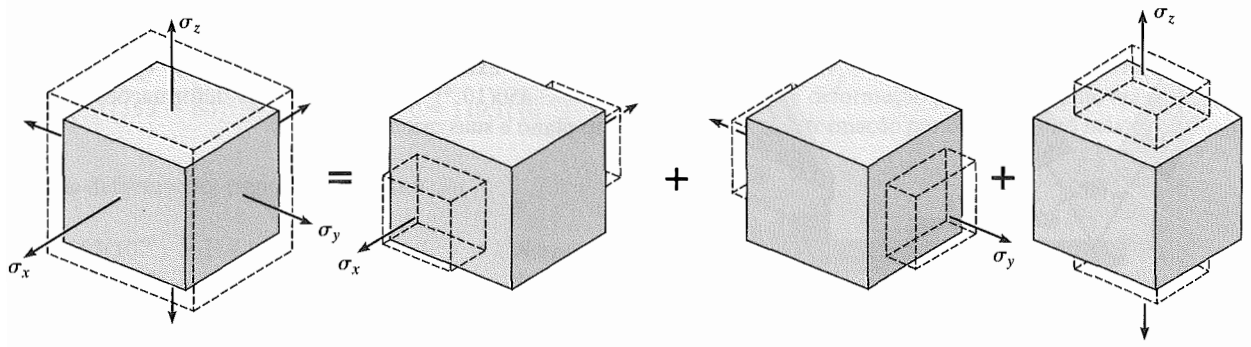


Figura 10.20

Lei de Hooke generalizada. Se o material em um ponto estiver sujeito a um estado de tensão triaxial, σ_x, σ_y, σ_z (Figura 10.20a), deformações normais associadas ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z serão desenvolvidas no material. As tensões podem ser relacionadas com as deformações pelo princípio da superposição, coeficiente de Poisson, $\epsilon_{lat} = -\nu\epsilon_{long}$ e pela lei de Hooke, como aplicável na direção uniaxial, $\epsilon = \sigma/E$. Para mostrar como isso é feito, em primeiro lugar consideraremos a deformação normal do elemento na direção x, causada pela aplicação isolada de cada tensão normal. Quando σ_x é aplicada (Figura 10.20b), o elemento alonga-se na direção x e a deformação ϵ'_x nessa direção é

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

A aplicação de σ_y provoca a contração do elemento com uma deformação ϵ''_x na direção x (Figura 10.20c). Aqui,

$$\epsilon''_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

Da mesma forma, a aplicação de σ_z (Figura 10.20d), provoca uma contração na direção x tal que

$$\epsilon'''_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$

Quando essas três deformações normais são superpostas, a deformação normal ϵ_x é determinada para o estado de tensão na Figura 10.20a. Equações semelhantes podem ser desenvolvidas para as deformações normais nas direções y e z. Os resultados finais podem ser escritos como

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]\\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]\\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned} \qquad (10.18)$$

Essas três equações expressam a lei de Hooke de uma forma geral para um estado de tensão triaxial. Como observamos da dedução, elas serão válidas somente se o princípio da superposição for aplicável, o que exige uma resposta *linear elástica* do material e a aplicação de deformações que não provoquem alterações graves na forma do material — isto é, exigem-se pequenas deformações. Ao aplicar essas equações, observe que as tensões de tração são consideradas quantidades positivas e as tensões de compressão, negativas. Se a deformação normal resultante for *positiva*, isso indicará que o material *alonga-se*, ao passo que uma deformação normal *negativa* indicará que o material *contrai-se*.

Como o material é isotrópico, o elemento na Figura 10.20a *permanecerá* um *bloco retangular* quando submetido às tensões normais, isto é, *nenhuma deformação por cisalhamento* será produzida no material. Se agora aplicarmos uma tensão de cisalhamento τ_{xy} ao elemento (Figura 10.21a), observações experimentais indicam que o material se distorcerá *somente* devido a uma deformação por cisalhamento γ_{xy}, isto é, τ_{xy} não causará outras deformações no material. Da mesma forma, τ_{yz} e τ_{xz} provocarão somente deformações por cisalhamento τ_{yz} e τ_{xz}, respectivamente. Portanto, a lei de Hooke para tensão de cisalhamento e deformação por cisalhamento pode ser escrita como

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \qquad (10.19)$$

Relações que envolvem E, ν e G. Na Seção 3.7, afirmamos que o módulo de elasticidade E está relacionado com o módulo de cisalhamento G pela Equação 3.11, a saber,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (10.20)$$

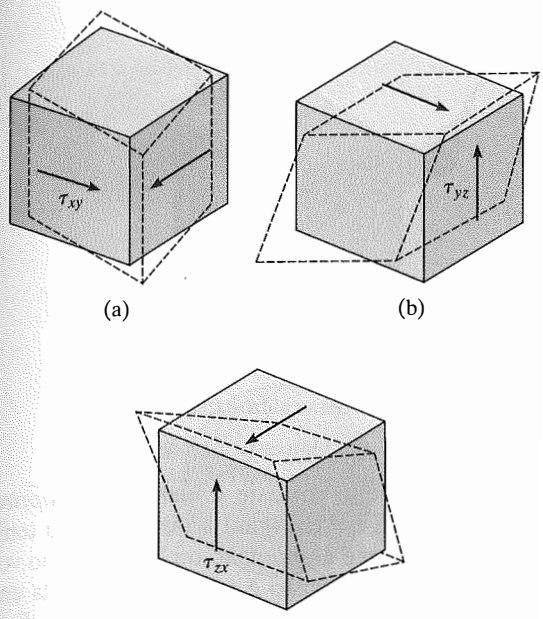


Figura 10.21

Um modo de deduzir essa relação é considerar que um elemento do material está sujeito a cisalhamento puro ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$) (Figura 10.22a). A aplicação da Equação 9.5 para obter as tensões principais nos dá $\sigma_{máx} = \tau_{xy}$ e $\sigma_{mín} = -\tau_{xy}$. Pela Equação 9.4, o elemento tem de ser orientado a $\theta_{p1} = 45°$em sentido anti-horário em relação ao eixo x, de modo a definir a direção do plano no qual $\sigma_{máx}$ age (Figura 10.22b). Se as três tensões principais $\sigma_{máx} = \tau_{xy}$, $\sigma_{int} = 0$, $\sigma_{mín} = -\tau_{xy}$, forem substituídas na primeira das Equações 10.18, a deformação principal $\epsilon_{máx}$ pode ser relacionada com a tensão de cisalhamento τ_{xy}. O resultado é

$$\epsilon_{máx} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1 + \nu) \qquad (10.21)$$

Essa deformação, que distorce o elemento ao longo do eixo x', também pode ser relacionada com a deformação por cisalhamento γ_{xy} por meio das equações de transformação da deformação ou pelo círculo de Mohr para deformação. Para tal, em primeiro lugar observe que, considerando-se $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, então, pela Equação 10.18, $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$. Substituindo esses resultados na equação de transformação (Equação 10.9), obtemos

$$\epsilon_1 = \epsilon_{máx} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Pela lei de Hooke, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$, de modo que $\epsilon_{máx} = \tau_{xy}/2G$. Substituindo na Equação 10.21 e rearranjando os termos, temos o resultado final, a saber Equação 10.20.

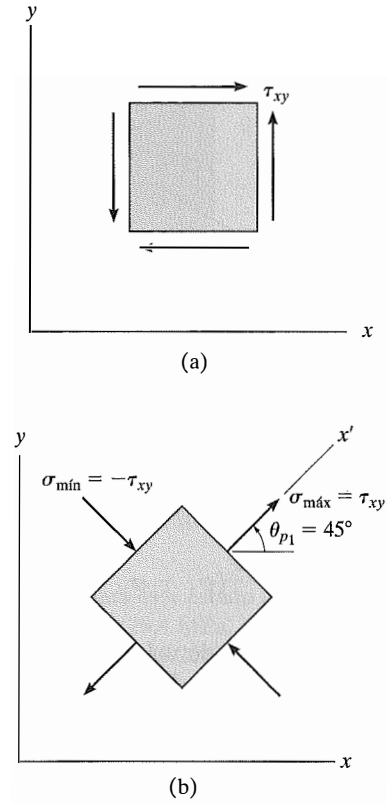


Figura 10.22

Dilatação e módulo de compressibilidade.

Quando um material elástico for submetido a tensão normal, seu volume mudará. Para calcular essa mudança, considere um elemento de volume que está sujeito às tensões principais σ_x, σ_y, σ_z. Os lados do elemento são originalmente dx, dy, dz (Figura 10.23a); contudo, após a aplicação da tensão, eles se tornam, respectivamente, $(1 + \epsilon_x)\,dx$, $(1 + \epsilon_y)\,dy$, $(1 + \epsilon_z)\,dz$ (Figura 10.23b). Portanto, a mudança no volume do elemento é

$$\delta V = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)\,dx\,dy\,dz - dx\,dy\,dz$$

Desprezando os produtos das deformações, já que elas são muito pequenas, temos

$$\delta V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)\,dx\,dy\,dz$$

A mudança em volume por unidade de volume é denominada 'deformação volumétrica' ou ***dilatação*** (e) e pode ser expressa como

$$e = \frac{\delta V}{dV} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \qquad (10.22)$$

Por comparação, as deformações por cisalhamento *não* mudarão o volume do elemento; mais exatamente, mudarão apenas sua forma retangular.

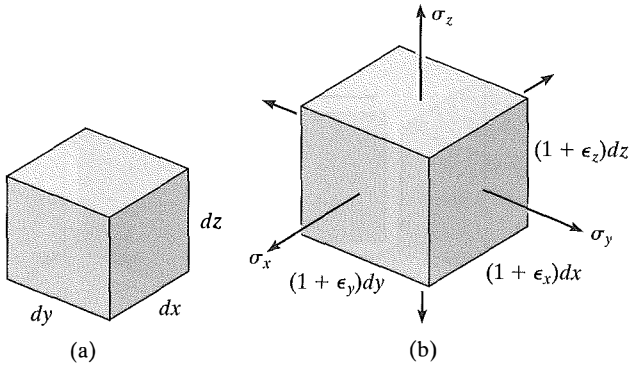


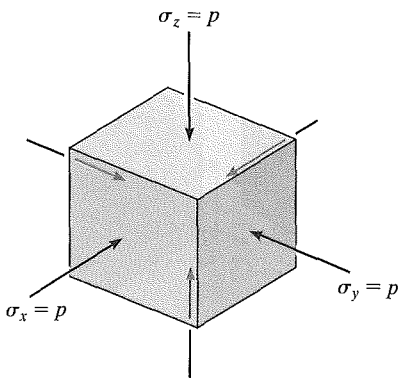
Figura 10.23

Se usarmos a lei de Hooke generalizada, como definida pela Equação 10.18, podemos expressar a dilatação em termos da tensão aplicada. Temos

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (10.23)$$

Quando um elemento de volume de material é submetido à pressão uniforme p de um líquido, a pressão no corpo é a mesma em todas as direções e é sempre normal à qualquer superfície sobre a qual ela age. Tensões de cisalhamento *não estão presentes*, visto que a resistência de um líquido ao cisalhamento é nula. Esse estado de carga 'hidrostática' exige que as tensões normais sejam iguais em toda e qualquer direção e, portanto, um elemento do corpo está sujeito às tensões principais $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ (Figura 10.24). Substituindo na Equação 10.23 e rearranjando os termos, obtemos

$$\frac{p}{e} = -\frac{E}{3(1 - 2\nu)} \qquad (10.24)$$



Tensão hidrostática

Figura 10.24

O termo à direita consiste *somente nas propriedades* do material E e ν e é igual à razão entre a tensão normal uniforme p e a dilatação ou 'deformação volumétrica'. Como essa razão é *semelhante* àquela entre tensão elástica linear e deformação, que define E, isto é, $\sigma/\epsilon = E$, os termos da direita são denominados *módulo de elasticidade do volume* ou ***módulo de compressibilidade***. Suas unidades são as mesmas da tensão, e ele será simbolizado pela letra k; isto é,

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \qquad (10.25)$$

Observe que, para a maioria dos metais, $\nu \approx 1/3$, portanto, $k \approx E$. Se existisse um material que não mudasse de volume, então $\delta V = 0$ e, por consequência, k teria de ser infinito. Pela Equação 10.25, o valor *máximo* teórico para o índice de Poisson é, portanto, $\nu = 0{,}5$. Além disso, durante o escoamento não se observa nenhuma mudança de volume no material e, portanto, $\nu = 0{,}5$ é usado quando ocorre escoamento plástico.

PONTOS IMPORTANTES

- Quando um material homogêneo e isotrópico é submetido a um estado de tensão triaxial, a deformação em uma das direções da tensão é influenciada pelas deformações produzidas por *todas* as tensões. Isso é resultado do efeito de Poisson e, por sua vez, resulta na forma generalizada da lei de Hooke.
- Uma tensão de cisalhamento aplicada a material homogêneo e isotrópico produzirá somente deformação por cisalhamento no mesmo plano.
- Existe uma relação matemática entre as constantes de material E, G e ν.
- *Dilatação*, ou *deformação volumétrica*, é causada somente por deformação normal, e não por deformação por cisalhamento.
- O *módulo de compressibilidade* é uma medida da rigidez de um volume de material. Essa propriedade do material fornece um limite superior ao índice de Poisson de $\nu = 0{,}5$, que permanece nesse valor enquanto ocorre escoamento plástico.

EXEMPLO 10.9

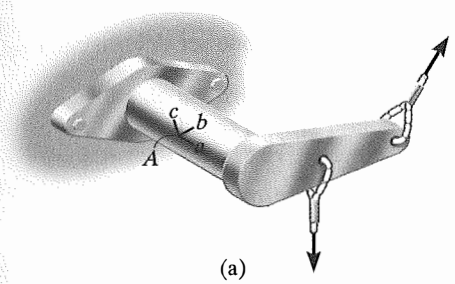
O suporte no Exemplo 10.8 (Figura 10.25a), é feito de aço para o qual $E_{aço} = 200$ GPa, $\nu_{aço} = 0{,}3$. Determine as tensões principais no ponto A.

SOLUÇÃO I

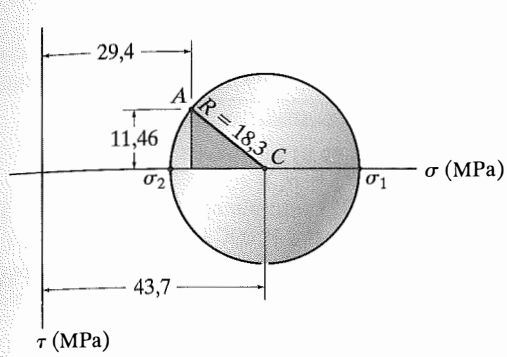
No Exemplo 10.8, as deformações principais foram determinadas como

$$\epsilon_1 = 272(10^{-6})$$

$$\epsilon_2 = 33{,}9(10^{-6})$$



(a)



(b)

Figura 10.25

Como o ponto A encontra-se sobre a *superfície* do suporte na qual não existe carga, a tensão na superfície é nula, portanto, o ponto A está sujeito ao estado plano de tensão. Aplicando a lei de Hooke com $\sigma_3 = 0$, temos

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2; \qquad 272(10^{-6}) = \frac{\sigma_1}{200(10^9)} - \frac{0{,}3}{200(10^9)}\sigma_2$$

$$= \sigma_1 - 0{,}3\sigma_2 \qquad (1)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1; \qquad 33{,}9(10^{-6}) = \frac{\sigma_2}{200(10^9)} - \frac{0{,}3}{200(10^9)}\sigma_1$$

$$6{,}78(10^6) = \sigma_2 - 0{,}3\sigma_1 \qquad (2)$$

A solução simultânea das equações 1 e 2 produz

$$\sigma_1 = 62{,}0 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_2 = 25{,}4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

Também é possível resolver o problema usando o estado de deformação dado,

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

como visto no Exemplo 10.8. Aplicando a lei de Hooke no plano x–y, temos

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y; \qquad 60(10^{-6}) = \frac{\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0{,}3\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x; \qquad 246(10^{-6}) = \frac{\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0{,}3\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\sigma_x = 29{,}4 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 58{,}0 \text{ MPa}$$

A tensão de cisalhamento é determinada pela lei de Hooke para cisalhamento. Todavia, em primeiro lugar temos de calcular G.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{2(1+0{,}3)} = 76{,}9 \text{ GPa}$$

Assim,

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \qquad \tau_{xy} = 76{,}9(10^9)[-149(10^{-6})] = -11{,}46 \text{ MPa}$$

O círculo de Mohr para esse estado plano de tensão tem um ponto de referência $A(29{,}4 \text{ MPa}, -11{,}46 \text{ MPa})$ e centro em $\sigma_{méd} = 43{,}7$ MPa (Figura 10.25b). O raio é determinado pelo triângulo sombreado.

$$R = \sqrt{(43{,}7 - 29{,}4)^2 + (11{,}46)^2} = 18{,}3 \text{ MPa}$$

Portanto,

$$\sigma_1 = 43{,}7 \text{ MPa} + 18{,}3 \text{ MPa} = 62{,}0 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\sigma_2 = 43{,}7 \text{ MPa} - 18{,}3 \text{ MPa} = 25{,}4 \text{ MPa} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Cada uma dessas soluções é válida desde que o material seja linear elástico e isotrópico, pois, nesse caso, os planos principais de tensão e deformação coincidem.

EXEMPLO 10.10

A barra de cobre na Figura 10.26 está sujeita a uma carga uniforme ao longo de suas bordas, como mostra a figura. Se tiver comprimento $a = 300$ mm, largura $b = 50$ mm e espessura $t = 20$ mm antes da aplicação da carga, determine seus novos comprimento, largura e espessura após a aplicação da carga. Considere $E_{co} = 120$ GPa, $\nu_{co} = 0{,}34$.

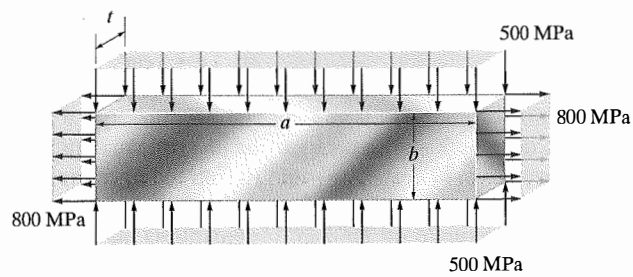


Figura 10.26

SOLUÇÃO

Por inspeção, a barra está sujeita a um estado plano de tensão. Pelas cargas, temos

$$\sigma_x = 800\text{ MPa} \qquad \sigma_y = -500\text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad \sigma_z = 0$$

As deformações normais associadas são determinadas pela lei de Hooke generalizada, Equação 10.18; isto é,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$
$$= \frac{800\text{ MPa}}{120(10^3)\text{ MPa}} - \frac{0{,}34}{120(10^3)\text{ MPa}}(-500\text{ MPa}) = 0{,}00808$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$
$$= \frac{-500\text{ MPa}}{120(10^3)\text{ MPa}} - \frac{0{,}34}{120(10^3)\text{ MPa}}(800\text{ MPa} + 0) = -0{,}00643$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$
$$= 0 - \frac{0{,}34}{120(10^3)\text{ MPa}}(800\text{ MPa} - 500\text{ MPa}) = -0{,}000850$$

Os novos comprimento, largura e espessura da barra são, portanto,

$$a' = 300\text{ mm} + 0{,}00808(300\text{ mm}) = 302{,}4\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$b' = 50\text{ mm} + (-0{,}00643)(50\text{ mm}) = 49{,}68\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$t' = 20\text{ mm} + (-0{,}000850)(20\text{ mm}) = 19{,}98\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 10.11

Se o bloco retangular mostrado na Figura 10.27 estiver sujeito a uma pressão uniforme $p = 20$ kPa, determine a dilatação e a mudança no comprimento de cada lado. Considere $E = 600$ kPa, $\nu = 0{,}45$.

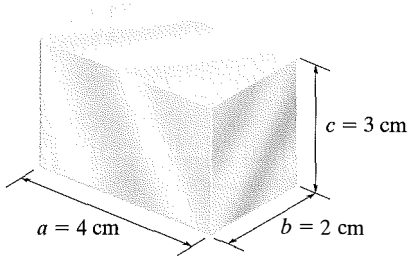


Figura 10.27

SOLUÇÃO

Dilatação. A dilatação pode ser determinada pela Equação 10.23 com $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -20$ kPa. Temos

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$
$$= \frac{1 - 2(0{,}45)}{600\text{ kPa}}[3(-20\text{ kPa})]$$
$$= -0{,}01\text{ cm}^3/\text{cm}^3 \qquad \textit{Resposta}$$

Mudança no comprimento. A deformação normal de cada lado pode ser determinada pela lei de Hooke, Equação 10.18; isto é,

$$\epsilon = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$= \frac{1}{600\text{ kPa}}[-20\text{ kPa} - (0{,}45)(-20\text{ kPa} - 20\text{ kPa})]$$

$$= -0{,}00333\text{ cm/cm}$$

Assim, a mudança no comprimento de cada lado é

$$\delta a = -0{,}00333(4\text{ cm}) = -0{,}0133\text{ cm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\delta b = -0{,}00333(2\text{ cm}) = -0{,}00667\text{ cm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\delta c = -0{,}00333(3\text{ cm}) = -0{,}0100\text{ cm} \qquad \textit{Resposta}$$

Os sinais negativos indicam que cada dimensão diminuiu.

PROBLEMAS

10.34. Mostre que, para o caso do estado plano de tensão, a lei de Hooke pode ser expressa como

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

10.35. Use a lei de Hooke, Equação 10.18, para desenvolver as equações de transformação da deformação, equações 10.5 e 10.6, a partir das equações de transformação de tensão, 9.1 e 9.2.

***10.36.** Uma barra de liga de cobre é carregada em um equipamento de ensaio de tração e constata-se que $\epsilon_x = 940(10^{-6})$ e $\sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = 0$. Determine o módulo de elasticidade, E_{co}, e a dilatação, e_{co}, do cobre. $\nu_{co} = 0{,}35$.

10.37. As tensões principais no plano e as deformações associadas em um plano em um ponto são $\sigma_1 = 250$ MPa, $\sigma_2 = 112$ MPa, $\epsilon_1 = 1{,}02(10^{-3})$, $\epsilon_2 = 0{,}180(10^{-3})$. Determine o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

10.38. Determine o módulo de compressibilidade para borracha dura se $E_b = 5$ GPa e $\nu_b = 0{,}43$.

10.39. As deformações principais em um ponto sobre a fuselagem de alumínio de um avião a jato são $\epsilon_1 = 780(10^{-6})$ e $\epsilon_2 = 400(10^{-6})$. Determine as tensões principais associadas no ponto no mesmo plano. $E_{al} = 70$ GPa, $\nu_{al} = 0{,}33$. *Dica:* Veja o Problema 10.34.

***10.40.** A haste é feita de alumínio 2014-T6. Se for submetida à carga de tração de 700 N e tiver diâmetro de 20 mm, determine a deformação por cisalhamento máxima absoluta na haste em um ponto sobre sua superfície.

Problema 10.40

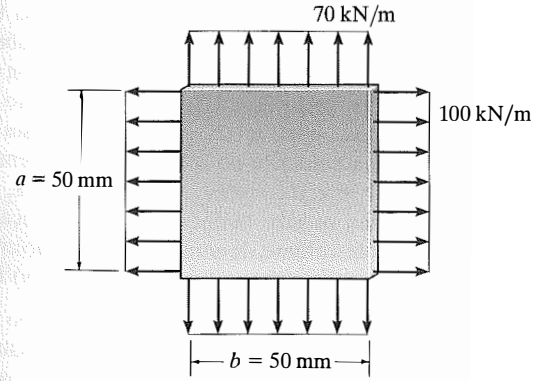
10.41. A haste é feita de alumínio 2014-T6. Se for submetida à carga de tração de 700 N e tiver diâmetro de 20 mm, determine as deformações principais em um ponto sobre a superfície da haste.

Problema 10.41

10.42. Uma haste tem raio de 10 mm. Se for submetida a uma carga axial de 15 N tal que a deformação axial na haste seja $\epsilon_x = 2{,}75(10^{-6})$, determine o módulo de elasticidade E e a mudança em seu diâmetro. $\nu = 0{,}23$.

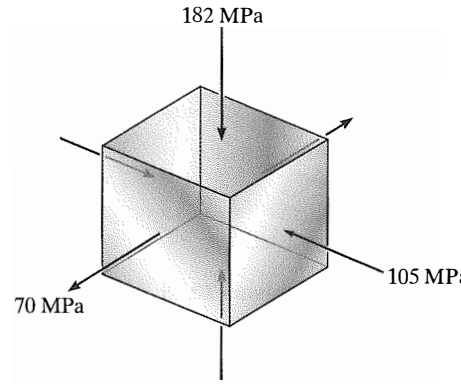
10.43. As deformações principais em um ponto sobre a superfície de alumínio de um tanque são $\epsilon_1 = 630(10^{-6})$ e $\epsilon_2 = 350(10^{-6})$. Se for um caso de estado plano de tensão, determine as tensões principais associadas no ponto no mesmo plano. $E_{al} = 70$ GPa, $\nu_{al} = 0{,}33$. *Dica:* Veja o Problema 10.34.

***10.44.** Uma carga periférica uniforme de 100 kN/m e 70 kN/m é aplicada a um corpo de prova de poliestireno. Se a forma original do corpo de prova for quadrada, de dimensões $a = 50$ mm, $b = 50$ mm e espessura $t = 6$ mm, determine suas novas dimensões a', b' e t' após a aplicação da carga. $E_p = 4$ GPa e $\nu_p = 0{,}25$.



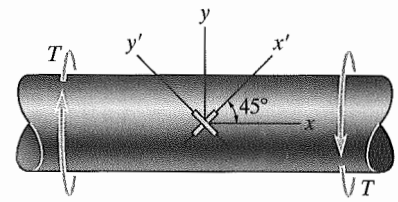
Problema 10.44

10.45. As tensões principais em um ponto são mostradas na figura. Se o material for grafite, para o qual $E_g = 5{,}6$ GPa e $\nu_g = 0{,}23$, determine as deformações principais.



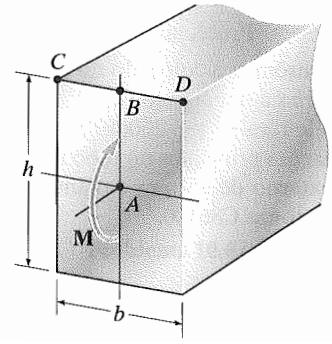
Problema 10.45

10.46. O eixo tem raio de 15 mm e é feito de aço-ferramenta L2. Determine as deformações nas direções x' e y', se for aplicado um torque T = 2 kN · m ao eixo.



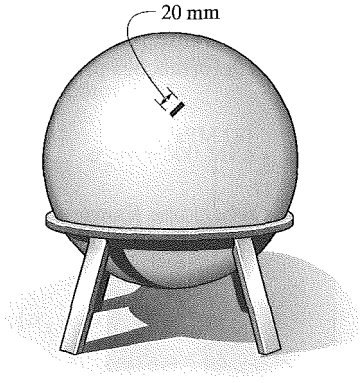
Problema 10.46

10.47. A seção transversal da viga retangular é submetida ao momento fletor **M**. Determine uma expressão para o aumento no comprimento das retas AB e CD. O material tem módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν.



Problema 10.47

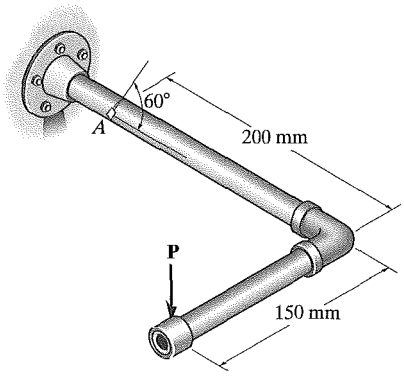
***10.48.** O vaso de pressão esférico tem diâmetro interno de 2 m e espessura de 10 mm. Um extensômetro com 20 mm de comprimento é ligado ao vaso e constata-se um aumento no comprimento de 0,012 mm quando o vaso é pressurizado. Determine a pressão que provoca essa deformação e calcule a tensão de cisalhamento máxima no plano e a tensão por cisalhamento máxima absoluta em um ponto sobre a superfície externa do vaso. O material é aço, para o qual $E_{aço} = 200$ GPa e $\nu_{aço} = 0{,}3$.



Problema 10.48

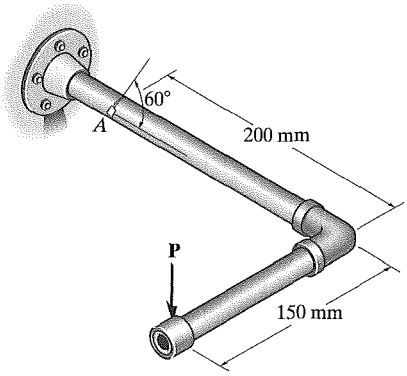
10.49. Uma haste tem raio de 10 mm. Se estiver sujeita a uma carga axial de 15 N tal que a deformação axial na haste seja $\epsilon_x = 2{,}75(10^{-6})$, determine o módulo de elasticidade E e a mudança em seu diâmetro. $\nu = 0{,}23$.

10.50. Um extensômetro colocado no plano vertical sobre a superfície externa a um ângulo de 60° em relação ao eixo do tubo dá uma leitura $\epsilon_A = -250(10^{-6})$ no ponto A. Determine a força vertical P, se o tubo tiver diâmetro externo de 25 mm e diâmetro interno de 15 mm. O tubo é feito de bronze C86100.



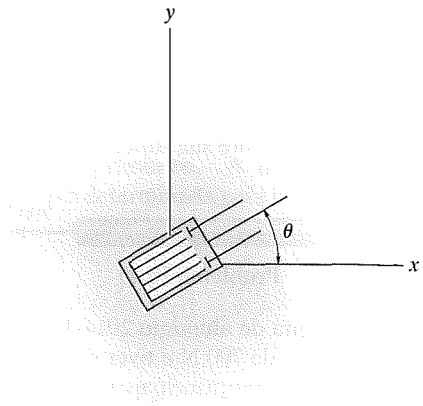
Problema 10.50

10.51. Um extensômetro colocado no plano vertical sobre a superfície externa a um ângulo de 60° em relação ao eixo do tubo dá uma leitura $\epsilon_A = -250(10^{-6})$ no ponto A. Determine as deformações principais no tubo no ponto A. O tubo tem diâmetro externo de 25 mm e diâmetro interno de 15 mm e é feito de bronze C86100.



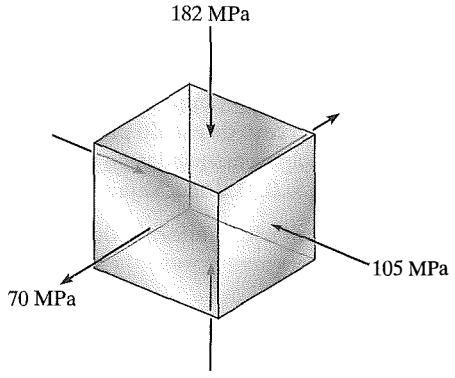
Problema 10.51

***10.52.** Um material está sujeito às tensões principais σ_x e σ_y. Determine a orientação θ de um extensômetro colocado em um ponto, de modo que sua leitura da deformação normal responda apenas a σ_y, e não a σ_x. As constantes do material são E e ν.



Problema 10.52

10.53. As tensões principais em um ponto são mostradas na figura. Se o material for alumínio, para o qual $E_{al} = 70$ GPa e $\nu_{al} = 0{,}33$, determine as deformações principais.

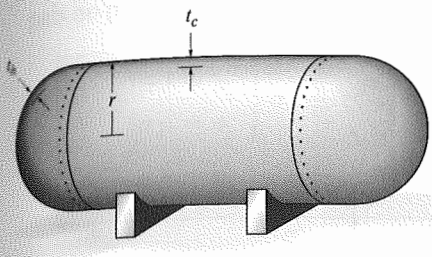


Problema 10.53

10.54. Um vaso de pressão cilíndrico de parede fina tem raio interno r, espessura t e comprimento L. Se for submetido a uma pressão interna p, mostre que o aumento em seu raio interno é $dr = r\epsilon_1 = pr^2(1 - 1/2\nu)/Et$ e o aumento em seu comprimento é $\Delta L = pLr(1/2 - \nu)/Et$. Com esses resultados, mostre que a mudança no volume interno torna-se $dV = \pi r^2(1 + \epsilon_1)^2(1 + \epsilon_2)L - \pi r^2 L$. Visto que ϵ_1 e ϵ_2 são quantidades pequenas, mostre também que a mudança no volume por unidade de volume, denominada *deformação volumétrica*, pode ser expressa como $dV/V = pr(2{,}5 - 2\nu)/Et$.

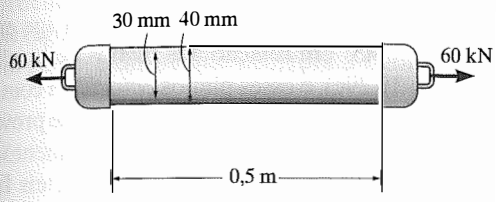
10.55. As extremidades do vaso de pressão cilíndrico são fechadas com tampas semiesféricas para reduzir a tensão de flexão que ocorreria se as tampas fossem planas. As tensões de flexão nas linhas de junção entre as tampas e o corpo podem ser eliminadas com a escolha adequada das espessuras t_h e t_c das tampas e do cilindro, respectivamente. Isso requer

que a expansão radial seja a mesma para o cilindro e para as semiesferas. Mostre que essa relação é $t_c/t_h = (2 - \nu)/(1 - \nu)$. Considere que o vaso é feito do mesmo material e que ambos, cilindro e semiesferas, têm o mesmo raio interno. Se a espessura do cilindro for 12 mm, qual será a espessura exigida para as semiesferas? Considere $\nu = 0{,}3$.



Problema 10.55

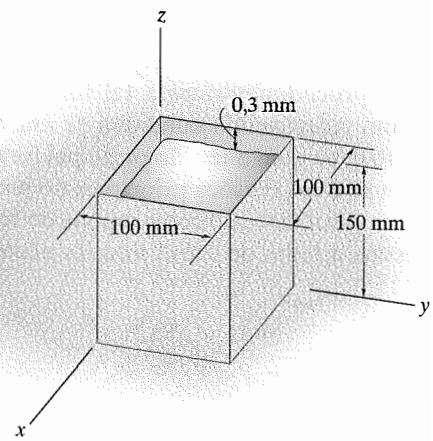
10.56. O tubo de aço A-36 está sujeito à carga axial de 60 kN. Determine a mudança no volume do material após a aplicação da carga.



Problema 10.56

10.57. A cavidade de um corpo rígido liso está cheia com alumínio 6061-T6 líquido. Quando frio, o líquido fica a 0,3 mm da parte superior da cavidade. Se essa parte superior for coberta e a temperatura aumentar 110°C, determine as componentes da tensão σ_x, σ_y e σ_z no alumínio. *Dica:* Use a Equação 10.18 com um termo adicional $\alpha\Delta T$ para a deformação (Equação 4.4).

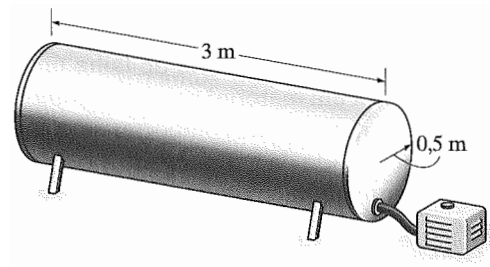
10.58. A cavidade de um corpo rígido liso está cheia com alumínio 6061-T6 líquido. Quando frio, o líquido fica a 0,3 mm da parte superior da cavidade. Se essa parte superior não for coberta e a temperatura aumentar 110°C, determine as componentes da deformação ϵ_x, ϵ_y e ϵ_z no alumínio. *Dica:* Use as Equações 10.18 com um termo adicional $\alpha\Delta T$ para a deformação (Equação 4.4).



Problemas 10.57/58

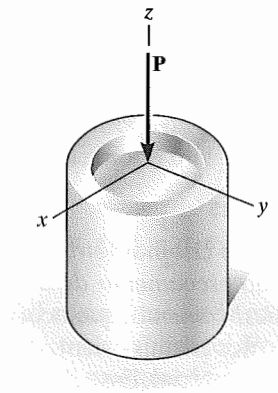
10.59. O vaso de pressão cilíndrico de parede fina com raio interno r e espessura t é submetido a uma pressão interna p. Se as constantes do material forem E e ν, determine as deformações nas direções circunferencial e longitudinal. Com esses resultados, calcule o aumento no diâmetro e no comprimento de um vaso de pressão de aço cheio de ar e sob pressão manométrica de 15 MPa. O vaso tem 3 m de comprimento, raio interno de 0,5 m e espessura da parede de 10 mm. $E_{aço} = 200$ GPa, $\nu_{aço} = 0{,}3$.

***10.60.** Estime o aumento no volume do tanque do Problema 10.59. *Dica:* Use os resultados do Problema 10.54 como confirmação.



Problemas 10.59/60

10.61. Um material macio está confinado no interior de um cilindro rígido que repousa sobre um suporte rígido. Considerando que $\epsilon_x = 0$ e $\epsilon_y = 0$, determine qual será o fator de aumento do módulo de elasticidade quando é aplicada uma carga, se $\nu = 0{,}3$ para o material.



Problema 10.61

10.62. Um vaso de pressão esférico de parede fina com raio interno r e espessura t é submetido a uma pressão interna p. Mostre que o aumento de volume no interior do vaso é $\Delta V = (2p\pi r^4/Et)(1 - \nu)$. Use uma análise de pequenas deformações.

*10.7 Teorias de falhas

Quando um engenheiro enfrenta o problema de executar um projeto utilizando um material específico, torna-se importante estabelecer um *limite* superior para o estado de tensão que define a falha do mate-

rial. Se o material for *dúctil*, normalmente a falha será especificada pelo início do *escoamento*, ao passo que se for *frágil*, isso ocorrerá pela *ruptura*. Esses modos de falha são definidos prontamente se o elemento estrutural estiver sujeito a um estado de tensão uniaxial, como no caso de tensão simples; todavia, se o elemento estrutural estiver sujeito a tensão biaxial ou triaxial, será mais difícil definir um critério para a falha.

Nesta seção, discutiremos quatro teorias frequentemente utilizadas na prática da engenharia para prever a falha de um material sujeito a um estado de tensão *multiaxial*. Essas teorias, e outras como elas, também são usadas para determinar as tensões admissíveis informadas em muitos manuais e códigos de projeto. Porém, não existe nenhuma teoria de falha única que possa ser aplicada a um material específico *todas* as vezes, porque um material pode comportar-se como dúctil ou frágil dependendo da temperatura, taxa de carregamento, ambiente químico ou processo de fabricação ou moldagem. Quando usamos uma determinada teoria de falha, em primeiro lugar é necessário calcular as componentes da tensão normal e de cisalhamento em pontos do elemento estrutural onde essas tensões são maiores. Para esse cálculo, podemos usar os fundamentos da resistência dos materiais ou utilizar fatores de concentração de tensão onde aplicável ou, em situações complexas, determinar as maiores componentes da tensão por análise matemática baseada na teoria da elasticidade ou por uma técnica experimental adequada. Seja qual for o caso, uma vez definido esse estado de tensão, as *tensões principais* nesses pontos críticos serão determinadas, uma vez que cada uma das teorias apresentadas a seguir é baseada no conhecimento das tensões principais.

Materiais dúcteis

Teoria da tensão de cisalhamento máxima. A causa mais comum do *escoamento de um material dúctil* como o aço é o *deslizamento*, que ocorre ao longo dos planos de contato dos cristais orientados aleatoriamente e que formam o material. Esse *deslizamento* deve-se à *tensão de cisalhamento* e, se submetermos um corpo de prova com o formato de uma tira fina com alto polimento a um ensaio de tração simples, poderemos ver como essa tensão provoca o *escoamento* do material (Figura 10.28). As bordas dos planos de deslizamento que aparecem na superfície da tira são denominadas *linhas de Lüder*. Essas linhas indicam claramente os planos de deslizamento na tira, que ocorrem a aproximadamente 45° em relação ao eixo da tira.

Considere agora um elemento do material tomado de um corpo de prova de ensaio de tração e que esteja sujeito somente à tensão de escoamento σ_e (Figura 10.29a). A tensão de cisalhamento máxima pode ser determinada traçando-se um círculo de Mohr para o elemento (Figura 10.29b). Os resultados indicam que

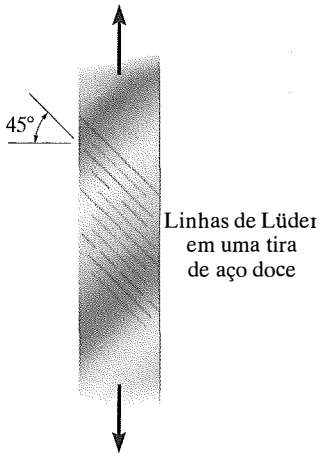


Figura 10.28

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_e}{2} \tag{10.26}$$

Além do mais, essa tensão de cisalhamento age em planos que estão a 45° em relação aos planos de tensão principal (Figura 10.29c), e esses planos *coincidem* com a direção das linhas de Lüder mostradas no corpo de prova, indicando que, de fato, a falha ocorre por cisalhamento.

Usando essa ideia de que os materiais dúcteis falham por cisalhamento, Henri Tresca propôs, em 1868, a ***teoria da tensão de cisalhamento máxima,*** ou **critério de escoamento de *Tresca*.** Essa teoria pode ser usada para prever a tensão de falha de um material dúctil sujeito a qualquer tipo de carga. A teoria da tensão de cisalhamento máxima afirma que o escoamento do material começa quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta no material atinge a tensão de cisalhamento que provoca o escoamento desse mesmo material quando sujeito *somente* a tensão axial. Portanto, para evitar falha, a teoria da tensão de cisalhamento máxima exige que $\tau_{máx\ abs}$ no material seja menor ou igual a $\sigma_e/2$, onde σ_e é determinada por um ensaio de tração simples.

Para aplicar a teoria, expressaremos a tensão de cisalhamento máxima absoluta em termos das *tensões principais*. O procedimento para tal foi discutido na Seção 9.7 com referência à condição de *estado plano de tensão*, isto é, na qual a tensão principal fora do plano é nula. Se as duas tensões principais no plano tiverem o *mesmo sinal,* isto é, forem ambas de tração ou de compressão, a falha ocorrerá *fora do plano* e, pela Equação 9.15,

$$\tau_{\substack{máx \\ abs}} = \frac{\sigma_{máx}}{2}$$

Por outro lado, se as tensões principais no plano tiverem *sinais opostos,* a falha ocorrerá no plano e, pela Equação 9.16,

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\ \text{abs}}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

Por essas equações e pela 10.26, a teoria da tensão de cisalhamento máxima para o *estado plano de tensão* pode ser expressa para quaisquer duas tensões principais no plano como σ_1 e σ_2 pelos seguintes critérios:

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_e \\ |\sigma_2| &= \sigma_e \end{aligned}\right\} \sigma_1, \sigma_2 \text{ têm os mesmos sinais}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_e \Big\} \sigma_1, \sigma_2 \text{ têm sinais opostos}$$

(10.27)

A Figura 10.30 apresenta um gráfico dessas equações. Fica claro que, se qualquer ponto do material estiver sujeito ao estado plano de tensão e suas tensões principais no plano forem representadas por uma coordenada (σ_1, σ_2) marcada no *contorno* ou *fora* da área hexagonal mostrada nessa figura, o material escoará no ponto e diz-se que ocorrerá a falha.

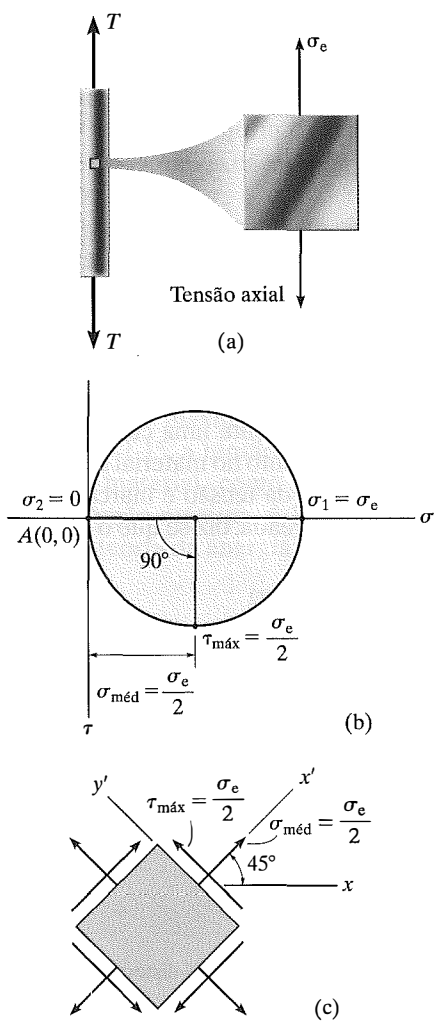
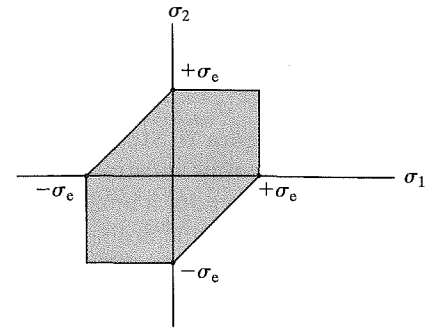


Figura 10.29



Teoria da tensão de cisalhamento máxima

Figura 10.30

Teoria da energia de distorção máxima. Na Seção 3.5, afirmamos que um material, quando deformado por uma carga externa, tende a armazenar energia *internamente* em todo o volume. A energia por unidade de volume do material é denominada ***densidade de energia de deformação***, e, se o material estiver sujeito a uma tensão uniaxial, σ, a densidade de energia de deformação, definida pela Equação 3.6, pode ser expressa como

$$u = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \tag{10.28}$$

É possível formular um critério de falha com base nas distorções causadas pela energia de deformação. Antes disso, entretanto, precisamos determinar a densidade de energia de deformação em um elemento de volume de material sujeito às três tensões principais, σ_1, σ_2 e σ_3 (Figura 10.31a). Aqui, cada tensão principal contribui com uma porção da densidade de energia de deformação total, de modo que

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1\epsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\epsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\epsilon_3$$

Se o material comportar-se de maneira linear elástica, a lei de Hooke será aplicável. Portanto, substituindo a Equação 10.18 na equação acima e simplificando, obtemos

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)\right]$$

(10.29)

Essa densidade de energia de deformação pode ser considerada como a soma de duas partes, uma que representa a energia necessária para provocar uma *mudança de volume* no elemento sem mudar a forma do elemento e outra que representa a energia necessária para *distorcer* o elemento. Especificamente, a energia armazenada no elemento como resultado da mudança em seu volume é causada pela aplicação da tensão

principal média, $\sigma_{méd} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$, visto que essa tensão provoca deformações principais iguais no material (Figura 10.31b). A porção remanescente da tensão, $(\sigma_1 - \sigma_{méd})$, $(\sigma_2 - \sigma_{méd})$, $(\sigma_3 - \sigma_{méd})$, provoca a energia de distorção (Figura 10.31c).

Evidências experimentais mostram que materiais não escoam quando submetidos a uma tensão (hidrostática) uniforme, como $\sigma_{méd}$ que acabamos de discutir. O resultado é que, em 1904, M. Huber propôs que o escoamento em um material dúctil ocorre quando a *energia de distorção* por unidade de volume do material é igual ou ultrapassa a energia de distorção por unidade de volume do mesmo material quando submetido a escoamento em um ensaio de tração simples. Essa teoria é denominada ***teoria da energia de distorção máxima*** e, visto que mais tarde foi redefinida independentemente por R. von Mises e H. Hencky, às vezes ela também porta os nomes desses cientistas.

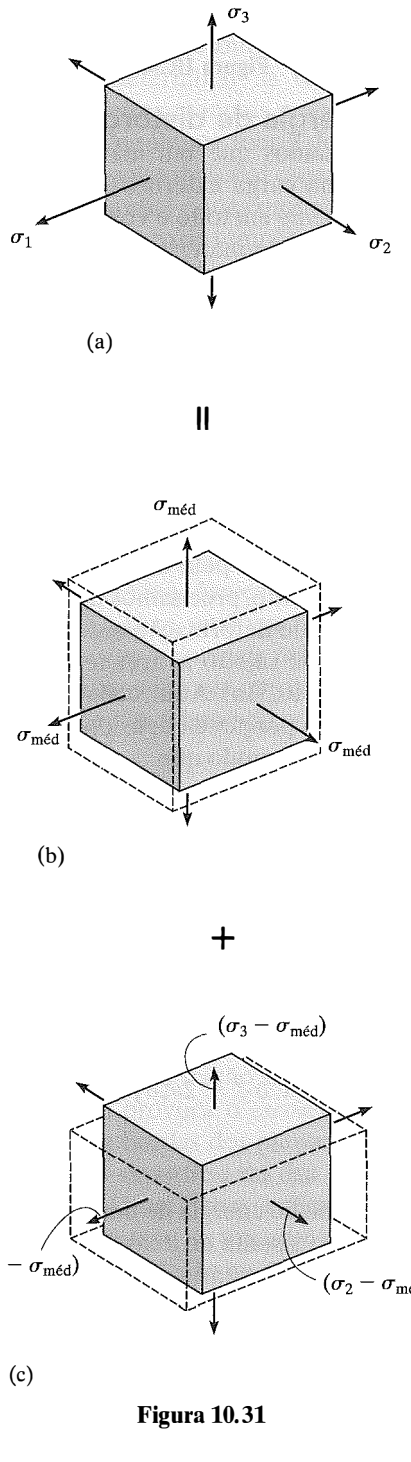


Figura 10.31

Para obter a energia de distorção por unidade de volume, substituiremos as tensões $(\sigma_1 - \sigma_{méd})$, $(\sigma_2 - \sigma_{méd})$, $(\sigma_3 - \sigma_{méd})$ por σ_1, σ_2 e σ_3, respectivamente, na Equação 10.29, percebendo que $\sigma_{méd} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$. Expandindo e simplificando, obtemos

$$u_d = \frac{1 + \nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

No caso da *tensão plana*, $\sigma_3 = 0$, essa equação reduz-se a

$$u_d = \frac{1 + \nu}{3E}\left(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)$$

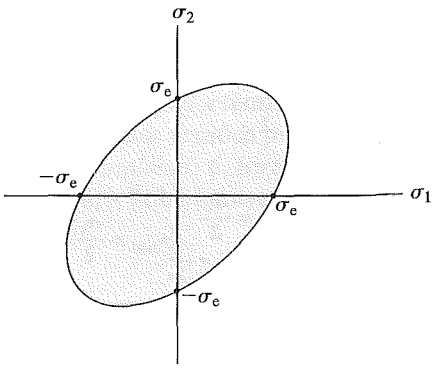
Para um ensaio de tração *uniaxial*, $\sigma_1 = \sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e, portanto,

$$(u_d)_e = \frac{1 + \nu}{3E}\sigma_e^2$$

Como a teoria da energia de distorção máxima exige que $u_d = (u_d)e$, então, para o caso de tensão no plano ou biaxial, temos

$$\boxed{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_e^2} \qquad (10.30)$$

Essa equação representa uma curva elíptica (Figura 10.32). Assim, se um ponto no material sofrer uma tensão tal que a coordenada da tensão é marcada no contorno ou fora da área sombreada, diz-se que o material falha.



Teoria da energia de distorção máxima

Figura 10.32

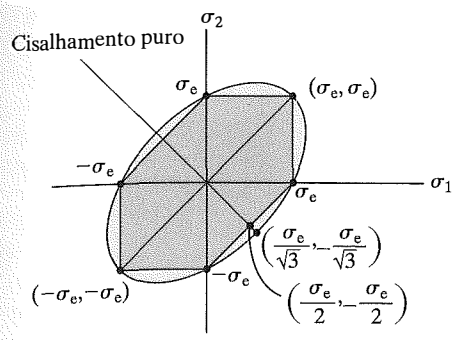


Figura 10.33

Uma comparação entre os dois critérios de falha que descrevemos até aqui é mostrado na Figura 10.33. Observe que ambas as teorias dão os mesmos resultados quando as tensões principais são iguais, isto é, pelas equações 10.27 e 10.30, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_e$ ou, quando uma das tensões principais for igual a zero e a outra tiver valor σ_e. Por outro lado, se o material for submetido a cisalhamento puro, τ, então as teorias demonstram a maior discrepância na previsão da falha. As coordenadas da tensão desses pontos sobre as curvas foram determinadas considerando o elemento mostrado na Figura 10.34a. Pelo círculo de Mohr associado para esse estado de tensão (Figura 10.34b), obtemos as tensões principais $\sigma_1 = \tau$ e $\sigma_2 = -\tau$. Aplicando as equações 10.27 e 10.30, a teoria da tensão de cisalhamento máxima e a teoria da energia de distorção máxima produzem $\sigma_1 = \sigma_e/2$ e $\sigma_1 = \sigma_e\sqrt{3}$, respectivamente (Figura 10.33).

Ensaios de torção reais, usados para desenvolver uma condição de cisalhamento puro em um corpo de prova dúctil, mostraram que a teoria da energia de distorção máxima dá resultados mais precisos para falha por cisalhamento puro do que a teoria da tensão de cisalhamento máxima. Na verdade, visto que $(\sigma_e/\sqrt{3})/(\sigma_e/2) = 1{,}15$, a tensão de cisalhamento para escoamento do material, como dada pela teoria da energia de distorção máxima, é 15% mais precisa do que a dada pela teoria da energia da tensão de cisalhamento máxima.

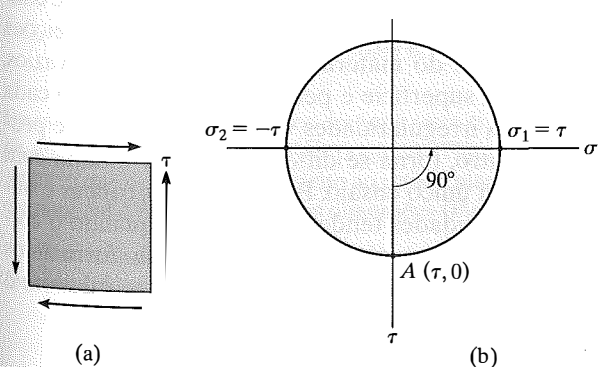


Figura 10.34

Materiais frágeis

Teoria da tensão normal máxima. Afirmamos anteriormente que materiais frágeis, como ferro fundido cinzento, tendem a falhar repentinamente por *ruptura*, sem nenhum escoamento aparente. Em um *ensaio de tração,* a ruptura ocorre quando a tensão normal atinge o limite de resistência σ_r (Figura 10.35a). Além disso, em um *ensaio de torção*, a ruptura frágil ocorre devido à *tensão de tração máxima,* desde que o plano de ruptura para um elemento esteja a 45° em relação à direção de cisalhamento (Figura 10.35b). Portanto, a superfície de ruptura é helicoidal, como mostra a figura.* Testes experimentais mostraram também que, durante torção, a resistência do material *não é muito afetada* pela presença da tensão principal de compressão associada que está em ângulo reto em relação à tensão de tração principal. Por consequência, a tensão de tração necessária para romper um corpo de prova durante um ensaio de torção é aproximadamente a mesma necessária para romper um corpo de prova sob tensão simples. Por causa disso, a ***teoria da tensão normal máxima*** afirma que um material frágil falhará, quando a tensão principal máxima σ_1 no material atingir um valor limite igual ao limite de resistência à tensão normal que o material pode suportar quando submetido à tração simples.

Se o material estiver sujeito ao *estado plano de tensão*, exige-se que

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_r \\ |\sigma_2| &= \sigma_r \end{aligned} \qquad (10.31)$$

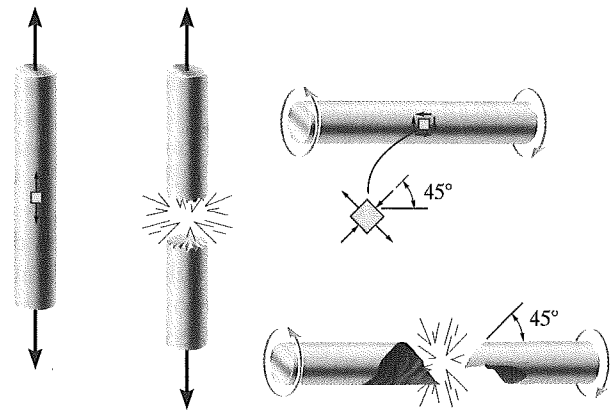
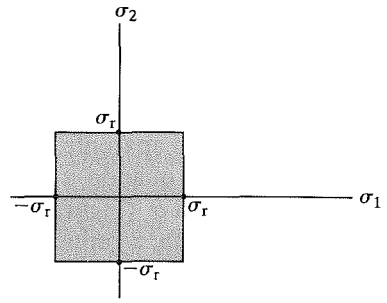


Figura 10.35

* Um pedaço de giz escolar quebra desse modo quando suas extremidades são torcidas com os dedos.



Teoria da tensão normal máxima

Figura 10.36

Essas equações são mostradas no gráfico da Figura 10.36. Aqui, vemos que, se a coordenada da tensão (σ_1, σ_2) em um ponto no material cair sobre o contorno ou fora da área sombreada, diz-se que o material sofreu ruptura. Essa teoria é geralmente atribuída a W. Rankine, que a propôs em meados do século XIX. Constatou-se, por meios experimentais, que a teoria está de acordo com o comportamento de materiais frágeis cujos diagramas tensão–deformação são *semelhantes* sob tração e sob compressão.

Critério de falha de Mohr. Em alguns materiais frágeis, as propriedades sob tração e sob compressão são *diferentes*. Quando isso ocorre, podemos usar um critério baseado na utilização do círculo de Mohr para prever a falha do material. Esse método foi desenvolvido por Otto Mohr e, às vezes, é denominado **critério de falha de Mohr**. Para aplicá-lo, em primeiro lugar é preciso realizar *três ensaios* no material. Um ensaio de tração uniaxial e um ensaio de compressão uniaxial são usados para determinar o limite de resistência às tensões de tração e compressão, $(\sigma_r)_t$ e $(\sigma_r)_c$, respectivamente. Além disso, é realizado um ensaio de torção para determinar o limite de resistência à tensão de cisalhamento τ_r do material. Em seguida, é construído o círculo de Mohr para cada uma dessas condições de tensão, como mostra a Figura 10.37. O círculo A representa a condição de tensão $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -(\sigma_r)_c$; o círculo B representa as condições de tensão $\sigma_1 = (\sigma_r)_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$; e o círculo C representa a condição de tensão de cisalhamento puro provocada por τ_r. Esses três círculos estão contidos em um 'envelope de falha' indicado pela curva em cinza extrapolada, desenhada na tangente a todos os três círculos. Se uma condição de tensão plana em um ponto for representada por um círculo que estiver contido no interior do envelope, diz-se que o material não falhará. Todavia, se o círculo for tangente ao envelope em um ponto, ou estender-se para fora de seu contorno, então diz-se que ocorrerá falha.

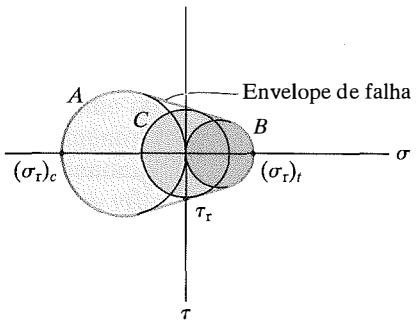
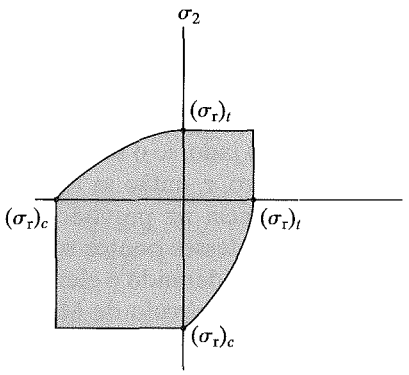


Figura 10.37



Critério de falha de Mohr

Figura 10.38

Também podemos representar esse critério em um gráfico de tensões principais σ_1 e $\sigma_2(\sigma_3 = 0)$, mostrado na Figura 10.38. Aqui, ocorre falha quando o valor absoluto de qualquer uma das tensões principais atinge um valor igual ou maior do que $(\sigma_r)_t$ ou $(\sigma_r)_c$ ou, em geral, se o estado de tensão em um ponto for definido pela coordenada da tensão (σ_1, σ_2), marcada sobre o contorno ou fora da área sombreada.

Qualquer um desses dois critérios pode ser usado na prática para prever a falha de um material frágil. Todavia, devemos entender que sua utilidade é bastante limitada. Uma ruptura por tração ocorre muito repentinamente e, em geral, seu início depende de concentrações de tensão desenvolvidas em imperfeições microscópicas do material como inclusões ou vazios, entalhes na superfície e pequenas trincas. Como cada uma dessas irregularidades varia de um corpo de prova para outro, torna-se difícil especificar a falha com base em um único ensaio. Por outro lado, trincas e outras irregularidades tendem a fechar-se quando o corpo de prova é comprimido e, portanto, não formam os pontos de falha que formariam quando se submete o corpo de prova à tração.

PONTOS IMPORTANTES

- Se um material for *dúctil*, a falha será especificada pelo início do *escoamento*; se for *frágil*, será especificada pela *ruptura*.
- *Falha dúctil* pode ser definida quando ocorre *deslizamento* entre os cristais que compõem o material. Esse deslizamento deve-se à *tensão de cisalhamento* e a *teoria da tensão de cisalhamento máxima* é baseada nessa ideia.
- A *energia de deformação* é armazenada em um material quando ele é submetido à tensão normal. A *teoria da energia de distorção máxima* depende de uma *energia de deformação* que *distorce* o material, e não da parte que aumenta seu volume.
- A ruptura de um *material frágil* é causada somente pela *tensão de tração máxima* no material, e não pela tensão de compressão. Essa constitui a base da *teoria da tensão normal máxima* e será aplicável se o diagrama tensão–deformação do material for *semelhante* sob tração e sob compressão.
- Se um material *frágil* tiver diagramas tensão–deformação *diferentes* sob pressão e sob compressão, o *critério de falha de Mohr* poderá ser usado para prever falha.
- Devido a imperfeições no material, a *ruptura sob tensão* de um material frágil é *difícil de prever* e, por isso, as teorias da falha para materiais frágeis devem ser usadas com cautela.

EXEMPLO 10.12

O tubo de aço mostrado na Figura 10.39a tem diâmetro interno de 60 mm e diâmetro externo de 80 mm. Se estiver sujeito a um momento de torção de 8 kN · m e a um momento fletor de 3,5 kN · m, determine se essas cargas provocam falha como definido pela teoria da energia de distorção máxima. A tensão de escoamento para o aço determinada por ensaio de tração é $\sigma_e = 250$ MPa.

SOLUÇÃO

Para resolver esse problema, temos de investigar um ponto sobre o tubo que esteja sujeito a um estado de tensão crítica máxima. Ambos, momento de torção e momento fletor, são uniformes ao longo do comprimento do tubo. Na seção arbitrária *a–a* (Figura 10.39a), essas cargas produzem as distribuições de tensão mostradas nas figuras 10.39b e 10.39c. Por inspeção, os pontos *A* e *B* estão sujeitos ao mesmo estado de tensão crítico. Aqui, investigaremos o estado de tensão em *A*. Assim,

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{(8.000\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}04\ \text{m})}{(\pi/2)[(0{,}04\ \text{m})^4 - (0{,}03\ \text{m})^4]} = 116{,}4\ \text{MPa}$$

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{(3.500\ \text{N}\cdot\text{m})(0{,}04\ \text{m})}{(\pi/4)[(0{,}04\ \text{m})^4 - (0{,}03\ \text{m})^4]} = 101{,}9\ \text{MPa}$$

Esses resultados são mostrados em uma vista tridimensional de um elemento de material no ponto *A* (Figura 10.39d) e, uma vez que o material está sujeito ao estado plano de tensão, ele também é mostrado em duas dimensões (Figura 10.39e).

O centro do círculo de Mohr para esse estado plano de tensão está localizado em

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{0 - 101{,}9}{2} = -50{,}9\ \text{MPa}$$

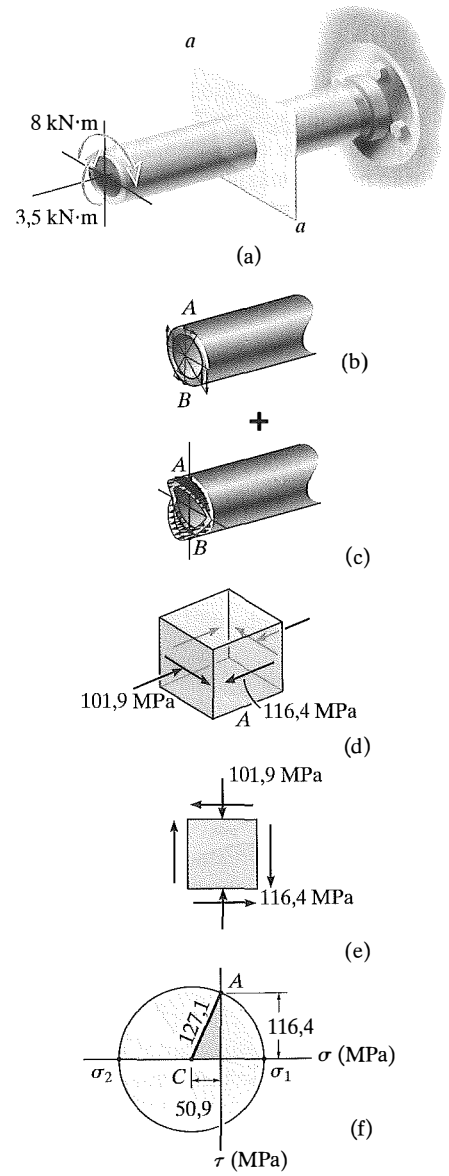


Figura 10.39

O ponto de referência $A(0, -116{,}4\ \text{MPa})$ é marcado e o círculo, construído (Figura 10.39f). Aqui, o raio calculado pelo triângulo sombreado é $R = 127{,}1$ e, portanto, as tensões principais no plano são

$$\sigma_1 = -50{,}9 + 127{,}1 = 76{,}1\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = -50{,}9 - 127{,}1 = -178{,}0\ \text{MPa}$$

Pela Equação 10.30, exige-se

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_y^2$$

$$(76{,}1)^2 - (76{,}1)(-178{,}0) + (-178{,}0)^2 \overset{?}{\leq} (250)^2$$

$$51.000 < 62.500\ \text{OK}$$

Considerando-se que o critério foi cumprido, o material no interior do tubo *não* escoará ('falhará'), de acordo com a teoria da energia de distorção máxima.

EXEMPLO 10.13

O eixo maciço de ferro fundido mostrado na Figura 10.40a está sujeito a um torque $T = 400\ \text{N} \cdot \text{m}$. Determine seu menor raio de modo que não falhe de acordo com a teoria da tensão normal máxima. O limite de resistência de um corpo de prova de ferro fundido determinado por um ensaio de tração é $(\sigma_r)_t = 150$ MPa.

SOLUÇÃO

A tensão crítica ou máxima ocorre em um ponto localizado sobre a superfície do eixo. Considerando que o eixo tem raio r, a tensão de cisalhamento é

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{(400\ \text{N·m})r}{(\pi/2)r^4} = \frac{254{,}65\ \text{N·m}}{r^3}$$

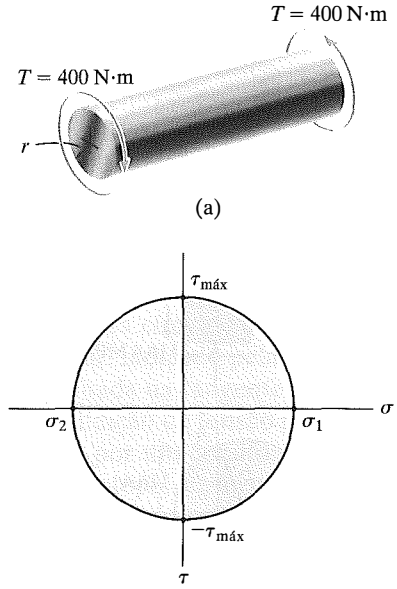


Figura 10.40

O círculo de Mohr para esse estado de tensão (cisalhamento puro) é mostrado na Figura 10.40b. Como $R = \tau_{máx}$, então

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{máx} = \frac{254{,}65\ \text{N·m}}{r^3}$$

A teoria da tensão normal máxima, Equação 10.31, exige

$$|\sigma_1| \leq \sigma_r$$

$$\frac{254{,}65}{r^3} \leq 150 \times 10^6\ \text{N/m}^2$$

Assim, o menor raio do eixo é determinado por

$$\frac{254{,}65}{r^3} = 150 \times 10^6\ \text{N/m}^2$$

$$r = 0{,}01193\ \text{m} = 11{,}93\ \text{m} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 10.14

O eixo maciço mostrado na Figura 10.41a tem raio de 0,5 cm e é feito de aço com tensão de escoamento $\sigma_e = 360$ MPa. Determine se as cargas provocam a falha do eixo de acordo com a teoria da tensão de cisalhamento máxima e a teoria da energia de distorção máxima.

SOLUÇÃO

O estado de tensão no eixo é provocado pela força axial e pelo torque. Visto que a tensão de cisalhamento máxima causada pelo torque ocorre na superfície externa do material, temos

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{15\ \text{kN}}{\pi(0{,}5\ \text{cm})^2} = -19{,}10\ \text{kN/cm}^2 = 191\ \text{MPa}$$

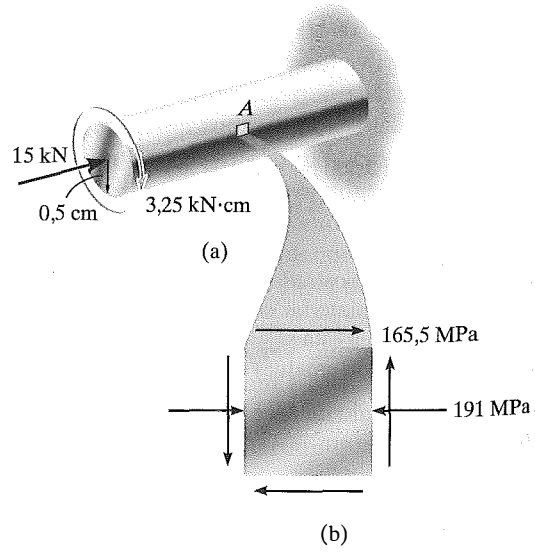


Figura 10.41

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{3{,}25\ \text{N·m}\,(0{,}5\ \text{cm})}{\frac{\pi}{2}(0{,}5\ \text{cm})^4} = 16{,}55\ \text{kN/cm}^2 = 165{,}5\ \text{MPa}$$

A ação das componentes da tensão sobre um elemento do material no ponto A é mostrada na Figura 10.41b. Em vez de usar o círculo de Mohr, as tensões principais também podem ser obtidas pelas equações de transformação de tensão, Equações 9.5.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-191 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-191 - 0}{2}\right)^2 + (165{,}5)^2}$$

$$= -95{,}5 \pm 191{,}1$$

$$\sigma_1 = 95{,}6\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = -286{,}6\ \text{MPa}$$

Teoria da tensão de cisalhamento máxima. Visto que as tensões principais têm *sinais opostos,* pela Seção 9.7, a deformação por cisalhamento máxima absoluta ocorrerá no plano e, portanto, aplicando a segunda das Equações 10.27, temos

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_e$$

$$|95{,}6 - (-286{,}6)| \overset{?}{\leq} 360$$

$$382{,}2 > 360$$

Assim, a falha por cisalhamento do material ocorrerá de acordo com essa teoria.

Teoria da energia de distorção máxima. Aplicando a Equação 10.30, temos

$$\left(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) \leq \sigma_e^2$$

$$[(95{,}6)^2 - (95{,}6)(-286{,}6) - (-286{,}6)^2] \overset{?}{\leq} (360)^2$$

$$118.677{,}9 \leq 129.600$$

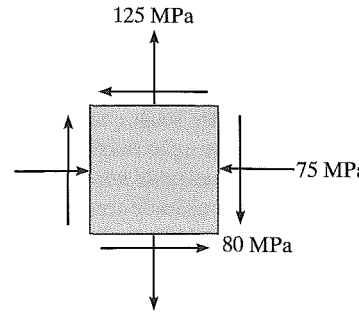
Por essa teoria, não ocorrerá falha.

PROBLEMAS

10.63. Um material está sujeito ao estado plano de tensão. Expresse a teoria da falha de energia de distorção em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy}.

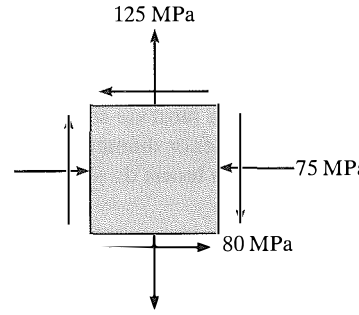
***10.64.** Um material está sujeito ao estado plano de tensão. Expresse a teoria da falha da tensão de cisalhamento máxima em termos de σ_x, σ_y e τ_{xy}. Considere que as tensões principais têm sinais algébricos diferentes.

10.65. As componentes do estado plano de tensão em um ponto crítico de uma carcaça de aço estrutural A-36 são mostradas na figura. Determine se ocorreu falha (escoamento) com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima.



Problema 10.65

10.66. As componentes do estado plano de tensão em um ponto crítico de uma carcaça de aço estrutural A-36 são mostradas na figura. Determine se ocorreu falha (escoamento) com base na teoria da energia de distorção máxima.



Problema 10.66

10.67. A tensão de escoamento para uma liga de magnésio e zircônio é $\sigma_e = 107$ MPa. Se uma peça de máquina for fabricada com esse material e um ponto crítico no material for submetido às tensões principais no plano σ_1 e $\sigma_2 = -0{,}5\sigma_1$, determine o valor de σ_1 que provocará escoamento de acordo com a teoria da tensão de cisalhamento máxima.

***10.68.** Resolva o Problema 10.67 usando a teoria da energia de distorção máxima.

10.69. Se um eixo for feito de um material para o qual $\sigma_e = 350$ MPa, determine a tensão de cisalhamento por torção máxima exigida para provocar escoamento pela teoria da energia de distorção máxima.

10.70. Resolva o Problema 10.69 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima. As duas tensões principais têm sinais opostos.

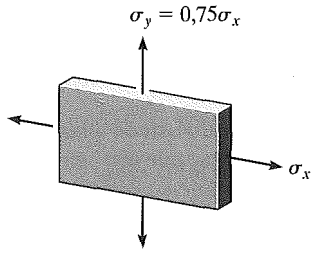
10.71. A tensão de escoamento para um material plástico é $\sigma_e = 110$ MPa. Se esse material estiver sujeito ao estado plano de tensão e ocorrer uma falha elástica quando uma tensão principal for 120 MPa, qual será o menor valor da outra tensão principal? Use a teoria da energia de distorção máxima.

***10.72.** Resolva o Problema 10.71 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima. Ambas as tensões principais têm o mesmo sinal.

10.73. A chapa é feita de bronze Tobin, que escoa a $\sigma_e = 175$ MPa. Pela teoria de falha da tensão de cisalhamento

máxima, determine a tensão de tração máxima σ_x que pode ser aplicada à chapa, se também for aplicada uma tensão de tração $\sigma_y = 0{,}75\sigma_x$.

10.74. A chapa é feita de bronze Tobin, que escoa a $\sigma_e = 175$ MPa. Pela teoria da energia de distorção máxima, determine a tensão de tração máxima σ_x que pode ser aplicada à chapa, se também for aplicada uma tensão de tração $\sigma_y = 0{,}75\sigma_x$.



Problemas 10.73/74

10.75. Uma liga de alumínio 6061-T6 deve ser usada para fabricar um eixo de acionamento maciço que transmita 33 kW a 2.400 rev/min. Usando um fator de segurança de 2 para o escoamento, determine o menor diâmetro do eixo que pode ser selecionado com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima.

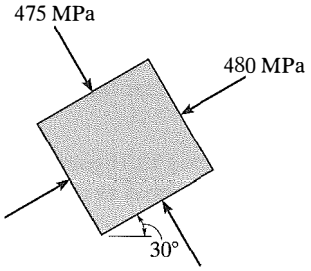
***10.76.** Resolva o Problema 10.75 usando a teoria da energia de distorção máxima.

10.77. Uma liga de alumínio deve ser usada para fabricar um eixo de acionamento que transmita 20 kW a 1.500 rev/min. Usando um fator de segurança de 2,5 para escoamento, determine o menor diâmetro do eixo que pode ser selecionado com base na teoria da energia de distorção máxima. $\sigma_e = 25$ MPa.

10.78. Uma barra com área de seção transversal quadrada é feita de um material cuja tensão de escoamento é $\sigma_e = 840$ MPa. Se a barra for submetida a um momento fletor de 10 kN · m, determine o tamanho exigido para a barra de acordo com a teoria da energia de distorção máxima. Use um fator de segurança de 1,5 para o escoamento.

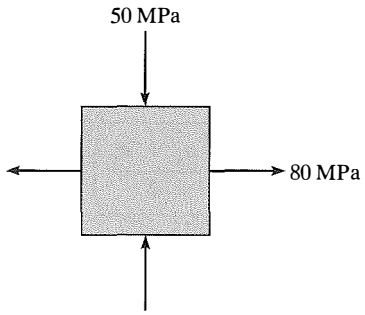
10.79. Resolva o Problema 10.78 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima.

***10.80.** As tensões principais de deformação no plano que agem sobre um elemento diferencial são mostradas na figura. Se o material for aço-máquina com tensão de escoamento $\sigma_e = 700$ MPa, determine o fator de segurança para escoamento usando a teoria da energia de distorção máxima.



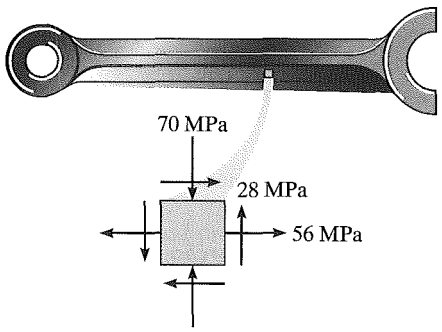
Problema 10.80

10.81. As tensões principais no plano que agem sobre um elemento diferencial são mostradas na figura. Se o material for aço-máquina com tensão de escoamento $\sigma_e = 700$ MPa, determine o fator de segurança para escoamento, se for considerada a teoria da tensão de cisalhamento máxima.



Problema 10.81

10.82. O estado de tensão que age sobre um ponto crítico em um elemento de máquina é mostrado na figura. Determine a menor tensão de escoamento para um aço que possa ser selecionado para a fabricação da peça com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima.



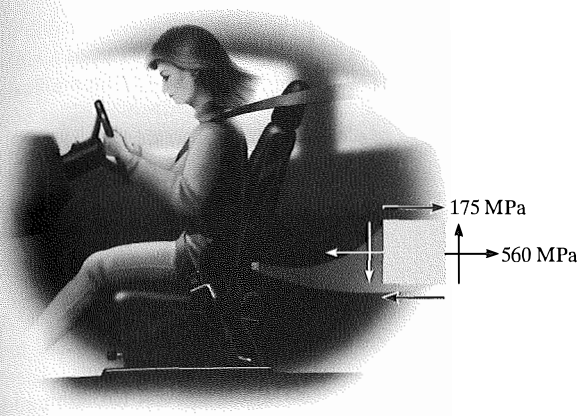
Problema 10.82

10.83. A tensão de escoamento para uma liga de urânio é $\sigma_e = 160$ MPa. Se uma peça de máquina for fabricada com esse material e um ponto crítico no material for submetido ao estado plano de tensão de modo tal que as tensões principais sejam σ_1 e $\sigma_2 = 0{,}25\sigma_1$, determine o valor de σ_1 que causará escoamento de acordo com a teoria da energia de distorção máxima.

***10.84.** Resolva o Problema 10.83 usando a teoria da tensão de cisalhamento máxima.

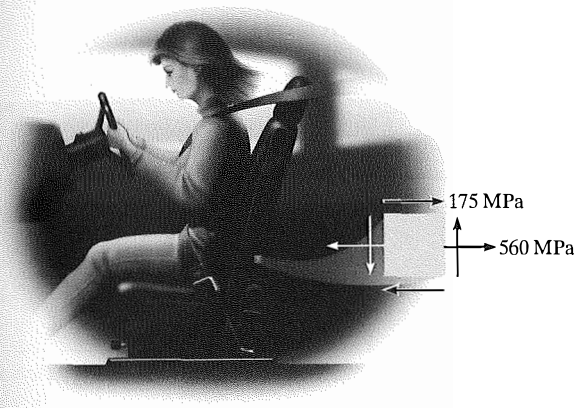
10.85. Uma liga de alumínio deve ser usada para fabricar um eixo de acionamento maciço que transmita 25 kN a 1.200 rev/min. Usando um fator de segurança de 2,5 para escoamento, determine o menor diâmetro do eixo que pode ser selecionado com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima. $\sigma_e = 70$ MPa.

10.86. O estado de tensão que age sobre um ponto crítico na estrutura de um banco de automóvel durante uma colisão é mostrado na figura. Determine a menor tensão de escoamento para um aço que possa ser selecionado para fabricar o elemento estrutural com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima.



Problema 10.86

10.87. Resolva o Problema 10.86 usando a teoria da energia de distorção máxima.



Problema 10.87

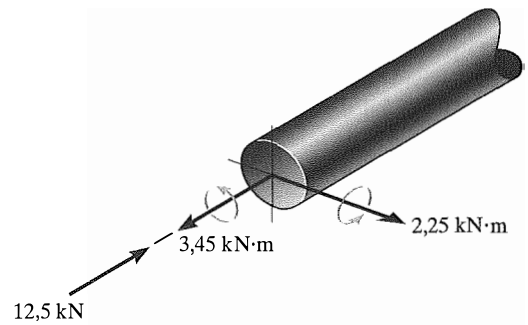
10.88. Se uma peça de máquina for feita de titânio (Ti-6A1-4V) e um ponto crítico no material for submetido ao estado plano de tensão de modo tal que as tensões principais são σ_1 e $\sigma_2 = 0{,}5\sigma_1$, determine o valor de σ_1 em MPa que provocará escoamento de acordo com (a) a teoria da tensão de cisalhamento máxima e (b) teoria da energia de distorção máxima.

10.89. Deduza uma expressão para um torque equivalente T_e que, se aplicado sozinho a uma barra maciça de seção transversal circular, provocaria a mesma energia de distorção que a aplicação combinada de um momento fletor M e um torque T.

10.90. Uma liga de alumínio 6061-T6 deve ser usada para fabricar um eixo de acionamento que transmita 40 kN a 1.800 rev/min. Usando um fator de segurança FS = 2 para escoamento, determine o menor diâmetro do eixo que pode ser selecionado com base na teoria da energia de distorção máxima.

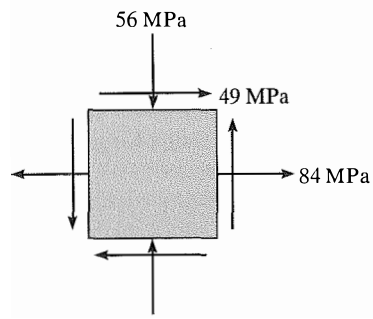
10.91. Deduza uma expressão para um momento fletor equivalente M_e que, se aplicado sozinho a uma barra maciça de seção transversal circular, provocaria a mesma energia de distorção que a aplicação combinada de um momento fletor M e um torque T.

***10.92.** O resultado do cálculo das cargas internas em uma seção crítica ao longo do eixo de acionamento de aço de um navio são um torque de 3,45 kN · m, um momento fletor de 2,25 kN · m e uma propulsão axial de 12,5 kN. Se os limites de escoamento para tração e cisalhamento forem $\sigma_e = 700$ MPa e $\tau_e = 350$ MPa, respectivamente, determine o diâmetro exigido para o eixo pela teoria da tensão de cisalhamento máxima.



Problema 10.92

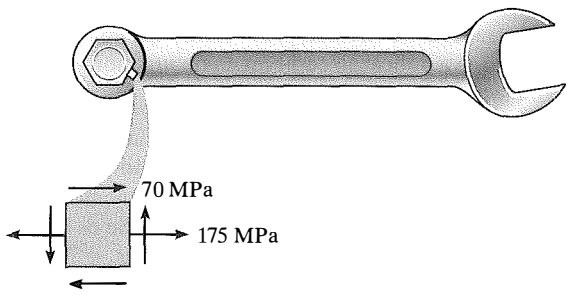
10.93. O elemento está sujeito às tensões mostradas na Figura. Se $\sigma_e = 350$ MPa, determine o fator de segurança para essa carga com base na (a) teoria da tensão de cisalhamento máxima e (b) teoria da energia de distorção máxima.



Problema 10.93

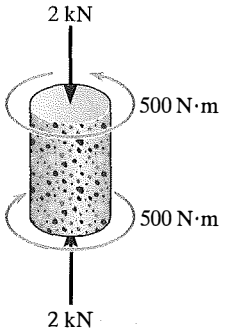
10.94. O estado de tensão que age em um ponto crítico sobre uma chave de porca é mostrado na figura. Determine a menor tensão de escoamento para o aço que poderia ser selecionado para a fabricação da ferramenta com base na teoria da energia de distorção máxima.

10.95. O estado de tensão que age em um ponto crítico sobre uma chave de porca é mostrado na figura. Determine a menor tensão de escoamento para o aço que poderia ser selecionado para a fabricação da ferramenta com base na teoria da tensão de cisalhamento máxima.



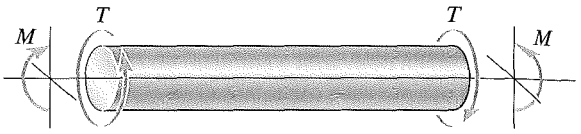
Problemas 10.94/95

*10.96. O pequeno cilindro de concreto com diâmetro de 50 mm está sujeito a um torque de 500 N · m e a uma força de compressão axial de 2 kN. Determine se ele falhará de acordo com a teoria da tensão normal máxima. O limite de resistência do concreto é $\sigma_r = 28$ MPa.



Problema 10.96

10.97. Se um eixo maciço de diâmetro d for submetido a um torque **T** e um momento **M**, mostre que, pela teoria da tensão normal máxima, a tensão principal máxima admissível é $\sigma_{adm} = (16/\pi d^3)(M + \sqrt{M^2 + T^2})$.



Problema 10.97

Revisão do capítulo

Quando um elemento de material está sujeito a deformações que ocorrem somente em um plano, ele sofre deformação plana. Se as componentes da defo mação ϵ_x, ϵ_y e γ_{xy} forem conhecidas para uma orientação específica do elemento, as deformações que agem em alguma outra orientação do elemento poderão ser determinadas pelas equações da transformação da deformação no plano. Da mesma forma, as deformações principais normais e a deformação por cisalhamento máxima no plano poderão ser determinadas por equações de transformação.

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

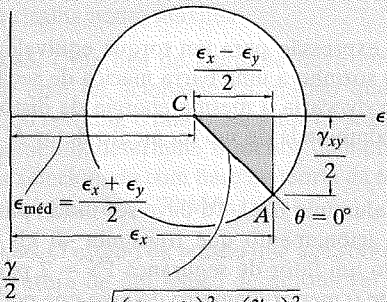
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\operatorname{sen} 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\frac{\gamma_{\text{máx no plano}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\epsilon_{\text{méd}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

Problemas de transformação da deformação também podem ser resolvidos de maneira parcialmente gráfica usando o círculo de Mohr. Para traçar o círculo, definem-se os eixos ϵ e $\gamma/2$ e traçam-se no gráfico o centro do círculo $C\,[(\epsilon_x + \epsilon_y)/2, 0]$ e o 'ponto de referência' $A(\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$. O raio do círculo estende-se entre esses dois pontos e é determinado por trigonometria.



$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

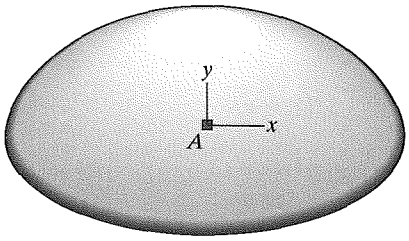
A deformação por cisalhamento máxima absoluta será igual àquela por cisalhamento máxima no plano desde que as deformações principais no plano tenham sinais opostos. Se tiverem o mesmo sinal, então a deformação por cisalhamento máxima absoluta ocorrerá fora do plano.	$\gamma_{máx} = \epsilon_{máx}/2$
A lei de Hooke pode ser expressa em três dimensões, onde cada deformação está relacionada com as três componentes da tensão normal pelas propriedades do material E e ν.	$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$ $\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$
Se E e ν forem conhecidas, então G pode ser determinada.	$G = \frac{E}{[2(1 + \nu)]}$
A dilatação é uma medida da deformação volumétrica. O módulo de compressibilidade é usado para medir a rigidez de um volume de material.	$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ $k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
Contanto que as tensões principais para um material sejam conhecidas, podemos usar uma teoria de falha como a base para um projeto. *Materiais dúteis falham sob cisalhamento* e, nesse caso, a teoria da tensão de cisalhamento máxima ou a teoria da energia de distorção máxima podem ser usadas para prever falha. Ambas as teorias fazem comparações com a tensão de escoamento de um corpo de prova submetido à tensão uniaxial. *Materiais frágeis falham sob tração*, portanto a teoria da tensão normal máxima ou o critério de falha de Mohr podem ser usados. Nesse caso, as comparações são feitas com o limite de resistência à tensão de tração desenvolvida em um corpo de prova.	

PROBLEMAS DE REVISÃO

10.98. As tensões principais que agem em um ponto sobre um vaso de pressão cilíndrico de parede fina são $\sigma_1 = pr/t$, $\sigma_2 = pr/2t$ e $\sigma_3 = 0$. Se a tensão de escoamento for σ_e, determine o valor máximo de p com base na (a) teoria da tensão de cisalhamento máxima e (b) teoria da energia de distorção máxima.

10.99. Um vaso de pressão esférico de parede fina tem raio interno r e espessura t e está sujeito a uma pressão interna p. Se as constantes do material forem E e ν, determine a deformação na direção circunferencial em termos dos parâmetros citados.

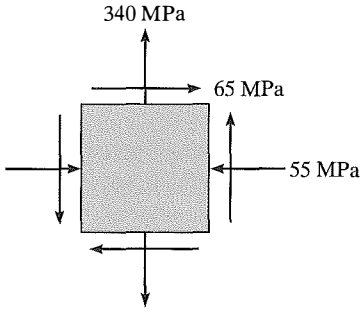
***10.100.** As componentes da deformação no ponto A sobre a carcaça são $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = 400(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 275(10^{-6})$, $\epsilon_z = 0$. Determine (a) as deformações principais em A, (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano x–y, e (c) a deformação por cisalhamento máxima absoluta.



Problema 10.100

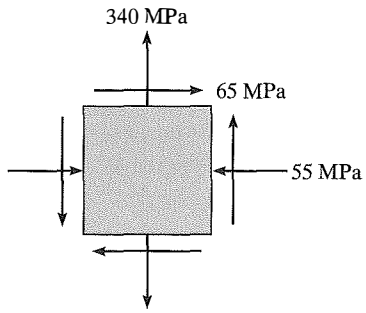
10.101. Um elemento diferencial é submetido à deformação no plano que tem as seguintes componentes: $\epsilon_x = 950(10^{-6})$, $\epsilon_y = 420(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -325(10^{-6})$. Use as equações de transformação da deformação e determine (a) as deformações principais e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação média associada. Em cada caso, especifique a orientação do elemento e mostre como as deformações distorcem o elemento.

10.102. As componentes do estado plano de tensão em um ponto crítico sobre uma carcaça fina de aço são mostradas na figura. Determine se ocorre falha (escoamento) com base na teoria da energia de distorção máxima. A tensão de escoamento para o aço é $\sigma_e = 650$ MPa.



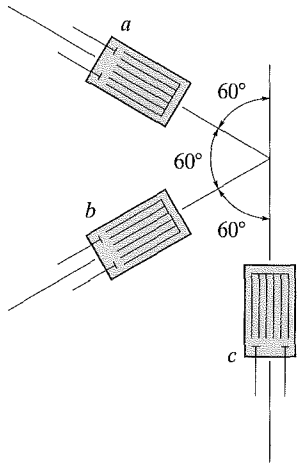
Problema 10.102

10.103. Resolva o Problema 10.102 pela teoria da tensão de cisalhamento máxima.



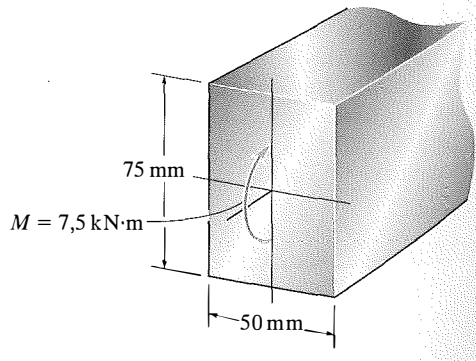
Problema 10.103

***10.104.** A roseta de deformação a 60° está montada sobre uma viga. As seguintes leituras foram obtidas para cada extensômetro: $\epsilon_a = 600(10^{-6})$, $\epsilon_b = -700(10^{-6})$ e $\epsilon_c = 350(10^{-6})$. Determine (a) as deformações principais no plano e (b) a deformação por cisalhamento máxima no plano e a deformação normal média. Em cada caso, mostre o elemento distorcido devido a essas deformações.



Problema 10.104

10.105. A viga de alumínio tem a seção transversal retangular mostrada na figura. Se for submetida a um momento fletor $M = 7{,}5$ kN · m, determine o aumento na dimensão de 50 mm na parte superior da viga e a redução dessa dimensão na parte inferior da viga. $E_{al} = 70$ GPa e $\nu_{al} = 0{,}3$.



Problema 10.105

11 Projeto de vigas e eixos

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, discutiremos como projetar uma viga de modo que ela possa resistir a cargas de flexão e cisalhamento. Especificamente, desenvolveremos métodos usados para projetar vigas prismáticas e determinar a forma de vigas totalmente solicitadas. No final do capítulo, consideraremos o projeto de eixos com base na resistência a momentos fletores e de torção.

11.1 Base para o projeto de vigas

Vigas são elementos estruturais projetados para suportar cargas aplicadas perpendicularmente a seus eixos longitudinais. Por causa dessas cargas, elas desenvolvem uma força de cisalhamento interna e um momento fletor que, em geral, variam de ponto a ponto ao longo do eixo da viga. Algumas delas também podem estar sujeitas a uma força axial interna; todavia, os efeitos dessa força costumam ser desprezados no projeto visto que, em geral, a tensão axial é muito menor do que as tensões desenvolvidas por cisalhamento e flexão. Quando escolhemos uma viga para resistir a ambas as tensões de cisalhamento e flexão, diz-se que ela é projetada com *base na resistência.* O projeto de uma viga de acordo com esse conceito exige a utilização das fórmulas de cisalhamento e flexão desenvolvidas nos capítulos 6 e 7. Entretanto, a aplicação dessas fórmulas limita-se a vigas feitas de material homogêneo que apresente comportamento linear elástico.

A análise de tensão de uma viga geralmente despreza os efeitos provocados por cargas distribuídas externas e forças concentradas aplicadas à viga. Como mostra a Figura 11.1, essas cargas criarão tensões adicionais na viga *diretamente sob a carga.* Nota-se especificamente que, além da tensão de flexão σ_x e da tensão de cisalhamento τ_{xy} que discutimos anteriormente, também será desenvolvida uma tensão de compressão σ_y. Todavia, por meio de métodos de análise avançados, como os da teoria da elasticidade, podemos mostrar que a tensão σ_y diminui rapidamente por toda a altura (ou profundidade) da viga e, na *maioria* das relações vão/altura usadas na prática da engenharia, o valor máximo de σ_y em geral representa apenas uma pequena porcentagem em comparação com a tensão de flexão σ_x, isto é, $\sigma_x \gg \sigma_y$. Além disso, a aplicação direta de cargas concentradas é geralmente evitada no projeto de vigas. Em vez disso, utilizam-se *chapas de assento* para distribuir essas cargas com maior uniformidade pela superfície da viga.

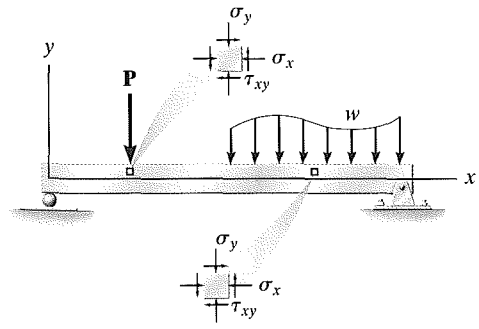


Figura 11.1

Embora as vigas sejam projetadas sobretudo para resistência, elas também têm de ser escoradas de maneira adequada ao longo de seus lados para que não sofram flambagem ou tornem-se repentinamente instáveis. Além disso, em alguns casos as vigas têm de ser projetadas para resistir a uma quantidade limitada de *deflexão,* como ocorre quando suportam tetos de material frágil como gesso. Métodos para determinar a deflexão de vigas serão discutidos no Capítulo 12, e as limitações impostas à flambagem das vigas costumam ser discutidas em códigos e manuais de projeto estrutural ou mecânico.

11.2 Projeto de viga prismática

Para projetar uma viga com base na *resistência*, exige-se que as tensões de flexão e de cisalhamento verdadeiras na viga não ultrapassem aquelas admissíveis para o material, definidas por códigos e manuais de projeto estrutural ou mecânico. Se o vão livre da viga for relativamente longo, de modo que os momentos internos tornam-se grandes, o engenheiro considerará, em primeiro lugar, um projeto baseado na flexão e então verificará a resistência ao cisalhamento. Um pro-

jeto para flexão requer a determinação do ***módulo de resistência à flexão*** da viga, que é a relação entre I e c, isto é, $S = I/c$. Pela fórmula da flexão, $\sigma = Mc/I$, temos

$$S_{req} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} \tag{11.1}$$

Nessa expressão, M é determinado pelo diagrama de momento da viga, e a tensão de flexão admissível, σ_{adm}, é especificada em um código ou manual de projeto. Em muitos casos, o peso desconhecido da viga será pequeno e poderá ser desprezado em comparação com as cargas que a viga deve suportar. Todavia, se o momento adicional provocado pelo peso tiver de ser incluído no projeto, o S escolhido terá de ser *ligeiramente maior* que S_{req}.

Uma vez conhecido S_{req}, se a forma da seção transversal da viga for simples, como um quadrado, um círculo ou um retângulo cujas proporções largura/altura sejam conhecidas, suas *dimensões* poderão ser determinadas diretamente por S_{req}, visto que, por definição, $S_{req} = I/c$. Contudo, se a seção transversal for composta por vários elementos, como uma seção de abas largas, poderá ser determinado um número infinito de dimensões para a alma e para as abas que satisfaçam o valor de S_{req}. Entretanto, na prática, os engenheiros escolhem uma determinada viga que cumpra o requisito $S > S_{req}$ em um manual que relacione as formas padronizadas oferecidas por fabricantes. Muitas vezes, há várias vigas com o mesmo módulo de resistência à flexão que podem ser selecionadas nessas tabelas. Se não houver restrições para as deflexões, normalmente se escolherá a viga que tenha a menor área de seção transversal, já que a quantidade de material utilizado em sua fabricação é menor e, portanto, ela será mais leve e mais econômica do que as outras.

A discussão acima considera que a tensão de flexão admissível do material é a *mesma* sob tração e sob compressão. Se for esse o caso, a viga que tenha seção transversal *simétrica* em relação ao eixo neutro deverá ser escolhida. Contudo, se as tensões de flexão admissíveis sob tração e sob compressão *não* forem as mesmas, a escolha de uma seção transversal assimétrica poderá ser mais eficiente. Nessas circunstâncias, o projeto da viga deverá levar em conta a resistência ao maior momento positivo, *bem como* ao maior momento negativo no vão.

Uma vez selecionada a viga, podemos usar a fórmula do cisalhamento $\tau_{adm} \geq VQ/It$ para confirmar se a tensão de cisalhamento admissível não foi ultrapassada. Muitas vezes esse requisito não será um problema. Todavia, se a viga for 'curta' e suportar grandes cargas concentradas, a limitação à tensão de cisalhamento poderá ditar o tamanho dela. Essa limitação é particularmente importante no projeto de vigas de madeira, porque a madeira tende a rachar ao longo de suas fibras devido ao cisalhamento (veja a Figura 7.6).

Vigas fabricadas. Uma vez que as vigas são geralmente feitas de aço ou madeira, agora discutiremos algumas das propriedades tabeladas de vigas feitas desses materiais.

Seções de aço. A maioria das vigas de aço fabricadas é produzida por laminação a quente de um lingote até se obter a forma desejada. As propriedades dessas formas, denominadas *perfis laminados,* são tabeladas no manual do American Institute of Steel Construction (AISC). Uma lista representativa de vigas de abas largas retiradas desse manual é dada no Apêndice B. Como observado nesse apêndice, os perfis de abas largas são projetados segundo sua altura e peso por unidade de comprimento; por exemplo, W460 × 68 indica uma seção transversal de abas largas (W) com 460 mm de altura e 0,68 kN/m de peso (Figura 11.2). Para qualquer seção dada, são informados o peso por comprimento, as dimensões, a área da seção transversal, o momento de inércia e o módulo de resistência à flexão. Está incluído também o raio de giração r, que é uma propriedade geométrica relacionada com a resistência da seção à flambagem. Isso será discutido no Capítulo 13. O Apêndice B e o *Manual do AISC* (*AISC Manual*) também apresentam listas de dados de outros elementos estruturais como vigas em U e cantoneiras.

Seções de madeira. A maioria das vigas feitas de madeira tem seção transversal retangular porque são fáceis de fabricar e manusear. Manuais como os da National Forest Products Association apresentam listas de dimensões de madeiras frequentemente utilizadas no projeto de vigas. Muitas vezes são informadas as dimensões nominais e também as reais. A madeira bruta é identificada por suas dimensões *nominais,* como 50 × 100 (50 mm por 100 mm); todavia, suas dimensões 'acabadas' são menores (37,5 mm por 87,5 mm). A redução das dimensões deve-se à exigência de obter superfícies lisas da madeira bruta serrada. É óbvio que as *dimensões reais* devem ser usadas no cálculo de vigas de madeira.

Seções compostas. Uma *seção composta* é construída com duas ou mais peças unidas para formar uma única unidade estrutural. Como indicado pela Equação 11.1, a capacidade da viga de resistir a um momento varia diretamente com seu módulo de resistência S

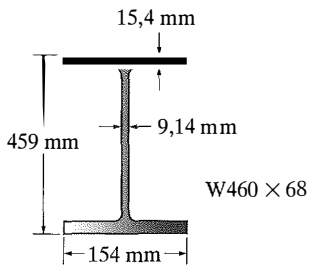
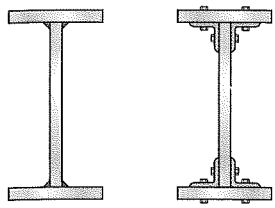


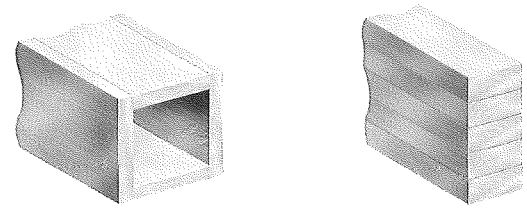
Figura 11.2



Soldada Parafusada

Vigas-mestras de chapas de aço

Figura 11.3



Viga-caixão de madeira (a) Viga de lâminas coladas (b)

Figura 11.4

e, visto que $S = I/c$, então *S aumenta se I aumentar.* Para aumentar I, *a maior parte do material deve ser* colocada *o mais longe* do eixo neutro quanto for possível. É isso, evidentemente, que torna uma viga de abas largas de grande altura tão eficiente na resistência a um momento. Todavia, para cargas muito grandes, o módulo de resistência de uma viga de aço laminado disponível pode não ser grande o suficiente para suportar um determinado momento. Em vez de usar várias vigas disponíveis para suportar a carga, os engenheiros geralmente 'constroem' uma viga com chapas e cantoneiras. Uma seção em duplo T alta que tenha essa forma é denominada uma *viga-mestra de chapa.* Por exemplo, as duas abas da viga-mestra de aço na Figura 11.3 são chapas que podem ser soldadas ou, se forem utilizadas cantoneiras, parafusadas à chapa da alma.

Vigas de madeira também são 'construídas', em geral na forma de uma seção de viga-caixão (Figura 11.4a). Elas podem ser feitas com almas de compensado e tábuas maiores para as abas. Quando os vãos são muito grandes, usam-se *vigas de lâminas coladas.* Esses elementos estruturais são feitos com várias tábuas laminadas unidas por cola de modo a formar uma única unidade (Figura 11.4b).

Exatamente como ocorre com as seções laminadas ou vigas feitas de uma única peça, o projeto de seções compostas exige que as tensões de flexão e cisalhamento sejam verificadas. Além disso, deve-se verificar a tensão de cisalhamento nos elementos de fixação como solda, cola, pregos etc., para assegurar que a viga aja como uma única unidade. Os princípios para fazer isso foram descritos na Seção 7.4.

PONTOS IMPORTANTES

- Vigas suportam cargas aplicadas perpendicularmente a seus eixos. Se forem projetadas com base na resistência, deverão resistir às tensões de cisalhamento e flexão admissíveis.
- Considera-se que a tensão de flexão máxima na viga é muito maior do que as tensões localizadas provocadas pela aplicação de cargas na superfície da viga.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Tendo como base a discussão precedente, o seguinte procedimento nos dá um método racional para o projeto de uma viga considerando a resistência.

Diagramas de força cortante e momento fletor

- Determine a força cortante e o momento fletor máximos na viga, geralmente obtidos pela construção dos diagramas de força cortante e momento fletor da viga.
- Para vigas compostas, os diagramas de força cortante e momento fletor são úteis para identificar *regiões* onde a força cortante e o momento fletor são excessivamente grandes e podem exigir reforço estrutural adicional ou elementos de fixação.

Tensão normal média

- Se a viga for relativamente longa, o projeto exigirá a determinação de seu módulo de resistência à flexão pela fórmula da flexão, $S_{req} = M_{máx}/\sigma_{adm}$.
- Uma vez determinado S_{req}, as dimensões da seção transversal para formas simples podem ser calculadas, visto que $S_{req} = I/c$.
- Se forem usadas seções de aço laminado, vários valores possíveis de S podem ser selecionados em tabelas apresentadas no Apêndice B. Escolha entre elas a que tenha a menor área da seção transversal, visto que essa viga terá o menor peso e, portanto, será a mais econômica.
- Certifique-se de que o módulo de resistência, S, é *ligeiramente maior* que S_{req}, de modo que o momento adicional criado pelo peso da viga seja considerado.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Tensão de cisalhamento

- Vigas curtas que suportam grandes cargas, sobretudo as de madeira, em geral são inicialmente projetadas para resistir ao cisalhamento e, em seguida, examinadas no que se refere ao cumprimento dos requisitos da tensão de flexão admissível.
- Usando a fórmula do cisalhamento, verifique se a tensão de cisalhamento admissível não é ultrapassada; isto é, use $\tau_{adm} \geq V_{máx}Q/It$.
- Se a viga tiver seção transversal *retangular* maciça, a fórmula do cisalhamento será $\tau_{adm} \geq 1{,}5(V_{máx}/A)$ (Equação 7.5) e, se a seção transversal for uma *aba larga*, em geral será adequado considerar que a tensão de cisalhamento é *constante* na área da seção transversal da alma da viga, de modo que $\tau_{adm} \geq V_{máx}/A_{alma}$, onde A_{alma} é determinada pelo produto entre a altura da viga e a espessura da alma (veja a Seção 7.3).

Adequação dos elementos de fixação

- A adequação dos elementos de fixação usados em vigas compostas depende da tensão de cisalhamento à qual esses elementos podem resistir. Especificamente, o espaçamento exigido entre pregos ou parafusos de um tamanho particular é determinado pelo fluxo de cisalhamento admissível, $q_{adm} = VQ/I$, calculado em pontos sobre a seção transversal onde os elementos de fixação estão localizados (veja a Seção 7.4).

EXEMPLO 11.1

Uma viga será feita de aço que tem tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 170$ MPa e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 100$ MPa. Selecione uma forma W adequada para suportar a carga mostrada na Figura 11.5a.

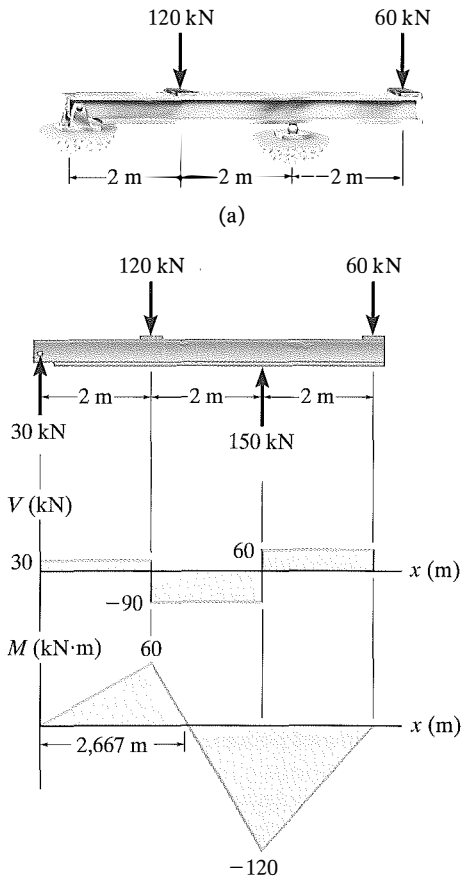


Figura 11.5

SOLUÇÃO

Diagramas de força cortante e momento fletor. As reações nos apoios foram calculadas e os diagramas de força cortante e momento fletor são mostrados na Figura 11.5b. Por esses diagramas, $V_{máx} = 90$ kN e $M_{máx} = 120$ kN · m.

Tensão de flexão. O módulo de resistência exigido para a viga é determinado pela fórmula da flexão,

$$S_{req} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{120 \text{ kN} \cdot \text{m}\,(10^3 \text{ mm/m})^3}{170(10^3) \text{ kN/m}^2} = 706 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

Pela tabela no Apêndice B, as seguintes vigas são adequadas:

W460 × 60	$S = 1.120 \times 10^3$ mm^3
W410 × 67	$S = 1.200 \times 10^3$ mm^3
W360 × 64	$S = 1.030 \times 10^3$ mm^3
W310 × 74	$S = 1.060 \times 10^3$ mm^3
W250 × 80	$S = 984 \times 10^3$ mm^3
W200 × 100	$S = 987 \times 10^3$ mm^3

A viga escolhida será a que tiver o menor peso por metro, isto é,

W460 × 60

O momento máximo *verdadeiro* $M_{máx}$, que inclui o peso da viga, pode ser calculado e a adequação da viga selecionada pode ser verificada. Todavia, em comparação com as cargas aplicadas, o peso da viga, (60,35 kg/m)(9,81 N/kg)(6 m) = 3.552,2 N = 3,55 kN, provocará apenas um pequeno aumento em S_{req}. Apesar disso,

$$S_{req} = 706(10^3)\text{mm}^3 < 1.120(10^3)\text{mm}^3 \qquad \text{OK}$$

Tensão de cisalhamento. Como a viga é uma *seção de abas largas*, a *tensão de cisalhamento média* no interior da alma será considerada. Aqui, admitimos que a alma estende-se da parte mais superior até a mais inferior da viga. Pelo Apêndice B, para uma viga W460 × 60, $d = 455$ mm, $t_{alma} = 8$ mm. Logo,

$$\tau_{méd} = \frac{V_{máx}}{A_{alma}} = \frac{90(10^3)\text{ N}}{(455\text{ mm})(8\text{ mm})} = 24{,}7\text{ MPa} < 100\text{MPa} \quad \text{OK}$$

Use uma W460 × 60. *Resposta*

EXEMPLO 11.2

A viga T de madeira mostrada na Figura 11.6a é composta por duas tábuas de 200 mm × 30 mm. Se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 12$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 0{,}8$ MPa, determine se a viga suportará com segurança a carga mostrada. Especifique também o espaçamento máximo exigido entre os pregos para manter as duas tábuas unidas, se cada prego puder resistir com segurança a 1,50 kN de cisalhamento.

SOLUÇÃO

Diagramas de força cortante e momento fletor. A Figura 11.6b mostra as reações na viga e os diagramas de força cortante e momento fletor. Aqui, $V_{máx} = 1{,}5$ kN, $M_{máx} = 2$ kN · m.

Tensão de flexão. O eixo neutro (centroide) será localizado em relação à parte inferior da viga. Trabalhando em unidades métricas, temos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{(0{,}1\text{ m})(0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m}) + 0{,}215\text{ m}(0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})}{0{,}03\text{ m}(0{,}2\text{ m}) + 0{,}03\text{ m}(0{,}2\text{ m})} = 0{,}1575\text{ m}$$

Logo,

$$I = \left[\frac{1}{12}(0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})^3 + (0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})(0{,}1575\text{ m} - 0{,}1\text{ m})^2\right] + \left[\frac{1}{12}(0{,}2\text{ m})(0{,}03\text{ m})^3 + (0{,}03\text{ m})(0{,}2\text{ m})(0{,}215\text{ m} - 0{,}1575\text{ m})^2\right] = 60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4$$

Visto que $c = 0{,}1575$ m (e não 0,230 m − 0,1575 m = 0,0725 m), exige-se

$$\sigma_{adm} \geq \frac{M_{máx} c}{I}$$

$$12(10^3)\text{ kPa} \geq \frac{2\text{ kN} \cdot \text{m}(0{,}1575\text{ m})}{60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4} = 5{,}24(10^3)\text{ kPa} \quad \text{OK}$$

Tensão de cisalhamento. A tensão de cisalhamento máxima na viga depende dos valores de Q e t. Ela ocorre no eixo neutro, considerando-se Q máxima nesse ponto e eixo neutro na alma, onde a espessura $t = 0{,}03$ m da seção transversal é a menor. Para simplificar, usaremos a área retangular abaixo do eixo neutro para calcular Q, em vez da área composta por duas partes acima desse eixo (Figura 11.6c). Temos

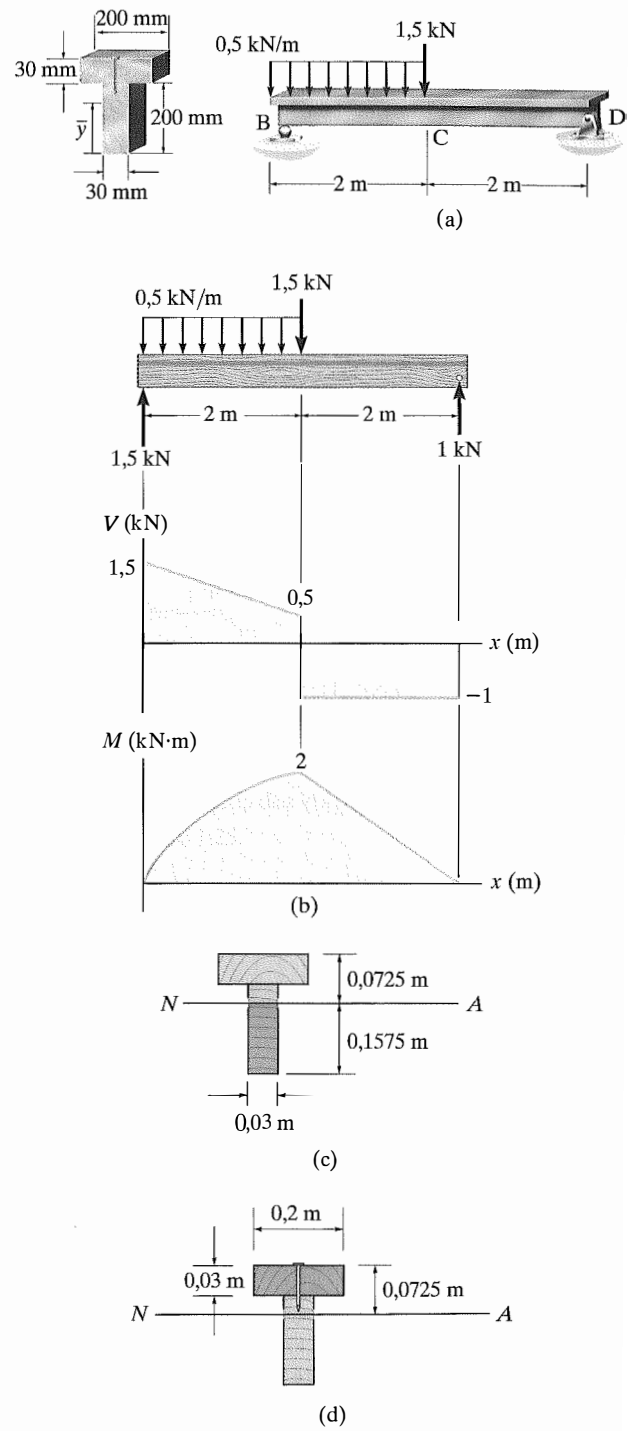


Figura 11.6

$$Q = \bar{y}'A' = \left(\frac{0{,}1575\text{ m}}{2}\right)[(0{,}1575\text{ m})(0{,}03\text{ m})]$$
$$= 0{,}372(10^{-3})\text{ m}^3$$

de modo que

$$\tau_{adm} \geq \frac{V_{máx}Q}{It}$$

$$800\text{ kPa} \geq \frac{1{,}5\text{ kN}[0{,}372(10^{-3})]\text{ m}^3}{60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4\,(0{,}03\text{ m})} = 309\text{ kPa} \qquad \text{OK}$$

Espaçamento dos pregos. Pelo diagrama de cisalhamento, vemos que ele varia ao longo de todo o vão. Como o espaçamento dos pregos depende do valor do cisalhamento na viga, por simplicidade (e para sermos conservadores), calcularemos o espaçamento tendo como base $V = 1{,}5$ kN para a região BC e $V = 1$ kN para a região CD. Visto que os pregos unem a aba à alma (Figura 11.6d), temos

$$Q = \bar{y}'A' = (0{,}0725\text{ m} - 0{,}015\text{ m})[(0{,}2\text{ m})(0{,}03\text{ m})]$$
$$= 0{,}345(10^{-3})\text{ m}^3$$

O fluxo de cisalhamento para cada região é, portanto,

$$q_{BC} = \frac{V_{BC}Q}{I} = \frac{1{,}5\text{ kN}[0{,}345(10^{-3})]\text{ m}^3}{60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4} = 8{,}61\text{ kN/m}$$

$$q_{CD} = \frac{V_{CD}Q}{I} = \frac{1\text{ kN}[0{,}345(10^{-3})]\text{ m}^3}{60{,}125(10^{-6})\text{ m}^4} = 5{,}74\text{ kN/m}$$

Um prego pode resistir a 1,50 kN sob cisalhamento, portanto, o espaçamento torna-se

$$s_{BC} = \frac{1{,}50\text{ kN}}{8{,}61\text{ kN/m}} = 0{,}174\text{ m}$$

$$s_{CD} = \frac{1{,}50\text{ kN}}{5{,}74\text{ kN/m}} = 0{,}261\text{ m}$$

Para facilitar a medição, use

$$s_{BC} = 150\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

$$s_{CD} = 250\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 11.3

A viga de madeira laminada mostrada na Figura 11.7a suporta uma carga distribuída uniforme de 12 kN/m. Se for necessário que a viga tenha uma relação altura/largura de 1,5, determine sua menor largura. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 9$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 0{,}6$ MPa. Despreze o peso da viga.

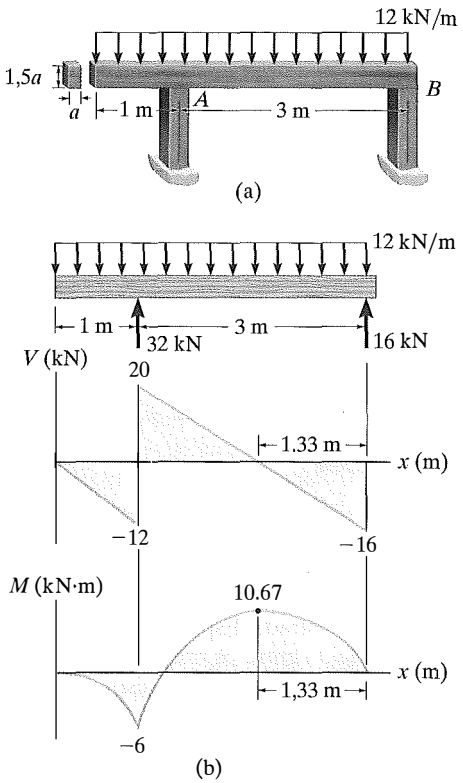


Figura 11.7

SOLUÇÃO

Diagramas de força cortante e momento fletor. As reações dos apoios em A e B foram calculadas e os diagramas de força cortante e momento fletor são mostrados na Figura 11.7b. Aqui, $V_{máx} = 20$ kN, $M_{máx} = 10{,}67$ kN·m.

Tensão de flexão. Aplicando a fórmula da flexão, obtemos

$$S_{req} = \frac{M_{máx}}{\sigma_{adm}} = \frac{10{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}}{9(10^3)\text{ kN/m}^2} = 0{,}00119\text{ m}^3$$

Considerando que a largura é a, a altura é $h = 1{,}5a$ (Figura 11.7a). Logo,

$$S_{req} = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}(a)(1{,}5a)^3}{(0{,}75a)} = 0{,}00119\text{ m}^3$$
$$a^3 = 0{,}003160\text{ m}^3$$
$$a = 0{,}147\text{ m}$$

Tensão de cisalhamento. Aplicando a fórmula do cisalhamento para seções retangulares (que é um caso especial de $\tau_{máx} = VQ/It$), temos

$$\tau_{máx} = 1{,}5\frac{V_{máx}}{A} = (1{,}5)\frac{20\text{ kN}}{(0{,}147\text{ m})(1{,}5)(0{,}147\text{ m})}$$
$$= 0{,}929\text{ MPa} > 0{,}6\text{ MPa}$$

EQUAÇÃO

Considerando-se que o critério do cisalhamento falhou, a viga tem de ser calculada novamente com base no cisalhamento.

$$\tau_{adm} = \frac{3}{2}\frac{V_{máx}}{A}$$

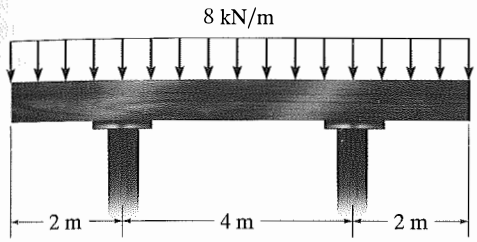
$$600\ \text{kN/m}^2 = \frac{3}{2}\frac{20\ \text{kN}}{(a)(1{,}5a)}$$

$$a = 0{,}183\ \text{m} = 183\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Esta seção maior também resistirá adequadamente à tensão normal.

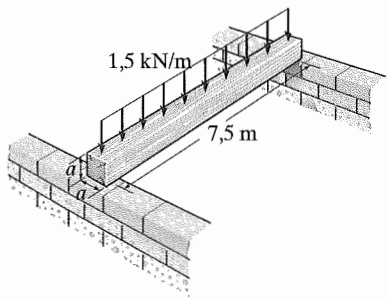
PROBLEMAS

11.1. A viga simplesmente apoiada é feita de madeira com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 6{,}5$ MPa e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 500$ kPa. Determine as dimensões da viga se ela tiver de ser retangular e apresentar relação altura/largura de 1,25.



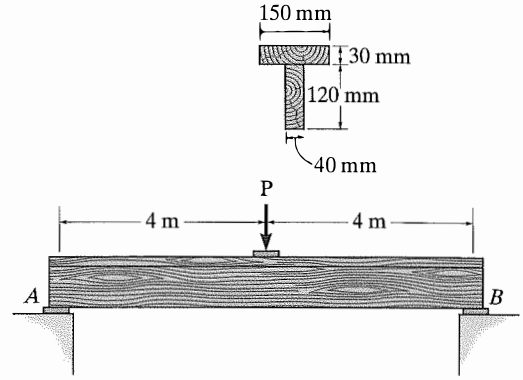
Problema 11.1

11.2. As vigas do assoalho de um galpão de depósito devem ser selecionadas em função de vigas quadradas de madeira feitas de carvalho. Se cada viga tiver de ser projetada para suportar uma carga de 1,5 kN/m sobre um vão simplesmente apoiado de 7,5 m, determine a dimensão a de sua seção transversal quadrada com aproximação de múltiplos de 5 mm. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 32$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 0{,}875$ MPa.



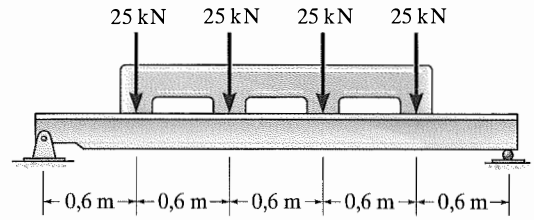
Problema 11.2

11.3. A viga de madeira deve ser carregada como mostra a figura. Se as extremidades suportarem somente forças verticais, determine o maior valor de **P** que pode ser aplicado. $\sigma_{adm} = 25$ MPa, $\tau_{adm} = 700$ kPa.



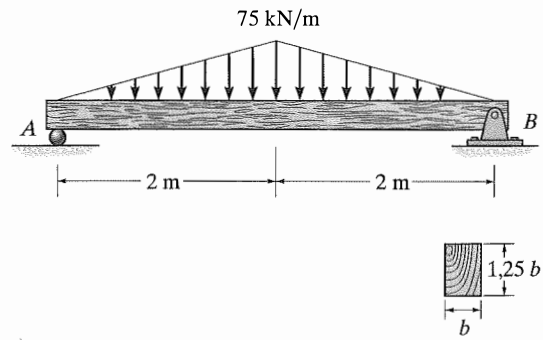
Problema 11.3

***11.4.** Selecione no Apêndice B a viga de aço de abas largas de menor peso que suportará com segurança a carga da máquina mostrada na figura. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 168$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 98$ MPa.



Problema 11.4

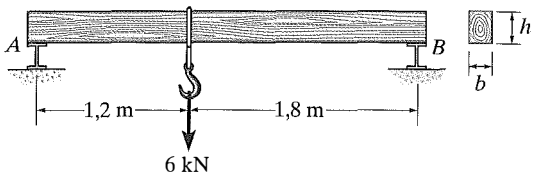
11.5. A viga simplesmente apoiada é feita de madeira com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 7$ MPa e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 0{,}5$ MPa. Determine as dimensões da viga se ela tiver de ser retangular e apresentar relação altura/largura de 1,25.



Problema 11.5

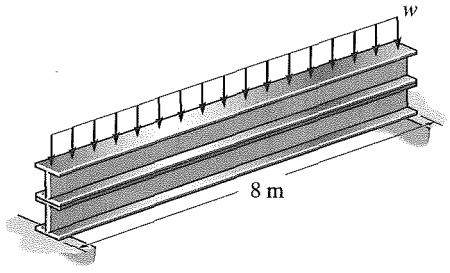
11.6. A viga de madeira tem seção transversal retangular e é usada para suportar uma carga de 6 kN. Se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 14$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 5$ MPa, determine a altura h da seção transversal com aproximação de múltiplos de 5 mm, se ela tiver de ser retangular e ter largura $b = 75$ mm. Considere que os apoios em A e B exercem somente reações verticais sobre a viga.

11.7. Resolva o Problema 11.6 se a seção transversal tiver largura desconhecida, mas tiver de ser quadrada, isto é, $h = b$.



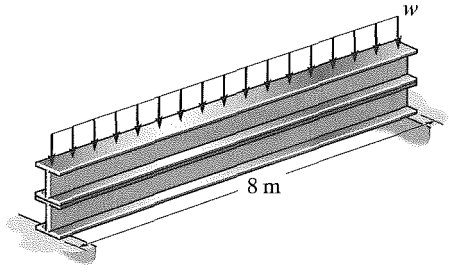
Problemas 11.6/7

***11.8.** A viga simplesmente apoiada é composta por duas seções W310 × 33 montadas como mostra a figura. Determine a carga uniforme máxima w que ela suportará se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 160$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 100$ MPa.



Problema 11.8

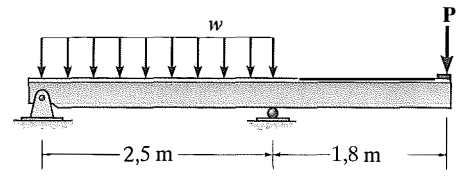
11.9. A viga simplesmente apoiada é composta por duas seções W310 × 33 montadas como mostra a figura. Determine se ela suportará com segurança uma carga $w = 30$ kN/m. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 100$ MPa.



Problema 11.9

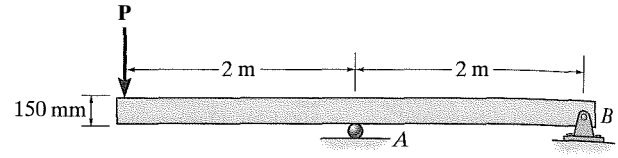
11.10. Selecione no Apêndice B a viga de aço de abas largas de menor peso que suportará com segurança as cargas mostradas na figura, na qual $w = 100$ kN/m e $P = 25$ kN. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 100$ MPa.

11.11. Selecione no Apêndice B a viga de aço de abas largas de menor peso e menor altura que suportará com segurança as cargas mostradas na figura, na qual $w = 0$ e $P = 50$ kN. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 168$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 100$ MPa.



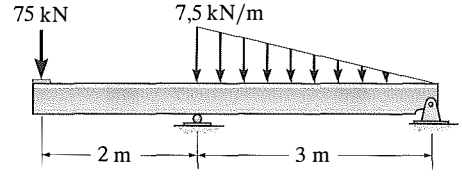
Problemas 11.10/11

11.12. Determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, a largura mínima da viga que suportará com segurança a carga $P = 40$ kN. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 168$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 105$ MPa.



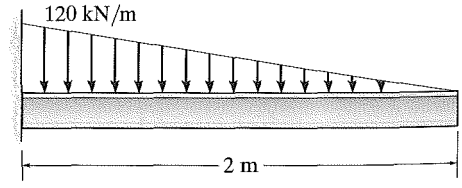
Problema 11.12

11.13. Selecione no Apêndice B a viga de aço de abas largas de menor peso que suportará com segurança as cargas mostradas na figura. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 168$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 100$ MPa.



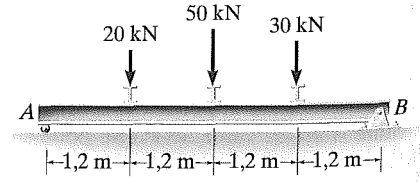
Problema 11.13

11.14. Selecione no Apêndice B a viga estrutural de aço de abas largas de menor peso e menor altura que suportará com segurança a carga mostrada na figura. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 168$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 100$ MPa.



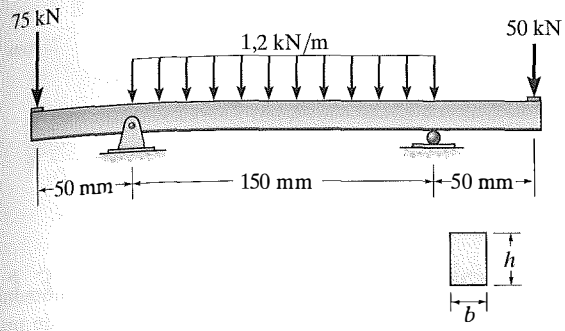
Problema 11.14

11.15. Selecione no Apêndice B a viga de aço de abas largas mais curta e de menor peso que suportará com segurança as cargas mostradas na figura. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 84$ MPa.



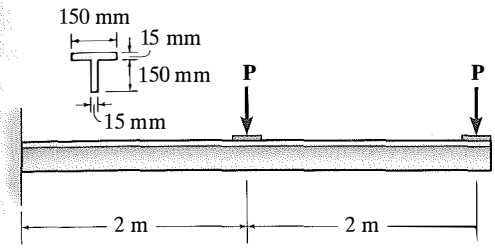
Problema 11.15

11.16. A viga é feita de um material cerâmico cuja tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 5$ MPa e tensão de cisalhamento $\tau_{adm} = 2{,}8$ MPa. Determine a largura b da viga, se a altura for $h = 2b$.



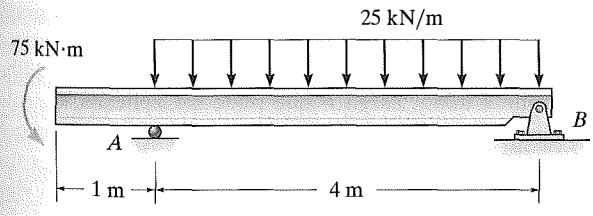
Problema 11.16

11.17. A viga T de aço em balanço foi montada com duas chapas soldadas como mostra a figura. Determine as cargas máximas P que podem ser suportadas com segurança pela viga, se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 170$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 95$ MPa.



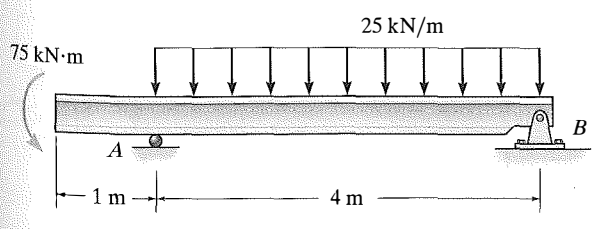
Problema 11.17

11.18. Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga W310 × 21 e verifique se ela suportará com segurança a carga mostrada na figura. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 84$ MPa.



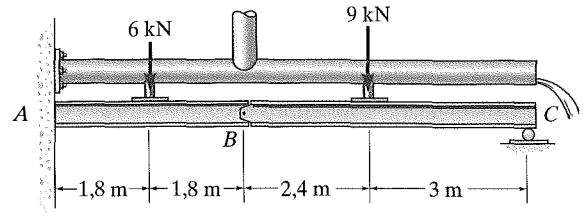
Problema 11.18

11.19. Selecione no Apêndice B a viga de aço de abas largas de menor peso que suportará com segurança as cargas mostradas na figura. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 84$ MPa.



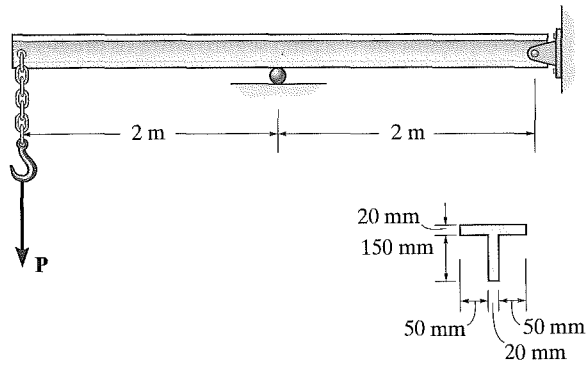
Problema 11.19

11.20. A viga composta foi feita com duas seções unidas por um pino em B. Use o Apêndice B e selecione a viga de abas largas leve que seria segura para cada seção, se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 168$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível for $\tau_{adm} = 100$ MPa. A viga suporta a carga de um tubo de 6 kN e 9 kN, como mostra a figura.



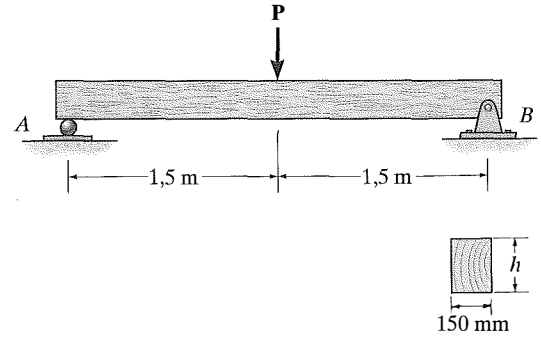
Problema 11.20

11.21. A viga de aço tem uma tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 140$ MPa e uma tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 90$ MPa. Determine a carga máxima que ela pode suportar com segurança.



Problema 11.21

11.22. A viga de madeira tem seção transversal retangular. Se sua largura for 150 mm, determine a altura h de modo que atinja simultaneamente sua tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 10$ MPa e uma tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 0{,}35$ MPa. Calcule também a carga máxima P que a viga pode suportar.

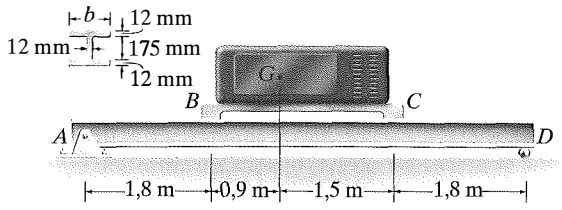


Problema 11.22

11.23. A viga será usada para suportar a máquina que tem peso de 80 kN e centro de gravidade em G. Se a tensão de flexão máxima não puder ultrapassar $\sigma_{adm} = 160$ MPa, de-

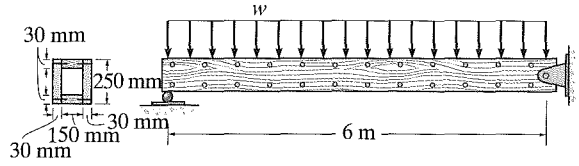
termine a largura b exigida para as abas. Os apoios em B e C são lisos.

***11.24.** A largura das abas da viga é $b = 200$ mm. Se a tensão de flexão máxima não puder ultrapassar $\sigma_{adm} = 160$ MPa, determine o maior peso da máquina que a viga pode suportar. O centro de gravidade da máquina encontra-se em G e os apoios em B e C são lisos.



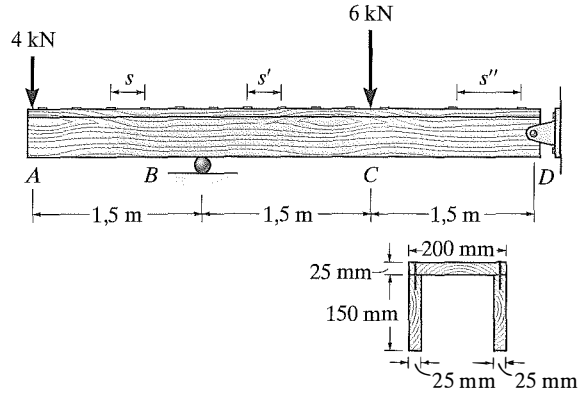
Problemas 11.23/24

11.25. A viga-caixão tem tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 10$ MPa e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 775$ MPa. Determine a intensidade máxima w da carga distribuída que ela pode suportar com segurança. Calcule também o espaçamento máximo seguro entre os pregos para cada terço do comprimento da viga. Cada prego pode resistir a uma força de cisalhamento de 200 N.



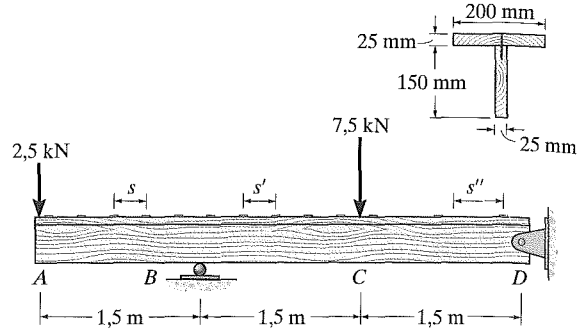
Problema 11.25

11.26. A viga foi construída com três tábuas como mostra a figura. Se cada prego puder suportar uma força de cisalhamento de 250 N, determine o espaçamento máximo entre os pregos, s, s' e s'', para as regiões AB, BC e CD, respectivamente.



Problema 11.26

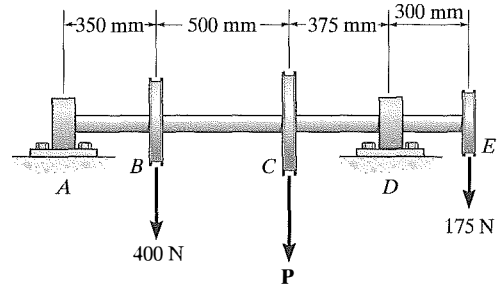
11.27. A viga foi construída com duas tábuas como mostra a figura. Se cada prego puder suportar uma força de cisalhamento de 1 kN, determine o espaçamento máximo entre os pregos, s, s' e s'' com aproximação de 25 mm para as regiões AB, BC e CD, respectivamente.



Problema 11.27

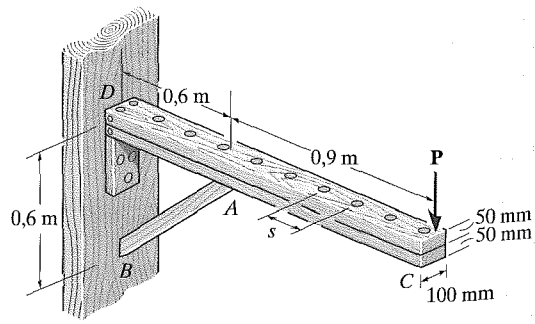
***11.28.** Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo e determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro exigido se $\sigma_{adm} = 50$ MPa e $\tau_{adm} = 20$ MPa. Os mancais em A e D exercem somente reações verticais sobre o eixo. A carga é aplicada às polias em B, C e E. Considere $P = 550$ N.

11.29. Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para o eixo e determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro exigido, se $\sigma_{adm} = 50$ MPa e $\tau_{adm} = 20$ MPa. Os mancais A e D exercem somente reações verticais sobre o eixo. A carga é aplicada às polias em B, C e E. Considere $P = 400$ N.

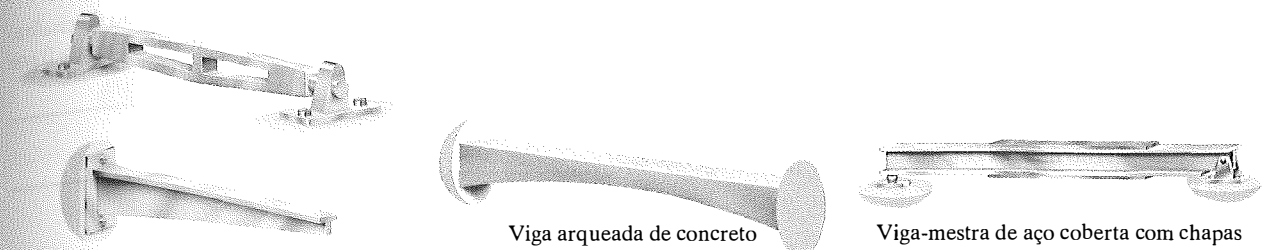


Problemas 11.28/29

11.30. A viga com avanço foi construída com duas peças de madeira de 50 mm por 100 mm escoradas como mostra a figura. Se a tensão de flexão admissível for $\sigma_{adm} = 4{,}2$ MPa, determine a maior carga P que pode ser aplicada. Calcule também o espaçamento máximo associado, s, entre os pregos ao longo da seção AC da viga, se cada um deles puder resistir a uma força de cisalhamento de 4 kN. Considere que a viga está unida por pinos em A, B e D. Despreze a força axial desenvolvida na viga ao longo de DA.



Problema 11.30



(a) Viga arqueada de concreto (b) Viga-mestra de aço coberta com chapas (c)

Figura 11.8

*11.3 Vigas totalmente solicitadas

Na seção anterior, desenvolvemos um método para determinar as dimensões da seção transversal de uma *viga prismática* de modo que ela resista ao momento máximo, $M_{máx}$, em seu vão. Visto que, em geral, o momento na viga *varia* ao longo do seu comprimento, a escolha de uma viga prismática costuma ser ineficiente, pois ela nunca é totalmente solicitada em pontos ao longo da viga onde $M < M_{máx}$. Para refinar o projeto de modo a reduzir o peso de uma viga, às vezes os engenheiros escolhem uma com área de seção transversal *variável* tal que, em cada seção transversal ao longo dela, a tensão de flexão atinja seu valor admissível máximo. Vigas com área da seção transversal variável denominam-se *não prismáticas* e são muito usadas em máquinas, uma vez que podem ser fundidas rapidamente. A Figura 11.8a mostra alguns exemplos. Em estruturas, essas vigas podem ser 'arqueadas' como mostra a Figura 11.8b. Elas também podem ser 'compostas' ou fabricadas em uma oficina usando chapas. Um exemplo é uma viga-mestra feita com uma viga prismática laminada coberta com chapas soldadas na região onde o momento é máximo (Figura 11.8c).

A análise de tensão de uma viga não prismática é geralmente muito difícil de executar e está além do escopo deste livro. Na maioria das vezes, esses tipos de viga são analisados por métodos experimentais ou pela teoria da elasticidade. Todavia, os resultados obtidos de tal análise indicam que as premissas adotadas na dedução da fórmula da flexão são aproximadamente corretas para prever as tensões de flexão em seções não prismáticas, desde que a conicidade ou a inclinação do contorno superior ou inferior da viga não seja muito acentuada. Por outro lado, a fórmula do cisalhamento não pode ser usada para o projeto de uma viga não prismática, porque os resultados obtidos são muito enganadores.

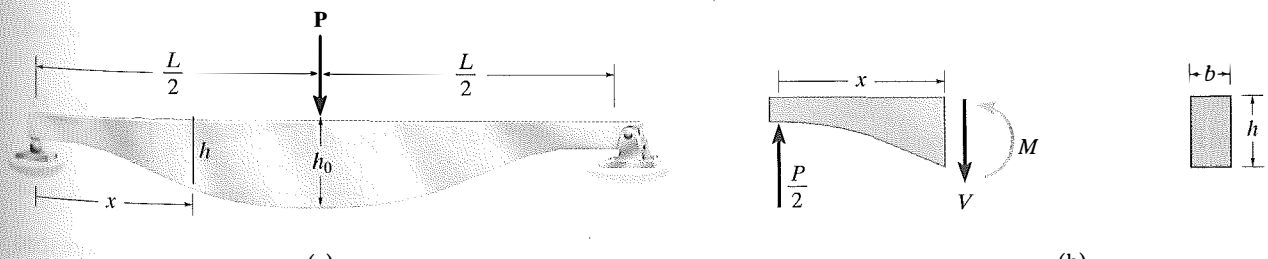
Embora seja aconselhável ter cautela ao aplicar a fórmula da flexão no projeto de uma viga não prismática, aqui mostraremos, em princípio, como essa fórmula pode ser usada como um meio aproximado para obter a forma geral da viga. Nesse sentido, as *dimensões* da seção transversal de uma viga não prismática que suporta uma determinada carga podem ser determinadas pela fórmula da flexão expressa como

$$S = \frac{M}{\sigma_{adm}}$$

Se expressarmos o momento interno M no tocante a sua posição x ao longo da viga, então, visto que σ_{adm} é uma constante conhecida, o módulo de resistência S ou as dimensões da viga tornam-se função de x. Uma viga projetada dessa maneira é denominada ***viga totalmente solicitada.*** Embora *somente* as tensões de flexão tenham sido consideradas para aproximar sua forma final, deve-se ter o cuidado de garantir também que ela resistirá ao cisalhamento, especialmente em pontos onde são aplicadas cargas concentradas. O resultado é que a forma ideal de uma viga não pode ser totalmente determinada apenas pela fórmula da flexão.

EXEMPLO 11.4

Determine a forma de uma viga totalmente solicitada e simplesmente apoiada que suporta uma força concentrada em seu centro (Figura 11.9a). A viga tem seção transversal



(a) (b)

Figura 11.9

retangular de largura constante b, e a tensão admissível é σ_{adm}.

SOLUÇÃO

O momento interno na viga (Figura 11.9b), expresso em função da posição, $0 \leq x < L/2$, é

$$M = \frac{P}{2}x$$

Por consequência, o módulo de resistência exigido é

$$S = \frac{M}{\sigma_{adm}} = \frac{P}{2\sigma_{adm}}x$$

Visto que $S = I/c$, para uma área de seção transversal h por b, temos

$$\frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{P}{2\sigma_{adm}}x$$

$$h^2 = \frac{3P}{\sigma_{adm}\, b}x$$

Se $h = h_0$ em $x = L/2$, então

$${h_0}^2 = \frac{3PL}{2\sigma_{adm}\, b}$$

de modo que

$$h^2 = \left(\frac{2{h_0}^2}{L}\right)x \qquad \textit{Resposta}$$

Por inspeção, vemos que a altura h deve variar de uma maneira *parabólica* em relação à distância x.

OBSERVAÇÃO: Na prática, essa *forma* constitui a base para o projeto de feixes de molas usados para suportar os eixos traseiros da maioria dos caminhões pesados ou vagões de trens. Observe que, embora esse resultado indique que $h = 0$ em $x = 0$, é necessário que a viga resista à tensão de cisalhamento no apoio e, em termos práticos, exige-se que $h > 0$ nos apoios (Figura 11.9a).

EXEMPLO 11.5

A viga em balanço mostrada na Figura 11.10a tem forma trapezoidal com altura h_0 em A e altura $3h_0$ em B. Se for submetida a uma carga **P** em sua extremidade, determine a tensão normal máxima absoluta na viga, que possui seção transversal retangular de largura constante b.

SOLUÇÃO

Em qualquer seção transversal, a tensão normal máxima ocorre nas superfícies superior e inferior da viga. Entretanto, visto que $\sigma_{máx} = M/S$ e o módulo de resistência S aumenta à medida que x aumenta, a tensão normal máxima absoluta *não* ocorre necessariamente na parede B, onde o momento é máximo. Pela fórmula da flexão, podemos expressar a tensão normal máxima em uma seção arbitrária em relação a sua posição x (Figura 11.10b). Aqui, o momento interno tem valor $M = Px$. Uma vez que a inclinação da parte inferior da viga é $2h_0/L$ (Figura 11.10a), a altura da viga na posição x é

$$h = \frac{2h_0}{L}x + h_0 = \frac{h_0}{L}(2x + L)$$

Aplicando a fórmula da flexão, temos

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{Px(h/2)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)} = \frac{6PL^2x}{b{h_0}^2(2x + L)^2} \qquad (1)$$

Para determinar a posição x na qual ocorre a tensão normal máxima absoluta, temos de tomar a derivada de s em relação a x e igualá-la a zero, o que dá

$$\frac{d\sigma}{dx} = \left(\frac{6PL^2}{b{h_0}^2}\right)\frac{1(2x + L)^2 - x(2)(2x + L)(2)}{(2x + L)^4} = 0$$

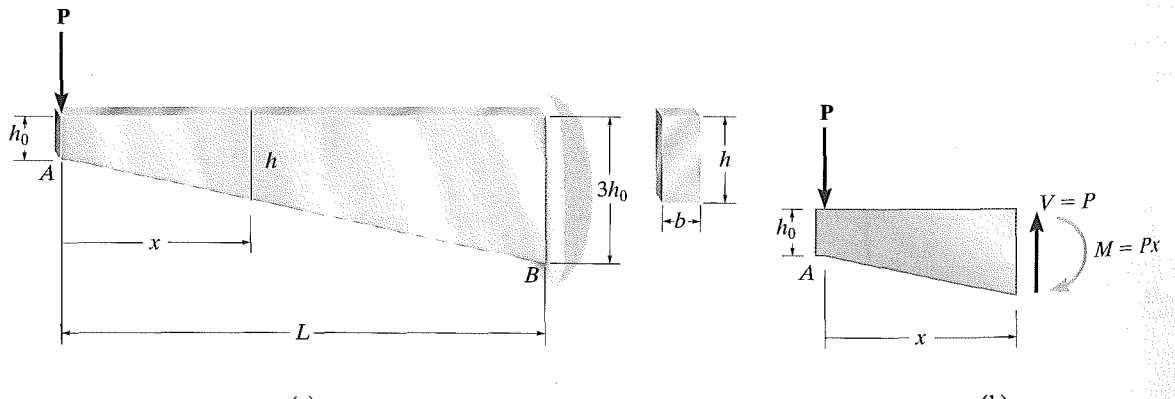


Figura 11.10

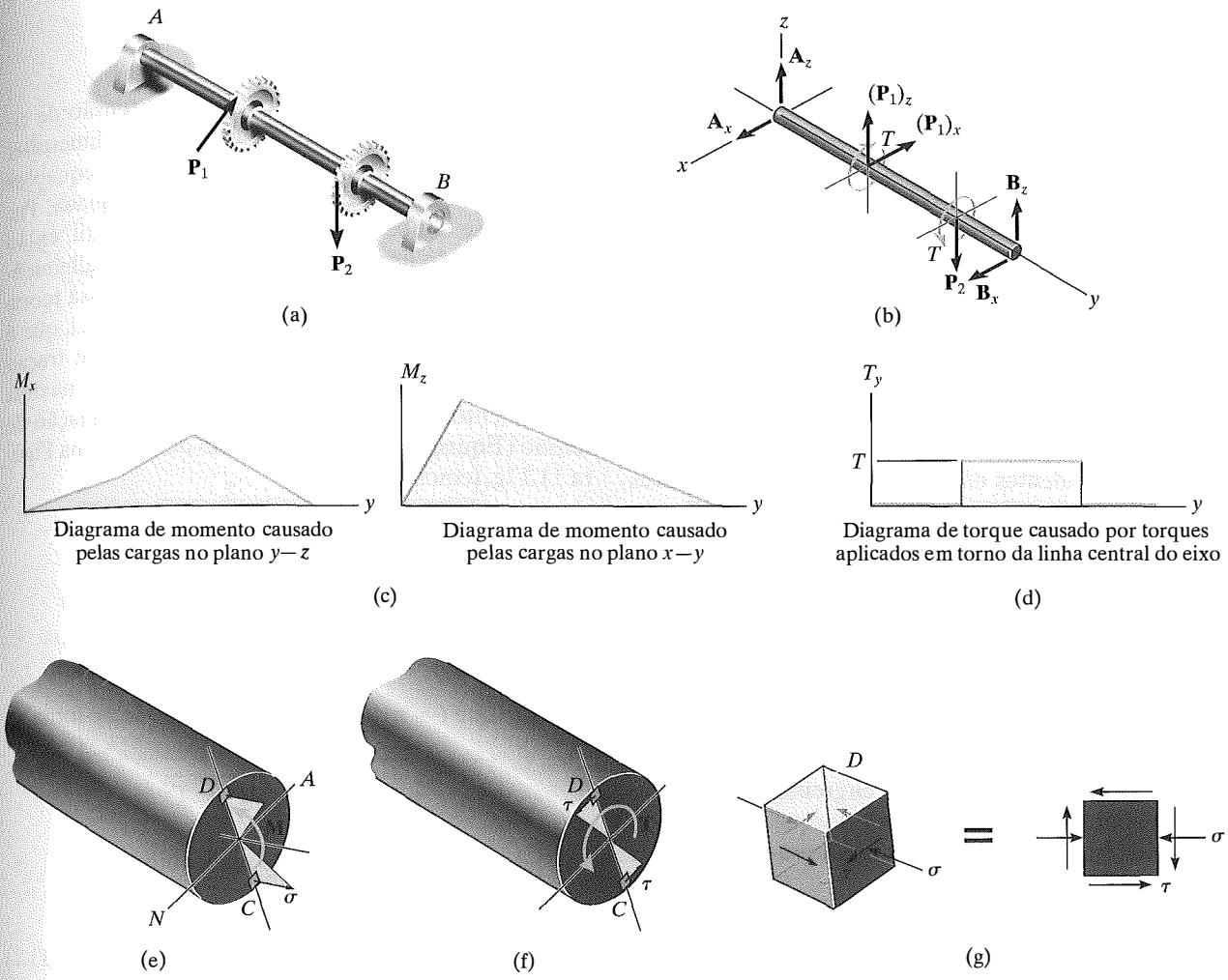


Figura 11.11

Logo,

$$4x^2 + 4xL + L^2 - 8x^2 - 4xL = 0$$
$$L^2 - 4x^2 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}L$$

Substituindo na Equação 1 e simplificando, a tensão normal máxima absoluta é, portanto,

$$\sigma_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}} = \frac{3}{4}\frac{PL}{bh_0^2} \qquad \textit{Resposta}$$

Observe que, na parede, B, a tensão normal máxima é

$$(\sigma_{\text{máx}})_B = \frac{Mc}{I} = \frac{PL(1{,}5h_0)}{\left[\frac{1}{12}b(3h_0)^3\right]} = \frac{2}{3}\frac{PL}{bh_0^2}$$

que é 11,1% menor que $\sigma_{\substack{\text{máx}\\\text{abs}}}$

OBSERVAÇÃO: É bom lembrar que a fórmula da flexão foi deduzida a partir da premissa de que a viga é *prismática*. Visto que isso não ocorre aqui, devemos esperar algum erro nessa análise e naquela do Exemplo 11.4. Uma análise matemática mais exata, usando-se a teoria da elasticidade, revela que a aplicação da fórmula da flexão, como fizemos neste exemplo, resultará em apenas pequenos erros para a tensão normal, se o ângulo de inclinação da viga for pequeno. Por exemplo, se esse ângulo for 15°, a tensão calculada neste exemplo será aproximadamente 5% maior do que a calculada pela análise mais exata. Vale a pena observar também que o cálculo de $(\sigma_{\text{máx}})_B$ foi efetuado com finalidade meramente ilustrativa, visto que, pelo princípio de Saint-Venant, a distribuição de tensão verdadeira no apoio (parede) é muito irregular.

*11.4 Projeto de eixos

Em geral, os eixos com seções transversais circulares são utilizados em muitos tipos de máquinas e equipamentos mecânicos. O resultado é que muitas vezes estarão sujeitos a tensão cíclica ou de fadiga, causadas pelas cargas combinadas de flexão e torção que devem transmitir, ou às quais devem resistir. Além dessas

cargas, podem existir concentrações de tensão em um eixo devido a chavetas, acoplamentos e transições repentinas em sua área de seção transversal (Seção 5.8). Portanto, para projetar um eixo de forma adequada, é necessário levar em conta todos esses efeitos.

Nesta seção, discutiremos alguns dos aspectos importantes do projeto de eixos uniformes usados para transmitir potência. Esses eixos são frequentemente submetidos a cargas aplicadas a polias e engrenagens acopladas, como mostra a Figura 11.11a. Visto que as cargas podem ser aplicadas ao eixo em vários ângulos, o momento fletor interno e o momento de torção em qualquer seção transversal podem ser determinados substituindo-se as cargas por suas contrapartes estaticamente equivalentes e então decompondo essas cargas em componentes em dois planos perpendiculares (Figura 11.11b). A seguir, podemos traçar os diagramas de momento fletor para as cargas *em cada plano*, e o momento interno resultante em qualquer seção ao longo do eixo será determinado por adição vetorial, $M = \sqrt{M_x^2 + M_z^2}$ (Figura 11.11c). Além de sujeitos ao momento, os segmentos do eixo também estão sujeitos a diferentes torques internos (Figura 11.11b). Aqui, vemos que, para obter equilíbrio, o torque desenvolvido em uma engrenagem tem de equilibrar o torque desenvolvido na outra engrenagem. Para levar em conta a variação geral do torque ao longo do eixo, podemos traçar também um ***diagrama de torque*** (Figura 11.11d).

Uma vez definidos os diagramas de momento e torque, é possível investigar certas seções críticas ao longo do eixo nas quais a *combinação* de um momento resultante **M** e um torque **T** cria a pior situação de tensão. A propósito, o momento de inércia do eixo é o *mesmo* em torno de *qualquer* eixo diametral e, visto que esse eixo representa um *eixo principal de inércia* para a seção transversal, podemos aplicar a fórmula da flexão usando o *momento resultante* para obter a tensão de flexão máxima. Como mostra a Figura 11.11e, essa tensão ocorrerá em dois elementos, *C* e *D*, cada um localizado no contorno externo do eixo. Se essa seção também tiver de resistir a um torque **T**, então desenvolve-se também uma tensão de cisalhamento máxima nesses elementos (Figura 11.11f). Além do mais, as forças externas também criarão tensão de cisalhamento no eixo determinada por $\tau = VQ/It$; todavia, essa tensão geralmente contribuirá com uma distribuição de tensão muito menor na seção transversal em comparação com a desenvolvida por flexão e torção. Em alguns casos, ela deve ser investigada, porém, por simplicidade, desprezaremos seu efeito na análise que faremos em seguida. Então, em geral, o elemento crítico *D* (ou *C*) sobre o eixo está sujeito ao *estado plano de tensão,* como mostra a Figura 11.11g, na qual

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \qquad \text{e} \qquad \tau = \frac{Tc}{J}$$

Se a tensão normal admissível ou a tensão de cisalhamento admissível for conhecida, as dimensões do eixo serão baseadas na utilização dessas equações e na seleção de uma teoria da falha adequada. Por exemplo, se soubermos que o material é dútil, então seria adequado usar a teoria da tensão de cisalhamento máxima. Como dissemos na Seção 10.7, essa teoria exige que a tensão de cisalhamento admissível, que é determinada pelos resultados de um teste de tração simples, seja igual à tensão de cisalhamento máxima no elemento. Usando a equação de transformação de tensão (Equação 9.7), para o estado de tensão na Figura 11.11g, temos

$$\tau_{\text{adm}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

Visto que $I = \pi c^4/4$ e $J = \pi c^4/2$, essa equação torna-se

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{2}{\pi c^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Resolvendo para o raio do eixo, obtemos

$$c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{\text{adm}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3} \tag{11.2}$$

A aplicação de qualquer outra teoria da falha resultará, é claro, em uma formulação diferente para *c*. Todavia, em todos os casos poderá ser necessário aplicar essa formulação a várias 'seções críticas' ao longo do eixo para determinar a combinação particular de *M* e *T* que dá o maior valor para *c*.

O exemplo a seguir ilustra o procedimento numericamente.

EXEMPLO 11.6

O eixo na Figura 11.12a é suportado por mancais em *A* e *B*. Devido à transmissão de potência de e para o eixo, as correias das polias estão sujeitas às tensões mostradas. Determine o menor diâmetro do eixo pela teoria da tensão de cisalhamento máxima, com $\tau_{\text{adm}} = 50$ MPa.

SOLUÇÃO

As reações dos apoios foram calculadas e são mostradas no diagrama de corpo livre do eixo (Figura 11.12b). Os diagramas de momento fletor para M_x e M_z são mostrados nas figuras 11.12c e 11.12d, respectivamente. O diagrama de torque é

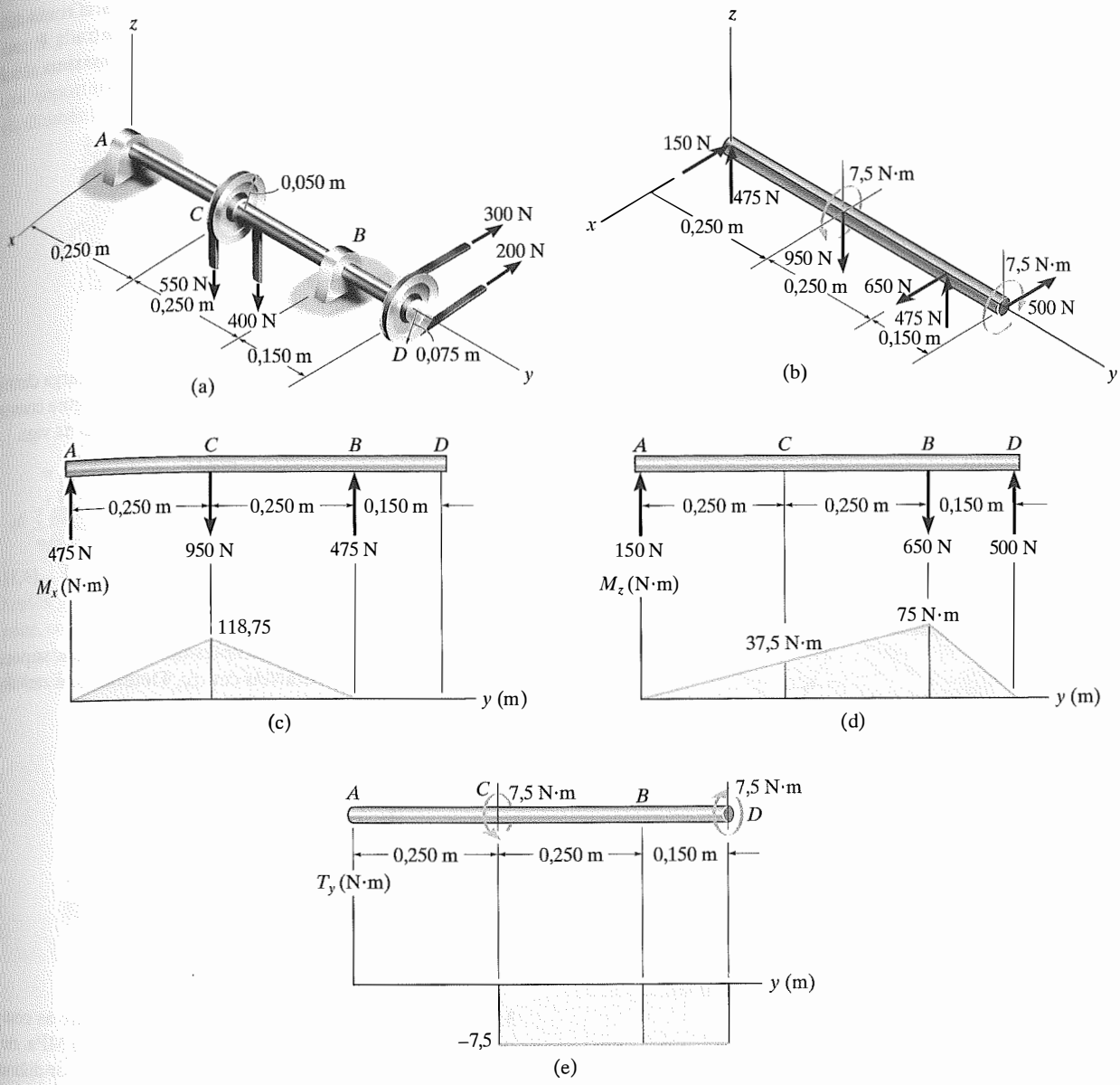


Figura 11.12

mostrado na Figura 11.12e. Por inspeção, os pontos críticos para o momento fletor ocorrem em C ou B. Além disso, imediatamente à direita de C e em B, o momento de torção é 7,5 kN · m. Em C, o momento resultante é

$$M_C = \sqrt{(118{,}75\ \text{N}\cdot\text{m})^2 + (37{,}5\ \text{N}\cdot\text{m})^2} = 124{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

ao passo que é menor em B, a saber

$$M_B = 75\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Visto que o projeto é baseado na teoria da tensão de cisalhamento máxima, pode-se aplicar a Equação 11.2. O radical $\sqrt{M^2 + T^2}$ será o maior de todos em uma seção imediatamente à direita de C. Temos

$$c = \left(\frac{2}{\pi\tau_{\text{adm}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi(50)(10^6)\ \text{N/m}^2}\sqrt{(124{,}5\ \text{N}\cdot\text{m})^2 + (7{,}5\ \text{N}\cdot\text{m})^2}\right)^{1/3}$$

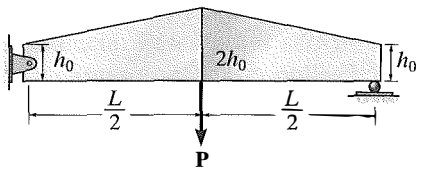
$$= 0{,}0117\ \text{m}$$

Assim, o menor diâmetro admissível é

$$d = 2(0{,}0117\ \text{m}) = 23{,}3\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

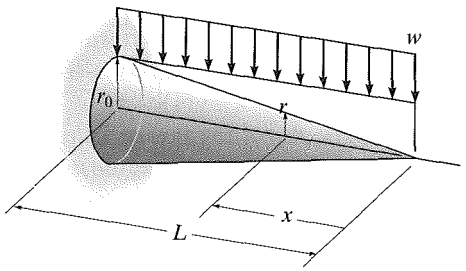
PROBLEMAS

11.31. A viga mostrada na figura suporta uma força concentrada **P** em seu centro. Se for feita de uma chapa com largura constante b, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



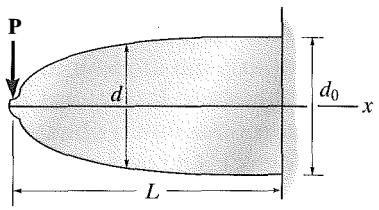
Problema 11.31

*__11.32.__ Determine a variação do raio r da viga em balanço que suporta a carga distribuída uniforme, de modo que ela tenha uma tensão de flexão máxima constante $\sigma_{máx}$ em todo o seu comprimento.



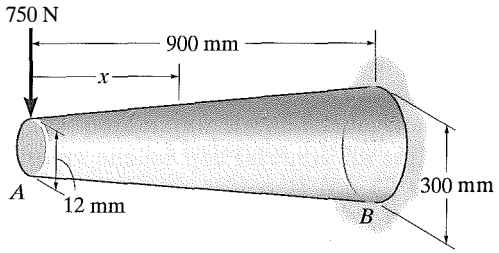
Problema 11.32

11.33. Determine a variação na altura d de uma viga em balanço que suporta uma força concentrada **P** em sua extremidade, de modo que ela tenha uma tensão de flexão máxima constante σ_{adm} em todo o seu comprimento. A viga tem largura constante b_0.



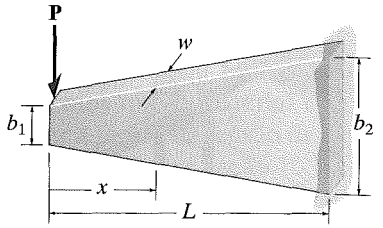
Problema 11.33

11.34. A viga tem a forma de um tronco de cone reto com diâmetro de 12 mm em A e de 300 mm em B. Se ela suportar uma força de 750 N em A, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e especifique sua localização x.



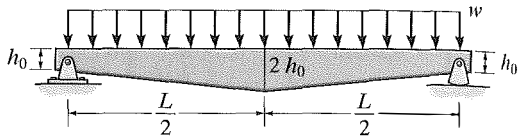
Problema 11.34

11.35. A viga tem largura w e altura que varia como mostra a figura. Se ela suportar uma força concentrada **P** em sua extremidade, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e especifique sua localização x.



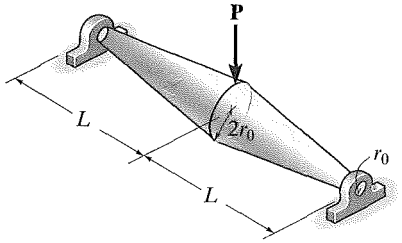
Problema 11.35

*__11.36.__ A viga mostrada na figura suporta uma carga distribuída uniforme w. Se for feita de uma chapa com largura constante b, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



Problema 11.36

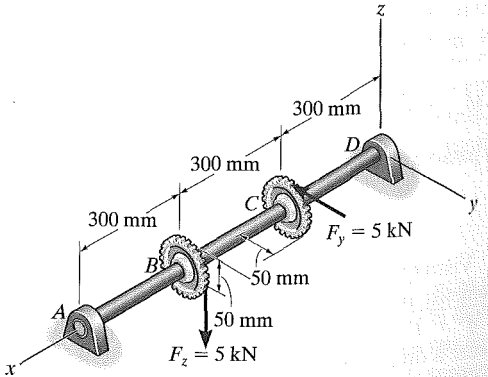
11.37. A viga afunilada simplesmente apoiada suporta a força concentrada **P** em seu centro. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



Problema 11.37

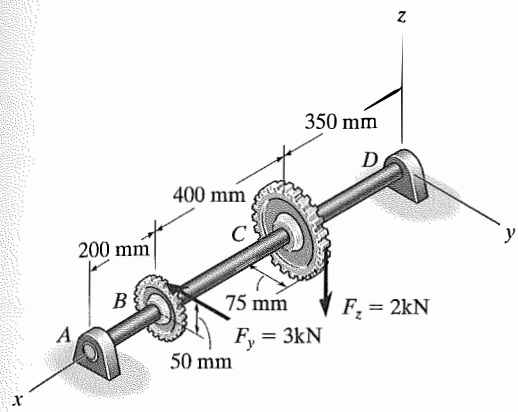
11.38. Os mancais em A e D exercem somente as componentes y e z da força sobre o eixo. Se $\tau_{adm} = 60$ MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o eixo de menor diâmetro que suportará a carga. Use a teoria da falha da tensão de cisalhamento máxima.

11.39. Resolva o Problema 11.38 usando a teoria de falha da energia de distorção máxima com $\sigma_{adm} = 180$ MPa.



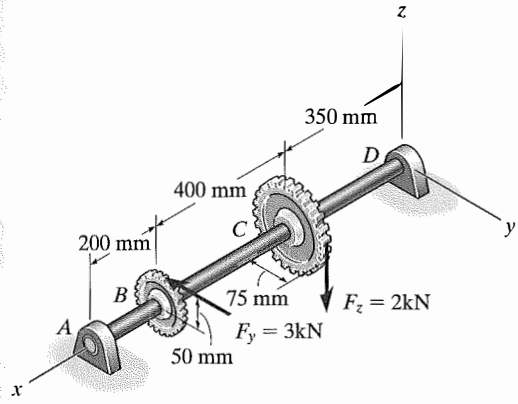
Problemas 11.38/39

*11.40. Os mancais em A e D exercem somente as componentes y e z da força sobre o eixo. Se $\tau_{adm} = 60$ MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o eixo de menor diâmetro que suportará a carga. Use a teoria da falha da tensão de cisalhamento máxima.



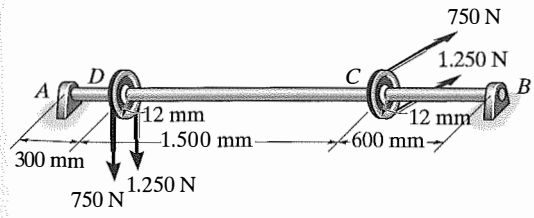
Problema 11.40

11.41. Os mancais em A e D exercem somente as componentes y e z da força sobre o eixo. Se $\tau_{adm} = 60$ MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o eixo de menor diâmetro que suportará a carga. Use a teoria de falha da energia de distorção máxima. $\sigma_{adm} = 130$ MPa.



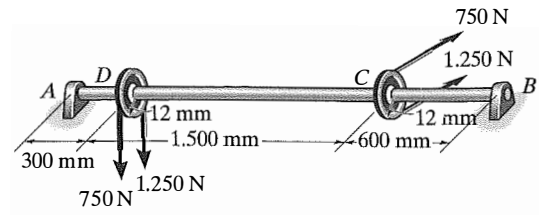
Problema 11.41

11.42. As polias acopladas ao eixo estão carregadas como mostra a figura. Se os mancais em A e B exercerem somente forças horizontais e verticais sobre o eixo, determine, com aproximação de 1 mm, o diâmetro exigido para o eixo usando a teoria de falha da tensão de cisalhamento máxima. $\tau_{adm} = 84$ MPa.



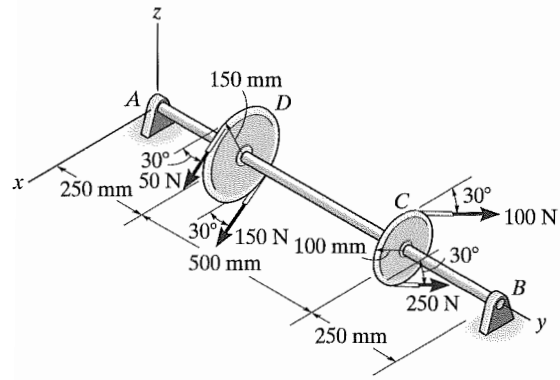
Problema 11.42

11.43. As polias acopladas ao eixo estão carregadas como mostra a figura. Se os mancais em A e B exercerem somente forças horizontais e verticais sobre o eixo, determine, com aproximação de 1 mm, o diâmetro exigido para o eixo. Use a teoria de falha da energia de distorção máxima, $\tau_{adm} = 140$ MPa.



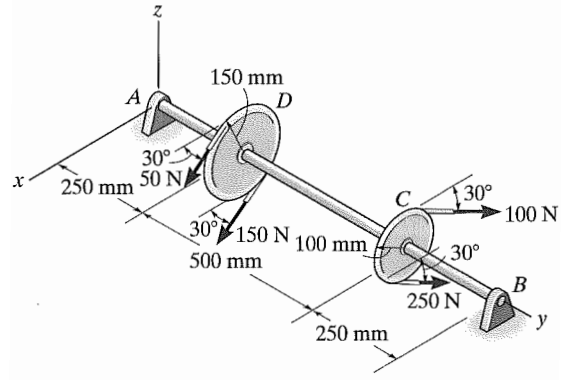
Problema 11.43

*11.44. O eixo está apoiado sobre mancais que não oferecem resistência a carga axial. Se a tensão normal admissível para o eixo for $\sigma_{adm} = 80$ MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro do eixo que suportará a carga. Use a teoria de falha da energia de distorção máxima.



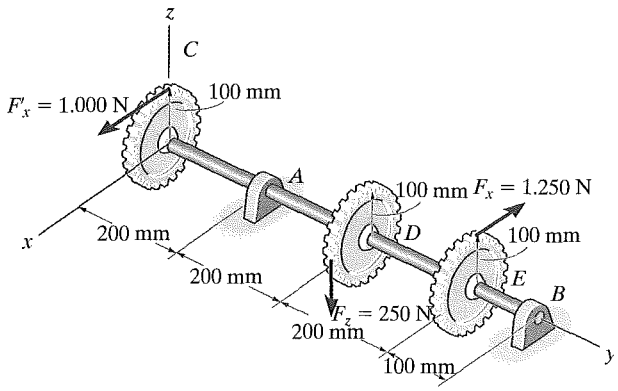
Problema 11.44

11.45. O eixo está apoiado sobre mancais que não oferecem resistência a carga axial. Se a tensão de cisalhamento admissível para o eixo for $\tau_{adm} = 35$ MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro do eixo que suportará a carga. Use a teoria de falha da tensão de cisalhamento máxima.



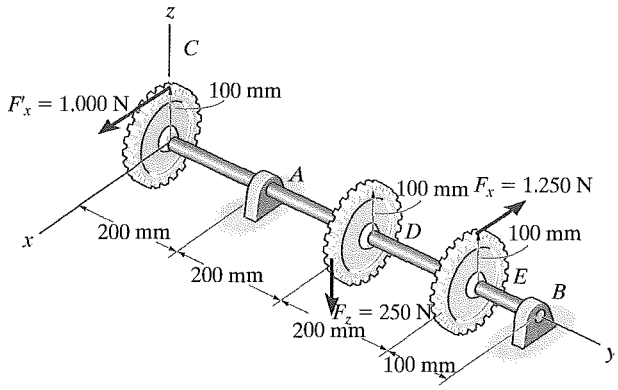
Problema 11.45

11.46. O eixo é suportado por mancais em A e B que exercem sobre o eixo somente as componentes da força nas direções x e z. Se a tensão normal admissível para o eixo for $\sigma_{adm} = 105$ MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro do eixo que suportará a carga da engrenagem. Use a teoria de falha da energia de distorção máxima.



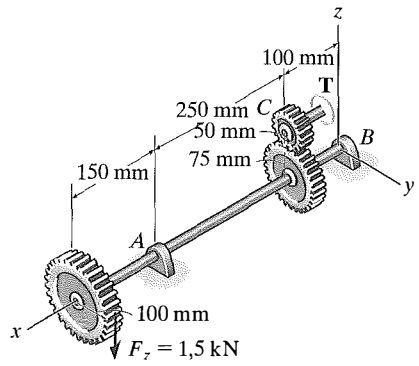
Problema 11.46

11.47. O eixo é suportado por mancais em A e B que exercem sobre o eixo somente as componentes da força nas direções x e z. Se a tensão normal admissível para o eixo for σ_{adm} = 105 MPa, determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro do eixo que suportará a carga da engrenagem. Use a teoria de falha da tensão de cisalhamento máxima com τ_{adm} = 42 MPa.



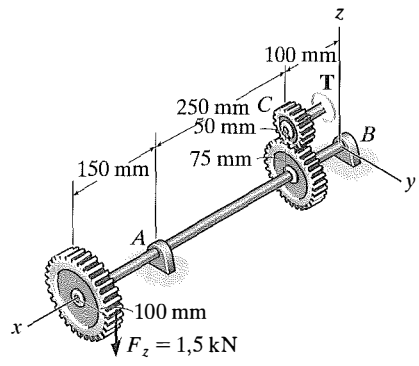
Problema 11.47

***11.48.** A polia acoplada à extremidade do eixo está sujeita à carga mostrada na figura. Se os mancais em A e B exercerem somente as componentes y e z da força sobre o eixo, determine o torque de equilíbrio T na engrenagem C e então determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro do eixo que suportará a carga. Use a teoria de falha da tensão de cisalhamento máxima com τ_{adm} = 60 MPa.



Problema 11.48

11.49. A polia acoplada à extremidade do eixo está sujeita à carga mostrada na figura. Se os mancais em A e B exercerem somente as componentes y e z da força sobre o eixo, determine o torque de equilíbrio T na engrenagem C e então determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro do eixo que suportará a carga. Use a teoria de falha da energia de distorção máxima com σ_{adm} = 80 MPa.



Problema 11.49

Revisão do capítulo

Ocorre falha de uma viga quando o cisalhamento interno ou o momento na viga é máximo. Portanto, para resistir a essas cargas, é importante que a tensão de cisalhamento máxima e a tensão de flexão associadas não ultrapassem valores admissíveis determinados em códigos e manuais de engenharia. Normalmente, o projeto da seção transversal de uma viga começa pela determinação da resistência à tensão de flexão admissível

$$\sigma_{adm} = \frac{M_{máx}c}{I}$$

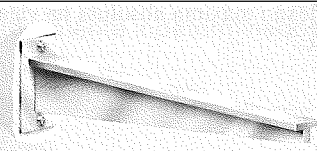
Em seguida, é verificada a tensão de cisalhamento admissível. Para seções retangulares, $\tau_{adm} \geq 1{,}5(V_{máx}/A)$ e para seções de abas largas, é adequado usar $\tau_{adm} \geq V_{máx}/A_{alma}$. Em geral, use

$$\tau_{adm} = \frac{VQ}{It}$$

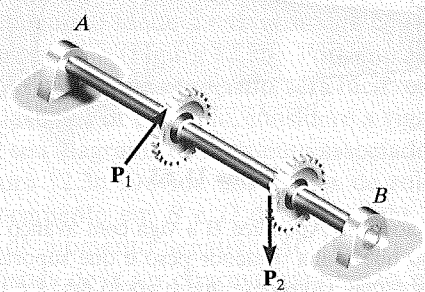
Para vigas compostas, o espaçamento entre os elementos de fixação ou a resistência da cola ou solda é determinada pelo fluxo de cisalhamento admissível

$$q_{adm} = \frac{VQ}{I}$$

Vigas totalmente solicitadas são não prismáticas e projetadas de modo tal que cada seção transversal ao longo da viga resistirá à tensão de flexão admissível. Isso definirá o formato da viga.

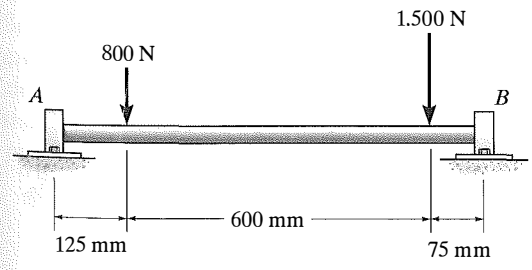


Em geral, um eixo mecânico é projetado para resistir a tensões de torção e de flexão. Normalmente, a flexão pode ser decomposta em dois planos e, portanto, é necessário traçar os diagramas de momento para cada componente do momento fletor e então selecionar a o momento máximo com base na adição vetorial. Uma vez determinadas as tensões de flexão e de cisalhamento máximas, dependendo do tipo de material, usa-se uma teoria da falha adequada para comparar a tensão admissível com a tensão exigida.



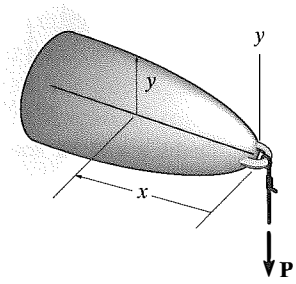
PROBLEMAS DE REVISÃO

11.50. Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para eixo e, em seguida, determine o diâmetro exigido com aproximação de 1 mm se $\sigma_{adm} = 140$ MPa e $\tau_{adm} = 80$ MPa. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo.



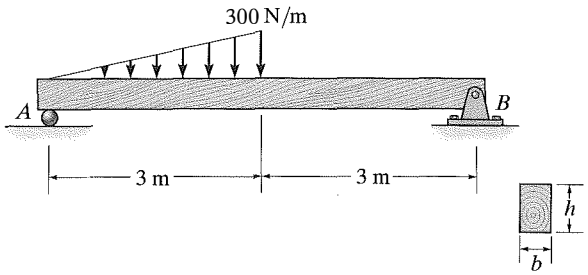
Problema 11.50

11.51. A viga em balanço tem seção transversal circular. Se ela suportar uma força **P** em sua extremidade, determine seu raio y em função de x, de modo que seja submetida a uma tensão de flexão máxima constante σ_{adm} em todo o seu comprimento.



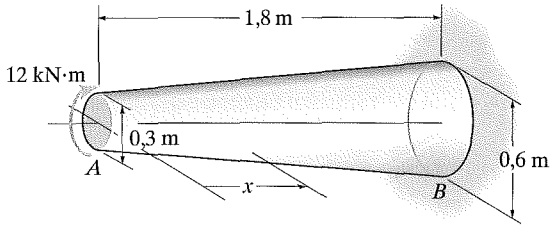
Problema 11.51

*__11.52.__ A viga simplesmente apoiada é feita de madeira com tensão de flexão admissível $\sigma_{adm} = 8$ MPa e tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 750$ kPa. Determine suas dimensões se ela tiver de ser retangular e a relação altura/largura tiver de ser $h/b = 1{,}25$.



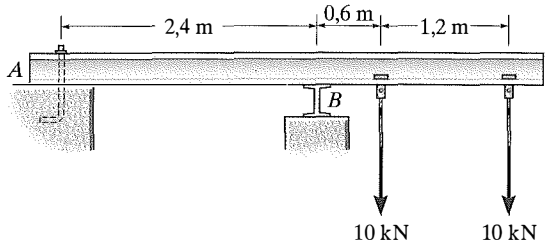
Problema 11.52

11.53. A viga tem a forma de um tronco de cone reto com diâmetro de 0,3 m em *A* e diâmetro de 0,6 m em *B*. Se suportar um momento de 12 kN · m em sua extremidade, determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e especifique sua localização *x*.



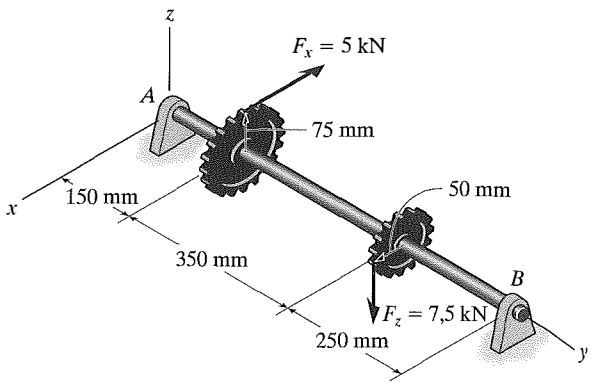
Problema 11. 53

11.54. Selecione no Apêndice B a viga com avanço de abas largas de aço que tenha o menor peso e que suportará com segurança as cargas. Considere que o apoio em *A* é um pino e que o apoio em *B* é um rolete. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 168$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 100$ MPa.



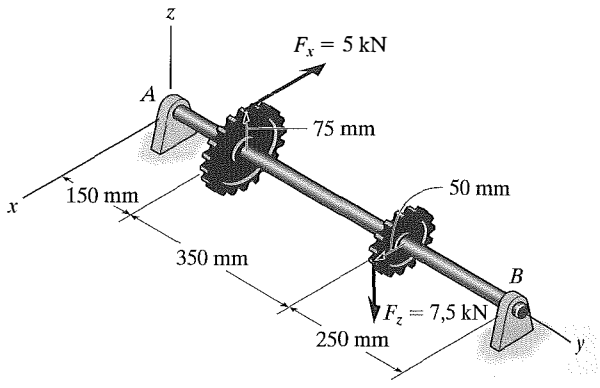
Problema 11.54

11.55. Os mancais em *A* e *B* exercem somente as componentes *x* e *z* das forças sobre o eixo de aço. Determine, com aproximação de 1 mm, o diâmetro do eixo, de modo que ele possa resistir às cargas das engrenagens sem ultrapassar uma tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 80$ MPa. Use a teoria de falha da tensão de cisalhamento máxima.



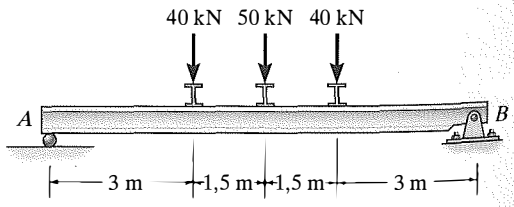
Problema 11.55

***11.56.** Os mancais em *A* e *B* exercem somente as componentes *x* e *z* das forças sobre o eixo de aço. Determine, com aproximação de 1 mm, o diâmetro do eixo, de modo que ele possa resistir às cargas das engrenagens sem ultrapassar uma tensão de cisalhamento admissível $\tau_{adm} = 80$ MPa. Use a teoria de falha da energia de distorção máxima com $\sigma_{adm} = 200$ MPa.



Problema 11.56

11.57. Selecione no Apêndice B a viga de abas largas de aço que tenha o menor peso e que suportará com segurança as cargas mostradas. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 160$ MPa e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 84$ MPa.



Problema 11.57

12 Deflexão em vigas e eixos

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Muitas vezes é preciso limitar o grau de deflexão que uma viga ou eixo pode sofrer quando submetido a uma carga; portanto, neste capítulo discutiremos vários métodos para determinar a deflexão e a inclinação em pontos específicos de vigas e eixos. Os métodos analíticos incluem o método da integração, a utilização de funções de descontinuidade e o método da superposição. Além desses será apresentada uma técnica parcialmente gráfica denominada método dos momentos de áreas. No final do capítulo usaremos esses métodos para determinar as reações dos apoios em vigas ou eixos estaticamente indeterminados.

12.1 A linha elástica

Antes de determinar a inclinação ou o deslocamento em um ponto de uma viga (ou eixo), geralmente convém traçar um rascunho da forma defletida da viga quando carregada, de modo a 'visualizar' quaisquer resultados calculados e, com isso, fazer uma verificação parcial desses resultados. O diagrama da deflexão do eixo longitudinal que passa pelo centroide de cada área da seção transversal da viga é denominado *linha elástica*. Na maioria das vigas, o rascunho da linha elástica pode ser traçado sem muita dificuldade. Todavia, antes disso é necessário saber como a inclinação ou o deslocamento da viga são restringidos pelos vários tipos de apoio. Em geral, os apoios que resistem a uma *força*, como um pino, restringem o *deslocamento*, e os apoios que resistem a um *momento*, como uma parede fixa, restringem a *rotação* ou a *inclinação* bem como o deslocamento. Com isso em mente, mostramos na Figura 12.1 dois exemplos típicos de linhas elásticas para vigas ou eixos carregados, traçados em escala ampliada.

Se a linha elástica de uma viga parecer difícil de se determinar, sugerimos primeiramente traçar o diagrama de momento fletor da viga. Utilizando a convenção de sinal estabelecida na Seção 6.1, um momento interno positivo tende a curvar a viga com a concavidade para cima (Figura 12.2a). Da mesma maneira, um momento negativo tende a curvar a viga com a concavidade para baixo (Figura 12.2b). Portanto, se o diagrama de momento for *conhecido,* será fácil representar a linha elástica. Por exemplo, considere a viga na Figura 12.3a e seu diagrama de momento associado mostrado na Figura 12.3b. Devido aos apoios de rolete e pino, o deslocamento em B e D deve ser nulo. Dentro da região de momento negativo, AC (Figura 12.3b), a linha elástica deve ser côncava para baixo, e dentro da região de momento positivo, CD, ela deve ser côncava para cima. Por consequência, deve haver um *ponto de inflexão* em C, no qual a curva passa de côncava para cima a côncava para baixo, visto que o momento nesse ponto é nulo. Utilizando esses fatos, a Figura 12.3c mostra o rascunho da linha elástica da viga em escala ampliada. Devemos observar também que os deslocamentos Δ_A e Δ_E são especialmente críticos. No ponto E, a *inclinação* da curva elástica é *nula* e, ali, a *deflexão* da viga pode ser *máxima*. Porém, o que determina se Δ_E é realmente maior que Δ_A são os valores relativos de $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ e a localização do rolete em B.

Seguindo esses mesmos princípios, observe agora como foi construída a curva da linha elástica na Figura 12.4. Nesse caso, a viga está em balanço, engastada no apoio fixo em A e, portanto, a curva elástica deve ter deslocamento e inclinação nulos nesse ponto. Além disso, o maior deslocamento ocorrerá em D, onde a inclinação é nula, ou em C.

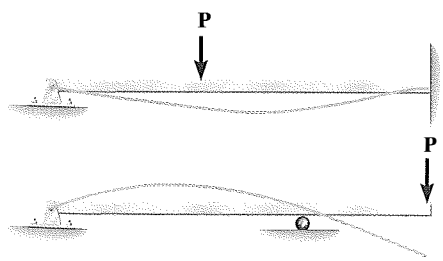


Figura 12.1

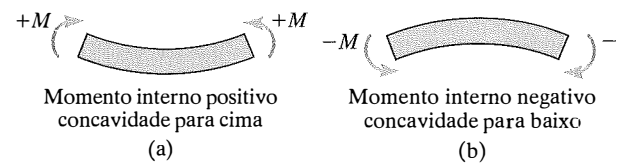


Figura 12.2

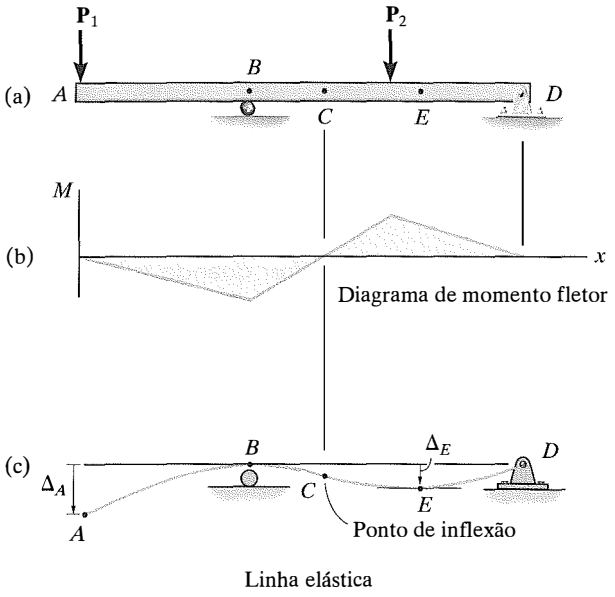


Figura 12.3

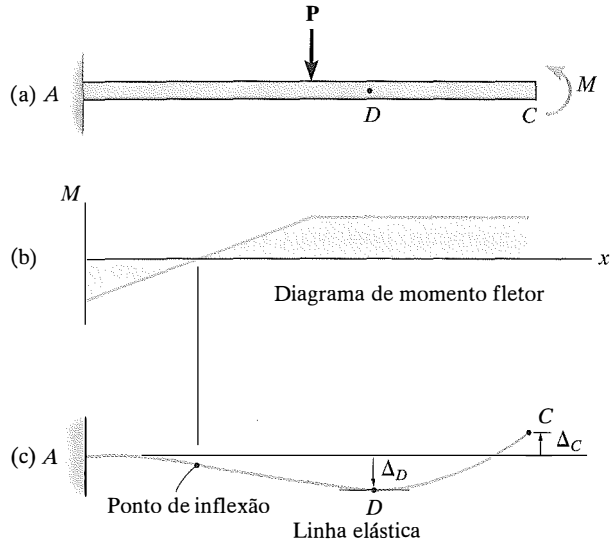


Figura 12.4

Relação momento–curvatura. Agora desenvolveremos uma importante relação entre o momento fletor interno na viga e o raio de curvatura ρ (rô) da curva da linha elástica em um ponto. A equação resultante será usada em todo o capítulo como base para estabelecer cada um dos métodos apresentados para determinar a inclinação e o deslocamento da linha elástica para uma viga (ou eixo).

A análise a seguir, que faremos nesta e na próxima seção, exigirá a utilização de três coordenadas. Como mostra a Figura 12.5a, o eixo x estende-se na direção positiva para a direita, ao longo do eixo longitudinal inicialmente reto da viga. Ele é usado para localizar o elemento diferencial, cuja largura não deformada é dx. O eixo v estende-se na direção *positiva para cima* em relação ao eixo x e mede o *deslocamento* do centroide na área da seção transversal do elemento. Com essas duas coordenadas, mais tarde definiremos a equação da curva da linha elástica, v, em função de x. Por fim, usa-se uma coordenada y 'localizada' para especificar a posição de uma fibra no elemento da viga. Essa coordenada é *positiva para cima* em relação ao eixo neutro, como mostra a Figura 12.5b. Lembre-se de que essa mesma convenção de sinal para x e y foi usada na dedução da fórmula da flexão.

Para deduzir a relação entre o momento interno e ρ, limitaremos a análise ao caso mais comum de uma viga inicialmente reta que é deformada elasticamente por cargas aplicadas de modo perpendicular ao eixo x da viga e que se encontra no plano de simetria x–v para a área da seção transversal da viga. Devido à carga, a deformação da viga é provocada pela força cortante interna, bem como pelo momento fletor. Se o comprimento da viga for muito maior do que sua altura, a maior deformação será causada por flexão e, portanto, concentraremos nossa atenção em seus efeitos. Deflexões causadas por cisalhamento serão discutidas mais adiante neste capítulo.

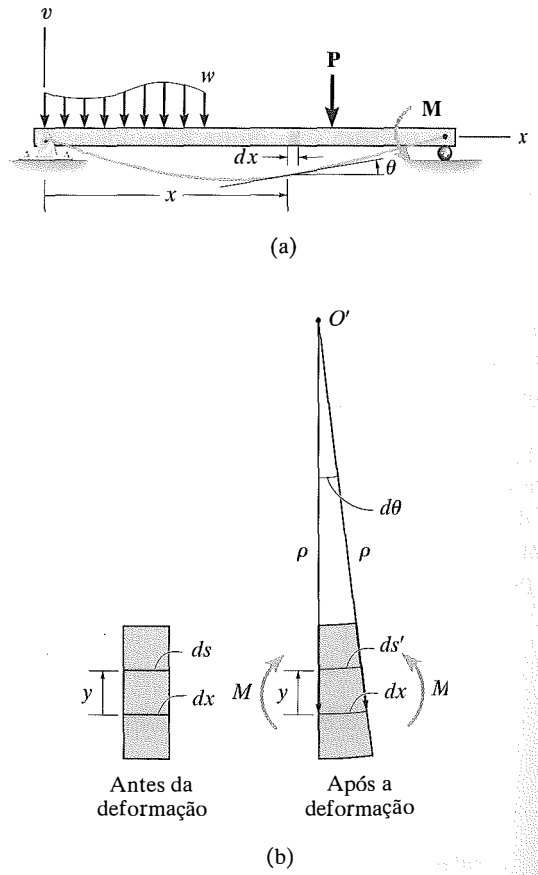


Figura 12.5

Quando o momento fletor interno M deforma o elemento da viga, o ângulo entre as seções transversais torna-se $d\theta$ (Figura 12.5b). O arco dx representa uma porção da linha elástica que intercepta o eixo neutro para cada seção transversal. O *raio de curvatura* para esse arco é definido como a distância ρ, que é medida do centro *de curvatura O'* até dx. Qualquer arco sobre o elemento, exceto dx, está sujeito a uma deformação normal. Por exemplo, a deformação no arco ds, localizado em uma posição y em relação ao eixo neutro, é $\epsilon = (ds' - ds)/ds$. Todavia, $ds = dx = \rho d\theta$ e $ds' = (\rho - y)d\theta$ e, portanto, $\epsilon = [(\rho - y)d\theta - \rho\, d\theta]/\rho\, d\theta$ ou

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y} \tag{12.1}$$

Se o material for homogêneo e comportar-se de uma maneira linear elástica, a lei de Hooke, $\epsilon = \sigma/E$, é aplicável. Além disso, a fórmula da flexão também se aplica, $\sigma = -My/I$. Combinando essas equações e substituindo na equação anterior, temos

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{12.2}$$

onde

ρ = raio de curvatura em um ponto específico sobre a curva da linha elástica ($1/\rho$ é denominado *curvatura*)
M = momento fletor interno na viga no ponto onde ρ deve ser determinado
E = módulo de elasticidade do material
I = momento de inércia calculado em torno do eixo neutro

O produto EI nessa equação é denominado *rigidez à flexão* e sempre representa uma quantidade positiva. Portanto, o sinal de ρ depende da direção do momento. Como mostra a Figura 12.6, quando M é *positivo*, ρ *prolonga-se acima* da viga, ou seja, na direção positiva de v; quando M é *negativo*, ρ prolonga-se *abaixo* da viga, na direção negativa de v.

A utilização da fórmula da flexão $\sigma = -My/I$ também nos permite expressar a curvatura em termos da tensão na viga, a saber,

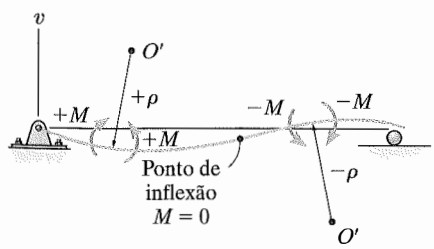


Figura 12.6

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sigma}{Ey} \tag{12.3}$$

Ambas as equações, 12.2 e 12.3, são válidas para raios de curvatura pequenos ou grandes. Todavia, o valor calculado de ρ é quase sempre uma *quantidade muito grande*. Por exemplo, considere uma viga de aço A-36 construída com um perfil W360 × 70 (Apêndice B), onde $E_{aço} = 200$ GPa e $\sigma_e = 350$ MPa. Quando o material nas fibras externas, $y = \pm 180$ mm, está a ponto de *escoar*, então, pela Equação 12.3, $\rho = 6.144$ m. Valores de ρ calculados em outros pontos ao longo da curva da linha elástica da viga podem ser ainda *maiores*, já que σ não pode ser maior do que σ_e nas fibras externas.

12.2 Inclinação e deslocamento por integração

A curva da linha elástica para uma viga pode ser expressa matematicamente como $\sigma = f(x)$. Para se obter essa equação, em primeiro lugar temos de representar a curvatura ($1/\rho$) em termos de v e x. A maioria dos livros de cálculo mostra que essa relação é

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}}$$

Substituindo na Equação 12.2, obtemos

$$\frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \tag{12.4}$$

Essa equação representa uma equação diferencial não linear de segunda ordem. Sua solução, denominada *elástica*, dá a forma exata da linha elástica considerando, é claro, que as deflexões na viga ocorram apenas por flexão. A utilização de matemática superior nos fornece soluções da *elástica* apenas para casos simples de geometria e carga de vigas.

Para facilitar a solução de um número maior de problemas de deflexão, a Equação 12.4 pode ser modificada. A maioria dos códigos e manuais de engenharia especifica *limitações* para as deflexões visando a questões de tolerância ou estética, e o resultado é que as deflexões elásticas para a maioria das vigas e eixos formam uma curva rasa. Por consequência, a inclinação da linha elástica determinada por dv/dx será *muito pequena* e o quadrado dessa inclinação será desprezível em comparação com a unidade.* Portanto, a curvatura, como definimos anteriormente, pode ser aproximada por

* Veja o Exemplo 12.1.

$1/\rho = d^2v/dx^2$. Usando essa simplificação, agora a Equação 12.4 pode ser expressa como

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{12.5}$$

Também é possível escrever essa equação de duas formas alternativas. Se diferenciarmos cada lado em relação a x e substituirmos $V = dM/dx$ (Equação 6.2), obteremos

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = V(x) \tag{12.6}$$

Se diferenciarmos mais uma vez, usando $-w = dV/dx$ (Equação 6.1), obteremos

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = -w(x) \tag{12.7}$$

Na maioria dos problemas, a rigidez à flexão será constante ao longo do comprimento da viga. Considerando que seja esse o caso, os resultados que obtivemos serão reordenados no seguinte conjunto de equações:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -w(x) \tag{12.8}$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \tag{12.9}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \tag{12.10}$$

A solução de qualquer dessas equações requer integrações sucessivas para obter a deflexão v da linha elástica. Para cada integração é necessário introduzir uma 'constante de integração' e então resolver para todas as constantes de modo a obter uma solução única para um problema particular. Por exemplo, se a carga distribuída for expressa em função de x e a Equação 12.8 for usada, teremos de avaliar quatro constantes de integração; contudo, se o momento fletor interno M for determinado e a Equação 12.10 for usada, teremos de determinar somente duas constantes de integração. A escolha da equação com a qual começar depende do problema. Entretanto, de modo geral é mais fácil determinar o momento interno M em função de x, integrar duas vezes e avaliar somente duas constantes de integração.

Lembre-se de que na Seção 6.1 dissemos que se a carga sobre uma viga for descontínua, isto é, consistir em uma série de várias cargas distribuídas e concentradas, teremos de escrever várias funções para o momento interno, cada uma delas válida dentro da região entre

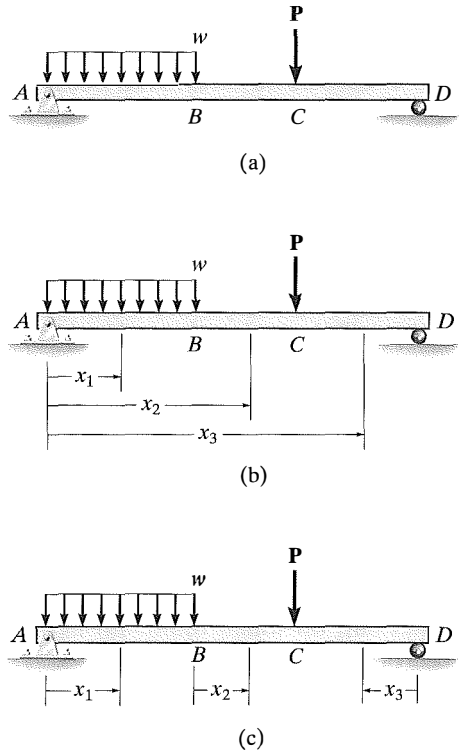
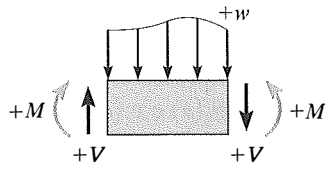


Figura 12.7

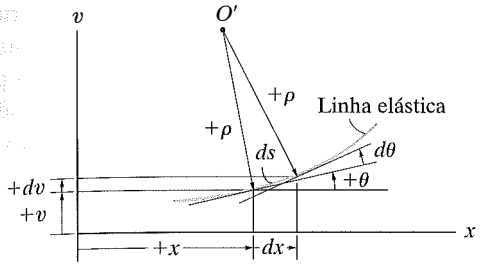
as descontinuidades. Além disso, por questão de conveniência ao escrever cada expressão de momento, a *origem* de cada coordenada x pode ser *selecionada arbitrariamente*. Por exemplo, considere a viga mostrada na Figura 12.7a. O momento interno nas regiões AB, BC e CD pode ser expresso em termos das coordenadas selecionadas x_1, x_2 e x_3, como mostra a Figura 12.7b ou 12.7c ou, na verdade, de qualquer maneira que resulte $M = f(x)$ na forma mais simples possível. Uma vez integradas essas funções com a utilização da Equação 12.10 e das constantes de integração determinadas, as funções darão a inclinação e a deflexão (linha elástica) para cada região da viga para a qual são válidas.

Convenção de sinais e coordenadas. Quando aplicarmos as equações 12.8 a 12.10, é importante usar os sinais corretos para M, V ou w, como estabelecido pela convenção de sinais que foi usada na dedução dessas equações. A título de revisão, esses termos são mostrados em suas *direções positivas* na Figura 12.8a. Além do mais, lembre-se de que a *deflexão positiva*, v, é *para cima*, e o resultado é que o *ângulo de inclinação positiva* θ será medido na direção *anti-horária* em relação ao eixo x, quando este for *positivo para a direita*. A razão disso é mostrada na Figura 12.8b. Nesse caso, os aumentos positivos dx e dv em x e v provocam um aumento em θ no sentido anti-horário. Por outro lado, se x *positivo* for orientado para a *esquerda*, então θ será *positivo em sentido horário* (Figura 12.8c).



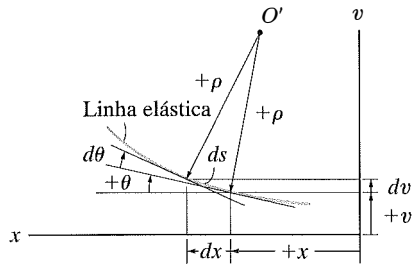
Convenção de sinal positivo

(a)



Convenção de sinal positivo

(b)

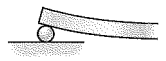
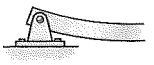
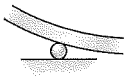
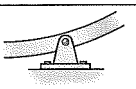
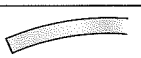
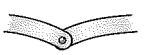


Convenção de sinal positivo

(c)

Figura 12.8

TABELA 12.1

1	
	$\Delta = 0$ $M = 0$ Rolete
2	
	$\Delta = 0$ $M = 0$ Pino
3	
	$\Delta = 0$ Rolete
4	
	$\Delta = 0$ Pino
5	
	$\theta = 0$ $\Delta = 0$ Extremidade fixa
6	
	$V = 0$ $M = 0$ Extremidade livre
7	
	$M = 0$ Pino ou articulação interna

Devemos salientar que, considerando dv/dx muito pequeno, o comprimento horizontal original do eixo da viga e o arco de sua linha elástica serão aproximadamente os mesmos. Em outras palavras, ds nas figuras 12.8b e 12.8c será aproximadamente igual a dx, visto que $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dv)^2} = \sqrt{1 + (dv/dx)^2}\, dx \approx dx$. O resultado é que consideramos que pontos sobre a linha elástica são *deslocados no sentido vertical* e não horizontal. Além disso, visto que o *ângulo de inclinação* θ será muito *pequeno*, seu valor em radianos pode ser determinado *diretamente* por $\theta \approx \text{tg}\,\theta = dv/dx$.

Condições de contorno e continuidade. As constantes de integração são determinadas pela avaliação das funções para cisalhamento, momento, inclinação ou deslocamento em um determinado ponto na viga no qual o valor da função é conhecido. Esses valores são denominados ***condições de contorno***. A Tabela 12.1 apresenta várias condições de contorno possíveis utilizadas frequentemente para resolver problemas de deflexão em uma viga (ou eixo). Por exemplo, se a viga estiver apoiada sobre um rolete ou um pino (1, 2, 3, 4), o deslocamento será nulo nesses pontos. Além disso, se esses apoios estiverem localizados nas *extremidades da viga* (1, 2), o momento fletor interno na viga também deve ser nulo. No caso do apoio fixo (5), a inclinação e o deslocamento são ambos nulos, ao passo que a viga de extremidades livres (6) tem momento e cisalhamento nulos. Por fim, se dois segmentos de uma viga estiverem ligados por um pino ou articulação 'interna' (7), o momento deve ser nulo nesse acoplamento.

Se não for possível usar uma única coordenada x para expressar a equação para a inclinação ou para a linha elástica de uma viga, deve-se usar as ***condições de continuidade*** para calcular algumas das constantes de integração. Por exemplo, considere a viga na Figura 12.9a. Aqui ambas as coordenadas x escolhidas têm origem em A. Cada uma delas é válida somente dentro das regiões $0 \leq x_1 \leq a$ e $a \leq x_2 \leq (a + b)$. Uma vez obtidas as funções para a inclinação e a deflexão, elas

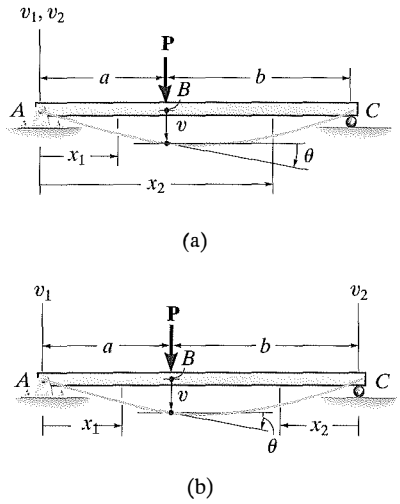


Figura 12.9

devem dar os *mesmos valores* para a inclinação e a deflexão no ponto *B*, de modo que a linha elástica seja fisicamente *contínua*. Expresso em termos matemáticos, isso exige que $\theta_1(a) = \theta_2(a)$ e $v_1(a) = v_2(a)$. Então essas equações podem ser usadas para avaliar duas constantes de integração. Por outro lado, se a curva elástica for expressa em termos das coordenadas $0 \leq x_1 \leq a$ e $0 \leq x_2 \leq b$, como mostra a Figura 12.9b, a continuidade da inclinação e da deflexão em *B* exige $\theta_1(a) = -\theta_2(b)$ e $v_1(a) = v_2(b)$. Nesse caso particular, é necessário um sinal *negativo* para podermos combinar as inclinações em *B* visto que x_1 é positivo para a direita ao passo que x_2 é positivo para a esquerda. Por consequência, θ_1 é positivo em sentido anti-horário e θ_2 é positivo em sentido horário. Veja as figuras 12.8b e 12.8c.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um método para determinar a inclinação e a deflexão de uma viga (ou eixo) utilizando o método da integração.

Linha elástica

- Desenhe uma vista em escala ampliada da linha elástica da viga. Lembre-se de que inclinação e deslocamento nulos ocorrem em todos os apoios fixos e que o deslocamento nulo ocorre em todos os apoios de pino e rolete.
- Estabeleça os eixos coordenados *x* e *v*. O eixo *x* deve ser paralelo à viga sem deflexão e pode ter uma origem em qualquer ponto ao longo da viga, com uma direção positiva para a direita ou para a esquerda.
- Se várias cargas descontínuas estiverem presentes, estabeleça coordenadas *x* válidas para cada região da viga entre as descontinuidades. Escolha essas coordenadas de modo que elas simplifiquem o trabalho algébrico subsequente.
- Em todos os casos, o eixo *v* positivo associado deve ser orientado para cima.

Função da carga ou do momento fletor

- Para cada região na qual haja uma coordenada *x*, expresse a carga *w* ou o momento interno *M* em função de *x*. Em particular, *sempre* considere que *M* age na *direção positiva* quando aplicar a equação de equilíbrio de momento para determinar $M = f(x)$.

Inclinação e curva da linha elástica

- Desde que *EI* seja constante, aplique a equação de carga $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$, que requer quatro integrações para obter $v = v(x)$, ou a equação de momento $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$, que requer somente duas integrações. É importante incluir uma constante de integração para cada integração.
- As constantes são calculadas utilizando as condições de contorno para os apoios (Tabela 12.1) e as condições de continuidade aplicáveis à inclinação e ao deslocamento em pontos onde duas funções se encontram. Uma vez calculadas as constantes e substituídas nas equações da inclinação e da deflexão, estas podem ser determinadas em *pontos específicos* sobre a linha elástica.
- Os valores numéricos obtidos podem ser comprovados graficamente comparando-os com o rascunho da linha elástica. Entenda que valores *positivos* para a *inclinação* estarão *em sentido anti-horário*, se o eixo *x* for *positivo* para a direita, e *em sentido horário*, se o eixo *x* for *positivo* para a *esquerda*. Em qualquer desses casos, o *deslocamento positivo é para cima*.

EXEMPLO 12.1

A viga em balanço mostrada na Figura 12.10a está sujeita a uma carga vertical **P** em sua extremidade. Determine a equação da linha elástica. *EI* é constante.

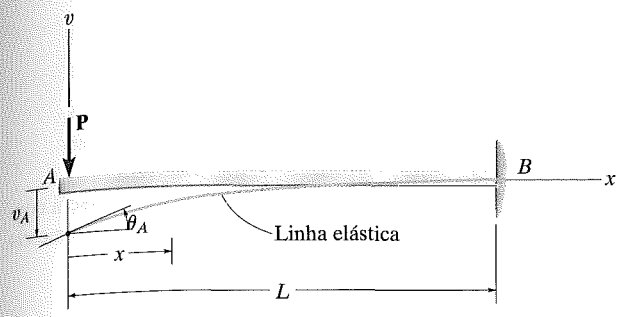
SOLUÇÃO I

Linha elástica. A carga tende a provocar deflexão da viga como mostra a Figura 12.10a. Por inspeção, o momento fletor interno pode ser representado em toda a viga utilizando uma única coordenada *x*.

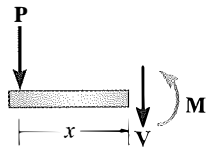
Função do momento fletor. Pelo diagrama de corpo livre, com **M** agindo na *direção positiva* (Figura 12.10b), temos

$$M = -Px$$

Inclinação e linha elástica. Aplicando a Equação 12.10 e integrando duas vezes, obtemos



(a)



(b)

Figura 12.10

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px \tag{1}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \tag{2}$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

Utilizando as condições de contorno $dv/dx = 0$ em $x = L$ e $v = 0$ em $x = L$, as equações 2 e 3 tornam-se

$$0 = -\frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1L + C_2$$

Logo, $C_1 = PL^2/2$ e $C_2 = -PL^3/3$. Substituindo esses resultados nas equações 2 e 3 onde $\theta = dv/dx$, obtemos

$$\theta = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2)$$

$$v = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \qquad \textit{Resposta}$$

A inclinação e o deslocamento máximos ocorrem em $A(x = 0)$, para o qual

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI} \tag{4}$$

$$v_A = -\frac{PL^3}{3EI} \tag{5}$$

O resultado *positivo* para θ_A indica rotação em *sentido anti-horário* e o *resultado negativo* para v_A indica que v_A é *para baixo*, o que está de acordo com os resultados esboçados na Figura 12.10a.

Para ter uma ideia do *valor* real da inclinação e do deslocamento na extremidade A, considere que a viga na Figura 12.10a tenha 5 m comprimento, suporta uma carga $P = 30$ kN e é feita de aço A-36 com $E_{aço} = 200$ GPa. Utilizando os métodos de Seção 11.3, se essa viga fosse projetada sem um fator de segurança considerando-se que a tensão normal admissível é igual à tensão de escoamento $\sigma_{adm} = 250$ MPa, verificaríamos que um perfil W310 × 39 seria adequado [$I = 84{,}4(10^6)$ mm^4]. Pelas equações 4 e 5 obtemos

$$\theta_A = \frac{30\text{ kN}(10^3\text{ N/kN}) \times [5\text{ m}(10^3\text{ mm/m})^2]^2}{2[200(10^3)\text{ N/mm}^2](84{,}8(10^6)\text{ mm}^4)} = 0{,}0221\text{ rad}$$

$$v_A = -\frac{30\text{ kN}(10^3\text{ N/kN}) \times [5\text{ m}(10^3\text{ mm/m})]^3}{3[200(10^3)\text{ N/mm}^2](84{,}8(10^6)\text{ mm}^4)} = 73{,}7\text{ mm}$$

Visto que $\theta_A^2 (dv/dx)^2 = 0{,}000488 \ll 1$, isso justifica a utilização da Equação 12.10, em vez da aplicação da Equação 12.4, mais exata, para calcular a deflexão das vigas. Além disso, visto que essa aplicação numérica é para uma *viga em balanço*, obtivemos *valores maiores* para θ e v do que teríamos obtido se a viga fosse sustentada por pinos, roletes ou outros apoios fixos.

SOLUÇÃO II

Esse problema também pode ser resolvido utilizando-se a Equação 12.8, $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$. Aqui $w(x) = 0$ para $0 \le x \le L$ (Figura 12.10a), de modo que, após integrarmos uma vez, obtemos a forma da Equação 12.9, isto é,

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = C_1' = V$$

A constante de cisalhamento C'_1 pode ser calculada em $x = 0$, visto que $V_A = -P$ (negativa de acordo com a convenção de sinal para vigas) (Figura 12.8a). Desse modo, $C'_1 = -P$. Integrando novamente obtemos a forma da Equação 12.10, isto é,

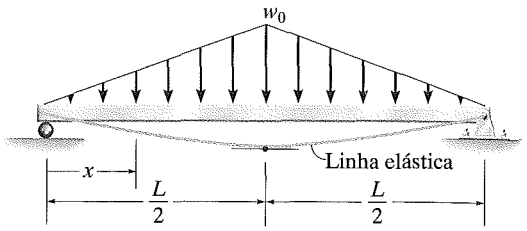
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -P$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px + C_2' = M$$

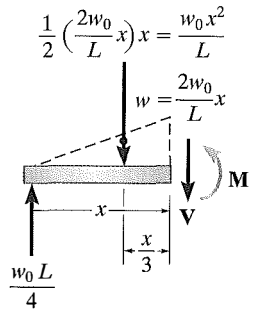
Aqui $M = 0$ em $x = 0$, portanto $C'_2 = 0$ e obtemos como resultado a Equação 1. A solução prossegue como antes.

EXEMPLO 12.2

A viga simplesmente apoiada mostrada na Figura 12.11a suporta a carga triangular distribuída. Determine sua deflexão máxima. EI é constante.



(a)



(b)

Figura 12.11

SOLUÇÃO I

Linha elástica. Devido à simetria, basta determinar uma coordenada x para a solução, neste caso, $0 \leq x \leq L/2$. A viga sofre deflexão como mostra a Figura 12.11a. Observe que a deflexão máxima ocorre no centro, visto que a inclinação é igual a zero nesse ponto.

Função do momento fletor. A carga distribuída age para baixo e, portanto, é positiva de acordo com nossa convenção de sinal. Um diagrama de corpo livre do segmento da esquerda é mostrado na Figura 12.11b. A equação para a carga distribuída é

$$w = \frac{2w_0}{L}x \tag{1}$$

Por consequência,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad M + \frac{w_0x^2}{L}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{w_0L}{4}(x) = 0$$

$$M = -\frac{w_0x^3}{3L} + \frac{w_0L}{4}x$$

Inclinação e linha elástica. Utilizando a Equação 12.10 e integrando duas vezes, temos

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0L}{4}x \tag{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 + C_1x + C_2$$

As constantes de integração são obtidas aplicando-se a condição de contorno $v = 0$ em $x = 0$ e a condição de simetria $dv/dx = 0$ em $x = L/2$. Isso resulta em

$$C_1 = -\frac{5w_0L^3}{192} \qquad C_2 = 0$$

Por consequência,

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0L}{8}x^2 - \frac{5w_0L^3}{192}$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0L}{24}x^3 - \frac{5w_0L^3}{192}x$$

Determinando a deflexão máxima em $x = L/2$, temos

$$v_{\text{máx}} = -\frac{w_0L^4}{120EI} \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

Começando com a carga distribuída (Equação 1), e aplicando a Equação 12.8, temos

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{2w_0}{L}x$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L}x^2 + C_1'$$

Como $V = +w_0L/4$ em $x = 0$, então $C'_1 = w_0L/4$. Integrando novamente, temos

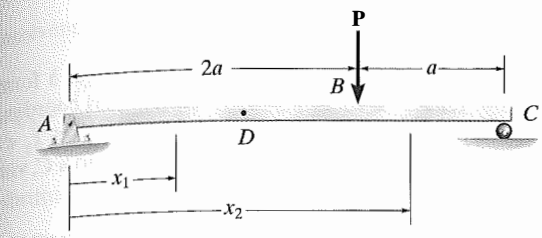
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V = -\frac{w_0}{L}x^2 + \frac{w_0L}{4}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0L}{4}x + C_2'$$

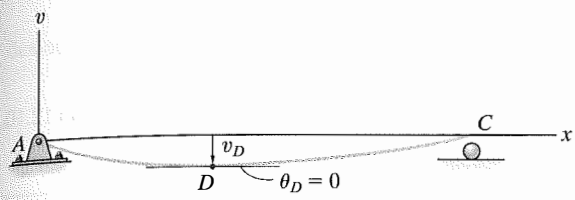
Aqui $M = 0$ em $x = 0$, portanto $C'_2 = 0$. Isso dá a Equação 2. Agora a solução prossegue como antes.

EXEMPLO 12.3

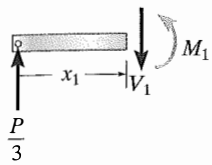
A viga simplesmente apoiada mostrada na Figura 12.12a é submetida à força concentrada **P**. Determine a deflexão máxima da viga. EI é constante.

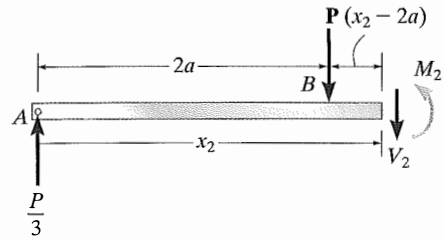


(a)



(b)





(c)

Figura 12.12

SOLUÇÃO

Linha elástica. A viga sofre deflexão como mostra a Figura 12.12b. Temos de usar duas coordenadas, visto que o momento torna-se descontínuo em P. Aqui consideraremos x_1 e x_2, que têm a *mesma origem* em A, de modo que $0 \leq x_1 < 2a$ e $2a < x_2 \leq 3a$.

Função do momento fletor. Pelos diagramas de corpo livre mostrados na Figura 12.12c,

$$M_1 = \frac{P}{3}x_1$$

$$M_2 = \frac{P}{3}x_2 - P(x_2 - 2a) = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

Inclinação e linha elástica. Aplicando a Equação 12.10 para M_1 e integrando duas vezes obtemos

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = \frac{P}{3}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6}x_1^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{P}{18}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \quad (2)$$

Da mesma maneira para M_2,

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = \frac{2P}{3}(3a - x_2)$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2P}{3}\left(3ax_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + C_3 \quad (3)$$

$$EIv_2 = \frac{2P}{3}\left(\frac{3}{2}ax_2^2 - \frac{x_2^3}{6}\right) + C_3x_2 + C_4 \quad (4)$$

As quatro constantes de integração são calculadas utilizando-se *duas* condições de contorno, a saber, $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ e $x_2 = 3a$, $v_2 = 0$. Além disso, devemos aplicar *duas* condições de continuidade em B, isto é, $dv_1/dx_1 = dv_2/dx_2$ em $x_1 = x_2 = 2a$ e $v_1 = v_2$ em $x_1 = x_2 = 2a$. A substituição como especificada resulta nas quatro equações a seguir:

$v_1 = 0$ em $x_1 = 0; 0 = 0 + 0 + C_2$

$$v_2 = 0 \text{ em } x_2 = 3a; \quad 0 = \frac{2P}{3}\left[\frac{3}{2}a(3a)^2 - \frac{(3a)^3}{6}\right] + C_3(3a) + C$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = \frac{dv_2(2a)}{dx_2}; \quad \frac{P}{6}(2a)^2 + C_1 = \frac{2P}{3}\left[3a(2a) - \frac{(2a)^2}{2}\right] + C^3$$

$$v_1(2a) = v_2(2a);$$

$$\frac{P}{18}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2 = \frac{2P}{3}\left[\frac{3}{2}a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{6}\right] + C_3(2a) + C_4$$

Resolvendo essas equações obtemos

$$C_1 = -\frac{4}{9}Pa^2 \qquad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{22}{9}Pa^2 \qquad C_4 = \frac{4}{3}Pa^3$$

Assim, as equações 1 a 4 tornam-se

$$\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{6EI}x_1^2 - \frac{4Pa^2}{9EI} \tag{5}$$

$$v_1 = \frac{P}{18EI}x_1^3 - \frac{4Pa^2}{9EI}x_1 \tag{6}$$

$$\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{2Pa}{EI}x_2 - \frac{P}{3EI}x_2^2 - \frac{22Pa^2}{9EI} \tag{7}$$

$$v_2 = \frac{Pa}{EI}x_2^2 - \frac{P}{9EI}x_2^3 - \frac{22Pa^2}{9EI}x_2 + \frac{4Pa^3}{3EI} \tag{8}$$

Por inspeção da linha elástica (Figura 12.12b), a deflexão máxima ocorre em D, em algum lugar dentro da região AB. Neste ponto, a inclinação deve ser nula. Pela Equação 5,

$$\frac{1}{6}x_1^2 - \frac{4}{9}a^2 = 0$$
$$x_1 = 1{,}633a$$

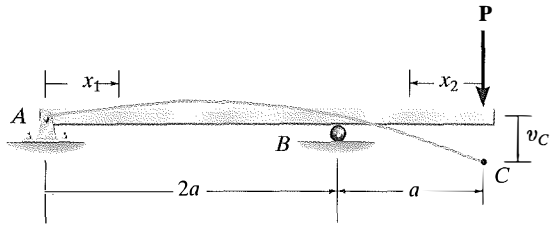
Substituindo na Equação 6,

$$v_{máx} = -0{,}484\frac{Pa^3}{EI} \qquad \textit{Resposta}$$

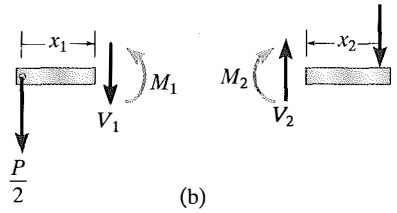
O sinal negativo indica que a deflexão é para baixo.

EXEMPLO 12.4

A viga na Figura 12.13a está sujeita à carga **P** em sua extremidade. Determine o deslocamento em C. EI é constante.



(a)



(b)

Figura 12.13

SOLUÇÃO

Linha elástica. A viga sofre deflexão até chegar à forma mostrada na Figura 12.13a. Devido à carga, duas coordenadas x serão consideradas, a saber, $0 \le x_1 < 2a$ e $0 \le x_2 < a$, onde x_2 está orientada para a esquerda em relação a C, visto que o momento interno é fácil de formular.

Funções do momento fletor. Utilizando os diagramas de corpo livre mostrados na Figura 12.13b, temos

$$M_1 = -\frac{P}{2}x_1 \qquad M_2 = -Px_2$$

Inclinação e linha elástica. Aplicando a Equação 12.10,

Para $0 \le x_1 < 2a$: $EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -\frac{P}{2}x_1$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{P}{4}x_1^2 + C_1 \tag{1}$$

$$EIv_1 = -\frac{P}{12}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \tag{2}$$

Para $0 \le x_2 < a$: $EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = -Px_2$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{P}{2}x_2^2 + C_3 \tag{3}$$

$$EIv_2 = -\frac{P}{6}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \tag{4}$$

As *quatro* constantes de integração são determinadas utilizando-se *três* condições de contorno, a saber, $v_1 = 0$ em $x_1 = 0$, $v_1 = 0$ em $x_1 = 2a$ e $v_2 = 0$ em $x_2 = a$, e *uma* equação de continuidade. Aqui a continuidade da inclinação no rolete requer $dv_1/dx_1 = -dv_2/dx_2$ em $x_1 = 2a$ e $x_2 = a$. Por que há um sinal negativo nessa equação? (Observe que a continuidade do deslocamento em B foi considerada indiretamente nas condições de contorno, visto que $v_1 = v_2 = 0$ em $x_1 = 2a$ e $x_2 = a$). Aplicando essas quatro condições, obtemos

$v_1 = 0$ em $x_1 = 0$; $\quad 0 = 0 + 0 + C_2$

$v_1 = 0$ em $x_1 = 2a$; $\quad 0 = -\frac{P}{12}(2a)^3 + C_1(2a) + C_2$

$v_2 = 0$ em $x_2 = a$; $\quad 0 = -\frac{P}{6}a^3 + C_3a + C_4$

$\frac{dv_1(2a)}{dx_1} = -\frac{dv_2(a)}{dx_2}$; $\quad -\frac{P}{4}(2a)^2 + C_1 = -\left[-\frac{P}{2}(a)^2 + C_3\right]$

Resolvendo,

$$C_1 = \frac{Pa^2}{3} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{7}{6}Pa^2 \qquad C_4 = -Pa^3$$

Substituindo C_3 e C_4 na Equação 4, temos

$$v_2 = -\frac{P}{6EI}x_2^3 + \frac{7Pa^2}{6EI}x_2 - \frac{Pa^3}{EI}$$

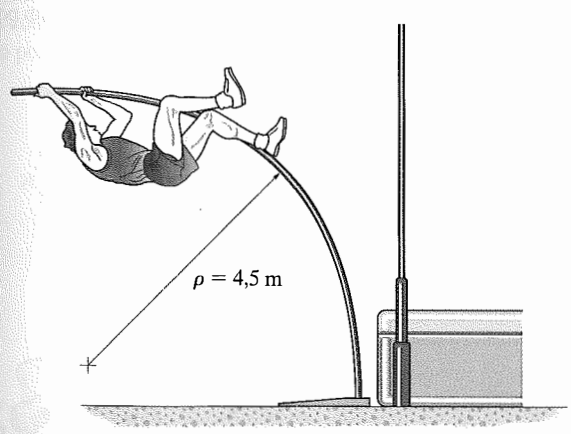
O deslocamento em C é determinado fazendo $x_2 = 0$; assim

$$v_C = -\frac{Pa^3}{EI} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

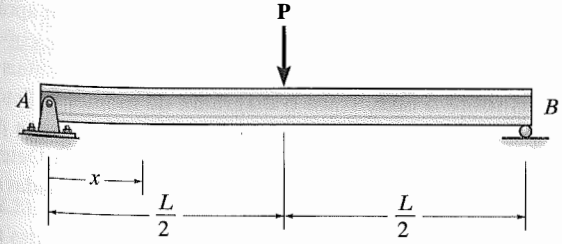
12.1. Uma tira de aço L2 com 3 mm de espessura e 50 mm de largura é curvada até formar um arco circular de 15 m de raio. Determine a tensão de flexão máxima na tira.

12.2. A figura de um homem executando um salto em altura com vara permitiu estimar por medição que o raio de curvatura mínimo da vara é 4,5 m. Se a vara tiver 40 mm de diâmetro e for feita de plástico reforçado com fibra de vidro, determine a tensão de flexão máxima na vara. $E_v = 131$ GPa,



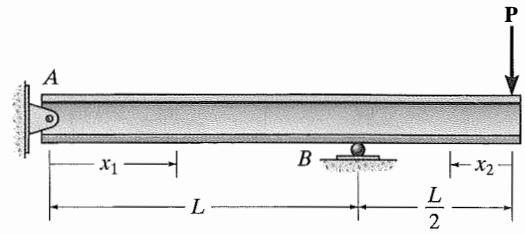
Problema 12.2

12.3. Determine a equação da linha elástica para a viga utilizando a coordenada x válida para $0 \leq x < L/2$. Especifique a inclinação em A e a deflexão máxima da viga. EI é constante.



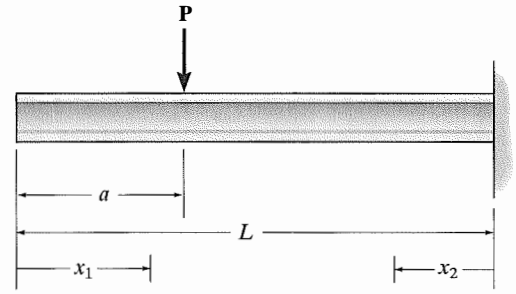
Problema 12.3

***12.4.** Determine as equações da linha elástica para a viga utilizando as coordenadas x_1 e x_2. Especifique a deflexão máxima da viga. EI é constante.



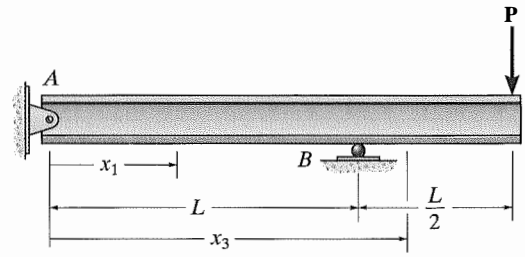
Problema 12.4

12.5. Determine as equações da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_2. EI é constante.



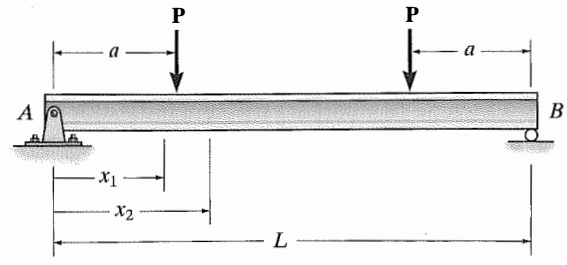
Problema 12.5

12.6. Determine as equações da linha elástica para a viga utilizando as coordenadas x_1 e x_3. Especifique a deflexão máxima da viga. EI é constante.



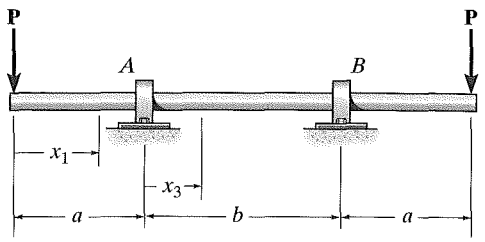
Problema 12.6

12.7. Determine as equações da linha elástica para a viga utilizando as coordenadas x_1 e x_2. Especifique a inclinação em A e o deslocamento no centro do eixo. EI é constante.



Problema 12.7

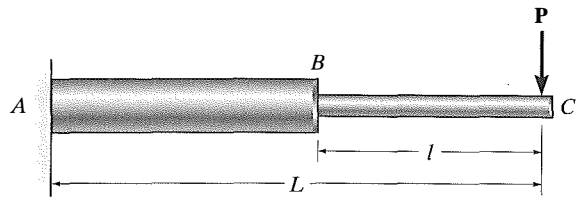
*12.8. Determine as equações da linha elástica para o eixo utilizando as coordenadas x_1 e x_3. Especifique a inclinação em A e a deflexão no centro do eixo. EI é constante.



Problema 12.8

12.9. A viga é composta por duas hastes e está sujeita à carga concentrada **P**. Determine a deflexão máxima da viga, se os momentos de inércia das hastes forem I_{AB} e I_{BC} e o módulo de elasticidade for E.

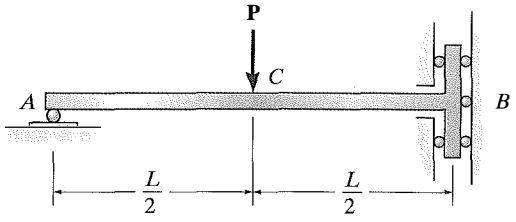
12.10. A viga é composta por duas hastes e está sujeita à carga concentrada **P**. Determine a inclinação em C. Os momentos de inércia das hastes são I_{AB} e I_{BC} e o módulo de elasticidade é E.



Problemas 12.9/10

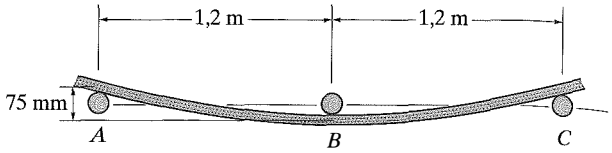
12.11. A barra é suportada por um rolete restritivo em B, que permite deslocamento vertical, mas resiste a carga axial e a momento. Se a barra for submetida à carga mostrada, determine a inclinação em A e a deflexão em C. EI é constante.

*12.12. Determine a deflexão em B na barra do Problema 12.11.



Problemas 12.11/12

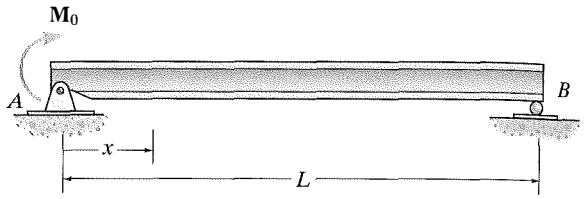
12.13. A tábua de cerca está entrelaçada entre os três mourões lisos fixos. Se os mourões estiverem instalados ao longo da mesma linha reta, determine a tensão de flexão máxima na tábua. A largura e a espessura da tábua são 150 mm e 12 mm, respectivamente. $E = 12$ GPa. Considere que o deslocamento de cada extremidade da tábua em relação a seu centro seja 75 mm.



Problema 12.13

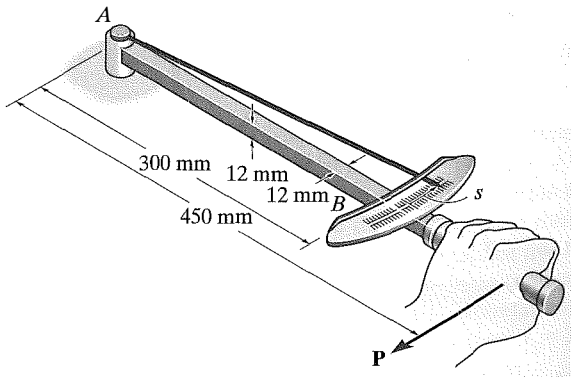
12.14. Determine a equação da linha elástica para a viga utilizando a coordenada x. Especifique a inclinação em A e a deflexão máxima. EI é constante.

12.15. Determine a deflexão no centro da viga e a inclinação em B. EI é constante.



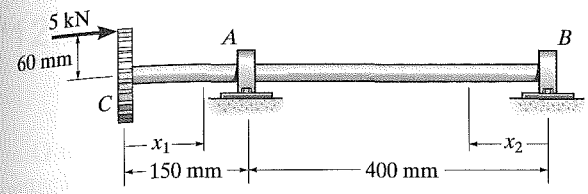
Problemas 12.14/15

12.16. Uma chave de torque é usada para apertar a porca de um parafuso. Se o mostrador indicar que foi aplicado um torque de 90 kN·m quando o parafuso estiver totalmente apertado, determine a força P que age no cabo da ferramenta e a distância s até onde a agulha se desloca ao longo da escala. Considere que somente a porção AB da viga sofre distorção. A seção transversal é quadrada e mede 12 mm por 12 mm. $E = 200$ GPa.



Problema 12.16

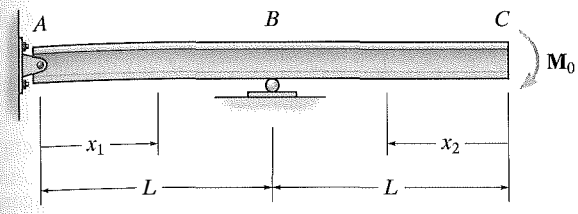
12.17. O eixo é suportado em A por um mancal de apoio que exerce somente reações verticais sobre o eixo e em B por um mancal de encosto que exerce reações horizontais e verticais sobre o eixo. Trace o diagrama de momento fletor para o eixo e a seguir, por esse diagrama, trace a curva de deflexão ou linha elástica para a linha central do eixo. Determine as equações da linha elástica usando as coordenadas x_1 e x_2. EI é constante.



Problema 12.17

12.18. Determine as equações da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_2 e especifique a deflexão e a inclinação em C. EI é constante.

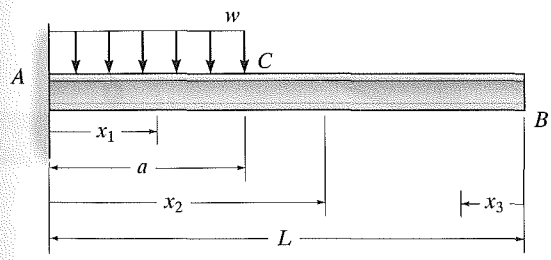
12.19. Determine as equações da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_2 e especifique a inclinação em A. EI é constante.



Problemas 12.18/19

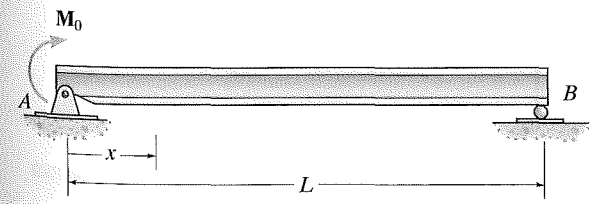
***12.20.** Determine as equações da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_2 e especifique a inclinação e a deflexão em B. EI é constante.

12.21. Determine as equações da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_3 e especifique a inclinação e a deflexão no ponto B. EI é constante.



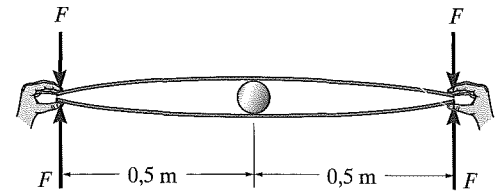
Problemas 12.20/21

12.22. Determine a inclinação máxima e a deflexão máxima da viga simplesmente apoiada submetida ao momento $\mathbf{M}_0$. EI é constante.



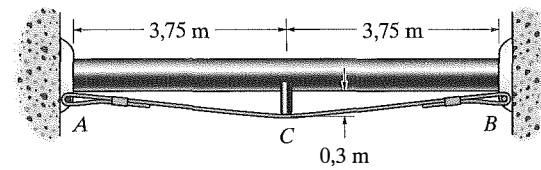
Problema 12.22

12.23. As partes centrais das duas fitas métricas de madeira estão separadas por um cilindro rígido liso de 50 mm de diâmetro. Determine a força F que deve ser aplicada a cada extremidade de modo que suas extremidades apenas se toquem. Cada fita tem 20 mm de largura e 5 mm de espessura. $E_m = 11$ GPa.



Problema 12.23

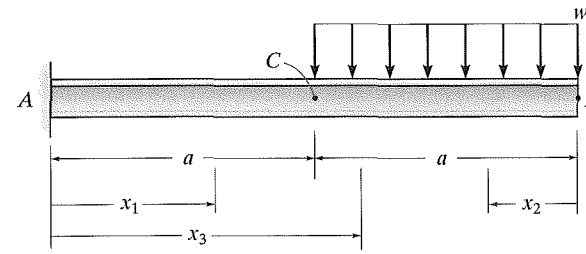
***12.24.** Podemos considerar que o tubo está apoiado em ambas extremidades por roletes e no centro por uma haste rígida C. A haste descansa sobre um cabo que está ligado aos apoios. Determine a força que deve ser desenvolvida no cabo, se a haste impedir que o tubo ceda ou sofra deflexão no centro. O tubo e o fluido dentro dele têm um peso combinado de 2 kN/m. EI é constante.



Problema 12.24

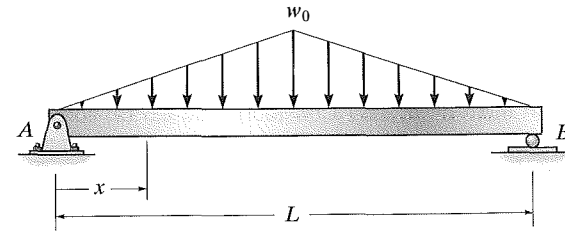
12.25. Determine as equações da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_2 e especifique a inclinação em C e o deslocamento em B. EI é constante.

12.26. Determine as equações da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_3 e especifique a inclinação em B e a deflexão em C. EI é constante.



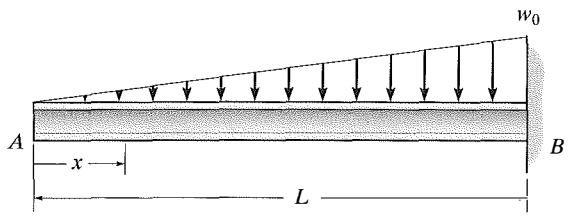
Problemas 12.25/26

12.27. Determine a linha elástica para a viga simplesmente apoiada utilizando a coordenada x onde $0 \leq x \leq L/2$. Determine também a inclinação em A e a deflexão máxima da viga. EI é constante.



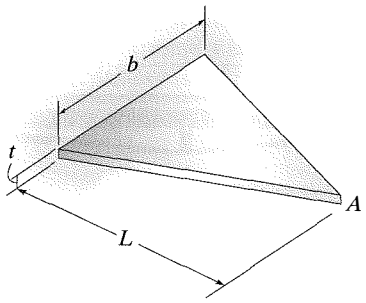
Problema 12.27

*12.28. Determine a curva da linha elástica para a viga em balanço utilizando a coordenada x. Determine também a inclinação máxima e a deflexão máxima. EI é constante.



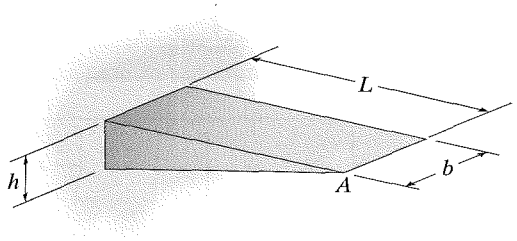
Problema 12.28

12.29. A viga é feita de um material com peso específico γ. Determine o deslocamento e a inclinação em sua extremidade A devido a seu peso. O módulo de elasticidade para o material é E.



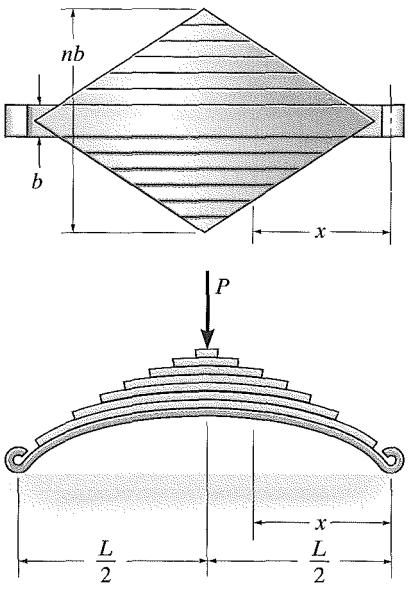
Problema 12.29

12.30. A viga é feita de um material com peso específico γ. Determine o deslocamento e a inclinação em sua extremidade A devido a seu peso. O módulo de elasticidade para o material é E.



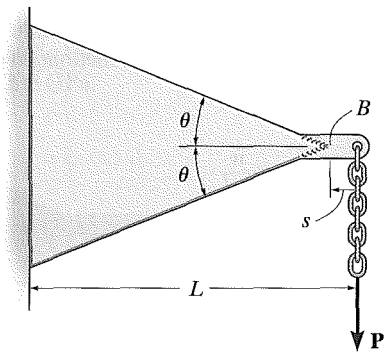
Problema 12.30

12.31. O feixe de molas foi projetado de modo a estar sujeito à mesma tensão de flexão máxima em todo seu comprimento. Se a espessura das chapas de cada lâmina for t e se uma puder deslizar livremente entre a outra, mostre que o feixe de molas deve ter a forma de um arco de círculo para que a mola inteira fique achatada quando for aplicada uma carga **P** suficientemente grande. Qual é a tensão normal máxima no feixe de molas? Considere que ele foi construído com n tiras cortadas de uma chapa em forma de losango com espessura t e largura b. O módulo de elasticidade para o material é E. *Dica*: Mostre que o raio de curvatura do feixe de molas é constante.



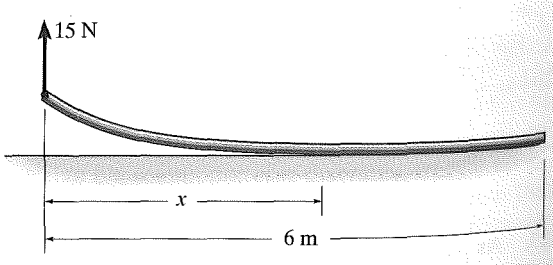
Problema 12.31

*12.32. A viga cônica mostrada na figura tem largura constante b. Se ela suportar uma carga **P** em sua extremidade, determine a deflexão em B. A carga **P** é aplicada a uma curta distância s da extremidade B, onde $s \ll L$. EI é constante.



Problema 12.32

12.33. Uma haste delgada e flexível de 6 m de comprimento e 10 N/m de peso repousa sobre uma superfície lisa. Se uma força de 15 N for aplicada a sua extremidade para levantá-la, determine o comprimento suspenso x e o momento máximo desenvolvido na haste.



Problema 12.33

*12.3 Funções de descontinuidade

O método da integração, usado para determinar a equação da linha elástica para uma viga ou eixo, é conveniente se a carga ou o momento interno puder ser expresso como uma função contínua por todo o comprimento da viga. Entretanto, se várias cargas diferentes agem sobre a viga, a aplicação do método torna-se mais cansativa porque será preciso escrever funções separadas de carga ou momento para cada região da viga. Além disso, a integração dessas funções requer o cálculo de constantes de integração utilizando-se condições de contorno e/ou de continuidade. Por exemplo, a viga mostrada na Figura 12.14 requer que sejam escritas quatro funções de momento que o descrevem nas regiões AB, BC, CD e DE. Quando aplicarmos a relação momento/curvatura, $EI\, d^2v/dx^2 = M$, e integrarmos cada equação de momento duas vezes, teremos de calcular oito constantes de integração. Esse cálculo envolverá duas condições de contorno que exigem deslocamento nulo nos pontos A e E e seis condições de continuidade para a inclinação, bem como para o deslocamento nos pontos B, C e D.

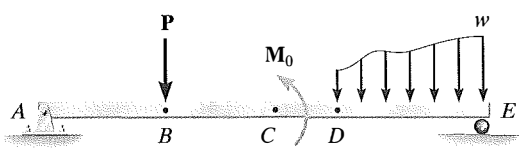


Figura 12.14

Nesta seção, discutiremos um método para determinar a equação da linha elástica para uma viga com *cargas múltiplas* utilizando uma *única* expressão, ou formulada em função da carga sobre a viga, $w = w(x)$, ou em função do momento interno da viga, $M = M(x)$. Se a expressão para w for substituída em $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$ e integrada quatro vezes, ou a expressão para M for substituída em $EI\, d^2v/dx^2 = M(x)$ e integrada duas vezes, as constantes de integração serão determinadas somente pelas condições de contorno. Visto que as equações de continuidade não serão envolvidas, a análise será muito simplificada.

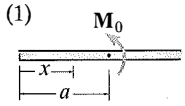
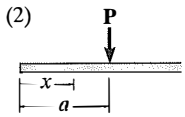
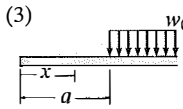
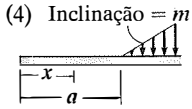
Funções de descontinuidade. Para expressar a carga sobre a viga ou o momento interno dentro dela usando uma única expressão, utilizaremos dois tipos de operadores matemáticos conhecidos como *funções de descontinuidade.*

Funções de Macaulay. Para a finalidade de deflexão em vigas ou eixos, podemos usar as funções de Macaulay, nome do matemático W. H. Macaulay, para descrever ***cargas distribuídas***. Elas podem ser escritas, na forma geral, como

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x-a)^n & \text{para } x \geq a \end{cases} \qquad n \geq 0 \tag{12.11}$$

Aqui, x representa a coordenada da posição de um ponto ao longo da viga, e a é o local na viga onde ocorre 'descontinuidade', a saber, o ponto onde uma carga distribuída *começa.* Observe que a função de Macaulay

TABELA 12.2

Carga	Função da carga $w = w(x)$	Cisalhamento $V = -\int w(x)dx$	Momento $M = \int V dx$
(1) 	$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2}$	$V = -M_0\langle x-a\rangle^{-1}$	$M = -M_0\langle x-a\rangle^{0}$
(2) 	$w = P\langle x-a\rangle^{-1}$	$V = -P\langle x-a\rangle^{0}$	$M = -P\langle x-a\rangle^{1}$
(3) 	$w = w_0\langle x-a\rangle^{0}$	$V = -w_0\langle x-a\rangle^{1}$	$M = -\frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$
(4) Inclinação $= m$ 	$w = m\langle x-a\rangle^{1}$	$V = \frac{-m}{2}\langle x-a\rangle^{2}$	$M = \frac{-m}{6}\langle x-a\rangle^{3}$

$\langle x-a\rangle^n$ é escrita entre parênteses angulares para distingui-la da função comum $[x-a]^n$, escrita entre parênteses comuns. Como mostra a equação, somente quando $x \geq a$, $\langle x-a\rangle^n = (x-a)^n$, caso contrário é nula. Além disso, essas funções são válidas somente para valores exponenciais $n \geq 0$. A integração das funções de Macaulay segue as mesmas regras das funções comuns, isto é,

$$\int \langle x-a\rangle^n \, dx = \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1} + C \qquad (12.12)$$

Observe agora como as funções de Macaulay descrevem a *carga uniforme* $w_0 (n = 0)$, bem como a *carga triangular* $(n = 1)$, mostradas na Tabela 12.2, itens 3 e 4. Esse tipo de descrição pode, é claro, ser estendido a cargas distribuídas que tenham outras formas. Também é possível usar superposição com as cargas uniformes e triangulares para criar a função de Macaulay para uma carga trapezoidal. Utilizando integração, as funções de Macaulay para cisalhamento, $V = -\int w(x)dx$, e momento, $M = \int V dx$, também são mostradas na tabela.

Funções de singularidade. Essas funções são usadas somente para descrever a localização do ponto de forças concentradas ou momentos conjugados que agem sobre uma viga ou eixo. Especificamente, uma ***força concentrada*** $\mathbb{P}$ pode ser considerada como o caso especial de uma carga distribuída no qual a intensidade da carga é $w = P/\epsilon$, tal que sua largura é ϵ, onde $\epsilon \to 0$ (Figura 12.15). A área sob esse diagrama de carga é equivalente a *P, positiva para baixo*, portanto utilizaremos a função de singularidade

$$w = P\langle x-a\rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq a \\ P & \text{para } x = a \end{cases} \qquad (12.13)$$

para descrever a força P. Observe que aqui $n = -1$, de modo que as unidades para w são força por comprimento como devem ser. Além do mais, a função assume o valor, de $\mathbb{P}$ somente no ponto $x = a$ onde a carga ocorre, caso contrário é nula.

De maneira semelhante, um momento conjugado $\mathbf{M}_0$, considerado *positivo em sentido anti-horário*, é uma limitação quando $\epsilon \to 0$ de duas cargas distribuídas como mostra a Figura 12.16. Aqui a seguinte função descreve seu valor.

$$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq a \\ M_0 & \text{para } x = a \end{cases} \qquad (12.14)$$

O expoente $n = -2$ é para assegurar que as unidades de w, força por comprimento, sejam mantidas.

A integração das duas funções de singularidade apresentadas segue as regras operacionais do cálculo e dá resultados *diferentes* dos das funções de Macaulay.

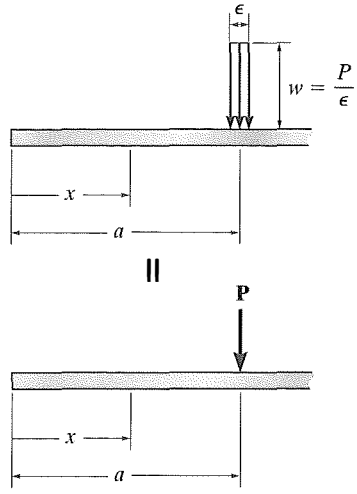


Figura 12.15

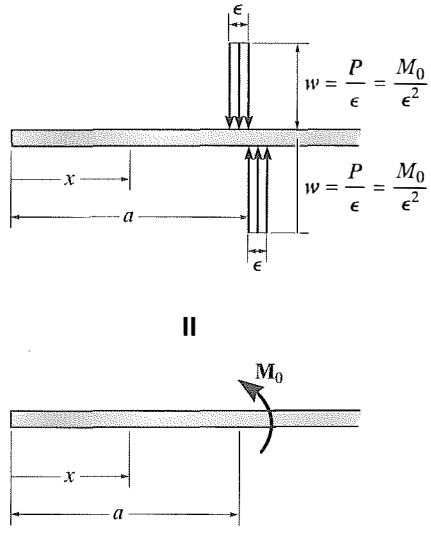


Figura 12.16

Especificamente,

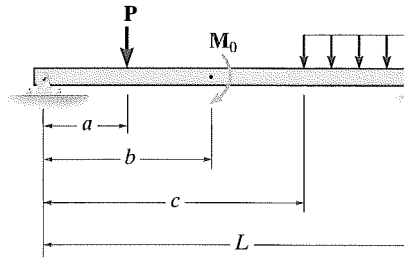
$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \langle x-a\rangle^{n+1}, \; n = -1, -2 \qquad (12.15)$$

Aqui, somente o expoente n aumenta uma unidade e nenhuma constante de integração será associada com essa operação. Ao utilizar essa fórmula, observe como M_0 e P, descritos na Tabela 12.2, itens 1 e 2, são integrados uma vez e depois duas vezes, para se obterem o cisalhamento interno e o momento na viga.

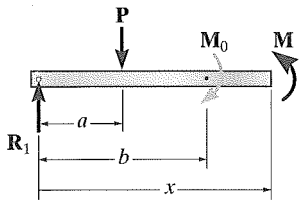
A aplicação das equações 12.11 a 12.15 proporciona um meio bastante direto de expressar a carga ou o momento interno em de um viga em função de x. Quando fizermos isso, devemos prestar muita atenção aos sinais das cargas externas. Como afirmado anteriormente e mostrado na Tabela 12.2, *forças concentradas e cargas distribuídas são positivas para baixo, e momentos conjugados são positivos em sentido anti-horário.* Se essa

convenção de sinal for seguida, o cisalhamento interno e o momento fletor estarão de acordo com a convenção de sinal para vigas estabelecida na Seção 6.1.

Como exemplo da aplicação das funções de descontinuidade para descrever a carga ou momento interno em uma viga, consideraremos a viga carregada como mostra a Figura 12.17a. Aqui a força de reação $\mathbf{R}_1$ criada pelo pino (Figura 12.17b) é negativa visto que age para cima, e $\mathbf{M}_0$ é negativo, visto que age em sentido horário. Utilizando a Tabela 12.2, a carga em qualquer ponto x sobre a viga é, portanto,



(a)



(b)

Figura 12.17

$$w = -R_1\langle x - 0\rangle^{-1} + P\langle x - a\rangle^{-1} - M_0\langle x - b\rangle^{-2} + w_0\langle x - c\rangle^{0}$$

A força reativa no rolete não está incluída nessa expressão, uma vez que x nunca é maior do que L e, além disso, esse valor não tem nenhuma importância no cálculo da inclinação ou da deflexão. Observe que quando $x = a$, $w = P$, sendo todos os outros termos iguais a zero. Além disso, quando $x > c$, $w = w_0$ etc.

Integrando essa equação duas vezes, obtemos a expressão que descreve o momento interno na viga. As constantes de integração serão ignoradas aqui, uma vez que as condições de contorno, ou o cisalhamento e o momento final, foram calculadas ($V = R_1$ e $M = 0$) e esses valores são incorporados na carga da viga w. Também podemos obter esse resultado diretamente da Tabela 12.2. Em qualquer caso,

$$M = R_1\langle x - 0\rangle^{1} - P\langle x - a\rangle^{1} + M_0\langle x - b\rangle^{0} - \tfrac{1}{2}w_0\langle x - c\rangle^{2} \qquad (12.16)$$

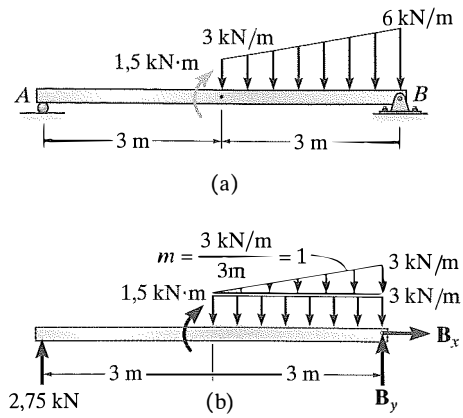


Figura 12.18

A validade dessa expressão pode ser verificada por meio do método das seções, digamos, dentro da região $b < x < c$ (Figura 12.17b). O equilíbrio de momento requer que

$$M = R_1x - P(x - a) + M_0 \qquad (12.17)$$

Esse resultado está de acordo com o obtido pelas funções de descontinuidade, visto que, pelas equações 12.11, 12.13 e 12.14, somente o último termo na Equação 12.16 é igual a zero quando $x < c$.

Como um segundo exemplo, considere a viga na Figura 12.18a. A reação do suporte em A *foi* calculada na Figura 12.18b e a carga trapezoidal foi subdividido em cargas triangulares e uniformes. Pela Tabela 12.2, a carga é, portanto,

$$w = -2{,}75\ \text{kN}\langle x - 0\rangle^{-1} - 1{,}5\ \text{kN}\cdot\text{m}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{-2} + 3\ \text{kN/m}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{0} + 1\ \text{kN/m}^2\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{1}$$

Podemos determinar a expressão para o momento diretamente pela Tabela 12.2 em vez de integrar essa expressão duas vezes. Em qualquer caso,

$$M = 2{,}75\ \text{kN}\langle x - 0\rangle^{1} + 1{,}5\ \text{kN}\cdot\text{m}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{0} - \frac{3\ \text{kN/m}}{2}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{2} - \frac{1\ \text{kN/m}^2}{6}\langle x - 3\ \text{m}\rangle^{3}$$

$$= 2{,}75x + 1{,}5\langle x - 3\rangle^{0} - 1{,}5\langle x - 3\rangle^{2} - \frac{1}{6}\langle x - 3\rangle^{3}$$

A deflexão da viga pode ser determinada depois que essa equação for integrada duas vezes sucessivas e as constantes de integração forem calculadas utilizando-se as condições de contorno de deslocamento nulo em A e B.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um método para utilizar funções de descontinuidade para determinar a curva da linha elástica de uma viga. Esse método é particularmente vantajoso para resolver problemas que envolvam vigas ou eixos submetidos a *várias cargas*, visto que as constantes de integração podem ser calculadas utilizando-se *somente* as condições de contorno, enquanto as condições de compatibilidade são automaticamente satisfeitas.

Linha elástica

- Trace a curva da linha elástica da viga e identifique as condições de contorno nos apoios.
- Ocorre deslocamento nulo em todos os apoios de pino e de rolete e ocorre inclinação e deslocamento nulos nos apoios fixos.
- Estabeleça o *eixo x* de modo que ele se prolongue para a direita e tenha origem na extremidade esquerda da viga.

Função da carga ou momento fletor

- Calcule as reações no apoio e a seguir use as funções de descontinuidade da Tabela 12.2 para expressar a carga w ou o momento interno M em função de x. Não esqueça de obedecer a convenção de sinal para cada carga, já que ela se aplica a essa equação.
- Observe que as cargas distribuídas devem estender-se até a extremidade direita da viga para serem válidos. Se isso não ocorrer, use o método da superposição ilustrado no Exemplo 12.5.

Inclinação e linha elástica

- Substitua w em $EI\, d^4v/dx^4 = -w(x)$ ou M na relação momento/curvatura $EI\, d^2v/dx^2 = M$, e integre para obter as equações para a inclinação e a deflexão da viga.
- Calcule as constantes de integração utilizando as condições de contorno e substitua essas constantes nas equações de inclinação e deflexão para obter os resultados finais.
- Quando as equações da inclinação e da deflexão são calculadas em qualquer ponto sobre a viga, a *inclinação positiva é no sentido anti-horário*, e o *deslocamento positivo é para cima*.

EXEMPLO 12.5

Determine a equação da linha elástica para a viga em balanço mostrada na Figura 12.19a. EI é constante.

SOLUÇÃO

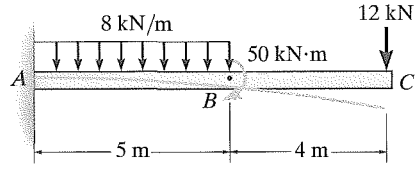
Linha elástica. As cargas provocam deflexão na viga como mostra a Figura12.19a. As condições de contorno exigem inclinação e deslocamento nulo em A.

Função da carga. As reações no suporte em A foram calculadas por estática e são mostradas no diagrama de corpo livre na Figura 12.19b. Como a carga distribuída na Figura 12.19a não se estende até C conforme exigido, podemos usar a superposição de cargas mostrada na Figura 12.19b para representar o mesmo efeito. Pela nossa convenção de sinal, o momento de 50 kN·m, a força de 52 kN em A e a porção da carga distribuída de B a C na parte inferior da viga são todos negativos. Portanto, a carga da viga é

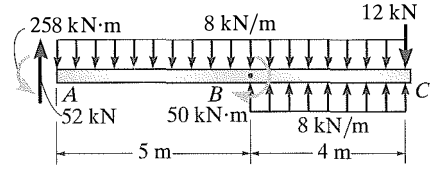
$$w = -52\ \text{kN}\langle x-0\rangle^{-1} + 258\ \text{kN}\cdot\text{m}\langle x-0\rangle^{-2} + 8\ \text{kN/m}\langle x-0\rangle^{0} - 50\ \text{kN}\cdot\text{m}\langle x-5\ \text{m}\rangle^{-2} - 8\ \text{kN/m}\langle x-5\ \text{m}\rangle^{0}$$

A carga de 12 kN *não está incluída* aqui, visto que x não pode ser maior que 9 m. Como $dV/dx = -w(x)$, então, por integração, e desprezando a constante de integração uma vez que as reações estão incluídas na função de carga, temos

$$V = 52\langle x-0\rangle^{0} - 258\langle x-0\rangle^{-1} - 8\langle x-0\rangle^{1} + 50\langle x-5\rangle^{-1} + 8\langle x-5\rangle^{1}$$



(a)



(b)

Figura 12.19

Além disso, $dM/dx = V$, de modo que, integrando novamente obtemos

$$M = -258\langle x-0\rangle^{0} + 52\langle x-0\rangle^{1} - \frac{1}{2}(8)\langle x-0\rangle^{2} + 50\langle x-5\rangle^{0} + \frac{1}{2}(8)\langle x-5\rangle^{2}$$

$$= (-258 + 52x - 4x^2 + 50\langle x-5\rangle^{0}) + 4\langle x-5\rangle^{2}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido *diretamente* da Tabela 12.2.

Inclinação e linha elástica. Aplicando a Equação 12.10 e integrando duas vezes, temos

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -258 + 52x - 4x^2 + 50\langle x-5\rangle^0 + 4\langle x-5\rangle^2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -258x + 26x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 50\langle x-5\rangle^1 + \frac{4}{3}\langle x-5\rangle^3 + C_1$$

$$EIv = -129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^2 + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^4 + C_1x + C_2$$

Visto que $dv/dx = 0$ em $x = 0$, $C_1 = 0$; e $v = 0$ em $x = 0$, portanto $C_2 = 0$. Logo,

$$v = \frac{1}{EI}\left(-129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^2 + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^4\right) \text{ m}$$

Resposta

EXEMPLO 12.6

Determine a deflexão máxima da viga mostrada na Figura 12.20a. EI é constante.

SOLUÇÃO

Linha elástica. A viga sofre deflexão como mostra a Figura 2.20a. As condições de contorno exigem deslocamento nulo em A e B.

Função da carga. As reações foram calculadas e são mostradas no diagrama de corpo livre na Figura 12.20b. A função da carga para a viga pode ser escrita como

$$w = 8 \text{ kN}\langle x-0\rangle^{-1} - 6 \text{ kN}\langle x-10 \text{ m}\rangle^{-1}$$

O momento fletor e a força em B não estão incluídos aqui, visto que estão localizadas na extremidade direita da viga e x não pode ser maior do que 30 m. Aplicando $dV/dx = -w(x)$, obtemos

$$V = -8\langle x-0\rangle^0 + 6\langle x-10\rangle^0$$

De forma semelhante, $dM/dx = V$ fornece

$$M = -8\langle x-0\rangle^1 + 6\langle x-10\rangle^1$$
$$= (-8x + 6\langle x-10\rangle^1) \text{ kN·m}$$

Observe como essa equação também pode ser determinada *diretamente* utilizando-se os resultados da Tabela 12.2 para o momento.

Inclinação e linha elástica. Integrando duas vezes temos

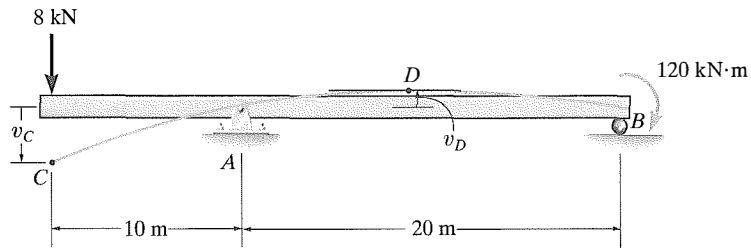
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -8x + 6\langle x-10\rangle^1$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x-10\rangle^2 + C_1$$

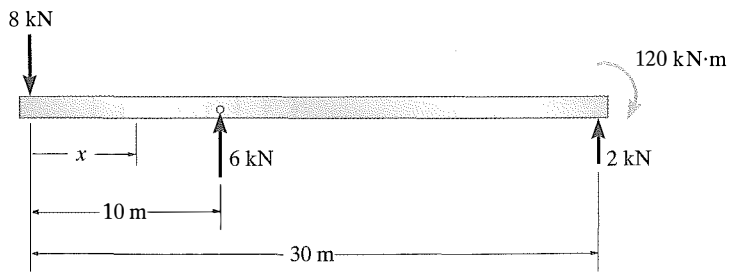
$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x-10\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (1)$$

Pela Equação 1, a condição de contorno $v = 0$ em $x = 10$ m e $v = 0$ em $x = 30$ m dá

$$0 = -1.333 + (10-10)^3 + C_1(10) + C_2$$
$$0 = -36.000 + (30-10)^3 + C_1(30) + C_2$$



(a)



(b)

Figura 12.20

Resolvendo essas equações simultaneamente para C_1 e C_2, obtemos $C_1 = 1.333$ e $C_2 = -12.000$. Logo,

$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x - 10\rangle^2 + 1.333 \qquad (2)$$

$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x - 10\rangle^3 + 1.333x - 12.000 \qquad (3)$$

Pela Figura 12.20a, o deslocamento máximo pode ocorrer em C ou em D, onde a inclinação $dv/dx = 0$. Para obter o deslocamento de C, faça $x = 0$ na Equação 3. Obtemos

$$v_C = -\frac{12.000\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

O sinal *negativo* indica que o deslocamento é *para baixo* como mostra a Figura 12.20a. Para localizar o ponto D, use a Equação 2 com $x > 10$ m e $dv/dx = 0$, Isso dá

$$0 = -4x_D^2 + 3(x_D - 10)^2 + 1.333$$
$$x_D^2 + 60x_D - 1.633 = 0$$

Resolvendo para a raiz positiva,

$$x_D = 20{,}3\ \text{m}$$

Por consequência, pela Equação 3,

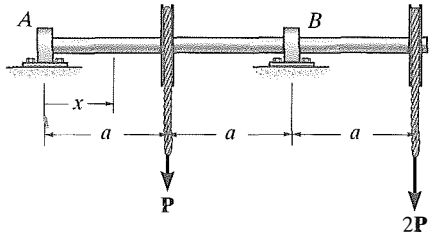
$$EIv_D = -\frac{4}{3}(20{,}3)^3 + (20{,}3 - 10)^3 + 1.333(20{,}3) - 12.000$$

$$v_D = \frac{5.000\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \qquad \textit{Resposta}$$

Comparando esse valor com v_C, vemos que $v_{máx} = v_C$.

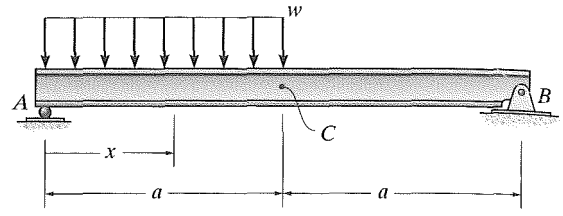
PROBLEMAS

12.34. O eixo suporta as cargas das duas polias mostradas na figura. Determine a equação da linha elástica. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo. EI é constante.



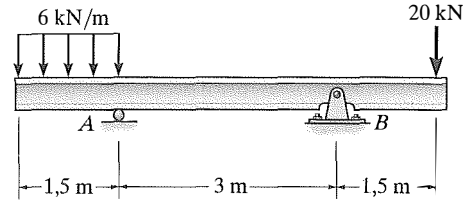
Problema 12.34

12.35. Determine a equação da linha elástica. Especifique as inclinações em A e B. EI é constante.



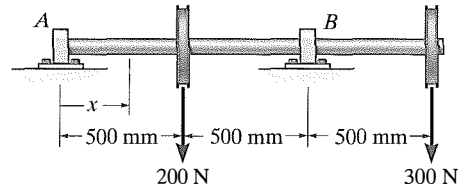
Problema 12.35

***12.36.** A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a equação da linha elástica. EI é constante.



Problema 12.36

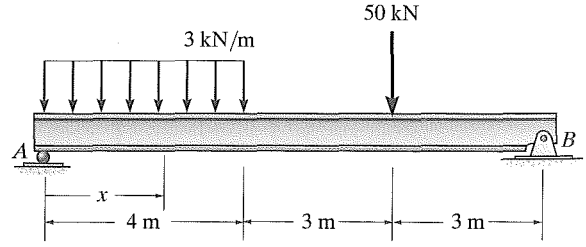
12.37. O eixo suporta as cargas das duas polias mostradas na figura. Determine a equação da linha elástica. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo. EI é constante.



Problema 12.37

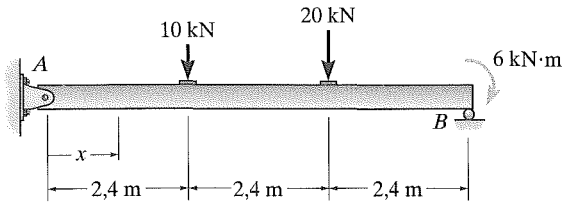
12.38. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a equação da linha elástica. EI é constante.

12.39. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine o deslocamento em $x = 7$ m e a inclinação em A. EI é constante.



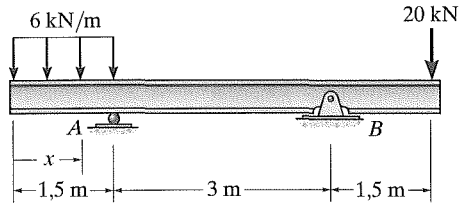
Problemas 12.38/39

***12.40.** A viga está sujeita às cargas mostradas na figura. Determine a equação da linha elástica. EI é constante.



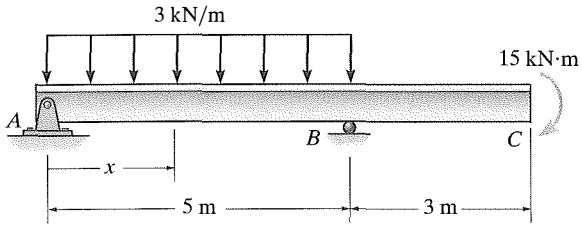
Problema 12.40

12.41. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a equação da linha elástica. *EI* é constante.



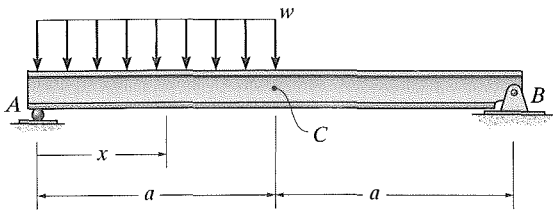
Problema 12.41

12.42. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine as equações da inclinação e da linha elástica. *EI* é constante.



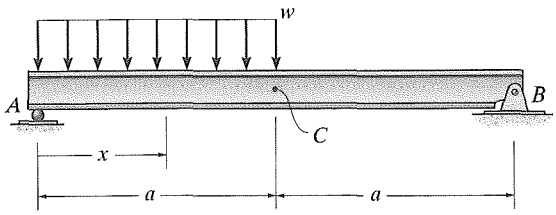
Problema 12.42

12.43. Determine a equação da linha elástica. Especifique a inclinação em *A* e o deslocamento em *C*. *EI* é constante.



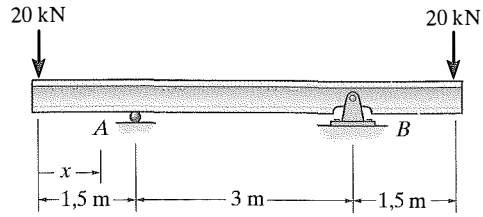
Problema 12.43

***12.44.** Determine a equação da linha elástica. Especifique as inclinações em *A* e *B*. *EI* é constante.



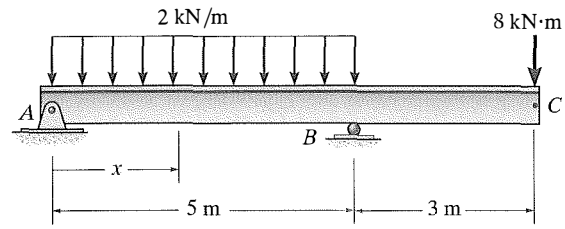
Problema 12.44

12.45. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a equação da linha elástica. *EI* é constante.



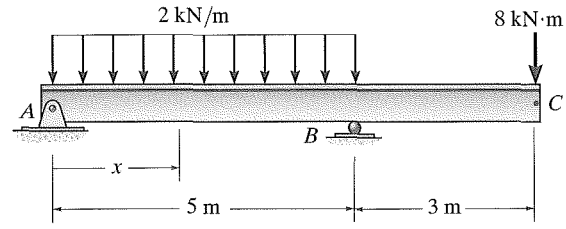
Problema 12.45

12.46. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine as equações da inclinação e da linha elástica. *EI* é constante.



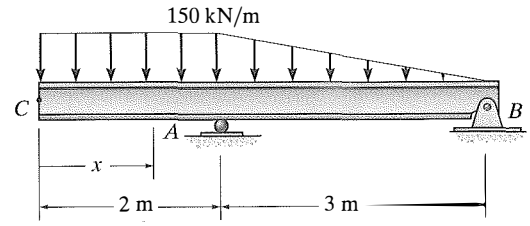
Problema 12.46

12.47. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a inclinação em *A* e o deslocamento em *C*. *EI* é constante.



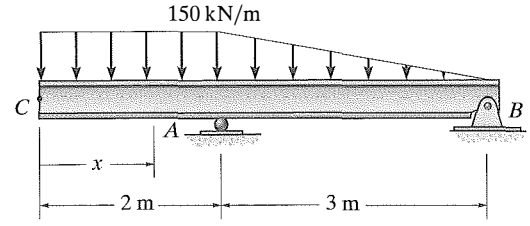
Problema 12.47

***12.48.** A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a equação da linha elástica.



Problema 12.48

12.49. Determine o deslocamento em *C* e a inclinação em *A* da viga.

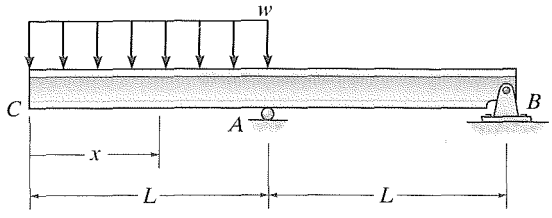


Problema 12.49

12.50. Determine a equação da linha elástica. Especifique a inclinação em A. EI é constante.

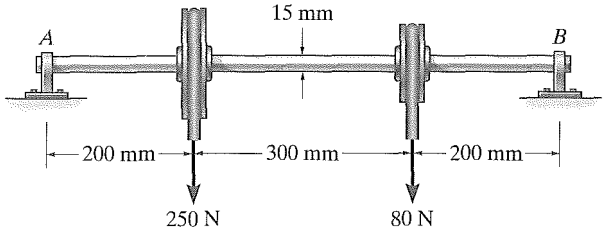
12.51. Determine a equação da linha elástica. Especifique a deflexão em C. EI é constante.

***12.52.** Determine a equação da linha elástica. Especifique a inclinação em B. EI é constante.



Problemas 12.50/51/52

12.53. O eixo é feito de aço e tem diâmetro de 15 mm. Determine sua deflexão máxima. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo. $E_{aço} = 200$ GPa.



Problema 12.53

*12.4 Inclinação e deslocamento pelo método dos momentos de área

O método dos momentos de área proporciona uma técnica parcialmente gráfica para determinar a inclinação e o deslocamento em pontos específicos sobre a linha elástica de uma viga ou eixo. A aplicação do método exige o cálculo de áreas associadas ao diagrama de momento da viga; portanto, se esse diagrama consistir em formas simples, o método é muito conveniente de usar. Normalmente é esse o caso quando a viga é carregada com forças concentradas e momentos conjugados.

Para desenvolver o método dos momentos de área, adotaremos as mesmas premissas que usamos para o método da integração: a viga é inicialmente reta, é deformada elasticamente por ação das cargas de modo tal que a inclinação e a deflexão da linha elástica são muito pequenas e as deformações são causadas por flexão. O método dos momentos de área baseia-se em dois teoremas usados para determinar a inclinação e o deslocamento em um ponto sobre a linha elástica.

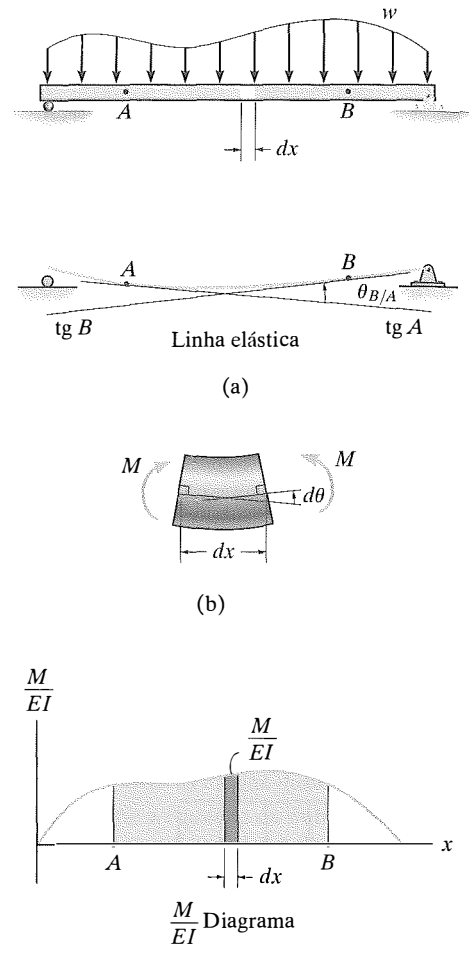


Figura 12.21

Teorema 1. Considere a viga simplesmente apoiada com sua linha elástica associada Figura 12.21a. Um segmento diferencial dx da viga é isolado na Figura 12.21b. Vemos que o momento interno M da viga deforma o elemento de modo tal que as *tangentes* à linha elástica em cada lado do elemento interceptam-se em um ângulo $d\theta$. Esse ângulo pode ser determinado pela Equação 12.10, escrita como

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = M$$

Visto que a inclinação é *pequena*, $\theta = dv/dx$ e, portanto,

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \tag{12.18}$$

Se construirmos o diagrama de momento fletor para a viga e o dividirmos pelo momento de inércia I e pelo módulo de elasticidade E da viga (Figura 12.21c), então a Equação 12.18 indica que $d\theta$ é igual à *área* sob

o 'diagrama M/EI' para o segmento de viga dx. Integrando entre um ponto A e outro ponto B selecionados sobre a linha elástica, temos

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx \tag{12.19}$$

Essa equação configura a base para o primeiro teorema de momentos de área.

Teorema 1: *O ângulo entre as tangentes em dois pontos quaisquer sobre a* linha *elástica é igual à área sob o diagrama M/EI entre esses dois pontos.*

A notação $\theta_{B/A}$ é denominada ângulo da tangente em B medido *em relação* à tangente em A. Pela prova, deve ficar evidente que esse ângulo será medido *em sentido anti-horário*, da tangente A até a tangente B, se a área sob o diagrama M/EI for *positiva*. Ao contrário, se a área for *negativa*, ou encontrar-se abaixo do *eixo x*, o ângulo $\theta_{B/A}$ será medido em sentido horário, da tangente A até a tangente B. Além disso, pelas dimensões da Equação 12.19, $\theta_{B/A}$ será *medido* em *radianos*.

Teorema 2. O segundo teorema dos momentos de área baseia-se no desvio das tangentes em relação à linha elástica. A Figura 12.22a mostra uma vista muitíssimo ampliada do desvio vertical dt das tangentes de cada lado do elemento diferencial dx. Esse desvio é provocado pela curvatura do elemento e foi medido ao longo de uma reta vertical que passa pelo ponto A localizado sobre a linha elástica. Visto que consideramos que a inclinação da linha elástica e sua deflexão são muito pequenas, é razoável aproximar o comprimento de cada reta tangente por x e o arco ds' por dt. Utilizando a fórmula do arco de círculo $s = \theta r$, onde r é o comprimento x e s é dt, podemos escrever $dt = x\,d\theta$. Substituindo a Equação 12.18 nessa equação e integrando de A a B, o desvio vertical da tangente em A *em relação à* tangente em B pode ser determinado; isto é,

$$t_{A/B} = \int_A^B x\frac{M}{EI}\,dx \tag{12.20}$$

Visto que o centroide de uma área é determinado por $\bar{x}\int dA = \int x\,dA$ e $\int (M/EI)dx$ representa a área sob o diagrama M/EI, também podemos escrever

$$t_{A/B} = \bar{x}\int_A^B \frac{M}{EI}\,dx \tag{12.21}$$

Nessa expressão, x é a distância de A até o *centroide* da área sob o diagrama M/EI entre A e B (Figura 12.22b).

Agora, o segundo teorema dos momentos de área pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2: *O desvio vertical da tangente em um ponto (A) sobre a linha elástica em relação à tangente traçada desde outro ponto (B) é igual ao momento da área sob o diagrama M/EI entre esses dois pontos (A e B). Esse momento é calculado em torno do ponto (A) onde o desvio vertical deve ser determinado.*

A distância $t_{A/B}$ usada no teorema também pode ser interpretada como o deslocamento vertical desde o ponto localizado na tangente traçada do ponto B ao ponto A sobre a linha elástica. Observe que $t_{A/B}$ *não* é igual a $t_{B/A}$, o que é mostrado na Figura 12.22c. Especificamente, o momento da área sob o diagrama M/EI entre A e B é calculado em torno do ponto A *para* determinar $t_{A/B}$ (Figura 12.22b), e em torno do ponto B para determinar $t_{B/A}$ (Figura 12.22c).

Se determinarmos o momento de uma área M/EI *positiva* de A a B para $t_{B/A}$, ele indica que o ponto B está *acima* da tangente traçada desde o ponto A (Figura 12.22a.) De maneira semelhante, áreas M/EI *negativas* indicam que o ponto B está *abaixo* da tangente traçada desde o ponto A. Essa mesma regra aplica-se para $t_{A/B}$.

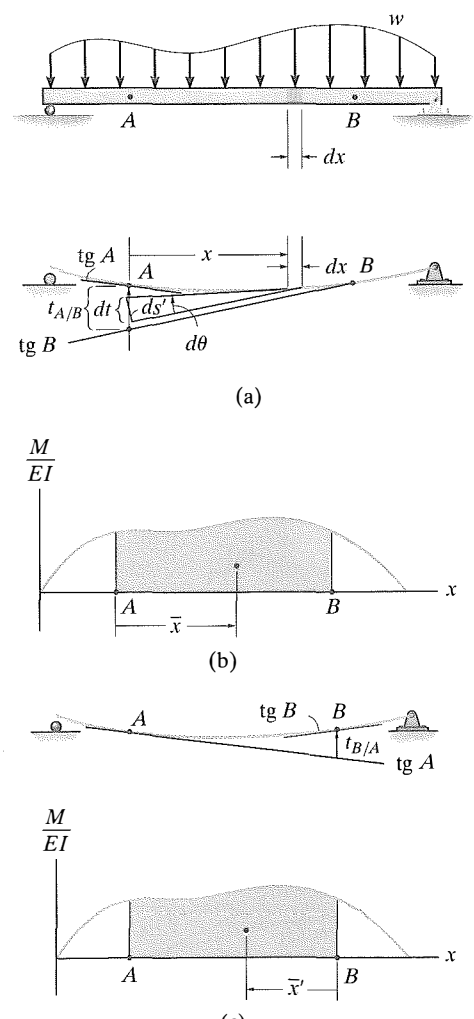


Figura 12.22

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um método que pode ser usado para aplicar os dois teoremas de momentos de área.

Diagrama M/EI

- Determine as reações no apoio e trace o diagrama *M/EI* da viga. Se a viga estiver carregada com forças concentradas, o diagrama *M/EI* consistirá em uma série de segmentos de reta e as áreas e seus momentos exigidos pelos teorema dos momentos de área serão relativamente fáceis de calcular. Se a carga consistir em uma série de cargas distribuídas, o diagrama *M/EI* consistirá em curvas parabólicas ou, talvez, de ordens mais altas, e sugerimos que a tabela apresentada no final do livro seja usada para localizar a área e o centroide sob cada curva.

Linha elástica

- Trace uma vista ampliada da curva da linha elástica da viga. Lembre-se de que os pontos de inclinação e deslocamento nulos sempre ocorrem em um apoio fixo e que em todos os suportes de pinos e roletes ocorre deslocamento nulo.
- Se for difícil obter a forma geral da curva da linha elástica, use o diagrama de momento (ou *M/EI*). Entenda que, quando a viga for submetida a um *momento positivo*, a flexão resultante será *côncava para cima*, ao passo que, com momento *negativo*, a flexão resultante na viga será *côncava para baixo*. Além disso, um ponto de inflexão ou mudança na curvatura ocorre onde o momento na viga (ou *M/EI*) é nulo.
- O deslocamento e a inclinação desconhecidos a serem determinados devem ser indicados sobre a curva.
- Visto que o teorema dos momentos de área aplica-se *somente entre duas tangentes*, é preciso dar atenção ao modo como as tangentes devem ser construídas de modo que os ângulos ou desvios entre elas levem à solução do problema. A propósito, as *tangentes nos apoios devem ser consideradas*, visto que o deslocamento e/ou a inclinação nos apoios da viga normalmente é nulo.

Teoremas dos momentos de área

- Aplique o Teorema 1 para determinar o *ângulo* entre duas tangentes quaisquer sobre a linha elástica e o Teorema 2 para determinar o *desvio tangencial*.
- O sinal algébrico da resposta pode ser verificado pelo ângulo ou desvio indicado na linha elástica.
- Um $\theta_{B/A}$ *positivo* representa uma rotação *em sentido anti-horário* da tangente em B em relação à tangente em A, e um $t_{B/A}$ *positivo* indica que o ponto B sobre a linha elástica encontra-se *acima* da tangente traçada desde o ponto A.

EXEMPLO 12.7

Determine a inclinação da viga mostrada na Figura 12.23a nos pontos B e C. EI é constante.

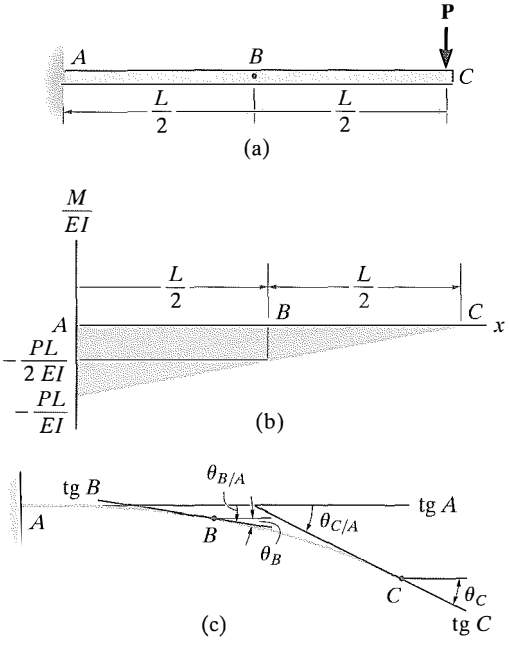


Figura 12.23

SOLUÇÃO

Diagrama M/EI. Veja Figura 12.23b.

Curva elástica. A força P provoca deflexão na viga como mostra a Figura 12.23c. (A linha elástica é côncava para baixo, visto que *M/EI* é negativo.) As tangentes em B e C são indicadas, já que serão necessárias para determinar θ_B e θ_C. A tangente no apoio (A) também é mostrada. Ela tem uma inclinação conhecida, zero. Pelo desenho, o ângulo entre tg A e tg B, isto é, $\theta_{B/A}$, é equivalente a θ_B, ou

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

Além disso

$$\theta_C = \theta_{C/A}$$

Teorema dos momentos de área. Aplicando o Teorema 1, $\theta_{B/A}$ é igual à área sob o diagrama *M/EI* entre os pontos A e B; isto é,

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{2EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal *negativo* indica que a orientação do ângulo medido da tangente em A até a tangente em B é *em sentido horário*. Isso está de acordo, uma vez que a viga inclina-se para baixo em B.

De forma semelhante, a área sob o diagrama M/EI entre os pontos A e C é igual a $\theta_{C/A}$. Temos

$$\theta_C = \theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)L$$
$$= -\frac{PL^2}{2EI} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.8

Determine o deslocamento dos pontos B e C da viga mostrada na Figura 12.24a. EI é constante.

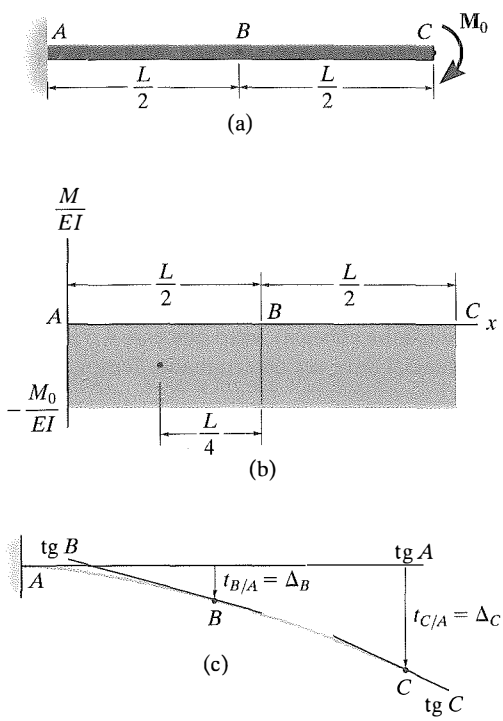


Figura 12.24

SOLUÇÃO

Diagrama *M/EI*. Veja Figura 12.24b.

Linha elástica. O momento conjugado em C provoca a deflexão da viga como mostra a Figura 12.24c. As tangentes em B e C são indicadas já que são necessárias para determinar Δ_B e Δ_C. A tangente no apoio (A) também é mostrada, uma vez que ela é horizontal. Os deslocamentos exigidos agora podem ser relacionados diretamente com os desvios entre as tangentes em B e A e C e A. Especificamente, Δ_B é igual ao desvio da tg A em relação à tg B; isto é,

$$\Delta_B = t_{B/A}$$

$$\Delta_C = t_{C/A}$$

Teorema dos momentos de área. Aplicando o Teorema 2, $t_{B/A}$ é igual ao momento da área sombreada sob o diagrama M/EI entre A e B calculado em torno do ponto B (o ponto sobre a linha elástica), visto que esse é o ponto no qual o desvio tangencial deve ser determinado. Por consequência, pela Figura 12.24b,

$$\Delta_B = t_{B/A} = \left(\frac{L}{4}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] = -\frac{M_0L^2}{8EI} \qquad \textit{Resposta}$$

Da mesma forma, para $t_{C/A}$ temos de determinar o momento da área sob *todo o diagrama M/EI* de A a C em torno do ponto C (o ponto sobre a linha elástica). Temos

$$\Delta_C = t_{C/A} = \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)(L)\right] = -\frac{M_0L^2}{2EI} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Como ambas as respostas são *negativas*, elas indicam que os pontos B e C encontram-se *abaixo* da tangente em A, o que está de acordo com a Figura 12.24c.

EXEMPLO 12.9

Determine a inclinação no ponto C da viga na Figura 12.25a. EI é constante.

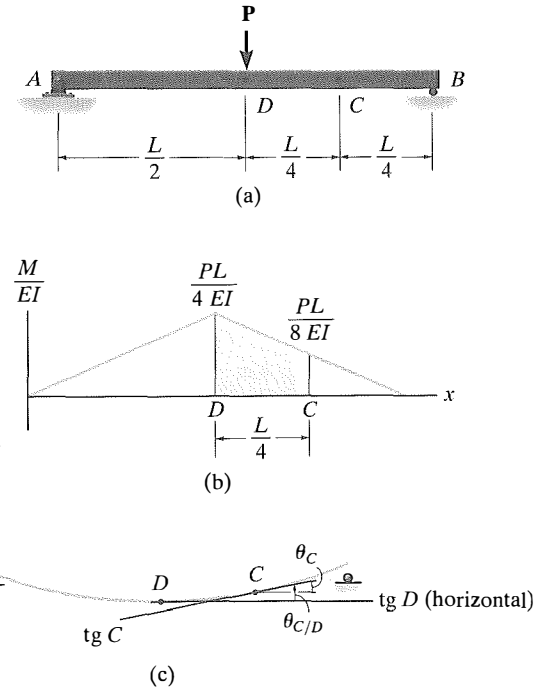


Figura 12.25

SOLUÇÃO

Diagrama *M/EI*. Veja a Figura 12.25b.

Linha elástica. Como a carga é aplicada simetricamente à viga, a linha elástica apresenta-se simétrica e a tangente em D, horizontal (Figura 12.25c). A tangente em C também é desenhada, visto que temos de determinar a inclinação θ_C. Pela figura, o ângulo $\theta_{C/D}$ entre as tangentes D e C é igual a θ_C, isto é,

$$\theta_C = \theta_{C/D}$$

Teorema dos momentos de área. Utilizando o Teorema 1, $\theta_{C/D}$ é igual à área sombreada sob o diagrama M/EI entre os pontos D e C. Temos

$$\theta_C = \theta_{C/D} = \left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI} - \frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3PL^2}{64EI}$$

Resposta

O que o resultado positivo indica?

EXEMPLO 12.10

Determine a inclinação no ponto C para a viga de aço na Figura 12.26a. Considere $E_{aço} = 200$ GPa, $I = 17(10^6)\text{mm}^4$.

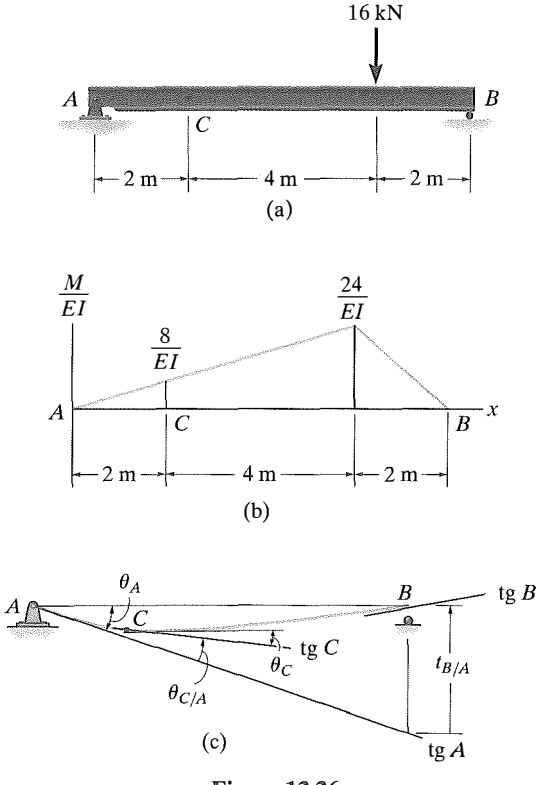


Figura 12.26

SOLUÇÃO

Diagrama *M/EI*. Veja a Figura 12.26b.

Linha elástica. A linha elástica é mostrada na Figura 12.26c. Mostra-se a tangente em C porque temos de determinar θ_C. As tangentes nos *apoios*, A e B, também são traçadas como mostra a figura. O ângulo $\theta_{C/A}$ é aquele entre as tangentes em A e C. A inclinação em A, θ_A, na Figura 12.26c, pode ser determinada utilizando-se $|\theta_A| = |t_{B/A}|/L_{AB}$. Essa equação é válida visto que $t_{B/A}$ é, na realidade, muito pequena, de modo que $t_{B/A}$ medida em metros pode ser aproximada pelo comprimento de um arco de círculo definido por um raio $L_{AB} = 8$ m e uma abertura θ_A em radianos. (Lembre-se de que $s = \theta r$.) Pela geometria da Figura 12.26c, temos

$$|\theta_C| = |\theta_A| - |\theta_{C/A}| = \left|\frac{t_{B/A}}{8}\right| - |\theta_{C/A}| \qquad (1)$$

Observe que o Exemplo 12.9 também poderia ser resolvido por meio desse método.

Teorema dos momentos de área. Utilizando o Teorema 1, $\theta_{C/A}$ equivale à área sob o diagrama M/EI entre os pontos A e C; isto é,

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right) = \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

Aplicando o Teorema 2, $t_{B/A}$ equivale ao momento da área sob o diagrama M/EI entre B e A em torno do ponto B (o ponto sobre a linha elástica), visto que esse é o ponto onde o desvio tangencial deve ser determinado. Temos

$$\begin{aligned} t_{B/A} &= \left(2\text{ m} + \frac{1}{3}(6\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(6\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] \\ &\quad + \left(\frac{2}{3}(2\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] \\ &= \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na Equação 1, obtemos

$$\theta_C = \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{(8\text{ m})EI} - \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\ \text{⤵}$$

Calculamos esse resultado nas unidades kN e m; portanto, convertendo EI para essas unidades, temos

$$\theta_C = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{[200(10^6)\text{ kN/m}^2][17(10^{-6})\text{ m}^4]} = 0{,}00941\text{ rad}\ \text{⤵}$$

Resposta

EXEMPLO 12.11

Determine o deslocamento em C para a viga mostrada na Figura 12.27a. EI é constante.

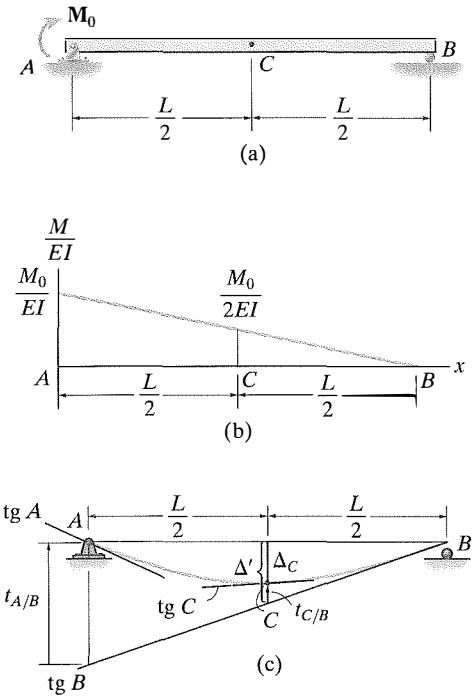


Figura 12.27

SOLUÇÃO

Diagrama *M/EI*. Veja a Figura 12.27b.

Linha elástica. A tangente em C é desenhada sobre a linha elástica, porque temos que determinar Δ_C (Figura 12.27c). (Observe que C *não* é a localização da deflexão máxima da viga, pois a carga e, por consequência, a linha elástica *não são simétricas*). As tangentes nos apoios A e B também são indicadas na Figura 12.27c. Vemos que $\Delta_C = \Delta' - t_{C/B}$. Se $t_{A/B}$ for determinada, Δ' pode ser encontrado por triângulos proporcionais, isto é, $\Delta'/(L/2) = t_{A/B}/L$ ou $\Delta' = t_{A/B}/2$. Por consequência,

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \tag{1}$$

Teorema dos momentos de área. Aplicando o Teorema 2 para determinar $t_{A/B}$ e $t_{C/B}$, temos

$$t_{A/B} = \left(\frac{1}{3}(L)\right)\left[\frac{1}{2}(L)\left(\frac{M_0}{EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{6EI}$$

$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{M_0}{2EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{48EI}$$

Substituindo esses resultados na Equação 1 obtemos

$$\Delta_C = \frac{1}{2}\left(\frac{M_0L^2}{6EI}\right) - \left(\frac{M_0L^2}{48EI}\right)$$

$$= \frac{M_0L^2}{16EI}\downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.12

Determine o deslocamento no ponto C para a viga de aço em balanço com projeção mostrada na Figura 12.28a. Considere $E_{aço} = 200$ GPa, $I = 50 \times 10^6$ mm^4.

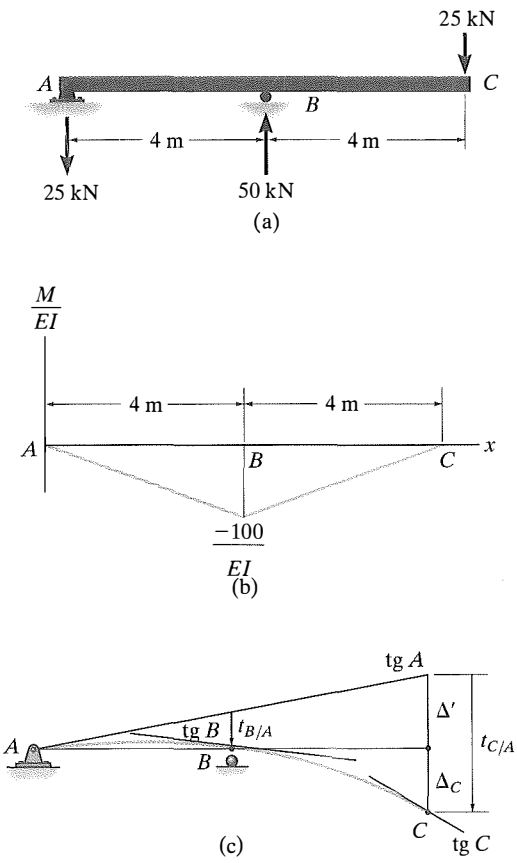


Figura 12.28

SOLUÇÃO

Diagrama *M/EI*. Veja a Figura 12.28b.

Linha elástica. A carga provoca deflexão na viga como mostra a Figura 12.28c. Temos de determinar Δ_C. Traçando as tangentes em C e nos apoios A e B, verificamos que $\Delta_C = |t_{C/A}| - \Delta'$. Todavia, Δ' pode ser relacionado com $t_{B/A}$ por semelhança de triângulos; isto é, $\Delta'/8 = |t_{B/A}|/4$ ou $\Delta' = 2|t_{B/A}|$. Por consequência,

$$\Delta = |t_{C/A}| - 2|t_{B/A}|$$

Teorema dos momentos de área. Aplicando o Teorema 2 para determinar $t_{C/A}$ e $t_{B/A}$, temos

$$t_{C/A} = (4\text{ m})\left(\frac{1}{2}(8\text{ m})\left(-\frac{100\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right)$$
$$= -\frac{1.600\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$
$$t_{B/A} = \left(\frac{1}{3}(4\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(4\text{ m})\left(-\frac{100\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] = -\frac{266{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

Por que esses termos são negativos? Substituindo os resultados na Equação 1 temos

$$\Delta_C = \frac{1.600\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} - 2\left(\frac{266{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\right) = \frac{1.066{,}66\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

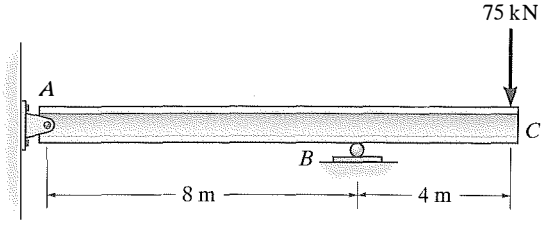
Como os cálculos foram efetuados em unidades métricas (kN e m), temos

$$\Delta_C = \frac{1.066{,}66\text{ kN}\cdot\text{m}^3(10^3\text{ mm/m})^3}{(200\text{ kN/mm}^2)[50(10^6)\text{ mm}^4]} = 106{,}7\text{ mm}\downarrow$$

Resposta

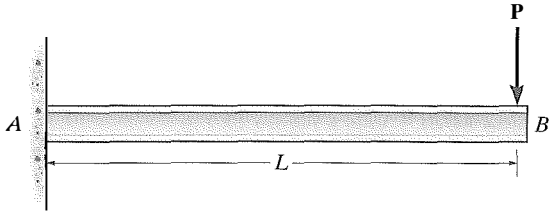
PROBLEMAS

12.54. Determine a inclinação e a deflexão em *C*. *EI* é constante.



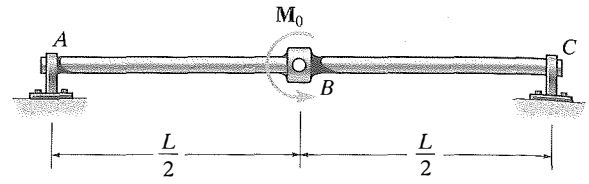
Problema 12.54

12.55. Determine a inclinação e a deflexão em *B*. *EI* é constante.



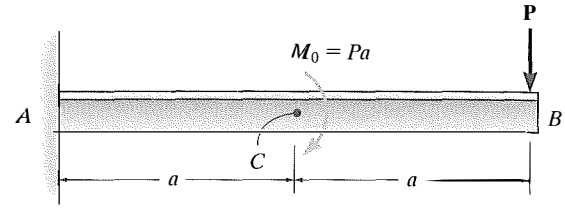
Problema 12.55

*12.56. Se os mancais exercerem somente reações verticais sobre o eixo, determine a inclinação nos mancais e a deflexão máxima do eixo. *EI* é constante.



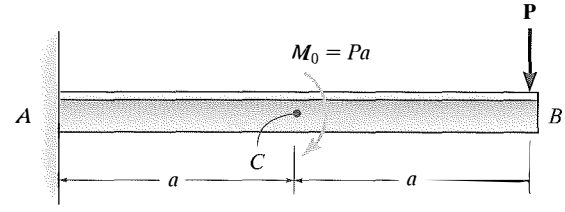
Problema 12.56

12.57. Determine a inclinação em *B* e a deflexão em *C*. *EI* é constante.



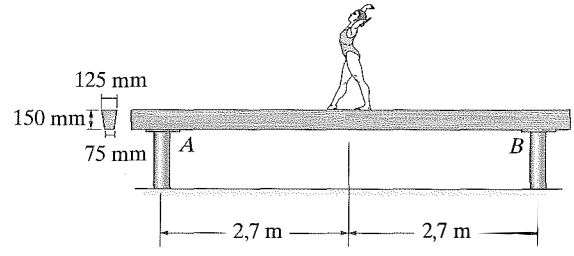
Problema 12.57

12.58. Determine a inclinação em *C* e a deflexão em *B*. *EI* é constante.



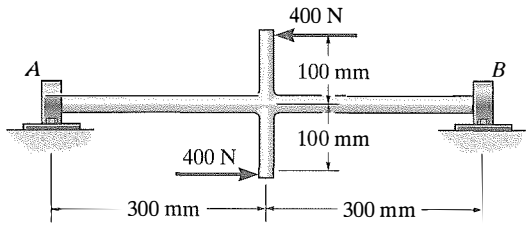
Problema 12.58

12.59. Uma ginasta de 60 kg está em pé no centro da trave (viga) de equilíbrio simplesmente apoiada. Se a trave for feita de madeira e tiver a seção transversal mostrada na figura, determine a deflexão máxima. Consideramos que os apoios em *A* e *B* são rígidos. $E_m = 12$ GPa.



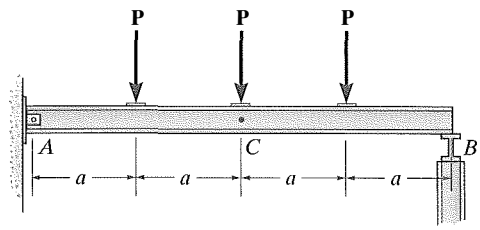
Problema 12.59

*12.60. O eixo é suportado por um mancal de apoio em *A*, que exerce somente reações verticais sobre o eixo, e por um mancal de encosto em *B*, que exerce reações horizontais, bem como reações verticais sobre o eixo. Determine a inclinação do eixo nos mancais. *EI* é constante.



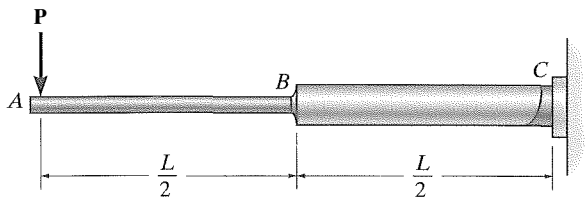
Problema 12.60

12.61. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a inclinação em A e o deslocamento em C. Considere que o apoio em A é um pino e em B, um rolete. EI é constante.



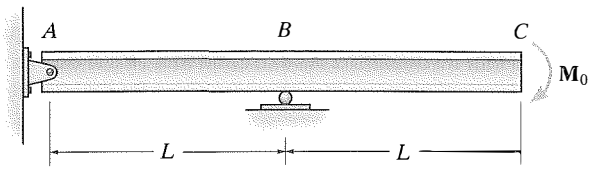
Problema 12.61

12.62. A haste é composta por dois eixos para os quais o momento de inércia de AB é I e de BC, $2I$. Determine a inclinação e a deflexão máximas da haste devido à carga. O módulo de elasticidade é E.



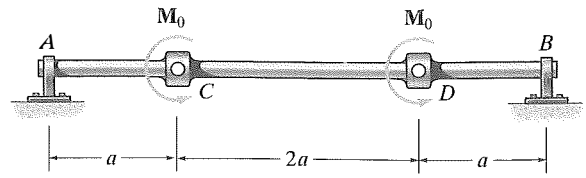
Problema 12.62

12.63. Determine a deflexão e a inclinação em C. EI é constante.



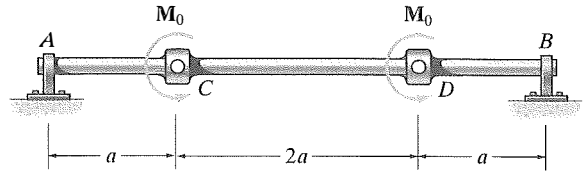
Problema 12.63

*__12.64.__ Se os mancais em A e B exercerem somente reações verticais sobre o eixo, determine a inclinação em A. EI é constante.



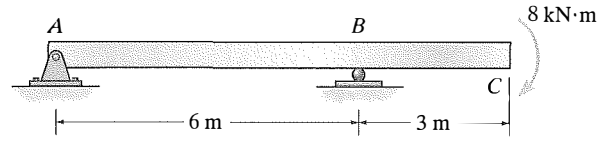
Problema 12.64

12.65. Se os mancais em A e B exercerem somente reações verticais sobre o eixo, determine a inclinação em C. EI é constante.



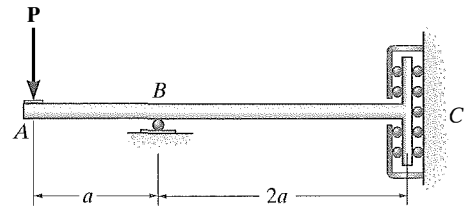
Problema 12.65

12.66. Determine a deflexão em C e a inclinação da viga em A, B e C. EI é constante.



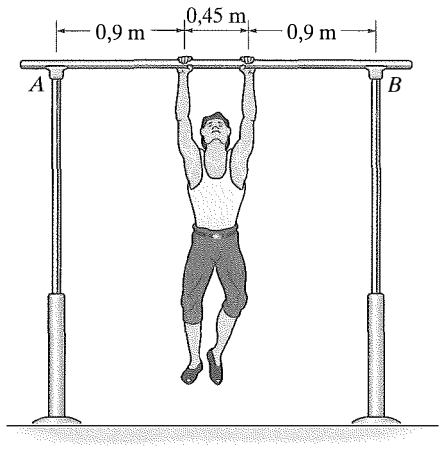
Problema 12.66

12.67. A barra é suportada pelo rolete em C, que permite deslocamento vertical, mas resiste a carga axial e momento. Se ela for submetida à carga mostrada na figura, determine a inclinação e o deslocamento em A. EI é constante.



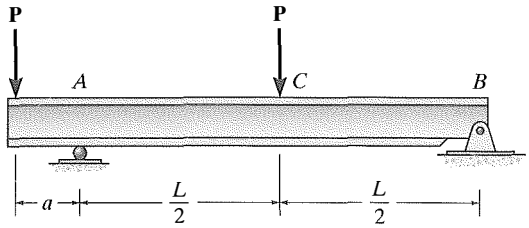
Problema 12.67

*__12.68.__ O acrobata pesa 750 N ($\approx$ 75 kg) e está suspenso pelos braços uniformemente no centro da barra alta. Determine a tensão de flexão máxima no tubo (barra) e sua deflexão máxima. O tubo é feito de aço L2 e tem diâmetro externo de 25 mm e espessura da parede de 3 mm.



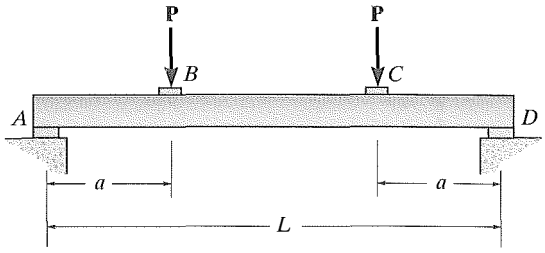
Problema 12.68

12.69. Determine o valor de a de modo que o deslocamento em C seja nulo. EI é constante.



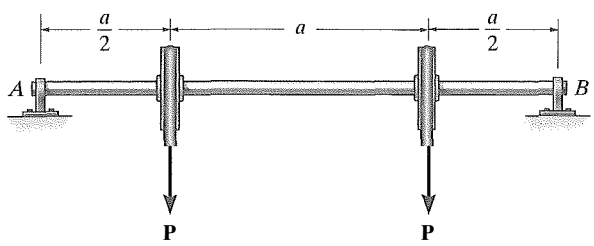
Problema 12.69

12.70. A viga é feita de um material cerâmico. Para obter seu módulo de elasticidade, ela é submetida às cargas elásticas mostradas na figura. Se o momento de inércia for I e a deflexão máxima medida na viga for Δ, determine E. Os suportes em A e D exercem somente reações verticais sobre a viga.



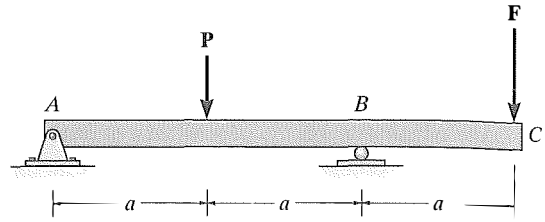
Problema 12.70

12.71. Determine a deflexão máxima do eixo. EI é constante. Os mancais exercem somente reações verticais sobre o eixo.



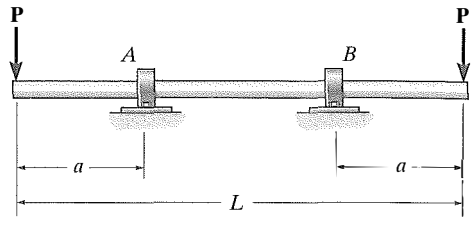
Problema 12.71

12.72. A viga está sujeita à carga $\mathbf{P}$ como mostra a figura. Determine o valor da força $\mathbf{F}$ que deve ser aplicada na extremidade da extensão C de modo que a deflexão em C seja nula. EI é constante.



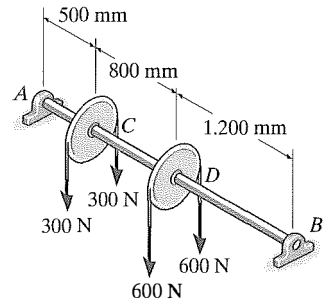
Problema 12.72

12.73. A que distância a os mancais de apoio A e B devem ser colocados de modo que a deflexão no centro do eixo seja igual à deflexão em suas extremidades? Os mancais exercem somente reações verticais sobre o eixo. EI é constante.



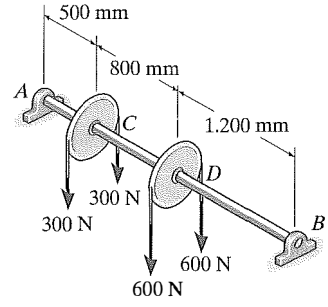
Problema 12.73

12.74. Determine a inclinação do eixo de aço A-36 de 50 mm de diâmetro nos mancais em A e B. Os mancais exercem somente reações verticais sobre o eixo.



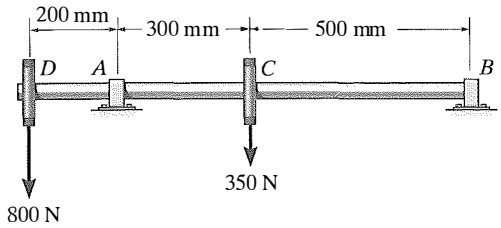
Problema 12.74

12.75. Determine a deflexão máxima do eixo de aço A-36 de 50 mm de diâmetro. As extremidades A e B do eixo estão apoiadas em mancais que exercem somente reações verticais sobre o eixo.



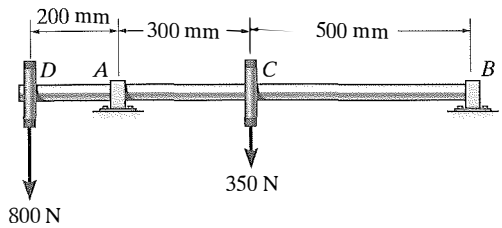
Problema 12.75

*12.76. Determine a inclinação do eixo de aço A-36 de 20 mm de diâmetro nos mancais em *A* e *B*. Os mancais exercem somente forças verticais sobre o eixo.



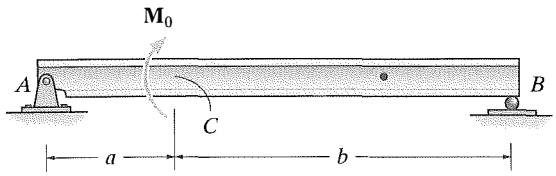
Problema 12.76

12.77. Determine o deslocamento do eixo de aço A-36 de 20 mm de diâmetro em *D*. Os mancais em *A* e *B* exercem somente reações verticais sobre o eixo.



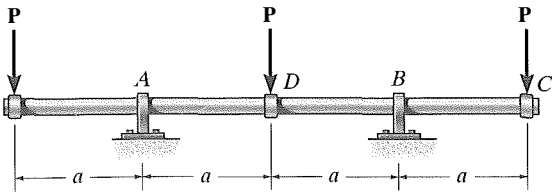
Problema 12.77

12.78. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a inclinação em *B* e a deflexão em *C*. *EI* é constante.



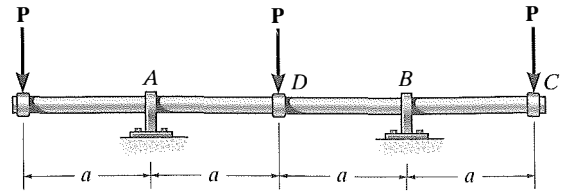
Problema 12.78

12.79. Determine a inclinação em *B* e o deslocamento em *C*. Os mancais em *A* e *B* exercem somente reações verticais sobre o eixo. *EI* é constante.



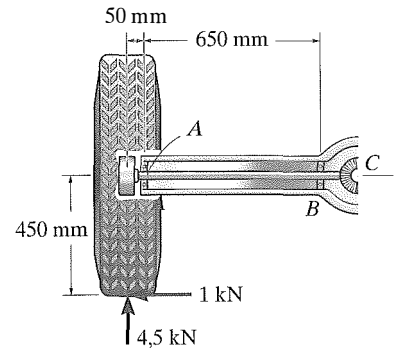
Problema 12.79

*12.80. Determine o deslocamento em *D* e a inclinação em *C*. Os mancais em *A* e *B* exercem somente reações verticais sobre o eixo. *EI* é constante.



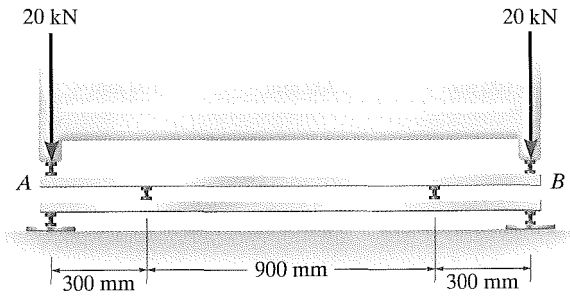
Problema 12.80

12.81. As duas componentes da força agem sobre o pneu do automóvel como mostra a figura. O pneu está fixo ao eixo, que é suportado pelos mancais em *A* e *B*. Determine a deflexão máxima do eixo. Considere que os mancais resistem somente a cargas verticais. A resistência ao empuxo no eixo ocorre em *C*. O eixo tem diâmetro de 32 mm e é feito de aço A-36. Despreze o efeito da carga axial sobre a deflexão.



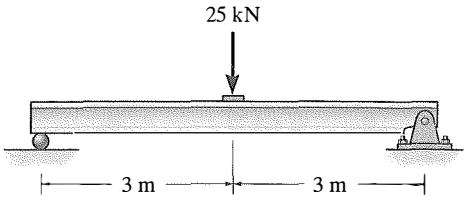
Problema 12.81

12.82. Determine o deslocamento em *D* e a inclinação em *C*. Os mancais em *A* e *B* exercem somente reações verticais sobre o eixo. *EI* é constante.



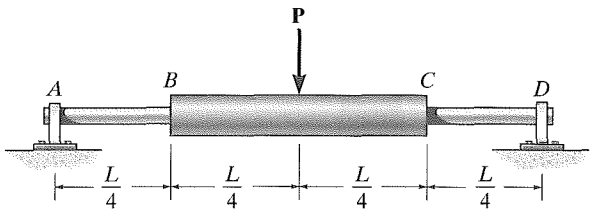
Problema 12.82

12.83. É possível que um dia as vigas feitas de plástico reforçado com fibras substituam as de aço A-36, visto que seu peso é 1/4 das de aço e são resistentes à corrosão. Utilizando a Tabela no Apêndice B, com $\sigma_{adm} = 160$ MPa e $\tau_{adm} = 84$ MPa, selecione a viga de aço de abas largas mais leve que suportará com segurança os 25 kN de carga e então calcule sua deflexão máxima. Qual seria a deflexão máxima dessa viga, se ela fosse feita de plástico reforçado com fibras com $E_p = 126$ GPa e tivesse o mesmo momento de inércia que o da viga de aço?



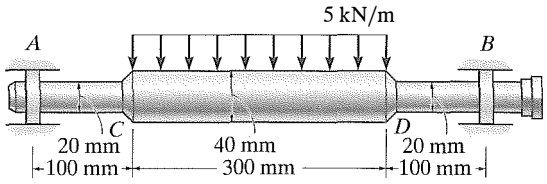
Problema 12.83

12.84. O eixo simplesmente apoiado tem momento de inércia $2I$ para a região BC e momento de inércia I para as regiões AB e CD. Determine a deflexão máxima do eixo decorrente da aplicação da carga $\mathbf{P}$. O módulo de elasticidade é E.



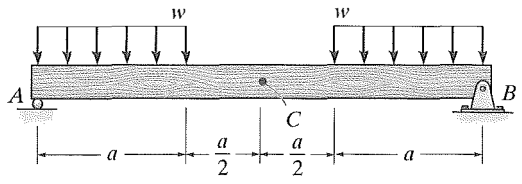
Problema 12.84

12.85. O eixo de aço A-36 é usado para suportar um rotor que exerce uma carga uniforme de 5 kN/m dentro da região CD do eixo. Determine a inclinação do eixo nos mancais A e B. Os mancais exercem somente reações verticais sobre o eixo.



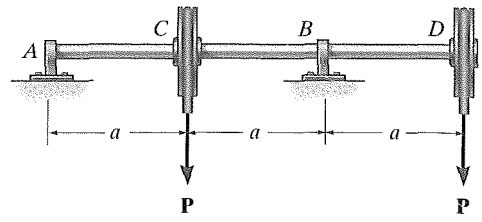
Problema 12.85

12.86. A viga está sujeita à carga mostrada na figura. Determine a inclinação em B e a deflexão em C. EI é constante.



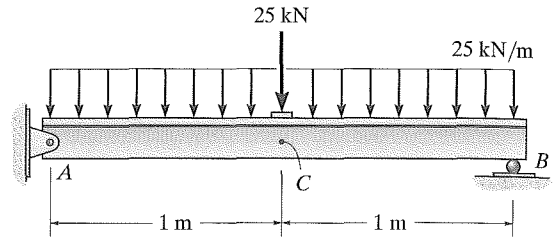
Problema 12.86

12.87. Determine a inclinação do eixo em A e o deslocamento em D. Os mancais em A e B exercem somente reações verticais sobre o eixo. EI é constante.



Problema 12.87

***12.88.** Determine a inclinação em B e o deslocamento em C. O elemento é um T estrutural de aço A-36 para o qual $I = 30(10^6)\ \text{mm}^4$.



Problema 12.88

12.5 Método da superposição

A equação diferencial $EI\,d^4v/dx^4 = -w(x)$ satisfaz os dois requisitos necessários para a aplicação do princípio da superposição; isto é, a carga $w(x)$ está relacionada linearmente com a deflexão $\sigma(x)$, e considera-se que ela não altera significativamente a geometria original da viga ou do eixo. Como resultado, as deflexões para uma série de cargas separadas que agem sobre uma viga podem ser superpostas. Por exemplo, se v_1 for a deflexão para uma carga e v_2 for a deflexão para outra, a deflexão total para ambas as cargas agindo em conjunto será a soma algébrica $v_1 + v_2$. Portanto, utilizando resultados tabulados para várias cargas de vigas, como os relacionados no Apêndice C ou os encontrados em vários manuais de engenharia, é possível determinar a inclinação e o deslocamento em um ponto sobre uma viga submetida a várias cargas diferentes efetuando a soma algébrica dos efeitos de suas várias partes componentes.

Os exemplos a seguir ilustram como usar o método da superposição para resolver problemas de deflexão nos quais ela é provocada não somente pelas deformações da viga, mas também por deslocamentos de corpos rígidos que podem ocorrer quando a viga é apoiada por molas ou quando partes de uma viga segmentada são suportadas por articulações.

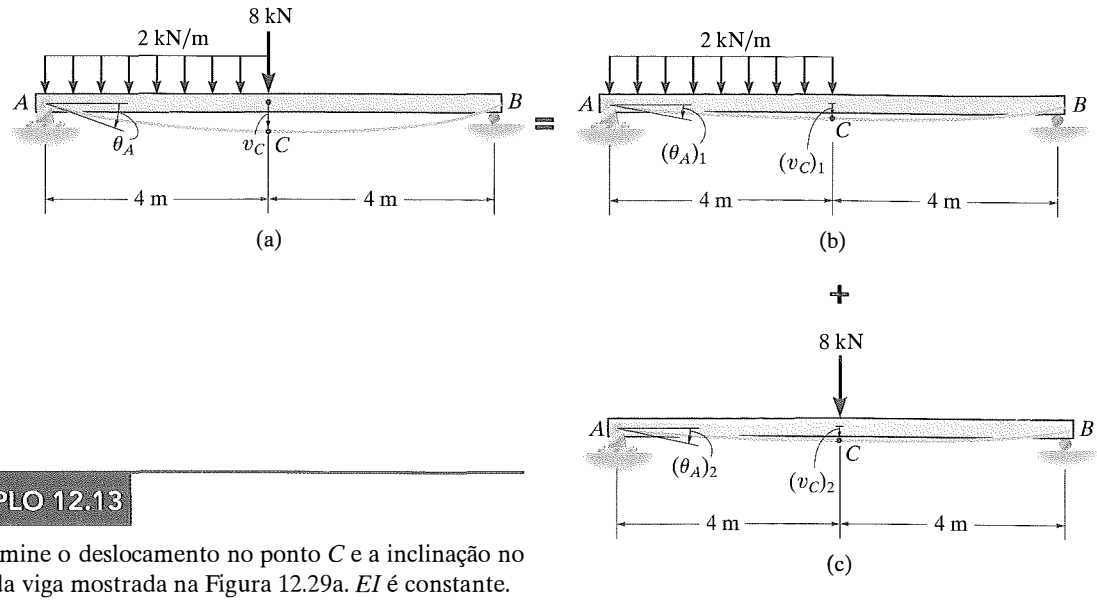


Figura 12.29

EXEMPLO 12.13

Determine o deslocamento no ponto C e a inclinação no apoio A da viga mostrada na Figura 12.29a. EI é constante.

SOLUÇÃO

A carga pode ser separada em duas partes componentes como mostram as figuras 12.29b e 12.29c. O deslocamento em C e a inclinação em A são determinados por meio da tabela no Apêndice C para cada parte.

Para a carga distribuída,

$$(\theta_A)_1 = \frac{3wL^3}{128EI} = \frac{3(2\text{ kN/m})(8\text{ m})^3}{128EI} = \frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

$$(v_C)_1 = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(2\text{ kN/m})(8\text{ m})^4}{768EI} = \frac{53{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Para a força concentrada de 8 kN,

$$(\theta_A)_2 = \frac{PL^2}{16EI} = \frac{8\text{ kN}(8\text{ m})^2}{16EI} = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

$$(v_C)_2 = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{8\text{ kN}(8\text{ m})^3}{48EI} = \frac{85{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

O deslocamento total em C e a inclinação em A são as somas algébricas dessas componentes. Por consequência,

$$(+\curvearrowright) \qquad \theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{56\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright$$

Resposta,

$$(+\downarrow) \qquad v_C = (v_C)_1 + (v_C)_2 = \frac{139\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resposta

EXEMPLO 12.14

Determine o deslocamento na extremidade C da viga em balanço com projeção mostrada na Figura 12.30a. EI é constante.

SOLUÇÃO

Visto que a tabela no Apêndice C *não* inclui vigas com projeções, a viga será subdividida em duas porções: uma simplesmente apoiada e a outra em balanço. Em primeiro lugar, calcularemos a inclinação em B provocada pela carga distribuída que age sobre o vão simplesmente apoiado (Figura 12.30b).

$$(\theta_B)_1 = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{5\text{ kN/m}(4\text{ m})^3}{24EI} = \frac{13{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$

Visto que esse ângulo é *pequeno*, $(\theta_B)_1 \approx \text{tg}(\theta_B)_1$ e o deslocamento vertical no ponto C é

$$(v_C)_1 = (2\text{ m})\left(\frac{13{,}33\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{26{,}67\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \uparrow$$

Em seguida, a carga de 10 kN sobre a projeção provoca uma força de 10 kN estaticamente equivalente e um momento conjugado de 20 kN·m no apoio B do vão simplesmente apoiado (Figura 12.30c). A força de 10 kN não provoca um deslocamento ou inclinação em B; todavia, o momento conjugado de 20 kN·m causa uma inclinação. A inclinação em B devido a esse momento é

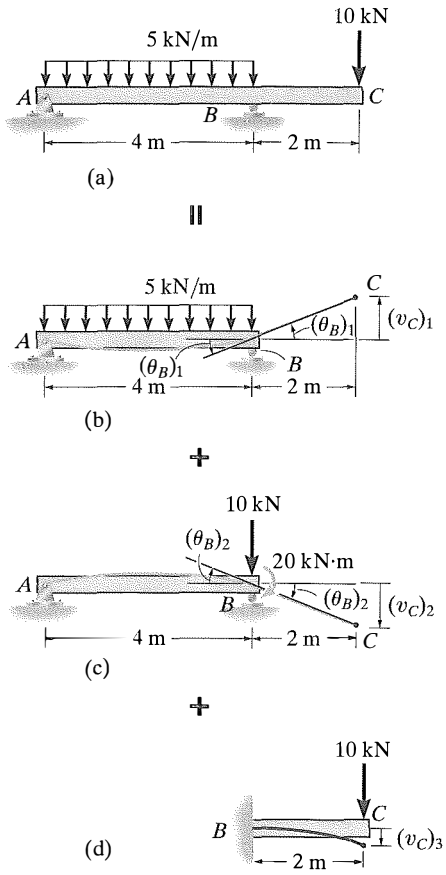


Figura 12.30

$$(\theta_B)_2 = \frac{M_0 L}{3EI} = \frac{20\ \text{kN}\cdot\text{m}(4\ \text{m})}{3EI} = \frac{26{,}67\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \downarrow$$

Desse modo, o ponto C na projeção é deslocado

$$(v_C)_2 = (2\ \text{m})\left(\frac{26{,}7\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{53{,}33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Por fim, a porção em balanço BC é deslocada pela força de 10 kN (Figura 12.30d). Temos

$$(v_C)_3 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{10\ \text{kN}(2\ \text{m})^3}{3EI} = \frac{26{,}67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Efetuando a soma algébrica desses resultados, obtemos o deslocamento final do ponto C,

$$(+\downarrow) \qquad v_C = -\frac{26{,}7}{EI} + \frac{53{,}3}{EI} + \frac{26{,}7}{EI} = \frac{53{,}3\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resposta

EXEMPLO 12.15

Determine o deslocamento na extremidade C da viga em balanço mostrada na Figura 12.31. EI é constante.

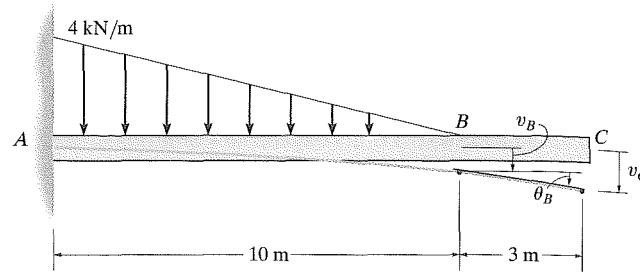


Figura 12.31

SOLUÇÃO

Utilizando a tabela no Apêndice C para a carga triangular, a inclinação e o deslocamento no ponto B são

$$\theta_B = \frac{w_0 L^3}{24EI} = \frac{4\ \text{kN/m}(10\ \text{m})^3}{24EI} = \frac{166{,}67\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$v_B = \frac{w_0 L^4}{30EI} = \frac{4\ \text{kN/m}(10\ \text{m})^4}{30EI} = \frac{1333{,}33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

A região não carregada da viga, BC, continua reta, como mostra a Figura 12.31. Visto que θ_B é pequeno, o deslocamento em C torna-se

$$(+\downarrow) \qquad v_C = v_B + \theta_B(3\ \text{m})$$

$$= \frac{1.333{,}33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{166{,}67\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}(3\ \text{m})$$

$$= \frac{1.833\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

Resposta

EXEMPLO 12.16

A barra de aço mostrada na Figura 12.32a está apoiada sobre duas molas em suas extremidades A e B. A rigidez de cada mola é $k = 45$ kN/m e no início elas não estão alongadas. Se a barra for carregada com uma força de 3 kN no ponto C, determine o deslocamento vertical da força. Despreze o peso da barra e considere $E_{aço} = 200$ GPa, $I = 4{,}6875 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$.

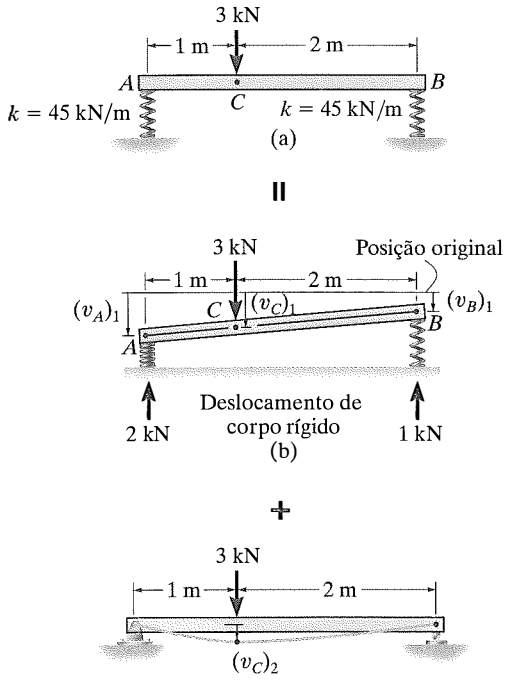


Figura 12.32

SOLUÇÃO

As reações nas extremidades A e B são calculadas como mostra a Figura 12.32b. Cada mola sofre uma deflexão de

$$(v_A)_1 = \frac{2\text{ kN}}{45\text{ kN/m}} = 0{,}0444\text{ m}$$

$$(v_B)_1 = \frac{1\text{ kN}}{45\text{ kN/m}} = 0{,}0222\text{ m}$$

Se a barra for considerada *rígida*, esses deslocamentos farão com que ela se mova para a posição mostrada na Figura 12.32b. Para esse caso, o deslocamento vertical em C é

$$(v_C)_1 = (v_B)_1 + \frac{2\text{ m}}{3\text{ m}}[(v_A)_1 - (v_B)_1]$$

$$= 0{,}0222\text{ m} + \frac{2}{3}[0{,}0444\text{ m} - 0{,}0282\text{ m}]$$

$$= 0{,}0370\text{ m} \downarrow$$

Podemos determinar o deslocamento em C provocado pela *deformação* da barra (Figura 12.32c), utilizando a tabela no Apêndice C. Temos

$$(v_C)_2 = \frac{Pab}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$$

$$= \frac{(3\text{ kN})(1\text{ m})(2\text{ m})[(3\text{ m})^2 - (2\text{ m})^2 - (1\text{ m})^2]}{6(200)(10^6)\text{ kN/m}^2(4{,}6875)(10^{-6})\text{ m}^4(3\text{ m})}$$

$$= 0{,}001422\text{ m} = 1{,}422\text{ mm} \downarrow$$

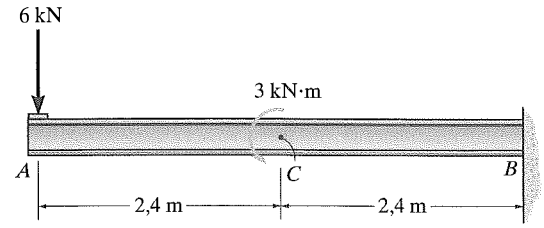
Somando as duas componentes do deslocamento, obtemos

$$(+\downarrow) \quad v_c = 0{,}0370\text{ m} + 0{,}001422\text{ m}$$

$$= 0{,}0384\text{ m} = 38{,}4\text{ mm} \downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

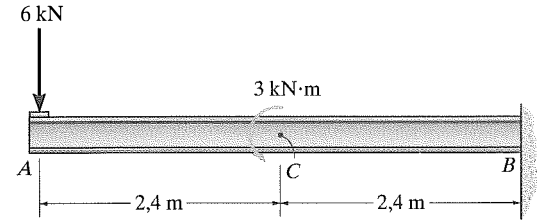
PROBLEMAS

12.89. A viga em balanço com perfil W200 × 71 feita de aço A-36 é submetida à carga mostrada na figura. Determine o deslocamento em sua extremidade A.



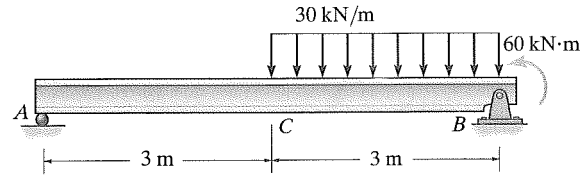
Problema 12.89

12.90. A viga em balanço com perfil W200 × 71 feita de aço A-36 é submetida à carga mostrada na figura. Determine o deslocamento em C e a inclinação em A.



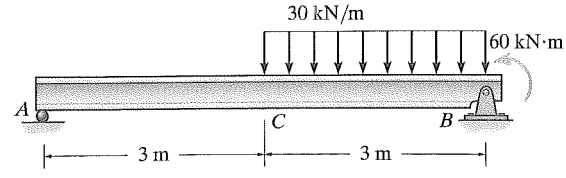
Problema 12.90

12.91. A viga simplesmente apoiada com perfil W360 × 64 feita de aço A-36 é submetida à carga mostrada na figura. Determine a deflexão em seu centro C.



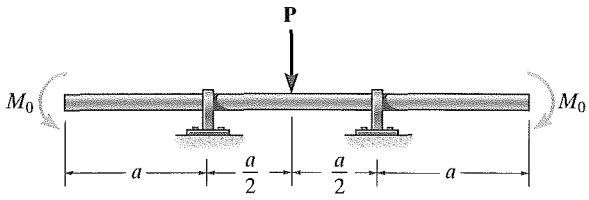
Problema 12.91

***12.92.** A viga simplesmente apoiada com perfil W360 × 64 feita de aço A-36 é submetida à carga mostrada na figura. Determine a inclinação em A e B.



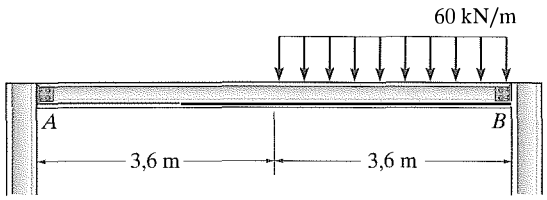
Problema 12.92

12.93. Determine o momento M_0 em termos da carga P e a dimensão a de modo que a deflexão no centro da viga seja nula. EI é constante.



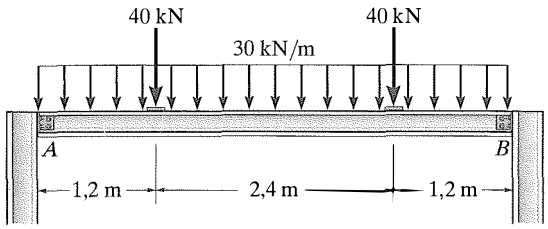
Problema 12.93

12.94. A viga suporta à carga mostrada na figura. Em razão do forro de gesso, as restrições determinam que a deflexão máxima não pode ultrapassar 1/360 do comprimento do vão. Selecione no Apêndice B a viga de abas largas de aço A-36 de menor peso que satisfará esse requisito e suportará a carga com segurança. A tensão de flexão admissível é σ_{adm} = 168 MPa e a tensão de cisalhamento admissível é τ_{adm} = 100 MPa. Considere que A é um rolete e B, um pino.



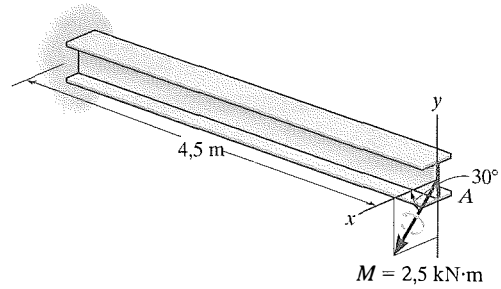
Problema 12.94

12.95. A viga simplesmente apoiada suporta uma carga uniforme de 30 kN/m. Em razão do forro de gesso, as restrições determinam que a deflexão máxima não pode ultrapassar 1/360 do comprimento do vão. Selecione no Apêndice B a viga de abas largas de aço A-36 de menor peso que satisfará esse requisito e suportará a carga com segurança. A tensão de flexão admissível é σ_{adm} = 168 MPa e a tensão de cisalhamento admissível é τ_{adm} = 100 MPa. Considere que A é um pino e B é um apoio de rolete.



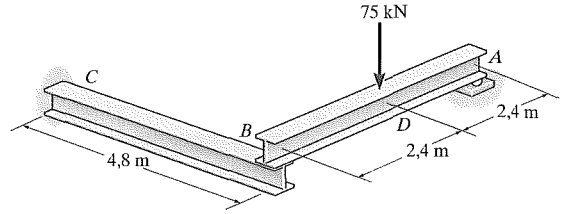
Problema 12.95

*__12.96.__ A viga em balanço com perfil W250 × 45 é feita de aço A-36 e está sujeita a uma flexão assimétrica provocada pelo momento aplicado. Determine a deflexão do centroide em sua extremidade A provocada pela carga. *Dica:* Determine as componentes do momento e use superposição.



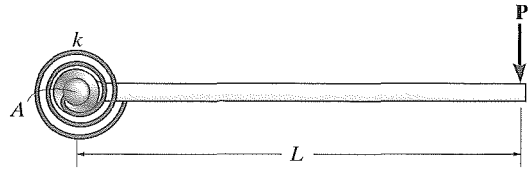
Problema 12.96

12.97. A estrutura é composta por uma viga em balanço CB e uma viga simplesmente apoiada AB. Se cada uma for feita de aço A-36 e tiver momento de inércia em torno de seu eixo principal $I_x = 46(10^6)$ mm^4, determine o deslocamento no centro D da viga BA.



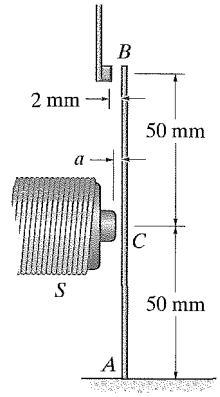
Problema 12.97

12.98. A extremidade A da haste está presa por um pino e acoplada a uma mola de torção de rigidez k que mede o torque por radiano de rotação da mola. Se uma força $\mathbf{P}$ for sempre aplicada perpendicularmente à extremidade da haste, determine o deslocamento da força. EI é constante.



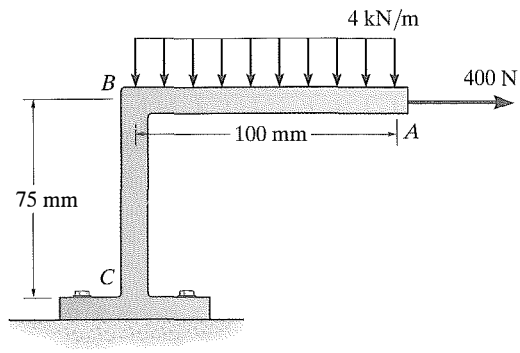
Problema 12.98

12.99. Um interruptor de relé é composto por uma tira fina de metal ou armadura AB feita de bronze vermelho C83400 que é atraída ao solenoide S por um campo magnético. Determine a menor força F exigida para atrair a armadura em C de modo a provocar contato na extremidade livre B. Calcule também qual seria a distância a para que esse fenômeno ocorra. A armadura é fixa em A e tem momento de inércia $I = 0{,}18(10^{-12})$ m^4.



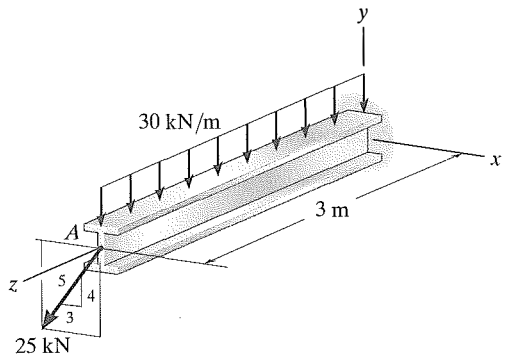
Problema 12.99

*12.100. Determine a deflexão vertical e a inclinação na extremidade A do suporte. Considere que ele está engastado na base e despreze a deformação axial do segmento AB. EI é constante.



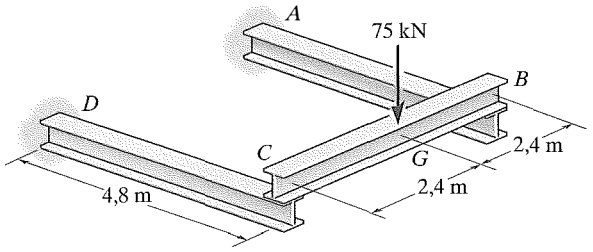
Problema 12.100

12.101. A viga com perfil W610 × 155 de aço A-36 é usada para suportar a carga uniforme distribuída e uma força concentrada que é aplicada a sua extremidade. Se a força agir em um ângulo com a vertical como mostra a figura, determine os deslocamentos horizontal e vertical no ponto A.



Problema 12.101

12.102. A estrutura é composta por duas vigas de aço A-36 em balanço CD e BA e uma viga simplesmente apoiada CB. Se cada uma for feita de aço e tiver momento de inércia em torno de seu eixo principal $I_x = 46(10^6)$ mm^4, determine a deflexão no centro G da viga CB.



Problema 12.102

12.6 Vigas e eixos estaticamente indeterminados

A análise de barras com cargas axiais e eixos com cargas de torção estaticamente indeterminados foi discutida nas seções 4.4 e 5.5, respectivamente. Nesta seção, ilustraremos um método geral para determinar as reações em vigas e eixos estaticamente indeterminados. Especificamente, um elemento estrutural de qualquer tipo será classificado como *estaticamente indeterminado*, se o número de reações desconhecidas *for maior* que o número de equações de equilíbrio disponíveis.

As reações adicionais dos apoios sobre a viga ou o eixo que *não* são necessárias para mantê-los em equilíbrio estável são denominadas *reações redundantes*. O número dessas reações redundantes é denominado *grau de indeterminação*. Por exemplo, considere a viga mostrada na Figura 12.33a. Se desenharmos o diagrama de corpo livre (Figura 12.33b), haverá quatro reações de apoio desconhecidas e, visto que há três equações de equilíbrio disponíveis para a solução, a viga é classificada como indeterminada de primeiro grau. $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_y$ ou $\mathbf{M}_A$ podem ser classificadas como a reação redundante porque, se qualquer dessas reações for removida, a viga permanecerá estável e em equilíbrio ($\mathbf{A}_x$ não pode ser classificada como redundante porque, se fosse removida, $\Sigma F_x = 0$ não seria satisfeita.) De modo semelhante, a *viga contínua* na Figura 12.34a é indeterminada de segundo grau, porque há cinco reações desconhecidas e somente três equações de equilíbrio disponíveis (Figura 12.34b). Nesse caso, as duas reações de suporte redundantes podem ser escolhidas entre $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{C}_y$ e $\mathbf{D}_y$.

Para determinar as reações em uma viga (ou eixo) estaticamente indeterminada, em primeiro lugar é necessário especificar as reações redundantes.

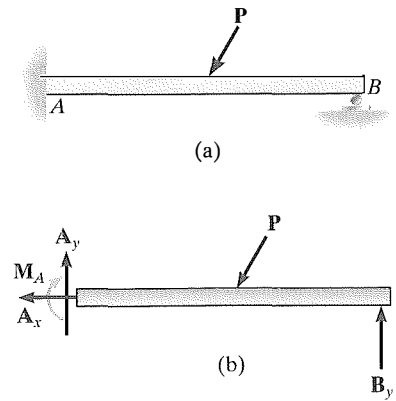


Figura 12.33

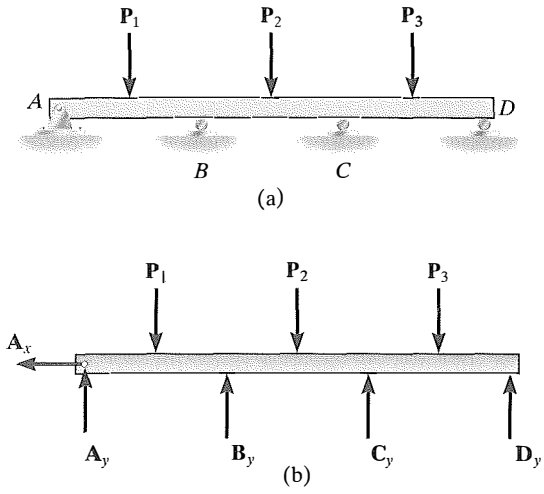


Figura 12.34

Podemos determinar essas reações redundantes pelas condições de geometria conhecidas como *condições de compatibilidade*. Uma vez determinadas, as reações redundantes são aplicadas à viga e as reações restantes são determinadas pelas equações de equilíbrio.

Nas seções seguintes, ilustraremos esse procedimento como solução, utilizando o método da integração (Seção 12.7), o método dos momentos de área (Seção 12.8) e o método da superposição (Seção 2.9).

12.7 Vigas e eixos estaticamente indeterminados — método da integração

O método da integração, discutido na Seção 12.2, requer duas integrações da equação diferencial $d^2v/dx^2 = M/EI$, visto que o momento interno M na viga é expresso em função da posição x. Entretanto, se a viga for estaticamente indeterminada, M também pode ser expresso em termos das reações redundantes *desconhecidas*. Após integrar essa equação duas vezes, haverá duas constantes de integração e as reações redundantes para determinar. Embora seja esse o caso, essas incógnitas sempre podem ser determinadas pelas condições de contorno e/ou condições de continuidade para o problema. Por exemplo, a viga na Figura 12.35a tem uma reação redundante. Ela pode ser $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{M}_A$ ou $\mathbf{B}_y$ (Figura 12.35b). Uma vez escolhida, o momento interno $\mathbf{M}$ pode ser escrito em termos da reação redundante e, integrando a relação momento/deslocamento, podemos determinar as duas constantes de integração e a reação redundante pelas *três* condições $v = 0$ em $x = 0$, $dv/dx = 0$ em $x = 0$ e $v = 0$ em $x = L$.

Os seguintes exemplos ilustram as aplicações específicas desse método utilizando o procedimento para análise descrito na Seção 12.2.

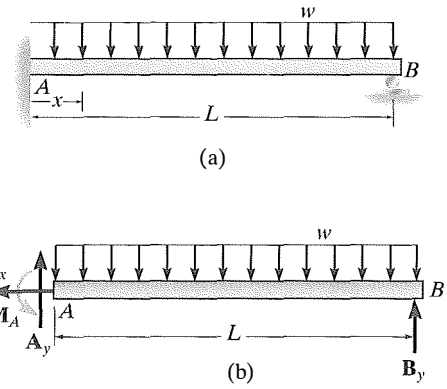


Figura 12.35

EXEMPLO 12.17

A viga está sujeita à carga distribuída mostrada na Figura 12.36a. Determine as reações em A. EI é constante.

SOLUÇÃO

Linha elástica. A viga sofre deflexão como mostra a Figura 12.36a. Somente uma coordenada x é necessária. Por conveniência, consideraremos orientada para a direita, visto que o momento interno é fácil de formular.

Função do momento fletor. A viga é indeterminada de primeiro grau como indicado pelo diagrama de corpo livre (Figura 12.36b). Podemos expressar o momento interno M

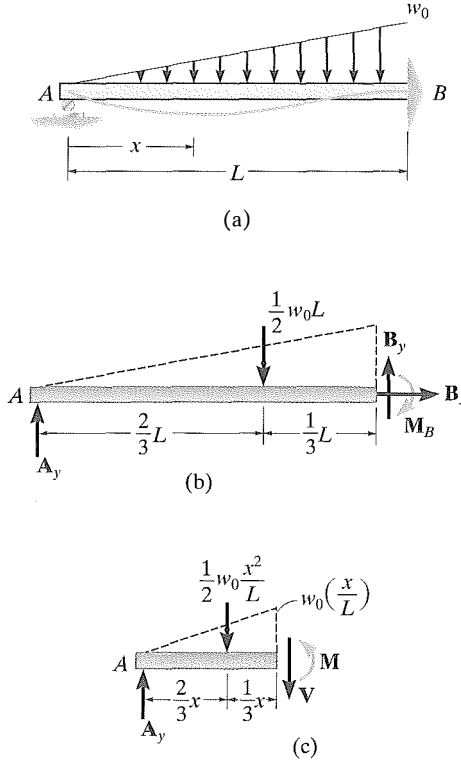


Figura 12.36

em termos da força redundante em A utilizando o segmento mostrado na Figura 12.36c. Aqui

$$M = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

Inclinação e linha elástica. Aplicando a Equação 12.10, temos

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$
$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} A_y x^2 - \frac{1}{24} w_0 \frac{x^4}{L} + C_1$$
$$EIv = \frac{1}{6} A_y x^3 - \frac{1}{120} w_0 \frac{x^5}{L} + C_1 x + C_2$$

As três incógnitas A_y, C_1 e C_2 são determinadas pelas condições de contorno $x = 0, v = 0; x = L, dv/dx = 0$ e $x = L$, $v = 0$. Aplicando essas condições obtemos

$$x = 0, v = 0; \qquad 0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$
$$x = L, \frac{dv}{dx} = 0; \qquad 0 = \frac{1}{2} A_y L^2 - \frac{1}{24} w_0 L^3 + C_1$$
$$x = L, v = 0; \qquad 0 = \frac{1}{6} A_y L^3 - \frac{1}{120} w_0 L^4 + C_1 L + C_2$$

Resolvendo,

$$A_y = \frac{1}{10} w_0 L$$
$$C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3 \quad C_2 = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Utilizando o resultado para A_y, as reações em B podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio (Figura 12.36b). Mostre que $B_x = 0$, $B_y = 2w_0L/5$ e $M_B = w_0L^2/15$.

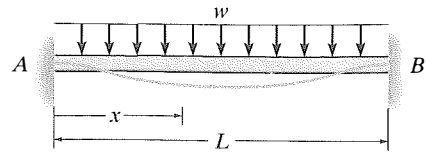
EXEMPLO 12.18

A viga na Figura 12.37a está engastada em ambas as extremidades e sujeita à carga uniforme mostrada na figura. Determine as reações nos apoios. Despreze o efeito da carga axial.

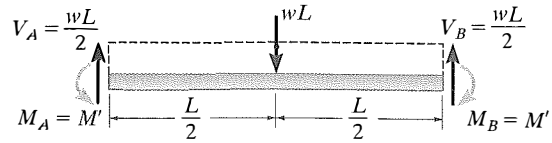
SOLUÇÃO

Linha elástica. A viga sofre deflexão como mostra a Figura 12.37a. Como no problema anterior, somente uma coordenada x é necessária para a solução, visto que a carga é contínua em todo o vão.

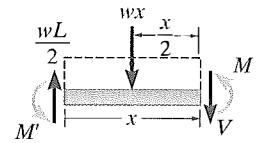
Função do momento fletor. Pelo diagrama de corpo livre (Figura 12.37b), as respectivas reações de cisalhamento e momento em A e B devem ser iguais, visto que há simetria



(a)



(b)



(c)

Figura 12.37

de carga e também de geometria. Por isso, a equação de equilíbrio, $\Sigma F_y = 0$, exige

$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} \qquad \textit{Resposta}$$

A viga é indeterminada de primeiro grau, onde M' é redundante. Utilizando o segmento da viga mostrado na Figura 12.37c, o momento interno **M** pode ser expresso em termos de M' da seguinte maneira:

$$M = \frac{wL}{2} x - \frac{w}{2} x^2 - M'$$

Inclinação e linha elástica. Aplicando a Equação 12.10, temos

$$EI\frac{d^2v}{dx} = \frac{wL}{2} x - \frac{w}{2} x^2 - M'$$
$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{wL}{4} x^2 - \frac{w}{6} x^3 - M'x + C_1$$
$$EIv = \frac{wL}{12} x^3 - \frac{w}{24} x^4 - \frac{M'}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

As três incógnitas, M', C_1 e C_2 podem ser determinadas pelas *três* condições de contorno $v = 0$ em $x = 0$, que produz $C_2 = 0$; $dv/dx = 0$ em $x = 0$, que produz $C_1 = 0$; e $v = 0$ $x = L$, que produz

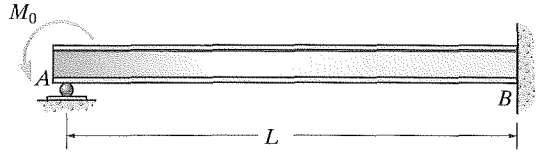
$$M' = \frac{wL^2}{12} \qquad \textit{Resposta}$$

Utilizando esses resultados, observe que, devido à simetria, a condição de contorno restante $dv/dx = 0$ em $x = L$ é automaticamente satisfeita.

OBSERVAÇÃO: Entenda que esse método de solução é geralmente adequado quando somente uma coordenada x é necessária para descrever a curva elástica. Se forem necessárias várias coordenadas x, as equações de continuidade têm de ser escritas, o que complica o processo de solução.

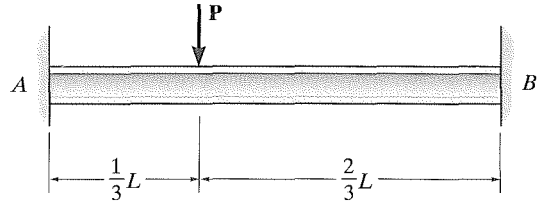
PROBLEMAS

12.103. Determine as reações nos apoios A e B; em seguida, trace o diagrama de momento fletor. EI é constante.



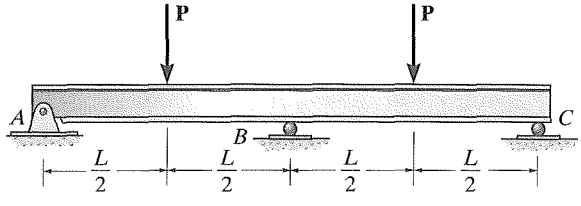
Problema 12.103

*12.104. Determine as reações nos apoios A e B; em seguida, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante. Despreze o efeito da carga axial.



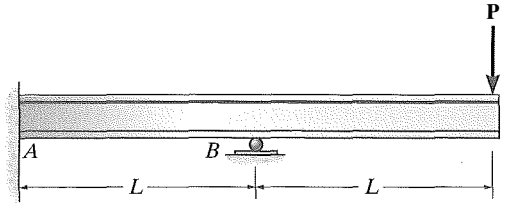
Problema 12.104

12.105. Determine as reações nos apoios A, B e C; em seguida, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



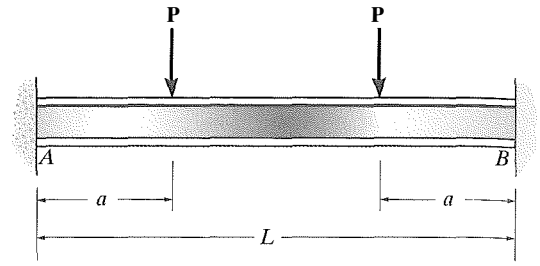
Problema 12.105

12.106. Determine as reações nos apoios e, em seguida, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



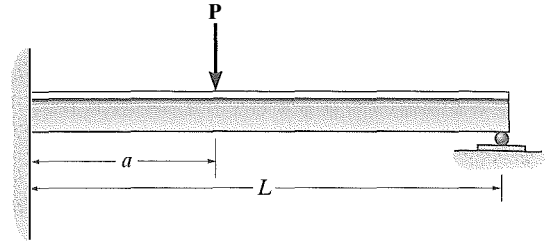
Problema 12.106

*12.107. Determine as reações ao momento nos apoios A e B. EI é constante.



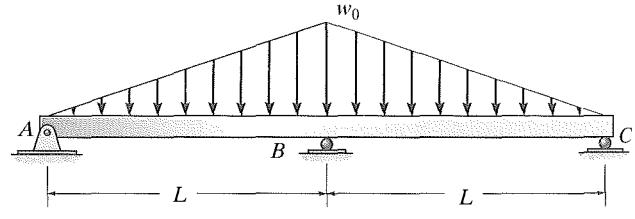
Problema 12.107

12.108. Determine o valor de a para o qual o momento máximo positivo tenha o mesmo valor que o momento máximo negativo. EI é constante.



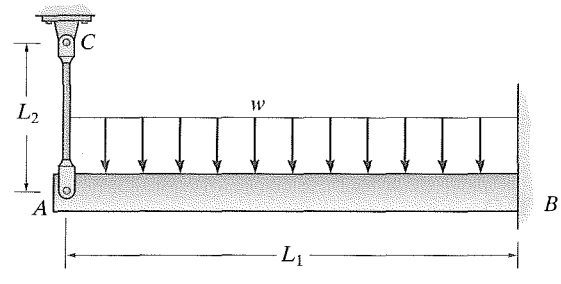
Problema 12.108

12.109. Determine as reações nos apoios e a seguir trace os diagramas de força cortante e momento. EI é constante.



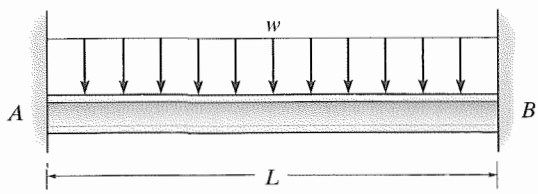
Problema 12.109

12.110. A viga tem E_1I_1 constante e é suportada pela parede fixa em B e pela haste AC. Se a haste tiver área de seção transversal A_2 e o material tiver módulo de elasticidade E_2, determine a força na haste.



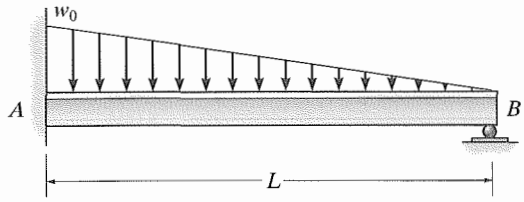
Problema 12.110

12.111. Determine as reações ao momento nos apoios A e B; a seguir, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. Resolva expressando o momento interno na viga em termos de A_y e M_A. EI é constante.



Problema 12.111

12.112. Determine as reações ao momento nos apoios A e B. EI é constante.



Problema 12.112

*12.8 Vigas e eixos estaticamente indeterminados — método dos momentos de área

Se o método dos momentos de área for usado para determinar as reações redundantes desconhecidas de uma viga ou eixo estaticamente indeterminado, então o diagrama M/EI deve ser obtido de modo tal que as reações redundantes sejam representadas como incógnitas nesse diagrama. Uma vez estabelecido o diagrama M/EI, os dois teoremas de momentos de área podem ser aplicados para termos as relações adequadas entre as tangentes sobre a linha elástica de modo a cumprir as condições de deslocamento e/ou inclinação nos apoios da viga ou eixo. Em todos os casos, o número dessas condições de compatibilidade será equivalente ao de reações redundantes e, dessa forma, obtém-se uma solução para as reações redundantes.

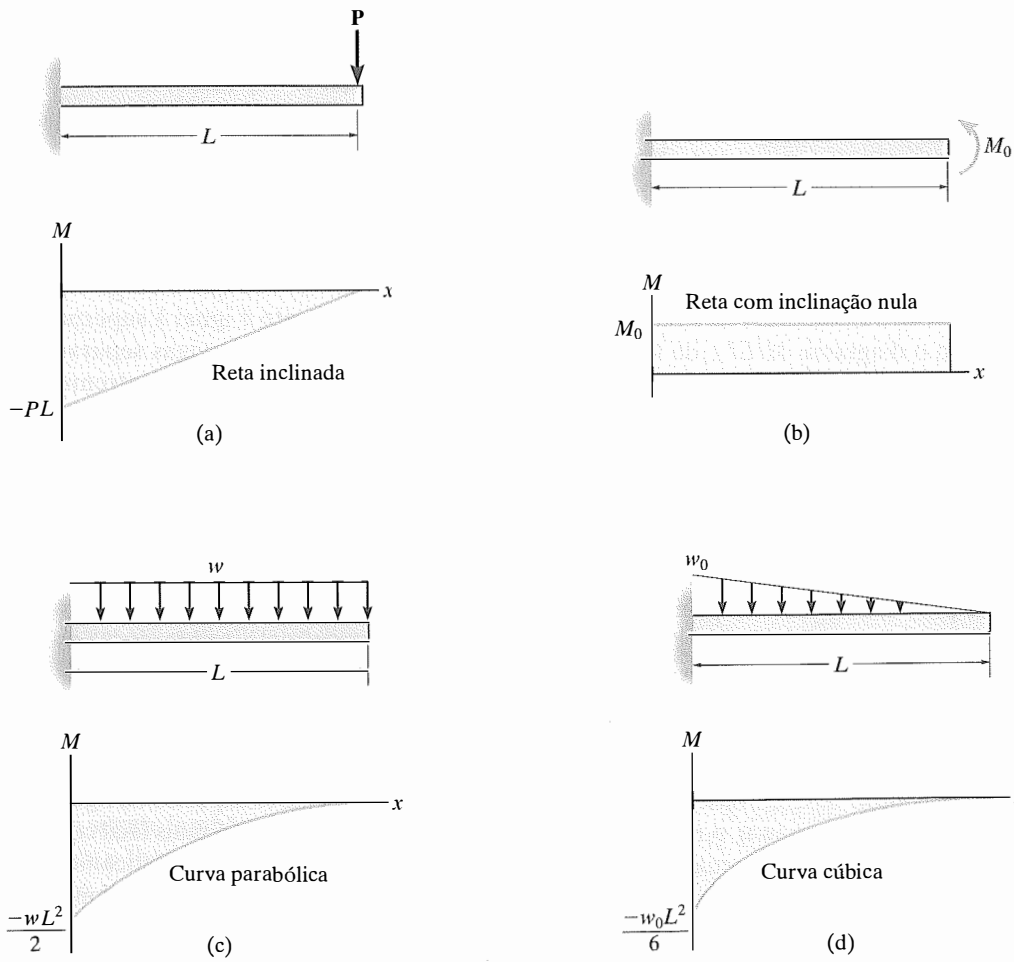
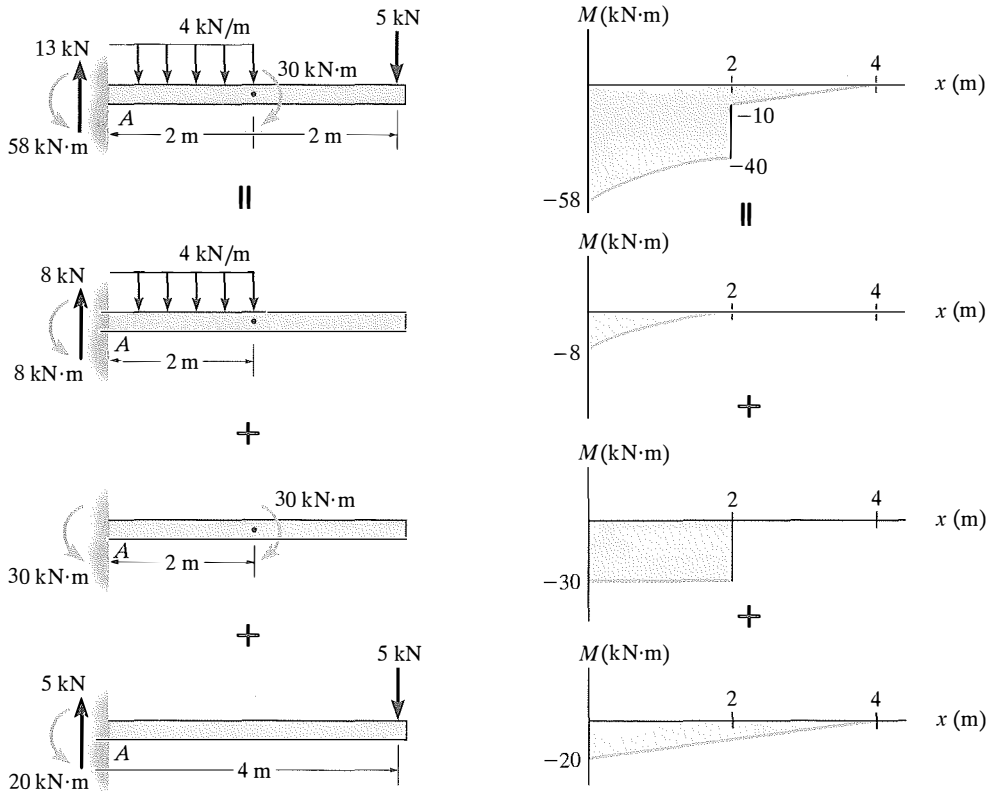


Figura 12.38



Superposição de carregamentos (a)

Superposição de diagramas de momento (b)

Figura 12.39

Diagrama de momentos construído pelo método da superposição. Visto que a aplicação dos teoremas dos momentos de área requer o cálculo da área sob o diagrama *M*/*EI* e da localização do centroide dessa área, muitas vezes é conveniente usar *diagramas M*/*EI separados* para *cada* uma das cargas conhecidas e redundantes, em vez de utilizar o diagrama resultante para calcular essas quantidades geométricas. Isso se aplica especialmente ao caso em que o diagrama de momento resultante apresente uma forma complicada. O método para traçar o diagrama de momento em partes baseia-se no princípio da superposição.

A maioria das cargas em vigas ou eixos será uma combinação das quatro cargas mostradas na Figura 12.38. A construção dos diagramas de momento associados, também mostrada nessa figura, foi discutida nos exemplos do Capítulo 6. Com base nesses resultados, mostraremos agora como usar o método da superposição para representar o diagrama de momento resultante para a viga em balanço mostrada na Figura 12.39a por uma série de diagramas de momento separados. Para tal, em primeiro lugar substituiremos as cargas por um sistema de cargas estaticamente equivalentes. Por exemplo, as três vigas em balanço mostradas na Figura 12.39a são estaticamente equivalentes à viga resultante, visto que a carga em cada ponto sobre a viga resultante é igual à superposição ou adição das cargas sobre as três vigas separadas. Na verdade, a reação ao cisalhamento na extremidade *A* é 13 kN quando se somam as reações nas vigas separadas. Da mesma maneira, o momento interno em qualquer ponto sobre a viga resultante é igual à soma dos momentos internos em qualquer ponto sobre as vigas separadas. Assim, se representarmos os diagramas de momento para cada viga separada (Figura 12.39b), a superposição desses diagramas dará o diagrama de momento para a viga resultante, mostrado na parte superior da figura. Por exemplo, pelos resultados de cada um dos diagramas de momento separados, temos que o momento na extremidade *A* é $M_A = -8\ \text{kN·m} - 30\ \text{kN·m} - 20\ \text{kN·m} = -58\ \text{kN·m}$, como verificado no diagrama de momento na parte superior da figura. Esse exemplo demonstra que às vezes é mais fácil construir uma série de diagramas de momento estaticamente equivalentes separados para a viga, *em vez* de construir seu diagrama de momento resultante mais complicado. É óbvio que a área e a localização do centroide para cada parte são mais fáceis de determinar do que as do centroide para o diagrama resultante.

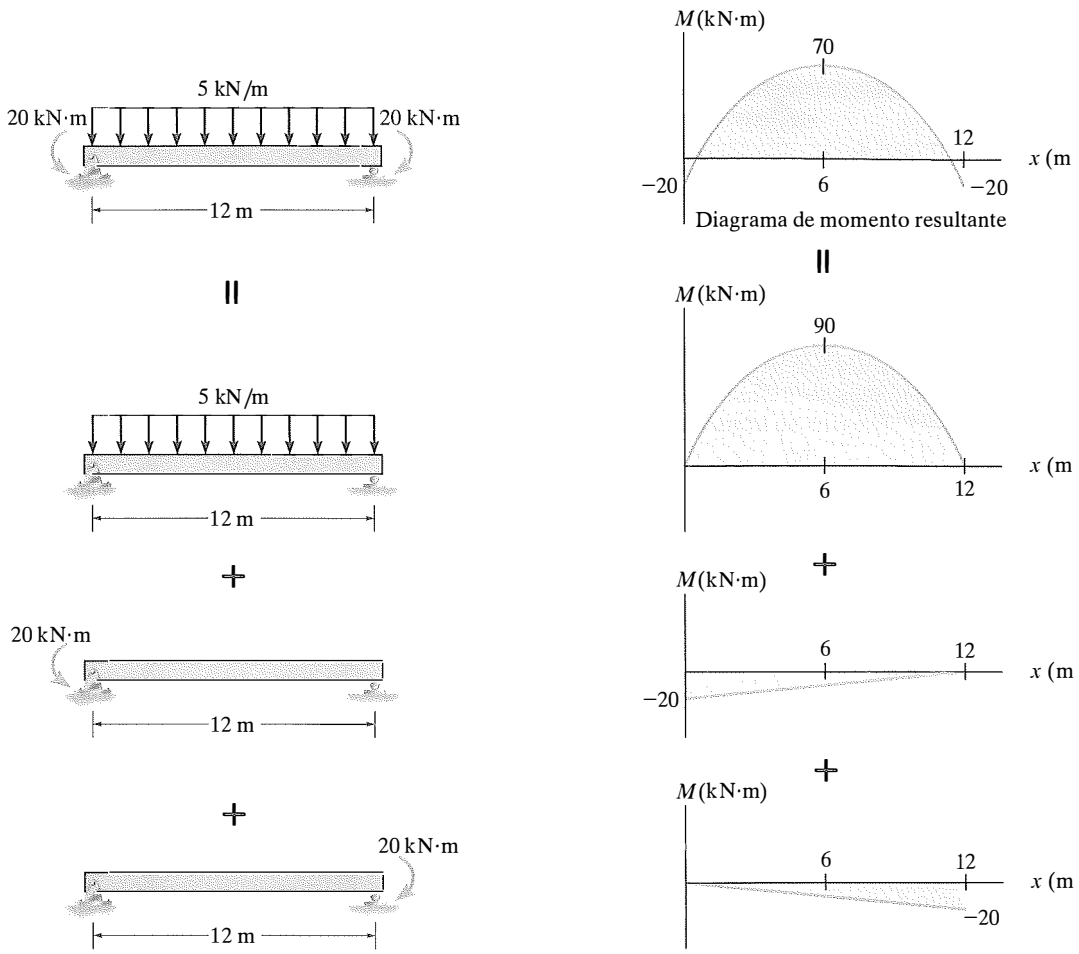


Figura 12.40

De forma semelhante, também podemos representar o diagrama de momento resultante para uma viga simplesmente apoiada utilizando uma superposição de diagramas de momento para uma série de vigas simplesmente apoiadas. Por exemplo, a carga na viga mostrada na parte superior da Figura 12.40a equivale à soma das cargas nas vigas mostradas abaixo dela. Por consequência, podemos usar a soma dos diagramas de momento para cada uma dessas três cargas em vez do diagrama de momento resultante mostrado na parte superior da Figura 12.40b. Para completo entendimento, esses resultados devem ser verificados.

Os exemplos a seguir também devem esclarecer alguns desses pontos e ilustrar como usar o teorema de momentos de área para obter as reações redundantes em vigas e eixos estaticamente indeterminados. As soluções seguem o procedimento para análise descrito na Seção 12.4.

EXEMPLO 12.19

A viga está sujeita à carga concentrada mostrada na Figura 12.41a. Determine as reações nos apoios. EI é constante.

SOLUÇÃO

Diagrama *M*/*EI*. O diagrama de corpo livre é mostrado na Figura 12.41b. Usando o método da superposição, os diagramas M/EI separados para a reação redundante $\mathbf{B}_y$ e para a carga $\mathbf{P}$ são mostrados na Figura 12.41c.

Linha elástica. A curva da linha elástica para a viga é mostrada na Figura 12.41d. As tangentes nos apoios A e B foram traçadas. Visto que $\Delta_B = 0$, temos

$$t_{B/A} = 0$$

Teorema dos momentos de área. Aplicando o Teorema 2, temos

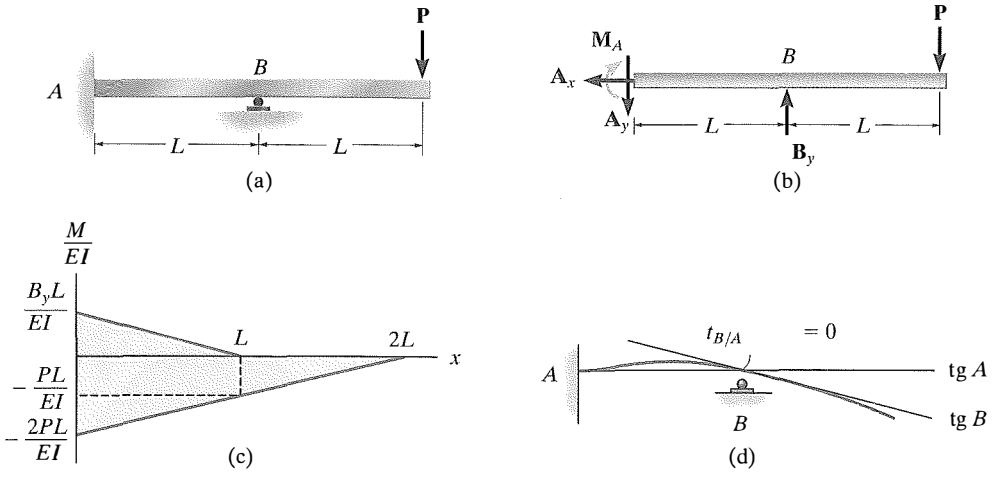


Figura 12.41

$$t_{B/A} = \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_yL}{EI}\right)L\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{-PL}{EI}(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-PL}{EI}\right)(L)\right] = 0$$

$$B_y = 2{,}5P \qquad \textit{Resposta}$$

Equações de equilíbrio. Utilizando esse resultado, as reações em A no diagrama de corpo livre (Figura 12.41b), são determinadas da seguinte maneira:

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0; \qquad A_x = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -A_y + 2{,}5P - P = 0$$

$$A_y = 1{,}5P \qquad \textit{Resposta}$$

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0; \qquad -M_A + 2{,}5P(L) - P(2L) = 0$$

$$M_A = 0{,}5PL \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.20

A viga está sujeita ao momento em sua extremidade C como mostra a Figura 12.42a. Determine a reação em B. EI é constante.

SOLUÇÃO

Diagrama *M/EI*. O diagrama de corpo livre é mostrado na Figura 12.42b. Por inspeção, a viga é indeterminada de primeiro grau. Para obter uma solução direta, escolheremos $\mathbf{B}_y$ como a redundante. Utilizando superposição, os diagramas *M/EI* para $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{M}_0$, cada um aplicado a uma viga simplesmente apoiada, são mostrados na Figura 12.42c. (Observe que para tal viga, A_x, A_y e C_y não contribuem com um diagrama *M/EI*.)

Linha elástica. A curva da linha elástica para a viga é mostrada na Figura 12.42d. As tangentes em A, B e C foram traçadas. Visto que $\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = 0$, então os desvios tangenciais mostrados devem ser proporcionais; isto é,

$$t_{B/C} = \frac{1}{2}t_{A/C}$$

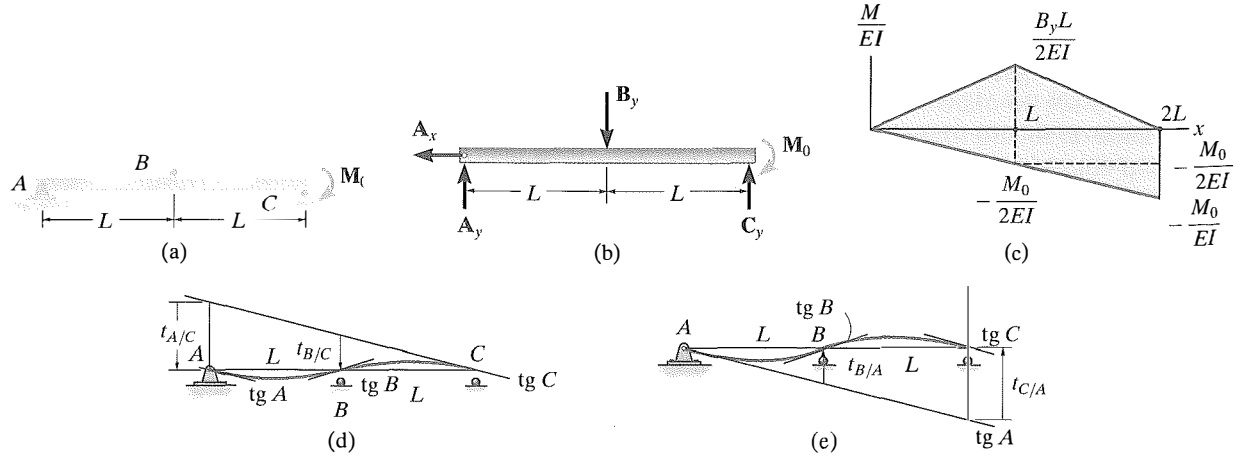


Figura 12.42

Pela Figura 12.42c, temos

$$t_{B/C} = \left(\frac{1}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_y L}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right]$$

$$t_{A/C} = (L)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_y L}{2EI}\right)(2L)\right] + \left(\frac{2}{3}(2L)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{EI}\right)(2L)\right]$$

Substituindo na Equação 1 e simplificando, obtemos

$$B_y = \frac{3M_0}{2L} \qquad \textit{Resposta}$$

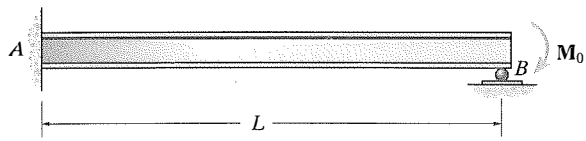
Equações de equilíbrio. Agora as reações em A e C podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio (Figura 12.42b). Mostre que $A_x = 0, C_y = 5M_0/4L$ e $A_y = M_0/4L$.

Observe pela Figura 12.42e que esse problema também pode ser resolvido em termos dos desvios tangenciais,

$$t_{B/A} = \frac{1}{2}t_{C/A}$$

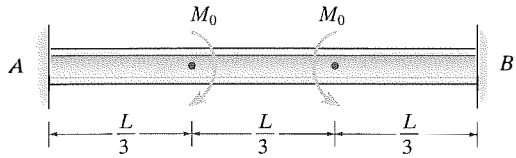
PROBLEMAS

12.113. Determine as reações ao momento nos apoios A e B; a seguir, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



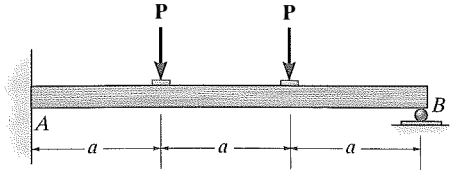
Problema 12.113

12.114. Determine as reações ao momento nos apoios A e B; a seguir trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



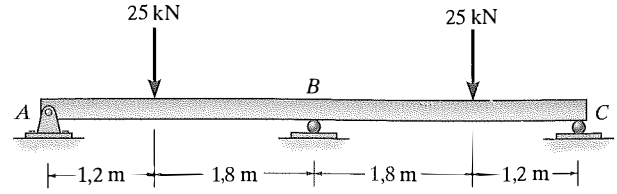
Problema 12.114

12.115. Determine as reações nos apoios. EI é constante.



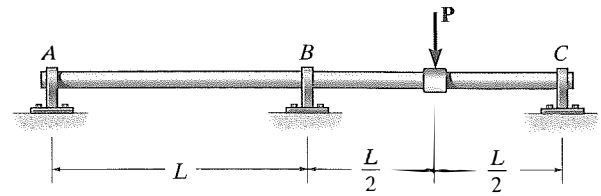
Problema 12.115

*12.116. Determine as reações nos apoios e trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



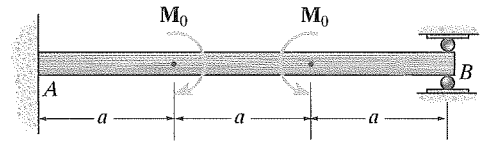
Problema 12.116

12.117. Determine as reações nos apoios e trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante. O apoio B é um mancal de encosto.



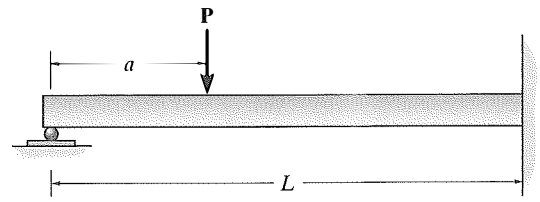
Problema 12.117

12.118. Determine as reações nos apoios. EI é constante.



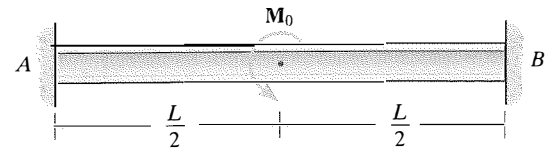
Problema 12.118

12.119. Determine o valor de a para o qual o momento positivo máximo tem o mesmo valor que o momento negativo máximo. EI é constante.



Problema 12.119

*12.120. Determine as reações ao momento nos apoios A e B; a seguir, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



Problema 12.120

12.9 Vigas e eixos estaticamente indeterminados — método da superposição

O método da superposição foi usado anteriormente para resolver cargas redundantes em barras com cargas axiais e eixos com cargas de torção. Para aplicar esse método à solução de vigas (ou eixos) estaticamente indeterminadas, em primeiro lugar é necessário identificar as reações de apoios redundantes como explicado na Seção 12.6. Ao *remover* essas reações da viga, obtemos a denominada *viga primária*, que é estaticamente determinada e estável e submetida *somente* a carga externa. Se adicionarmos a essa viga uma sucessão de vigas apoiadas de maneira semelhante, cada qual carregada com uma reação redundante *separada*, pelo princípio da superposição, obtemos a viga carregada propriamente dita. Por fim, para resolver para as reações redundantes, temos de escrever as *condições de compatibilidade* que existem nos apoios sobre os quais cada uma das reações redundantes age. Visto que as forças redundantes são determinadas diretamente dessa maneira, esse método de análise é às vezes denominado ***método da força***. Uma vez obtidas as reações redundantes, as outras reações sobre a viga são determinadas pelas três equações de equilíbrio.

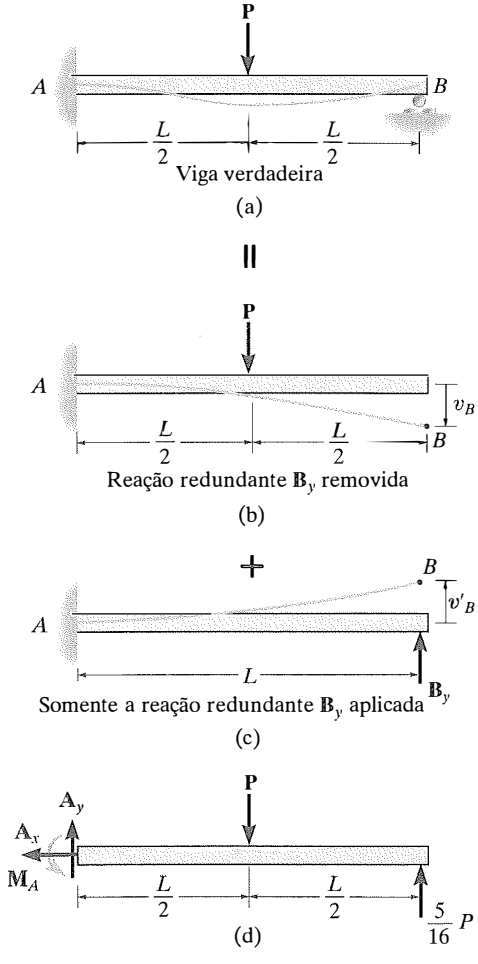


Figura 12.43

Para esclarecer esses conceitos, considere a viga mostrada na Figura 12.43a. Se escolhermos a reação $\mathbb{B}_y$ no rolete como a redundante, a viga primária é mostrada na Figura 12.43b; a viga com a reação redundante $\mathbb{B}_y$ agindo sobre ela é a mostrada na Figura 12.43c. O deslocamento no rolete tem de ser nulo e, uma vez que o deslocamento do ponto B sobre a viga primária é v_B, e que $\mathbb{B}_y$ provoca o deslocamento do ponto B a uma distância v'_B para cima, podemos escrever a equação de compatibilidade em B como

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -v_B + v'_B$$

Os deslocamentos v_B e v'_B podem ser obtidos por meio de qualquer um dos métodos discutidos nas seções 12.2 a 12.5. Aqui nós os obtivemos diretamente da tabela no Apêndice C. Temos

$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} \qquad \text{e} \qquad v'_B = \frac{B_y L^3}{3EI}$$

Substituindo na equação de compatibilidade, obtemos

$$0 = -\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{B_y L^3}{3EI}$$

$$B_y = \frac{5}{16}P$$

Agora que $\mathbb{B}_y$ é conhecida, as reações na parede serão determinadas pelas três equações de equilíbrio aplicadas à viga inteira (Figura 12.43d). Os resultados são

$$A_x = 0 \qquad A_y = \frac{11}{16}P$$

$$M_A = \frac{3}{16}PL$$

Como afirmamos na Seção 12.6, a escolha da reação redundante é *arbitrária*, desde que a viga primária permaneça estável. Por exemplo, o momento em A para a viga na Figura 12.44a também pode ser escolhido como a reação redundante. Nesse caso, a capacidade da viga de resistir a $\mathbb{M}_A$ é removida e, portanto, a viga primária passa a ser uma viga apoiada no pino em A (Figura 12.44b). Além disso, a reação redundante em A age

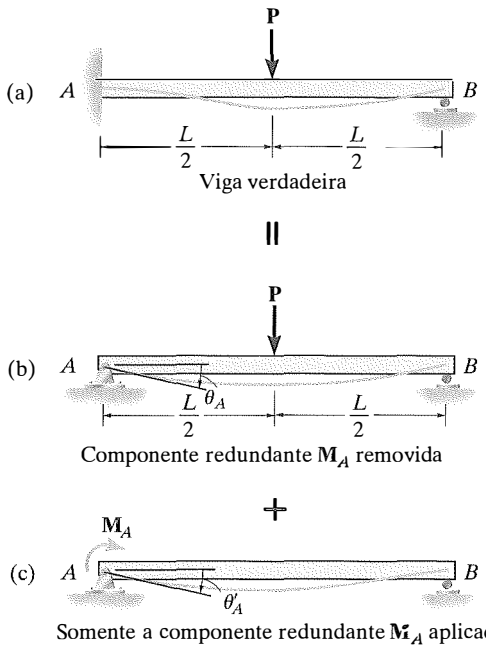


Figura 12.44

sozinha sobre essa viga (Figura 12.44c). Designando-se a inclinação em A provocada pela carga $\mathbb{P}$ por θ_A e inclinação em A provocada pela reação redundante $\mathbb{M}_A$ por θ'_A, a equação de compatibilidade para a inclinação em A exige

$$(\curvearrowright+) \qquad 0 = \theta_A + \theta'_A$$

Usando novamente a tabela no Apêndice C, temos

$$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI} \qquad \text{e} \qquad \theta'_A = \frac{M_A L}{3EI}$$

Logo,

$$0 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_A L}{3EI}$$

$$M_A = -\frac{3}{16}PL$$

Esse é o mesmo resultado calculado anteriormente. Aqui o sinal negativo para $\mathbb{M}_A$ significa simplesmente que $\mathbb{M}_A$ age no sentido contrário da direção mostrada na Figura 12.44c.

Outro exemplo que ilustra esse método é dado na Figura 12.45a. Nesse caso, a viga é indeterminada de segundo grau e, portanto, serão necessárias *duas* equações de compatibilidade para a solução. Escolheremos as forças nos apoios de rolete B e C como redundantes. A viga primária (estaticamente determinada) deforma-se como mostra a Figura 12.45b quando as forças redundantes são removidas. Cada força redundante deforma essa viga como mostram as figuras 12.45c e 12.45d, respectivamente. Por superposição, as equações de compatibilidade para os deslocamentos em B e C são

$$\begin{aligned} (+\downarrow) \qquad & 0 = v_B + v'_B + v''_B \\ (+\downarrow) \qquad & 0 = v_C + v'_C + v''_C \end{aligned} \tag{12.22}$$

Aqui as componentes do deslocamento v'_B e v'_C serão expressas em termos da incógnita $\mathbb{B}_y$, e as componentes v''_B e v''_C, em termos da incógnita $\mathbb{C}_y$. Quando esses deslocamentos são determinados e substituídos na Equação 12.22, essas equações podem ser resolvidas simultaneamente para as duas incógnitas $\mathbb{B}_y$ e $\mathbb{C}_y$.

Os seguintes exemplos ilustram a aplicação desse procedimento. Por questão de concisão, todos os deslocamentos e inclinações foram determinados usando a tabela no Apêndice C.

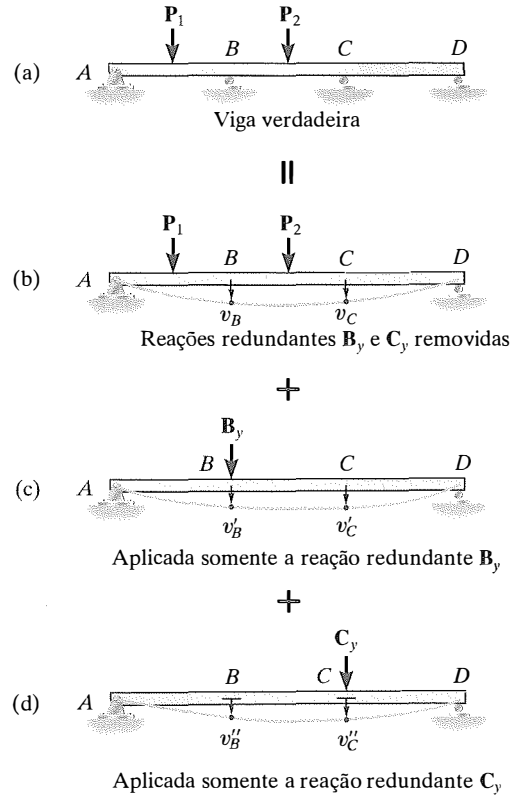


Figura 12.45

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um meio para aplicar o método da superposição (ou o método da força) para determinar as reações em vigas ou eixos estaticamente indeterminados.

Linha elástica

- Especifique as forças ou momentos redundantes desconhecidos que devem ser removidos da viga para que ela fique estaticamente determinada e estável.
- Utilizando o princípio da superposição, desenhe a viga estaticamente indeterminada e represente-a como uma sequência de *vigas estaticamente determinadas* correspondentes.
- A primeira dessas vigas, a primária, suporta as mesmas cargas externas que a estaticamente indeterminada, e cada uma das outras vigas 'adicionadas' à primária mostra aquela carregada com uma força ou momento redundante separado.
- Faça um rascunho da curva de deflexão para cada viga e indique simbolicamente o deslocamento ou inclinação no ponto de cada força ou momento redundante.

Equações de compatibilidade

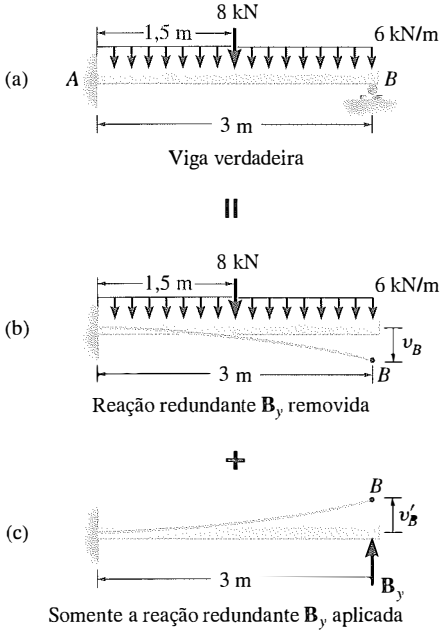
- Escreva uma equação de compatibilidade para o deslocamento ou inclinação em cada ponto onde há uma força redundante ou momento.
- Determine todos os deslocamentos ou inclinações utilizando um método adequado como explicado nas seções 12.2 a 12.5.
- Substitua os resultados nas equações de compatibilidade e resolva para as reações redundantes desconhecidas.
- Se um valor numérico para uma reação redundante for *positivo*, ela terá o mesmo *sentido de direção* previsto originalmente. De maneira semelhante, um valor numérico *negativo* indica que a reação redundante age *em direção* oposta ao *sentido de direção* previsto.

Equações de equilíbrio

- Uma vez determinadas as forças e/ou momentos redundantes, as reações desconhecidas restantes podem ser determinadas pelas equações de equilíbrio aplicadas aos carregamentos mostrados no diagrama de corpo livre da viga.

EXEMPLO 12.21

Determine as reações no apoio de rolete B da viga mostrada na Figura 12.46a e trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



SOLUÇÃO

Princípio da superposição. Por inspeção, a viga é estaticamente indeterminada de primeiro grau. O apoio de rolete em B será escolhido como a reação redundante, portanto $\mathbf{B}_y$ será determinada *diretamente*. As figuras 12.46b e 12.46c mostram a aplicação do princípio da superposição. Aqui consideramos que $\mathbf{B}_y$ age para cima na viga.

Equação de compatibilidade. Considerando o deslocamento positivo para baixo, a equação de compatibilidade em B é

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B - v'_B \qquad (1)$$

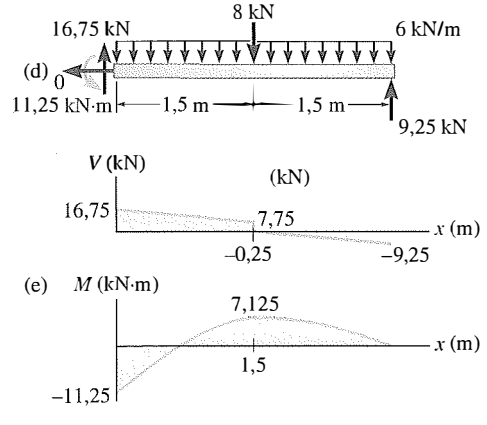


Figura 12.46

Esses deslocamentos podem ser obtidos diretamente da tabela no Apêndice C.

$$v_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{5PL^3}{48EI}$$

$$= \frac{6\text{ kN/m}\cdot(3\text{ m})^4}{8EI} + \frac{5(8\text{ kN})(3\text{ m})^3}{48EI} = \frac{83{,}25\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(3\text{ m})^3}{3EI} = \frac{(9\text{ m}^3)B_y}{EI}\uparrow$$

Substituindo na Equação 1 e resolvendo, obtemos

$$0 = \frac{83{,}25}{EI} - \frac{9B_y}{EI}$$

$$B_y = 9{,}25\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Equações de equilíbrio. Utilizando esse resultado e aplicando as três equações de equilíbrio, obtemos os resultados mostrados no diagrama de corpo livre da viga na Figura 12.46d. Os diagramas de força cortante e momento fletor são mostrados na Figura 12.46e.

EXEMPLO 12.22

Determine as reações na viga mostrada na Figura 12.47a. Devido à carga e à má construção, o apoio de rolete em B cede 12 mm. Considere $E = 200$ GPa e $I = 80(10^6)\text{mm}^4$.

SOLUÇÃO

Princípio da superposição. Por inspeção, a viga é indeterminada de primeiro grau. O apoio de rolete em B será escolhido como a reação redundante. O princípio da superposição é mostrado nas figuras 12.47b e 12.47c. Aqui consideramos que $\mathbf{B}_y$ age para cima na viga.

Equação de compatibilidade. Com referência ao ponto B, utilizando unidades métricas, exige-se que

$$(+\downarrow) \qquad 0{,}012\text{ m} = v_B - v'_B \qquad (1)$$

Utilizando a Tabela no Apêndice C, os deslocamentos são

$$v_B = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(24\text{ kN/m})(8\text{ m})^4}{768EI} = \frac{640\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{B_y(8\text{ m})^3}{48EI} = \frac{10{,}67\text{ m}^3 B_y}{EI}\uparrow$$

Assim, a Equação 1 torna-se

$$0{,}012EI = 640 - 10{,}67B_y$$

Expressando E e I nas unidades kN/m² e m⁴, respectivamente, temos

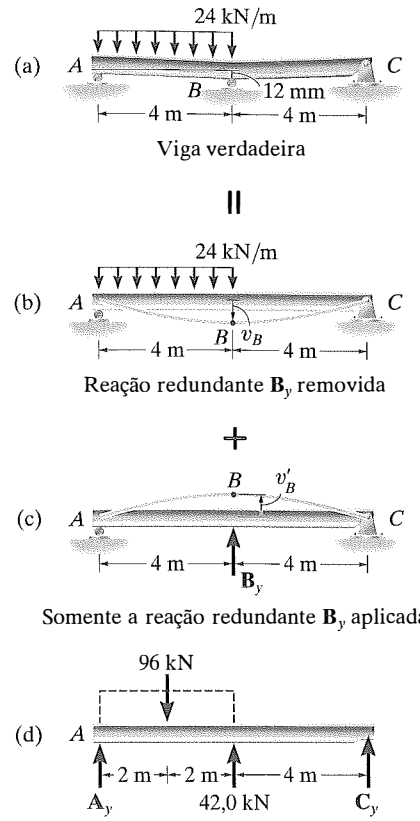


Figura 12.47

$$0{,}012(200)(10^6)[80(10^{-6})] = 640 - 10{,}67B_y$$

$$B_y = 42{,}0\text{ kN}\uparrow \qquad \textit{Resposta}$$

Equações de equilíbrio. Aplicando esse resultado à viga (Figura 12.47d), podemos calcular as reações em A e C utilizando as equações de equilíbrio. Obtemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0; \qquad -96\text{ kN}(2\text{ m}) + 42{,}0\text{ kN}(4\text{ m}) + C_y(8\text{ m})$$

$$C_y = 3{,}00\text{ kN}\uparrow \qquad \textit{Resposta}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 96\text{ kN} + 42{,}0\text{ kN} + 3{,}00\text{ kN} = 0$$

$$A_y = 51\text{ kN}\uparrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.23

A viga na Figura 12.48a está engastada na parede em A e acoplada por um pino a uma haste de 12 mm de diâmetro BC. Se $E = 210$ GPa para ambos os elementos estruturais, determine a força desenvolvida na haste devido à carga. O momento de inércia da viga em torno de seu eixo neutro é $I = 186 \times 10^6\text{ mm}^4$.

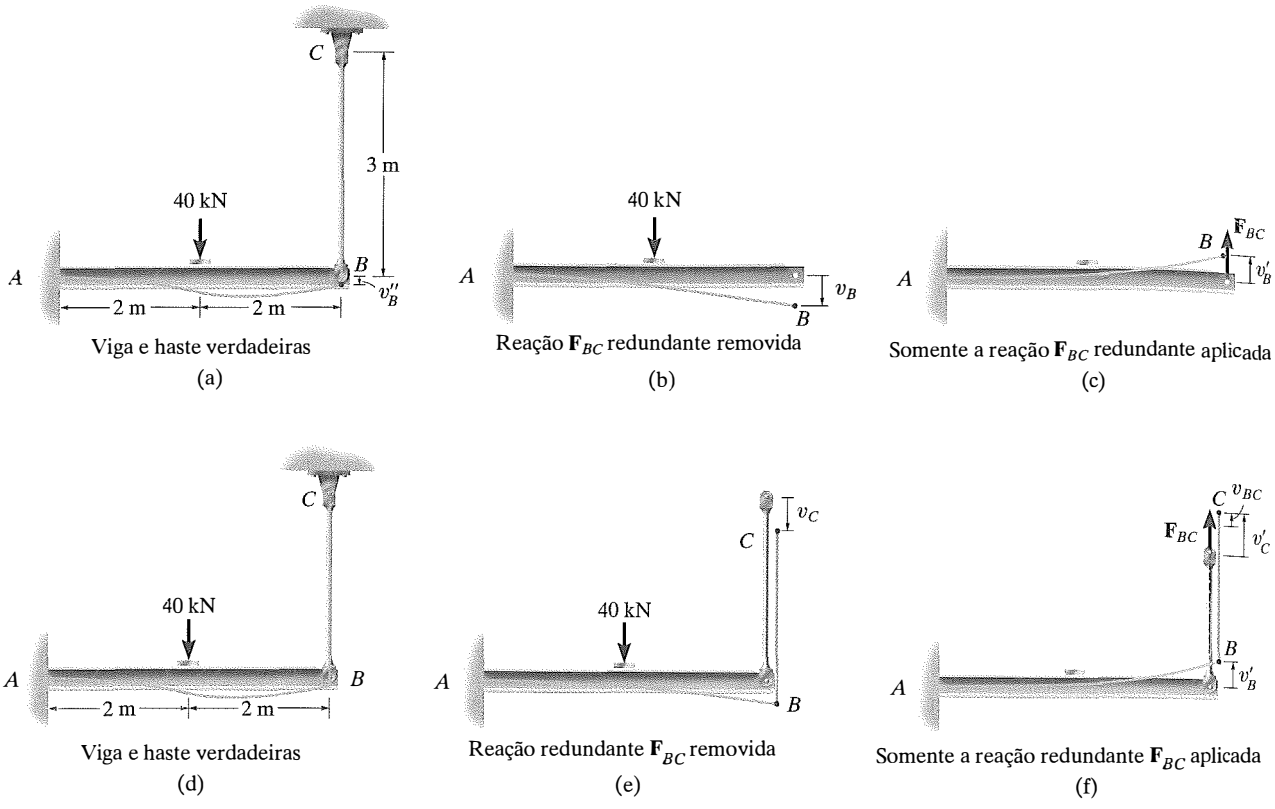


Figura 12.48

SOLUÇÃO I

Princípio da superposição. Por inspeção, esse problema é indeterminado de primeiro grau. Aqui B sofrerá um deslocamento desconhecido v''_B, visto que a haste será esticada. A haste será tratada como redundante e, por consequência, sua força é removida da viga em B (Figura 12.48b), e então reaplicada (Figura 12.48c).

Equação de compatibilidade. No ponto B, exige-se

$$(+\downarrow) \qquad v''_B = v_B - v'_B \qquad (1)$$

Os deslocamentos v_B e v'_B são determinados pela tabela no Apêndice C. v''_B é calculado pela Equação 4.2. Trabalhando em Newtons e milímetros, temos

$$v''_B = \frac{PL}{AE} = \frac{F_{BC}(3\text{ m})(10^3\text{ mm/m})}{(\pi/4)(12\text{ mm})^2[(210)(10^3)\text{ N/mm}^2]}$$

$$v''_B = 1{,}26(10^{-4})F_{BC} \downarrow$$

$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} = \frac{5(40\text{ kN})(10^3\text{ N/kN})[(4\text{ m})(10^3\text{ mm/m})]^3}{48[(210)(10^3)\text{ N/mm}^2]186(10^6)\text{ mm}}$$

$$v'_B = 6{,}83\text{ mm} \downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{F_{BC}[(5\text{ m})(10^3\text{ mm/m})]^3}{3[(210)(10^3)\text{ N/mm}^2]186(10^3)\text{ mm}}$$

$$v'_B = 1{,}067 \times 10^{-3} F_{BC} \uparrow$$

Assim, a Equação 1 torna-se

$$(+\downarrow) \qquad 1{,}26 \times 10^{-4} F_{BC} = 6{,}83 - 1{,}067 \times 10^{-3} F_{BC}$$

$$F_{BC} = 5{,}725(10^3)\text{ N} = 5{,}725\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

Princípio da superposição. Também podemos resolver esse problema removendo o apoio do pino em C e mantendo a haste acoplada à viga. Nesse caso, a carga de 40 kN deslocará os pontos B e C à *mesma distância* v_C para baixo (Figura 12.48e), visto que não existe nenhuma força na haste BC. Quando a força redundante $\mathbf{F}_{BC}$ é aplicada no ponto C, provoca o deslocamento v'_C da extremidade C da haste para cima e o deslocamento v'_B da extremidade B da viga para cima (Figura 12.48f). A diferença entre esses dois deslocamentos, v_{BC}, representa o alongamento da haste devido a $\mathbf{F}_{BC}$, de modo que $v'_C = v_{BC} + v'_B$. Por consequência, pelas figuras 12.48d, 12.48e e 12.48f, a compatibilidade de deslocamento no ponto C é

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_C - (v_{BC} + v'_B) \qquad (1)$$

Pela Solução I, temos

$$v_C = v_B = 6{,}83 \text{ mm} \downarrow$$
$$v_{BC} = v''_B = 1{,}26 \times 10^{-4} \text{ mm} \uparrow$$
$$v'_B = 1{,}067 \times 10^{-3} F_{BC} \uparrow$$

Portanto, a Equação 2 torna-se

$$(+\downarrow) \qquad 0 = 6{,}83 - (1{,}26 \times 10^{-4} F_{BC} + 1{,}067 \times 10^{-3} F_{BC})$$

$$F_{BC} = -5.725 \text{ N} = 5{,}725 \text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 12.24

Determine o momento em B para a viga mostrada na Figura 12.49a. EI é constante. Despreze os efeitos da carga axial.

SOLUÇÃO

Princípio da superposição. Visto que a carga axial sobre a viga é desprezada, haverá uma força vertical e um momento em A e B. Aqui há somente duas equações de equilíbrio disponíveis ($\Sigma M = 0$, $\Sigma F_y = 0$) e, portanto, o problema é indeterminado de segundo grau. Consideraremos que $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{M}_B$ são reações redundantes de modo que, pelo princípio da superposição, a viga é representada como em balanço, carregada *separadamente* pela carga distribuída e reações $\mathbf{B}_y$ e $\mathbf{M}_B$ (figuras 12.49b, 12.49c e 12.49d).

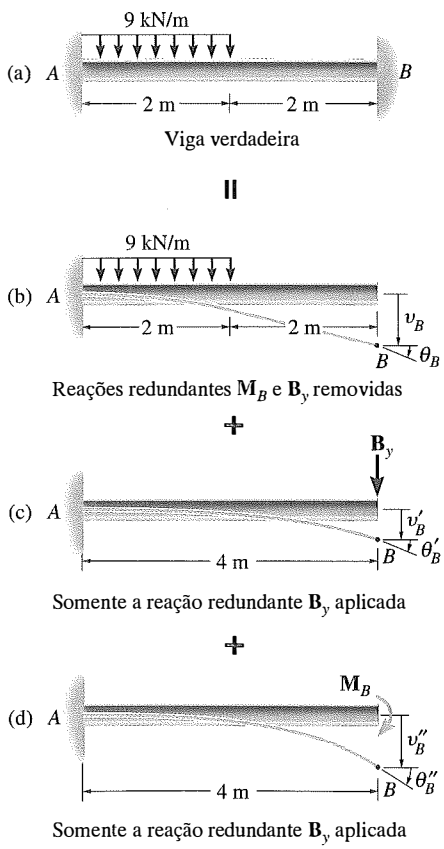


Figura 12.49

Equações de compatibilidade. Com referência ao deslocamento e à inclinação em B, exige-se

$$(\curvearrowright+) \qquad 0 = \theta_B + \theta'_B + \theta''_B \qquad (1)$$

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B + v'_B + v''_B \qquad (2)$$

Utilizando a tabela no Apêndice C para calcular as inclinações e deslocamentos, temos

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} = \frac{9 \text{ kN/m}\,(4 \text{ m})^3}{48EI} = \frac{12}{EI} \curvearrowright$$

$$v_B = \frac{7wL^4}{384EI} = \frac{7(9 \text{ kN/m})(4 \text{ m})^4}{384EI} = \frac{42}{EI} \downarrow$$

$$\theta'_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{B_y(4 \text{ m})^2}{2EI} = \frac{8B_y}{EI} \curvearrowright$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(4 \text{ m})^3}{3EI} = \frac{21{,}33B_y}{EI} \downarrow$$

$$\theta''_B = \frac{ML}{EI} = \frac{M_B(4 \text{ m})}{EI} = \frac{4M_B}{EI} \curvearrowright$$

$$v''_B = \frac{ML^2}{2EI} = \frac{M_B(4 \text{ m})^2}{2EI} = \frac{8M_B}{EI} \downarrow$$

Substituindo esses valores nas equações 1 e 2 e cancelando o fator comum EI, obtemos

$$(\curvearrowright+) \qquad 0 = 12 + 8B_y + 4M_B$$

$$(+\downarrow) \qquad 0 = 42 + 21{,}33B_y + 8M_B$$

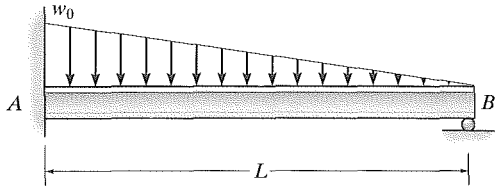
Resolvendo essas equações simultaneamente, temos

$$B_y = -3{,}375 \text{ kN}$$

$$M_B = 3{,}75 \text{ kN·m} \qquad \textit{Resposta}$$

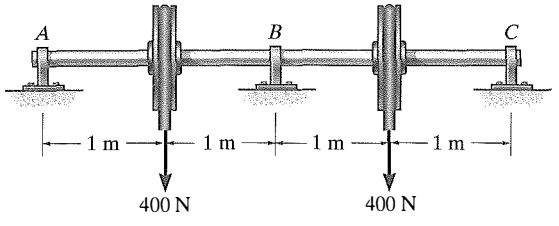
PROBLEMAS

12.121. Determine as reações nos apoios A e B. EI é constante.



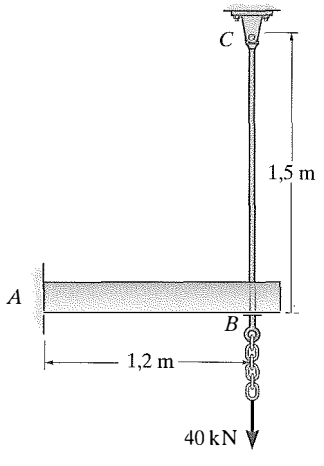
Problema 12.121

12.122. Determine as reações nos apoios de mancal A, B e C do eixo; a seguir, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante. Cada mancal exerce somente reações verticais sobre o eixo.



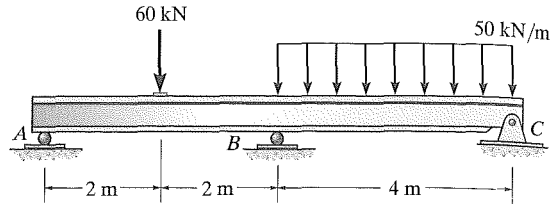
Problema 12.122

12.123. A viga e a haste de aço A-36 são usadas para suportar a carga de 40 kN. Se for exigido que a tensão normal admissível para o aço seja $\sigma_{adm} = 125$ MPa e a deflexão máxima não ultrapasse 1,25 mm, determine o menor diâmetro da haste a ser usado. A viga é retangular, com 125 mm de altura e 75 mm de espessura.



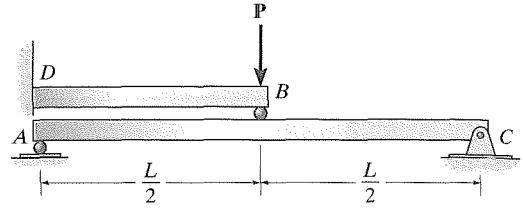
Problema 12.123

***12.124.** Determine as reações nos apoios A, B e C; a seguir, trace os diagramas de força cortante e momento fletor. EI é constante.



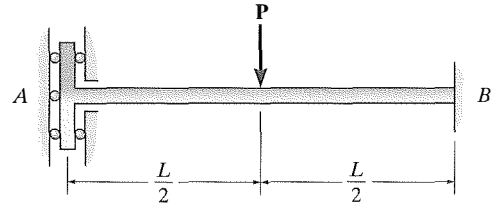
Problema 12.124

12.125. Determine as reações no apoio C. EI é constante para ambas as vigas.



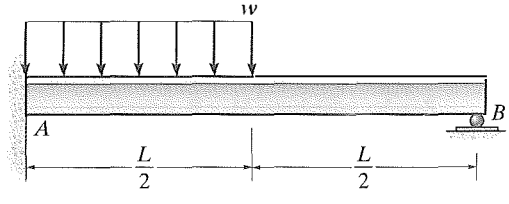
Problema 12.125

12.126. Determine as reações em A e B. Considere que o apoio em A exerce somente um momento sobre a viga. EI é constante.



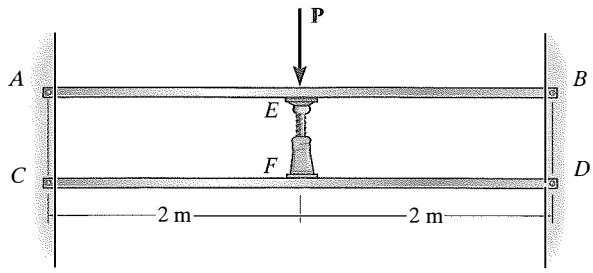
Problema 12.126

12.127. Determine as reações nos apoios A e B. EI é constante.



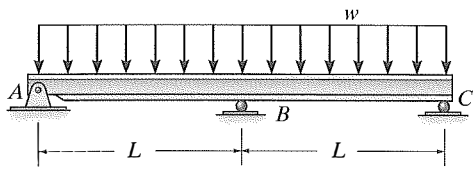
Problema 12.127

***12.128.** Cada um dos dois elementos estruturais é feito de alumínio 6061-T6 e tem seção transversal quadrada de 25 mm × 25 mm. Suas extremidades estão engastadas por pino, e um macaco é colocado entre eles e aberto até que a força que ele exerce em cada elemento estrutural seja igual a 2,5 kN. Determine a maior força P que pode ser aplicada ao centro do elemento estrutural superior sem provocar escoamento em nenhum dos dois elementos. Para a análise, desprezе a força axial em cada elemento estrutural. Considere que o macaco é rígido.



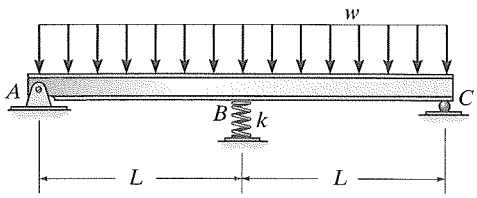
Problema 12.128

12.129. Determine as reações nos apoios e trace os diagramas de força cortante e momento fletor. *EI* é constante.



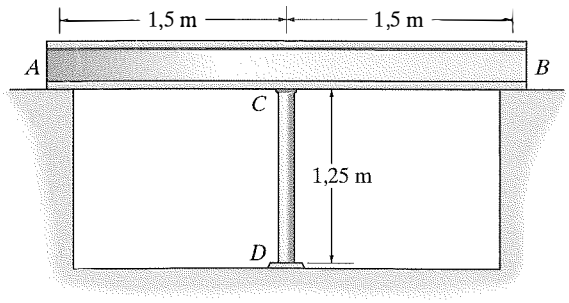
Problema 12.129

12.130. A viga é suportada por um pino em *A*, uma mola com rigidez *k* em *B* e um rolete em *C*. Determine a força que a mola exerce sobre a viga. *EI* é constante.



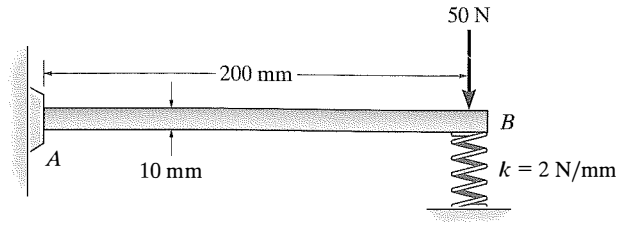
Problema 12.130

12.131. A viga *AB* tem momento de inércia $I = 200(10^6)$ mm^4 e suas extremidades repousam sobre apoios lisos. Uma haste *CD* de 18 mm de diâmetro está soldada ao centro da viga e ao apoio fixo em *D*. Se a temperatura da haste diminuir 80°C, determine a força desenvolvida na haste. A viga e a haste são feitas de aço A-36.



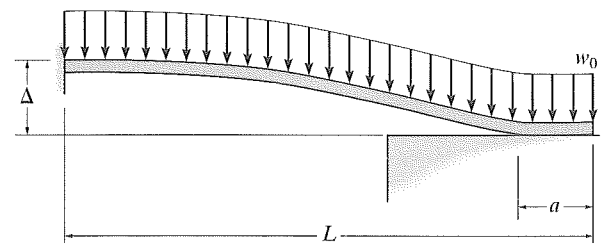
Problema 12.131

*12.132. Determine a deflexão na extremidade *B* da tira de aço A-36. A rigidez da mola é $k = 2$ N/mm.



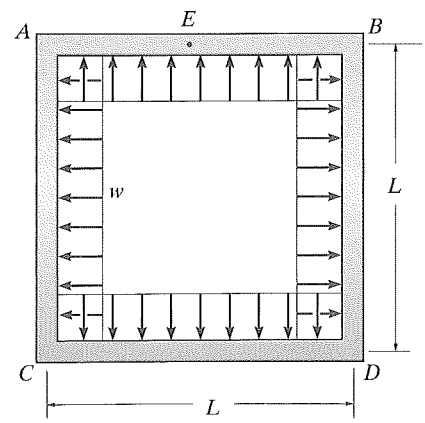
Problema 12.132

12.133. A viga é feita de um material elástico macio com *EI* constante. Se ela estiver originalmente à distância Δ da superfície do apoio de sua extremidade, determine a distância *a* à qual a extremidade da viga repousará sobre esse apoio quando for submetida à carga uniforme w_0, que é grande o suficiente para que isso aconteça.



Problema 12.133

12.134. A estrutura em caixão é submetida a uma carga uniformemente distribuída *w* ao longo de cada um de seus lados. Determine o momento desenvolvido em cada canto. Despreze a deflexão provocada pela carga axial. *EI* é constante.

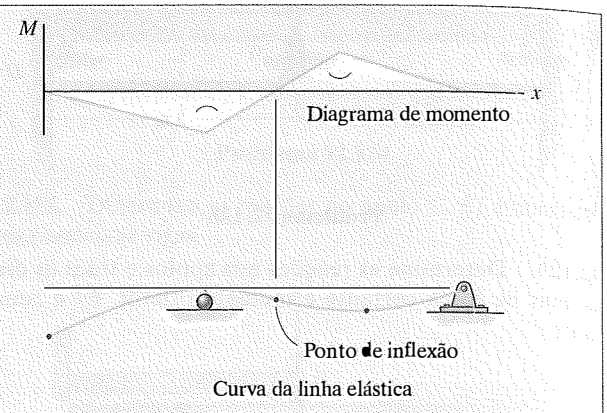


Problema 12.134

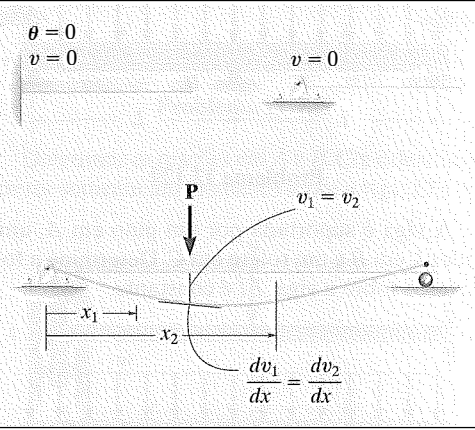
Revisão do capítulo

A curva da linha elástica representa a deflexão na linha central de uma viga ou eixo. Sua forma pode ser determinada por meio do diagrama de momento. Os momentos positivos resultam em uma linha elástica côncava para cima e os negativos em uma linha elástica côncava para baixo. O raio de curvatura em qualquer ponto é determinado por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

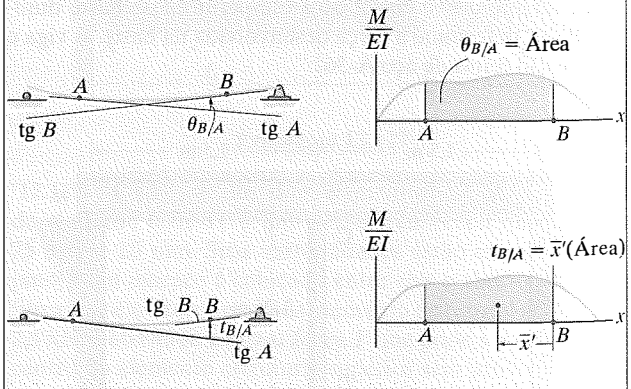


A equação da linha elástica e sua inclinação podem ser obtidas determinando-se, em primeiro lugar, o momento interno no elemento em função de x. Se várias cargas agirem sobre o elemento estrutural, deve-se determinar funções de momento separadas entre cada uma das cargas. Integrando essas funções uma vez utilizando $EI(d^2v/dx^2) = M(x)$, obtemos a equação para a inclinação da linha elástica, e integrando novamente, obtemos a equação para a deflexão. As constantes de integração são determinadas pelas condições de contorno nos apoios ou, em casos nos quais estão envolvidas várias funções de momento, a continuidade de inclinação e deflexão nos pontos onde essas funções se unem deve ser satisfeitas..



Funções de descontinuidade permitem expressar a equação da linha elástica como uma função contínua, independentemente do número de cargas sobre o elemento estrutural. Esse método elimina a necessidade de se usarem as condições de continuidade, visto que as duas constantes de integração podem ser determinadas exclusivamente pelas duas condições de contorno.

O método dos momentos de área é uma técnica parcialmente gráfica para determinar a inclinação de tangentes ou o desvio vertical de tangentes em pontos específicos sobre a linha elástica. Requer determinar segmentos de área sob o diagrama M/EI, ou o momento desses segmentos em torno de pontos sobre a linha elástica. O método funciona bem para diagramas M/EI compostos por formas simples, tais como os produzidos por forças concentradas e momentos conjugados.

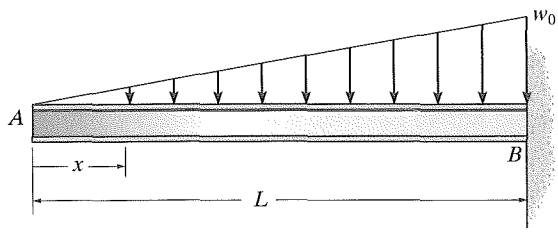


A deflexão ou inclinação em um ponto sobre um elemento estrutural submetido a uma combinação de cargas pode ser determinada por meio do método da superposição. A tabela no final do livro está disponível para essa finalidade.

Vigas e eixos estaticamente indeterminados têm mais reações de apoios desconhecidas do que as equações de equilíbrio disponíveis. Para resolvê-las, em primeiro lugar identificamos as reações redundantes. Então, podemos usar o método da integração ou os teoremas dos momentos de área para resolver as reações redundantes desconhecidas. Também é possível determinar as reações redundantes utilizando o método da superposição, no qual consideramos as condições de continuidade na reação redundante. Nesse caso, o deslocamento devido à carga externa é determinado com a reação redundante removida e, novamente, com a reação redundante aplicada e a carga externa removida. As tabelas no final do livro podem ser usadas para determinar esses deslocamentos necessários.

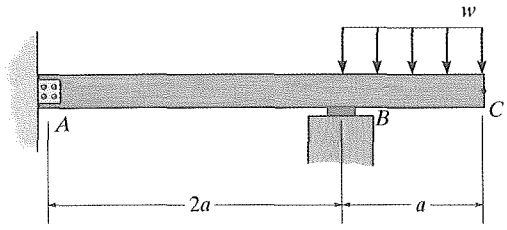
PROBLEMAS DE REVISÃO

12.135. Determine a equação da curva da linha elástica para a viga. Especifique a inclinação e o deslocamento em *A*. *EI* é constante.



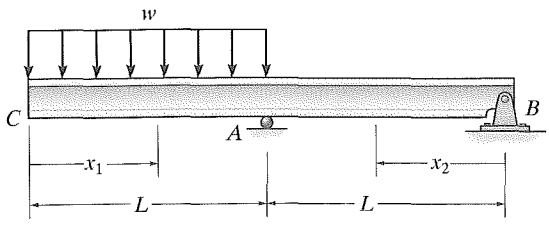
Problema 12.135

*12.136. A viga de madeira está sujeita à carga mostrada na figura. Considere que o apoio em *A* é um pino e em *B*, um rolete. Determine a inclinação em *A* e o deslocamento em *C*. Use o teorema dos momentos de área. *EI* é constante.



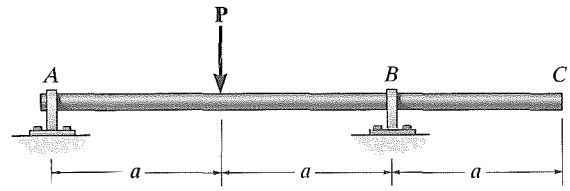
Problema 12.136

12.137. Determine a deflexão máxima entre os apoios *A* e *B*. *EI* é constante. Use o método da integração.



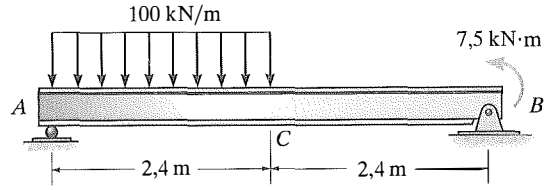
Problema 12.137

12.138. Se os mancais em *A* e *B* exercerem somente reações verticais sobre o eixo, determine a inclinação em *B* e a deflexão em *C*. *EI* é constante. Use os teoremas dos momentos de área.



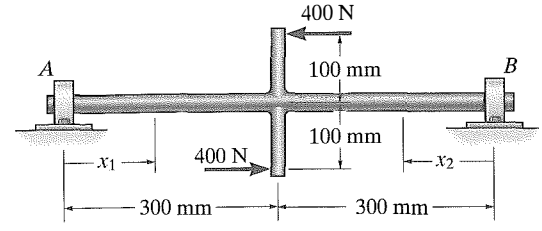
Problema 12.138

12.139. A viga com perfil W200 × 36 simplesmente apoiada é submetida à carga mostrada na figura. Utilizando o método da superposição, determine a deflexão em seu centro *C*. A viga é feita de aço A-36.



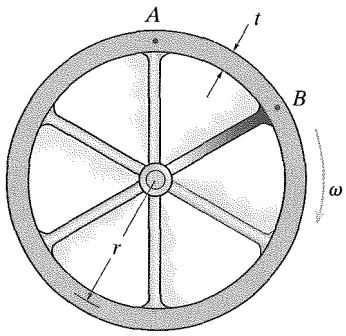
Problema 12.139

*12.140. O eixo é sustentado por um mancal em *A*, que exerce somente reações verticais sobre o eixo, e por um mancal de encosto em *B*, que exerce reações horizontais e verticais sobre o eixo. Trace o diagrama de momento fletor para o eixo e, por esse diagrama, faça o rascunho da deflexão ou da linha elástica para a linha central do eixo. Determine as equações da curva da linha elástica utilizando as coordenadas x_1 e x_2. *EI* é constante.



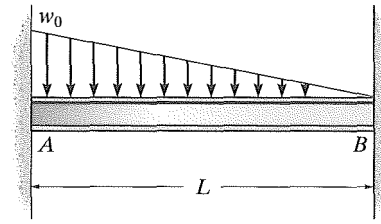
Problema 12.140

12.141. O aro do volante tem espessura t, largura b e peso específico γ. Se estiver girando a uma taxa constante w, determine o momento máximo desenvolvido no aro. Considere que os raios não se deformam. *Dica*: Devido à simetria da carga, a inclinação do aro em cada raio é nula. Considere que o raio é suficientemente grande para que o segmento AB possa ser considerado como uma viga reta engastada em ambas as extremidades e carregada com uma força centrífuga uniforme por unidade de comprimento. Mostre que essa força é $w = bt\gamma\omega^2 r/g$.



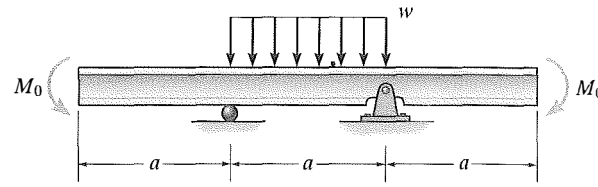
Problema 12.141

12.142. Determine as reações ao momento nos apoios A e B. Use o método da integração. EI é constante.



Problema 12.142

12.143. Utilizando o método da superposição, determine o valor de $\mathbf{M}_0$ em termos da carga distribuída w e da dimensão a, de modo que a deflexão no centro da viga seja nula. EI é constante.



Problema 12.143

13 Flambagem de colunas

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, discutiremos o comportamento de colunas e indicaremos alguns dos métodos usados para seu projeto. O capítulo começa com uma discussão geral sobre a flambagem, seguida pela determinação da carga axial necessária para provocá-la em uma coluna ideal. Em seguida, faremos uma análise mais realista, que considera qualquer flexão na coluna. Além disso, a flambagem inelástica de uma coluna é apresentada como um tópico especial. No final do capítulo, discutiremos alguns dos métodos usados para projetar colunas com cargas concêntricas e excêntricas feitas de materiais comuns na engenharia.

13.1 Carga crítica

Sempre que se projeta um elemento estrutural, é necessário que ele satisfaça requisitos específicos de resistência, deflexão e estabilidade. Nos capítulos anteriores discutimos alguns dos métodos usados para determinar a resistência e a deflexão de um elemento estrutural, considerando-o sempre em equilíbrio estável. Todavia, alguns elementos estruturais podem estar sujeitos a cargas de compressão e, se forem compridos e esbeltos, a carga poderá ser grande o suficiente para provocar uma deflexão ou uma oscilação lateral. Mais especificamente, elementos estruturais compridos e esbeltos sujeitos a uma força de compressão axial são denominados ***colunas***, e a deflexão lateral que ocorre é denominada ***flambagem***. Com muita frequência a flambagem de uma coluna pode resultar em uma falha repentina e dramática de uma estrutura ou mecanismo e, por isso, é preciso dedicar especial atenção ao projeto de colunas para que estas possam suportar com segurança as cargas pretendidas sem sofrer flambagem.

Figura 13.1

A carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está *na iminência* de sofrer flambagem é denominada ***carga crítica***, P_{cr} (Figura 13.1a). Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna e, portanto, deflexão lateral, como mostra a Figura 13.1b. Para entender melhor a natureza dessa instabilidade, considere um mecanismo composto por duas barras sem peso, rígidas e conectadas por pinos nas extremidades (Figura 13.2a). Quando as barras estão na posição vertical, a mola, de rigidez k, não está esticada e uma *pequena* força vertical $\mathbb{P}$ é aplicada ao topo de uma delas. Podemos perturbar essa posição de equilíbrio deslocando o pino em A até uma pequena distância Δ (Figura 13.2b). Como mostra o diagrama de corpo livre do pino, quando as barras são deslocadas (Figura 13.2c), a mola produz uma força de recuperação $\mathrm{F} = k\Delta$, enquanto a carga aplicada $\mathbb{P}$ desenvolve duas componentes horizontais, $Px = P \text{ tg } \theta$, que tendem a empurrar o pino (e as barras) ainda mais para fora da posição de equilíbrio. Visto que θ é pequeno, $\Delta \approx \theta(L/2)$ e $\text{tg } \theta \approx \theta$. Assim, a força de *restauração* da mola torna-se $F = k\theta L/2$, e a força *perturbadora* $2P_x = 2P\theta$.

Se a força de restauração for maior que a força perturbadora, isto é, $k\theta L/2 > 2P\theta$, e observando que θ é cancelado, poderemos resolver P, o que dá

$$P < \frac{kL}{4} \qquad \text{equilíbrio estável}$$

Essa é uma condição para *equilíbrio estável,* visto que a força desenvolvida pela mola seria adequada para devolver as barras a suas respectivas posições verticais. Por outro lado, se $k\theta L/2 < 2P\theta$, ou

$$P > \frac{kL}{4} \qquad \text{equilíbrio instável}$$

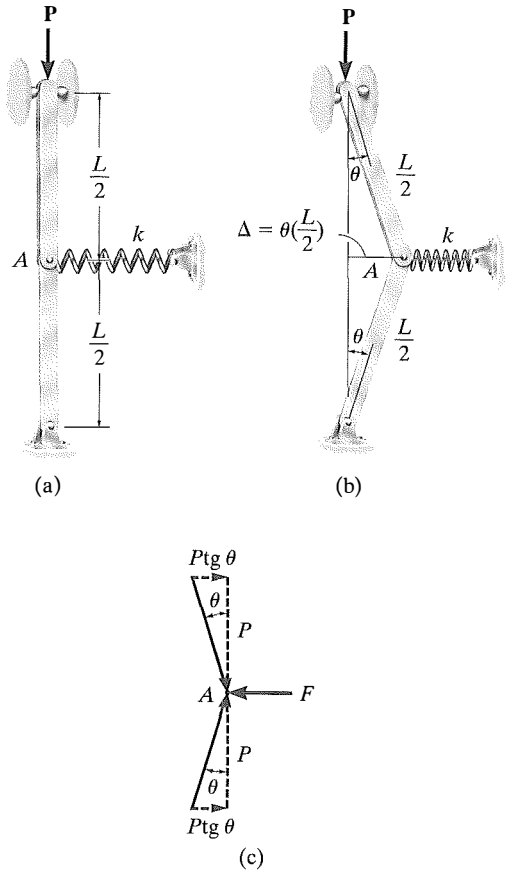


Figura 13.2

nesse caso, o mecanismo estaria em *equilíbrio instável*. Em outras palavras, se essa carga P for aplicada e ocorrer um leve deslocamento em A, o mecanismo tenderá a sair do equilíbrio e não retornar a sua posição original.

O valor intermediário de P, definido pelo requisito $k\theta L/2 = 2P\theta$, é a *carga crítica*. Aqui,

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \qquad \text{equilíbrio neutro}$$

Essa carga representa um caso de mecanismo que está em *equilíbrio neutro*. Como P_{cr} é *independente* do (pequeno) deslocamento θ das barras, qualquer leve perturbação aplicada ao mecanismo não fará com que ele se afaste mais do equilíbrio, nem que retorne a sua posição original. Em vez disso, as barras *permanecerão* na posição defletida.

Esses três estados de equilíbrio são representados graficamente na Figura 13.3. O ponto de transição onde a carga é igual ao valor crítico $P = P_{cr}$ é denominado *ponto de bifurcação*. Nesse ponto o mecanismo estará em equilíbrio para qualquer *valor pequeno* de θ medido para a direita ou para a esquerda da vertical. Em termos físicos, P_{cr} representa a carga sob a qual o mecanismo está na iminência de sofrer flambagem.

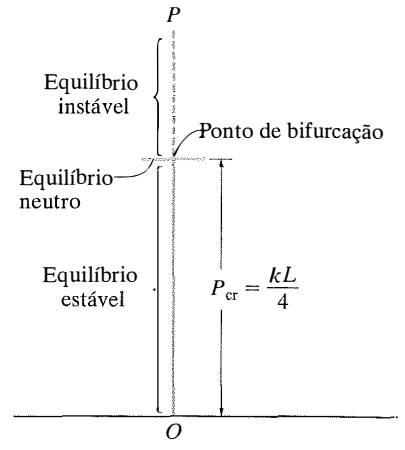


Figura 13.3

É bastante válido determinar esse valor considerando *pequenos deslocamentos* como fizemos aqui; contudo, é preciso entender que P_{cr} pode *não* ser o maior valor de P que o mecanismo pode suportar. De fato, se uma carga maior for colocada nas barras, pode ser que o mecanismo tenha de sofrer uma deflexão adicional antes que a mola seja comprimida ou alongada o suficiente para manter o mecanismo em equilíbrio.

Assim como ocorre com o mecanismo de duas barras que acabamos de discutir, podemos obter as cargas de flambagem críticas para colunas suportadas de vários modos, e o método usado para fazer isso será explicado na próxima seção. Embora no projeto de engenharia a carga crítica possa ser considerada como a maior carga que a coluna pode suportar, entenda que, assim como no mecanismo de duas barras, se uma coluna estiver em posição fletida ou flambada, ela poderá suportar uma carga maior ainda do que P_{cr}. Entretanto, infelizmente, essa carga pode exigir que a coluna sofra uma *grande* deflexão que, em geral, não é tolerada em estruturas de engenharia ou máquinas. Por exemplo, pode ser que apenas alguns newtons de força bastem para provocar flambagem em uma barra de medição, mas a carga adicional que ela pode suportar só pode ser aplicada após ela ter sofrido uma deflexão lateral relativamente grande.

13.2 Coluna ideal com apoios de pinos

Nesta seção, determinaremos a carga crítica de flambagem para uma coluna suportada por pinos, como mostra a Figura 13.4a. A coluna a ser considerada é uma ***coluna ideal***, o que significa uma coluna perfeitamente reta antes da carga, feita de material homogêneo e na qual a carga é aplicada no centroide da seção transversal. Consideramos ainda que o material comporta-se de uma maneira linear elástica e que

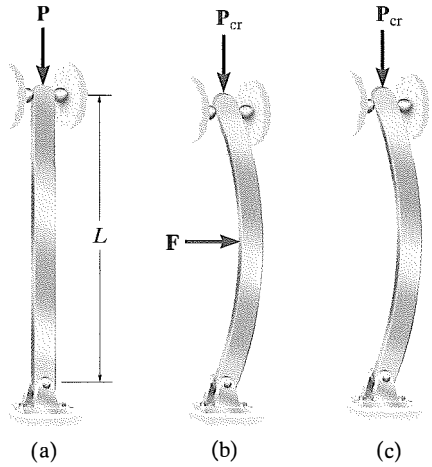


Figura 13.4

a coluna sofre flambagem ou flexão em um único plano. Na realidade, as condições de perfeita retidão da coluna e aplicação de carga nunca são cumpridas; todavia, a análise a ser realizada em uma 'coluna ideal' é semelhante à usada para analisar colunas inicialmente fletidas (tortas) ou sobre as quais são aplicadas cargas excêntricas. Esses casos mais realistas serão discutidos mais adiante neste capítulo.

Visto que uma coluna ideal é reta, teoricamente a carga axial P poderia ser aumentada até ocorrer falha por ruptura ou escoamento do material. Contudo, quando a carga crítica P_{cr} é atingida, a coluna está na iminência de tornar-se instável, de modo que uma pequena força lateral F (Figura 13.4b), fará com que ela permaneça na posição defletida quando F for removida (Figura 13.4c). Qualquer ligeira redução na carga axial P em relação a P_{cr} fará com que a coluna endireite-se, e qualquer ligeiro aumento em P, que ultrapasse P_{cr}, provocará aumentos adicionais na deflexão lateral.

O fato de a coluna continuar estável ou tornar-se instável quando sujeita a uma carga axial dependerá de sua capacidade de restauração, que é baseada em sua resistência à flexão. Por consequência, para determinar a carga crítica e a forma da coluna quando flambada, aplicaremos a Equação 12.10 que relaciona o momento interno na coluna com sua forma defletida, isto é,

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \tag{13.1}$$

Lembre-se de que essa equação considera que a inclinação da curva elástica seja pequena* e que as deflexões ocorrem somente por flexão. Quando a coluna está em posição defletida (Figura 13.5a), o momento fletor interno pode ser determinado pelo método das seções. O diagrama de corpo livre de um segmento na posição defletida é mostrado na Figura 13.5b. Aqui, tanto a deflexão v quanto o momento interno M são mostrados na *direção positiva*, de acordo com a convenção de sinal usada para estabelecer a Equação 13.1. Somando momentos, o momento interno é $M = -Pv$. Assim, a Equação 13.1 torna-se

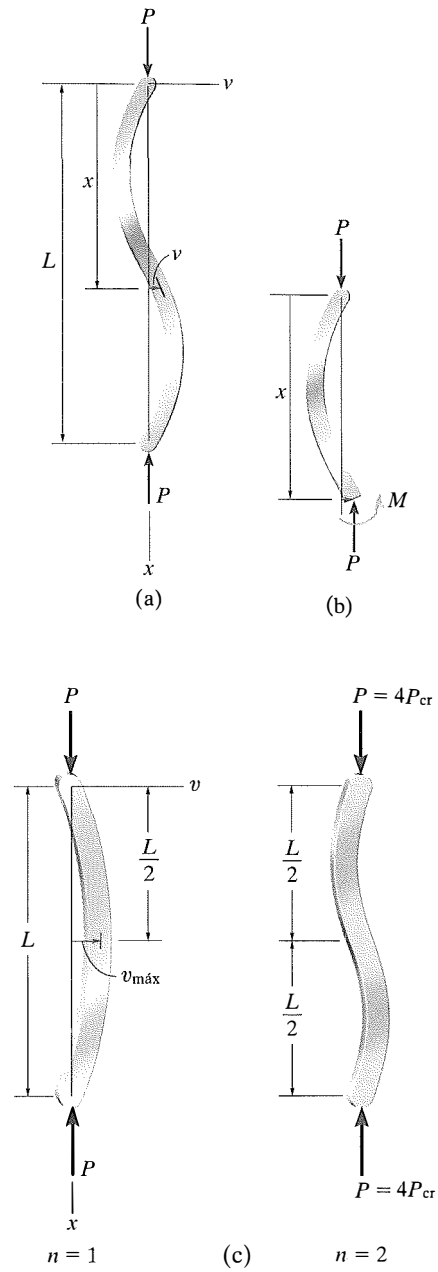


Figura 13.5

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)v = 0 \tag{13.2}$$

* Se tivermos de considerar grandes deflexões, deveremos usar a equação diferencial 12.4, $EI(d^2v/dx^2)/[1 + (dv/dx^2)]^{3/2} = M$, que é mais precisa.

Essa é uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Podemos mostrar, pelo método das equações diferenciais ou por substituição direta na Equação 13.2, que a solução geral é

$$v = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \quad (13.3)$$

As duas constantes de integração são determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna. Visto que $v = 0$ em $x = 0$, então $C_2 = 0$. E, considerando $v = 0$ em $x = L$,

$$C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

Essa equação é satisfeita se $C_1 = 0$; porém, $v = 0$, o que é uma *solução trivial* que exige que a coluna permaneça sempre reta, ainda que a carga faça com que a coluna torne-se instável. A outra possibilidade é

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

que é satisfeita se

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi$$

ou

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (13.4)$$

O *menor valor* de P é obtido quando $n = 1$, de modo que a *carga crítica* para a coluna é, portanto,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Essa carga às vezes é denominada *carga de Euler*; nome que se deve ao matemático suíço Leonhard Euler que foi o primeiro a resolver esse problema em 1757. A forma flambada correspondente é definida pela equação

$$v = C_1 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$$

Nessa expressão, a constante C_1 representa a deflexão máxima $v_{máx}$, que ocorre no ponto médio da coluna (Figura 13.5c.) Não é possível obter valores específicos para C_1, uma vez que a forma defletida exata da coluna é desconhecida após a flambagem. Porém, consideramos que essa deflexão seja pequena.

Entenda que n na Equação 13.4 representa o número de ondas na forma defletida da coluna. Por exemplo, se $n = 2$, então, pelas equações 13.3 e 13.4, aparecerão *duas ondas* na forma flambada (Figura 13.5c), e a coluna suportará uma carga crítica de $4P_{cr}$ imediatamente antes da flambagem. Visto que esse valor é quatro vezes a carga crítica e a forma defletida é instável, na prática, essa forma de flambagem não existirá.

Como ocorreu com o mecanismo de duas barras discutido na Seção 13.1, podemos representar as características da deflexão provocada por uma carga na coluna ideal pelo gráfico mostrado na Figura 13.6. O ponto de bifurcação representa o estado de *equilíbrio neutro,* ponto em que a *carga crítica* age sobre a coluna. Aqui, a coluna está na iminência da flambagem.

Devemos observar que a carga crítica é independente da resistência do material; mais exatamente, ela depende somente das dimensões da coluna (I e L) e da rigidez ou do módulo de elasticidade do material, E. Por essa razão, no que diz respeito à flambagem elástica, colunas feitas, por exemplo, de aço de alta resistência, não oferecem nenhuma vantagem em relação às feitas de aço de resistência mais baixa, uma vez que o módulo de elasticidade para ambos os materiais é aproximadamente o mesmo. Observe também que a capacidade de carga de uma coluna aumentará à medida que o momento de inércia da seção transversal aumentar. Assim, colunas eficientes são projetadas de modo que a maior parte da área da seção transversal da coluna esteja localizada o mais longe possível dos eixos principais do centroide da seção. É por isso que as seções ocas como tubos são mais eficientes do que as maciças. Além do mais, as seções de abas largas e colunas 'construídas' com perfis em U, cantoneiras, placas etc. são melhores do que as maciças e retangulares.

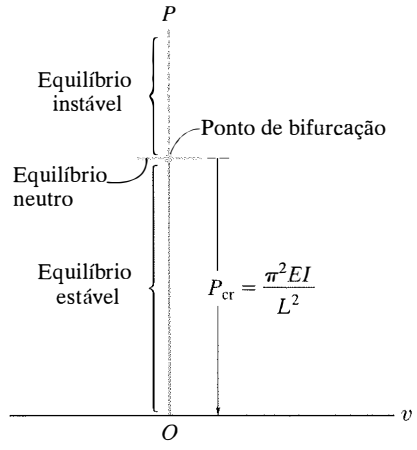


Figura 13.6

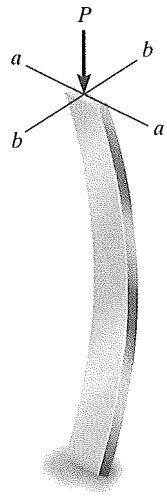


Figura 13.7

Também é importante entender que uma coluna sofrerá flambagem em torno do eixo principal da seção transversal que tenha o ***menor momento de inércia*** (o eixo menos resistente). Por exemplo, uma coluna de seção transversal retangular, como uma barra de medição, mostrada na Figura 13.7, sofrerá flambagem em torno do eixo *a–a* e não do eixo *b–b*. O resultado é que os engenheiros normalmente tentam conseguir um equilíbrio mantendo os mesmos momentos de inércia em todas as direções. Então, em termos geométricos, tubos dariam excelentes colunas. Além disso, tubos quadrados ou formas para as quais $I_x \approx I_y$ também constituem formas constantemente selecionadas para colunas.

Resumindo a discussão, a equação da flambagem para uma coluna comprida e esbelta apoiada por pinos pode ser rescrita, e os termos definidos da seguinte maneira:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{13.5}$$

onde

P_{cr} = carga crítica ou carga axial máxima na coluna imediatamente antes do início da flambagem. Essa carga *não* deve bastar para que a tensão na coluna exceda o limite de proporcionalidade
E = módulo de elasticidade para o material
I = *menor* momento de inércia para a área da seção transversal da coluna
L = comprimento da coluna sem apoio, cujas extremidades estejam presas por pinos

Para a finalidade de projeto, a Equação 13.5 também pode ser escrita de uma forma mais útil, se expressarmos $I = Ar^2$, onde A é a área da seção transversal e r o ***raio de giração*** da área da seção transversal. Assim,

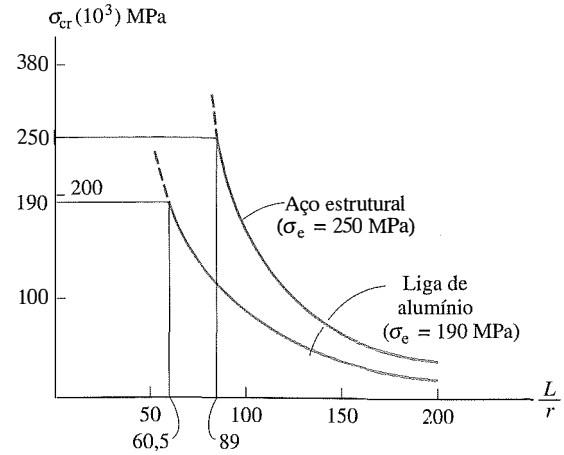


Figura 13.8

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E(Ar^2)}{L^2}$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

ou

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}} \tag{13.6}$$

Nessa expressão,

σ_{cr} = tensão crítica, que é uma tensão média na coluna imediatamente antes da flambagem. Essa é uma *tensão elástica* e, portanto, $\sigma_{cr} \leq \sigma_e$
E = módulo de elasticidade para o material
L = comprimento da coluna sem apoio, cujas extremidades estejam presas por pinos
r = *menor* raio de giração da coluna, determinado por $r = \sqrt{I/A}$, onde I é o *menor* momento de inércia da área da seção transversal da coluna, A

A relação geométrica L/r na Equação 13.6 é conhecida como ***índice de esbeltez***. É uma medida da flexibilidade da coluna e, como discutiremos mais adiante, serve para classificar colunas como compridas, intermediárias ou curtas.

É possível representar a Equação 13.6 em gráfico usando eixos que representam a tensão crítica em relação ao índice de esbeltez. Exemplos desse gráfico para colunas feitas de uma liga comum de aço estrutural e alumínio são mostrados na Figura 13.8. Observe que as curvas são hiperbólicas e válidas somente para tensões críticas abaixo do limite de escoamento do material (limite de proporcionalidade), visto que o material deve se comportar elasticamente. Para o aço, a tensão de escoamento

PONTOS IMPORTANTES

- *Colunas* são elementos estruturais longos e esbeltos, sujeitos a cargas axiais.
- A *carga crítica* é a carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando na iminência de sofrer flambagem. Essas cargas representam um caso de *equilíbrio neutro*.
- Uma *coluna ideal* é, de início, perfeitamente reta e feita de material homogêneo e tem a carga aplicada no centroide de sua seção transversal.
- Uma coluna acoplada por pinos sofrerá flambagem em torno do eixo principal da seção transversal que tenha o *menor* momento de inércia.
- O *índice de esbeltez* é L/r, onde r é o menor raio de giração da seção transversal. A flambagem ocorrerá em torno do eixo no qual esse índice tiver o maior valor.

é $(\sigma_e)_{aço} = 250$ MPa [$E_{aço} = 200$ GPa] e, para o alumínio, é $(\sigma_e)_{al} = 190$ MPa [$E_{al} = 70$ GPa]. Substituindo $\sigma_{cr} = \sigma_e$ na Equação 13.6, os *menores* índices de esbeltez aceitáveis para colunas de aço e de alumínio são, portanto, $(L/r)_{aço} = 89$ e $(L/r)_{al} = 60{,}5$, respectivamente. Assim, para uma coluna de aço, se $(L/r)_{aço} \geq 89$, a fórmula de Euler pode ser usada para determinar a carga de flambagem, visto que a tensão na coluna permanece elástica. Por outro lado, se $(L/r)_{aço} < 89$, a tensão na coluna ultrapassará o limite de escoamento antes que possa ocorrer flambagem e, portanto, a fórmula de Euler não é válida nesse caso.

EXEMPLO 13.1

Um tubo de aço A-36 com 7,2 m de comprimento e a seção transversal mostrada na Figura 13.9 deve ser usado como uma coluna presa por pinos na extremidade. Determine a carga axial admissível máxima que a coluna pode suportar sem sofrer flambagem.

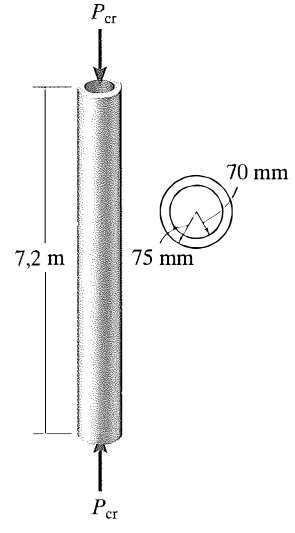


Figura 13.9

SOLUÇÃO

Usando a Equação 13.5 para obter a carga crítica com $E_{aço} = 200$ GPa,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$= \frac{\pi^2[200(10^6)\ \text{kN/m}^2]\left(\frac{1}{4}\pi(75)^4 - \frac{1}{4}\pi(70)^4\right)(1\ \text{m}/1.000\ \text{mm})^4}{(7{,}2\ \text{m})^2}$$

$$= 228{,}2\ \text{kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa força cria uma tensão de compressão média na coluna de

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{228{,}2\ \text{kN}\ (1.000\ \text{N/kN})}{[\pi(75)^2 - \pi(70)^2]\ \text{mm}^2}$$

$$= 100{,}2\ \text{N/mm}^2 = 100\ \text{MPa}$$

Visto que $\sigma_{cr} < \sigma_e = 250$ MPa, a aplicação da equação de Euler é adequada.

EXEMPLO 13.2

O elemento estrutural W200 × 46 de aço A-36 mostrado na Figura 13.10 deve ser usado como uma coluna acoplada por pinos. Determine a maior carga axial que ele pode suportar antes de começar a sofrer flambagem ou antes que o aço escoe.

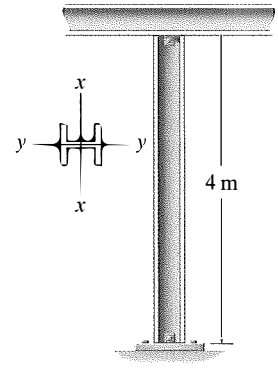


Figura 13.10

SOLUÇÃO

Pela tabela no Apêndice B, a área da seção transversal da coluna e os momentos de inércia são $A = 5.890$ mm^2,

$I_x = 45{,}5 \times 10^6\ \text{mm}^4$ e $I_y = 15{,}3 \times 10^6\ \text{mm}^4$. Por inspeção, ocorrerá flambagem em torno do *eixo y–y*. Por quê? Aplicando a Equação 13.5, temos

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2[200(10^6)\ \text{kN/m}^2](15{,}3(10^4)\ \text{mm}^4)(1\ \text{m}/1.000\ \text{mm})^4}{(4\ \text{m})^2}$$

$$= 1.887{,}6\ \text{kN}$$

Quando totalmente carregada, a tensão de compressão média na coluna é

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{1.887{,}6\ \text{kN}\ (1.000\ \text{N/kN})}{5.890\ \text{mm}^2} = 320{,}5\ \text{N/mm}^2$$

Visto que essa tensão ultrapassa a tensão de escoamento (250 N/mm²), a carga P é determinada por compressão simples:

$$250\ \text{N/mm}^2 = \frac{P}{5.890\ \text{mm}^2};\quad P = 1.472{,}5\ \text{kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Na prática, um fator de segurança seria imposto a essa carga.

13.3 Colunas com vários tipos de apoio

Na Seção 13.2, deduzimos a carga de Euler para uma coluna com extremidades acopladas por pinos ou livres para girar. Todavia, muitas vezes as colunas podem ser apoiadas de algum outro modo. Por exemplo, considere o caso de uma coluna engastada na base e livre no topo (Figura 13.11a). A determinação da carga de flambagem nessa coluna segue o mesmo procedimento usado para a coluna presa por pinos. Pelo diagrama de corpo livre na Figura 13.11b, o momento interno na seção arbitrária é $M = P(\delta - v)$. Por consequência, a equação diferencial para a curva de deflexão é

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - v)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta \qquad (13.7)$$

Diferentemente da Equação 13.2, essa é não homogênea por causa do termo não nulo no lado direito. A solução consiste em uma solução complementar, bem como uma solução particular, a saber,

$$v = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta$$

As constantes são determinadas pelas condições de contorno. Em $x = 0$, $v = 0$, de modo que $C_2 = -\delta$. Além disso,

$$\frac{dv}{dx} = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

Em $x = 0$, $dv/dx = 0$, de modo que $C_1 = 0$. A curva de deflexão é, portanto,

$$v = \delta\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right] \qquad (13.8)$$

Considerando que a deflexão no topo da coluna é δ, isto é, em $x = L$, $v = \delta$, exige-se

$$\delta\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

A solução trivial $\delta = 0$ indica que não ocorre nenhuma flambagem, independentemente da carga P. Em vez disso,

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2}$$

A menor carga crítica ocorre quando $n = 1$, de modo que

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (13.9)$$

Por comparação com a Equação 13.5, vemos que uma coluna engastada na base e livre no topo suportará apenas um quarto da carga crítica que pode ser aplicada a uma coluna apoiada por pinos em ambas as extremidades.

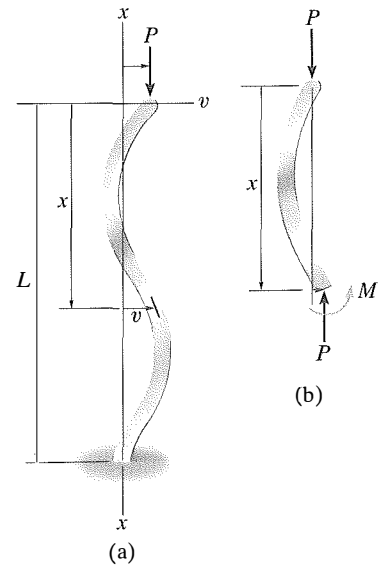


Figura 13.11

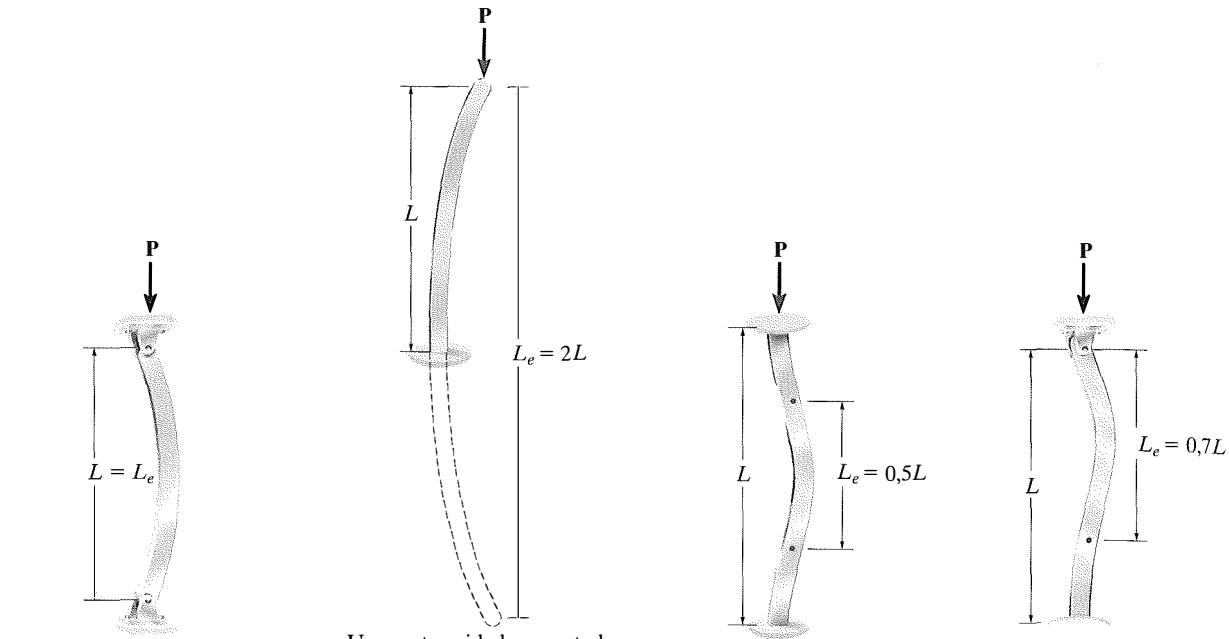


Figura 13.12

Outros tipos de coluna apoiada são analisadas de maneira muito semelhante e não as estudaremos detalhadamente aqui.* Em vez disso, tabularemos os resultados para os tipos mais comuns de apoio de coluna e mostraremos como aplicar esses resultados escrevendo a fórmula de Euler em uma forma geral.

Comprimento efetivo. Como já dissemos, a fórmula de Euler (Equação 13.5) foi desenvolvida para o caso de uma coluna com extremidades presas por pinos ou livres para girar. Em outras palavras, L na equação representa a distância sem apoio entre os pontos de momento nulo. Se a coluna for apoiada de outros modos, então a fórmula de Euler poderá ser usada para determinar a carga crítica, desde que 'L' represente a distância entre pontos de momento nulo. Essa distância é denominada ***comprimento efetivo*** da coluna, L_e. É óbvio que para uma coluna presa por pinos nas extremidades como mostra a Figura 13.12a, $L_e = L$. No caso da coluna com uma extremidade engastada e a outra livre que já analisamos, constatou-se que a curva de deflexão é metade da curva para uma coluna acoplada por pinos com comprimento $2L$ (Figura 13.12b). Desse modo, o comprimento efetivo entre os pontos de momento nulo é $L_e = 2L$. A Figura 13.12 mostra também exemplos para duas outras colunas com apoios diferentes nas extremidades. Aquela presa nas extremidades (Figura 13.12c) tem pontos de inflexão ou pontos de momento nulo à distância $L/4$ de cada apoio. Portanto, o comprimento efetivo é representado pela metade central de seu comprimento, isto é, $L_e = 0{,}5L$. Por fim, a coluna com uma extremidade presa por pino e a outra engastada (Figura 13.12d) tem um ponto de inflexão a aproximadamente $0{,}7L$ de sua extremidade presa por pino, de modo que $L_e = 0{,}7L$.

Em vez de especificar o comprimento efetivo da coluna, muitos códigos e manuais de projeto dão fórmulas de colunas que empregam um coeficiente adimensional K denominado ***fator de comprimento efetivo.*** K é definido por

$$L_e = KL \tag{13.10}$$

A Figura 13.12 também apresenta valores específicos de K. Com base nessa generalidade, podemos expressar a fórmula de Euler como

$$\boxed{P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}} \tag{13.11}$$

ou

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}} \tag{13.12}$$

* Veja os problemas 13.43, 13.44 e 13.45.

Nessa expressão, (KL/r) é o ***índice de esbeltez efetivo*** da coluna. Por exemplo, observe que para a coluna engastada na base e livre na extremidade, temos $K = 2$ e, portanto, a Equação 13.11 dá o mesmo resultado que a Equação 13.9.

EXEMPLO 13.3

Uma coluna de aço W150 × 24 tem 8 m de comprimento e as extremidades engastadas como mostra a Figura 13.13a. Sua capacidade de carga é aumentada pelas escoras de reforço em torno do eixo *y–y* (fraco). Consideramos que essas escoras estão acopladas por pinos no ponto médio da altura da coluna. Determine a carga que a coluna pode suportar sem flambagem e sem que o material ultrapasse a tensão de escoamento. Considere $E_{aço} = 200$ GPa e $\sigma_e = 410$ MPa.

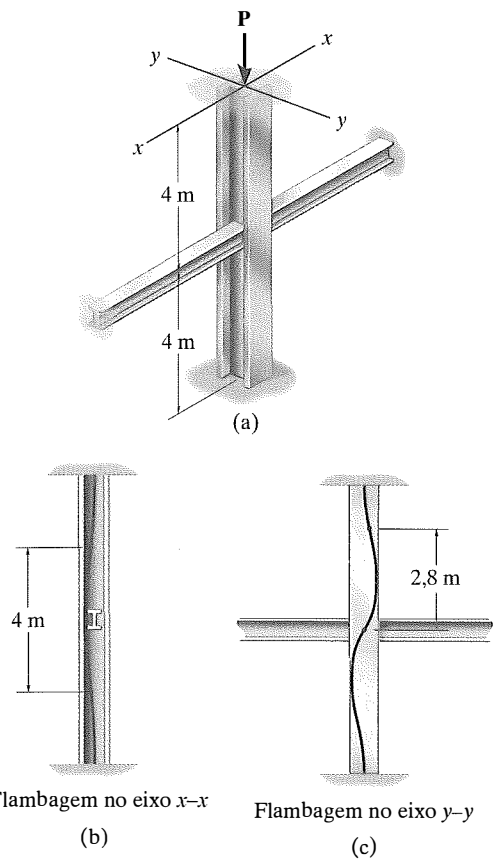


Figura 13.13

SOLUÇÃO

O comportamento de flambagem da coluna será *diferente* em torno dos eixos *x* e *y* por causa das escoras de reforço. As formas da flambagem para cada um desses casos são mostradas nas figuras 13.13b e 13 13c. Pela Figura 13.13b, o comprimento efetivo para flambagem em torno do eixo *x–x* é $(KL)_x = 0{,}5(8\text{ m}) = 4$ m e, pela Figura 13.13c, para flambagem em torno do eixo *y–y*, $(KL)_y = 0{,}7(8\text{ m}/2) = 2{,}8$ m. Os momentos de inércia para um perfil W150 × 24 são determinados pela tabela no Apêndice B. Temos $I_x = 13{,}4 \times 10^6 \text{mm}^4$, $I_y = 1{,}83 \times 10^6\ \text{mm}^4$.

Aplicando a Equação 13.11, obtemos

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[200(10^6)\text{ kN/m}^2]13{,}4(100^{-6})\text{ m}^4}{(4\text{ m})^2}$$

$$= 1.653{,}2\text{ kN}$$

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[200(10^6)\text{ kN/m}^2]1{,}83(100^{-6})\text{ m}^4}{(2{,}8\text{ m})^2}$$

$$= 460{,}8\text{ kN}$$

Por comparação, a flambagem ocorrerá torno do eixo *y–y*.

A área da seção transversal é 3.060 mm²; portanto, a tensão de compressão média na coluna será

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{460{,}8(10^3)\text{ N}}{3.060\text{ mm}^2} = 150{,}6\text{ N/mm}^2$$

Visto que essa tensão é menor do que a tensão de escoamento, a flambagem ocorrerá antes do escoamento do material. Assim,

$$P_{cr} = 461\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Pela Equação 13.12 podemos ver que a flambagem sempre ocorrerá em torno do eixo da coluna que tenha o *maior* índice de esbeltez, visto que um grande índice de esbeltez resultará em pequena tensão crítica. Assim, utilizando os dados para o raio de giração dados pela tabela no Apêndice B, temos

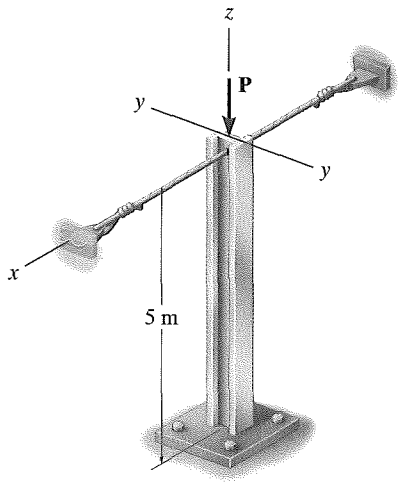
$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = \frac{4\text{ m}(1.000\text{ mm/m})}{66{,}2\text{ mm}} = 60{,}4$$

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{2{,}8\text{ m}(1.000\text{ mm/m})}{24{,}5\text{ mm}} = 114{,}3$$

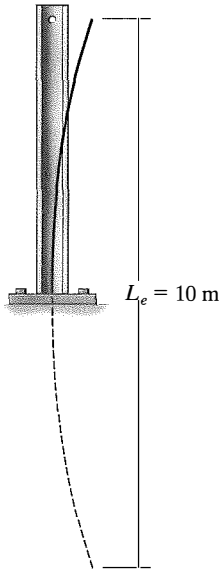
Por consequência, ocorrerá flambagem no eixo *y–y*, que é a mesma conclusão a que chegamos comparando as equações 1 e 2.

EXEMPLO 13.4

A coluna de alumínio está presa na base e seu topo está ancorado por cabos de modo a impedir que o topo movimente-se ao longo do eixo *x* (Figura 13.14a). Se considerarmos que ela está fixa na base, determine a maior carga admissível *P* que pode ser aplicada. Use um fator de segurança para flambagem FS = 3,0. Considere $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_e = 215$ MPa, $A = 7{,}5(10^{-3})\text{m}^2$, $I_x = 61{,}3(10^{-6})\text{m}^4$, $I_y = 23{,}2(10^{-6})\text{m}^4$.

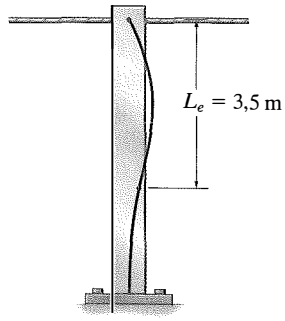


(a)



Flambagem no eixo *x*–*x*

(b)



Flambagem no eixo *y*–*y*

(c)

Figura 13.14

SOLUÇÃO

A flambagem em torno dos eixos *x* e *y* é mostrada nas figuras 13.14b e 13.14c, respectivamente. Usando a Figura 13.12a, para a flambagem no eixo *x*–*x* , $K = 2$, portanto, $(KL)_x = 2(5\text{ m}) = 10\text{ m}$. Para a flambagem no eixo *y*–*y*, $K = 0{,}7$, portanto, $(KL)_y = 0{,}7(5\text{ m}) = 3{,}5$ m.

Aplicando a Equação 13.11, as cargas críticas para cada caso são

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\text{ N/m}^2][61{,}3(10^{-6})\text{ m}^4]}{(10\text{ m})^2}$$
$$= 424\text{ kN}$$

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\text{ N/m}^2][23{,}2(10^{-6})\text{ m}^4]}{(3{,}5\text{ m})^2}$$
$$= 1{,}31\text{ MN}$$

Por comparação, à medida que *P* aumenta, a coluna sofrerá flambagem em torno do eixo *x*–*x*. Portanto, a carga admissível é

$$P_{adm} = \frac{P_{cr}}{FS} = \frac{424\text{ kN}}{3{,}0} = 141\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

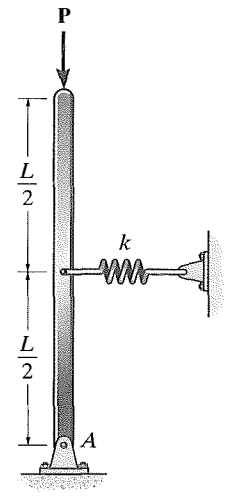
Visto que

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{424\text{ kN}}{7{,}5(10^{-3})\text{ m}^2} = 56{,}5\text{ MPa} < 215\text{ MPa}$$

a equação de Euler pode ser aplicada.

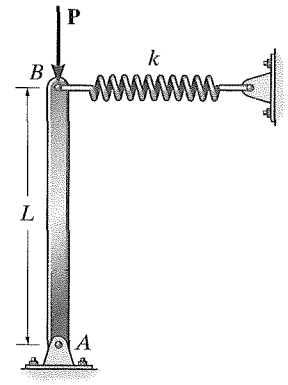
PROBLEMAS

13.1. Determine a carga de flambagem crítica para a coluna. Podemos considerar que o material é rígido.



Problema 13.1

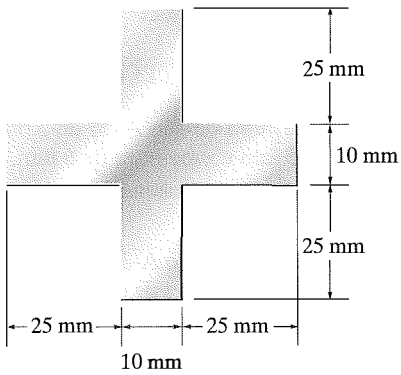
13.2. A coluna é composta por um elemento estrutural rígido preso por um pino na base e acoplado a uma mola no topo. Se a mola não estiver esticada quando a coluna estiver em posição vertical, determine a carga crítica que pode ser aplicada à coluna.



Problema 13.2

13.3. Uma coluna de aço A-36 tem comprimento de 4 m e está presa por pinos em ambas as extremidades. Se a área da seção transversal tiver as dimensões mostradas na figura, determine a carga crítica.

***13.4.** Resolva o Problema 13.3 se a coluna for engastada na base e presa por pinos no topo.

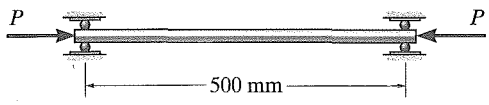


Problemas 13.3/4

13.5. Uma barra quadrada é feita de plástico PVC com módulo de elasticidade $E = 9$ GPa e deformação por escoamento $\epsilon_e = 0{,}001$ mm/mm. Determine as dimensões a de sua menor seção transversal, de modo que não falhe por flambagem elástica. As extremidades da barra estão presas por pinos e seu comprimento é 1.250 mm.

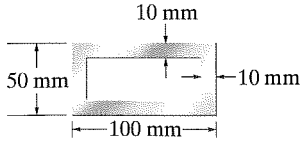
13.6. A haste é feita de aço A-36. Determine, com aproximação de 1 mm, o menor diâmetro da haste que suportará a carga $P = 25$ kN sem flambagem. As extremidades estão apoiadas em roletes.

13.7. A haste é feita de aço com 25 mm de diâmetro. Determine a carga crítica de flambagem, se as extremidades estiverem apoiadas em roletes. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 350$ MPa.



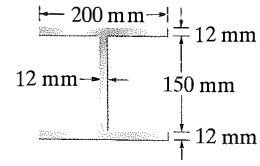
Problemas 13.6/7

***13.8.** Uma coluna de aço A-36 tem comprimento de 5 m e está engastada em ambas as extremidades. Se a área da seção transversal tiver as dimensões mostradas na figura, determine a carga crítica.



Problema 13.8

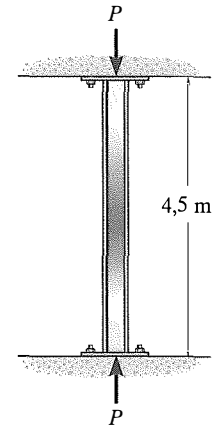
13.9. Uma coluna de aço A-36 tem comprimento de 4,5 m e está presa por pinos em ambas as extremidades. Se a área da seção transversal tiver as dimensões mostradas na figura, determine a carga crítica.



Problema 13.9

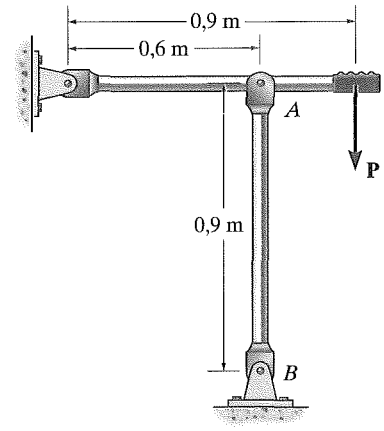
13.10. O elemento estrutural W250 × 67 é feito de aço A-36 e usado como uma coluna de 4,5 m de comprimento. Se considerarmos que suas extremidades estão apoiadas por pinos e que ela é submetida a uma carga axial de 500 kN, determine o fator de segurança em relação à flambagem.

13.11. O elemento estrutural W250 × 67 é feito de aço A-36 e usado como uma coluna de 4,5 m de comprimento. Se as extremidades da coluna estiverem engastadas, a coluna pode suportar a carga crítica sem escoamento?



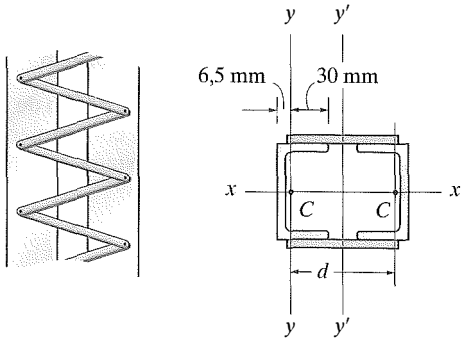
Problemas 13.10/11

***13.12.** Determine a força máxima P que pode ser aplicada ao cabo, de modo que a haste de controle de aço A-36 AB não sofra flambagem. A haste tem diâmetro de 30 mm e está presa por pinos nas extremidades.



Problema 13.12

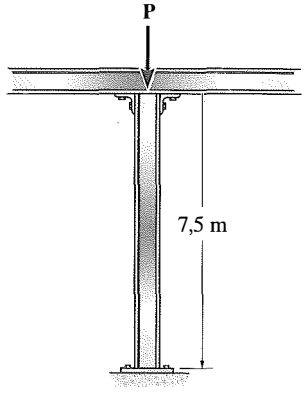
13.13. Os dois perfis em U de aço devem ser interligados para formar uma coluna da ponte de 9 m de comprimento que consideramos estar acoplada por pinos nas extremidades. Cada perfil em U tem área de seção transversal $A = 1.950\ \text{mm}^2$ e momentos de inércia $I_x = 21{,}60(10^6)\ \text{mm}^4$, $I_y = 0{,}15(10^6)\text{mm}^4$. A figura mostra a localização do centroide C de sua área. Determine a distância adequada d entre os centroides dos perfis em U, de modo que ocorra flambagem em torno dos eixos x–x e y'–y' devido à mesma carga. Qual é o valor dessa carga crítica? Despreze o efeito da interligação. $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$, $\sigma_e = 350\ \text{MPa}$.



Problema 13.13

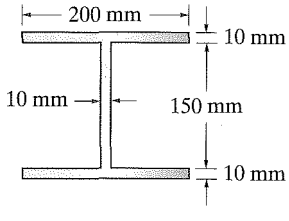
13.14. O elemento estrutural W200 × 100 é usado como uma coluna de aço estrutural A-36. Podemos considerar que a base dessa coluna está engastada e que o topo está preso por um pino. Determine a maior força axial P que pode ser aplicada sem provocar flambagem.

13.15. Resolva o Problema 13.14 considerando que a coluna está engastada na base, mas livre no topo.



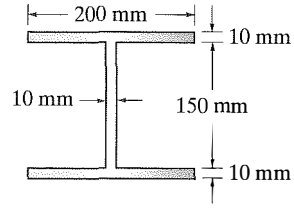
Problemas 13.14/15

*__13.16.__ Uma coluna de aço tem comprimento de 9 m e está engastada em ambas as extremidades. Se a área da seção transversal tiver as dimensões mostradas na figura, determine a carga crítica. $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$, $\sigma_e = 250\ \text{MPa}$.



Problema 13.16

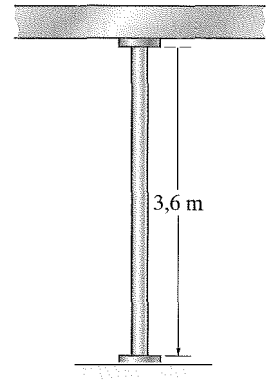
13.17. Resolva o Problema 13.16, se a coluna estiver presa por pinos no topo e na base.



Problema 13.17

13.18. A coluna de tubo de aço A-36 de 3,6 mm tem diâmetro externo de 75 mm e espessura de 6 mm. Determine a carga crítica, se considerarmos que suas extremidades estão acopladas por pinos.

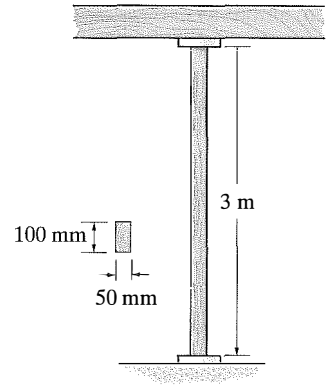
13.19. A coluna de tubo de aço A-36 de 3,6 mm tem diâmetro externo de 75 mm e espessura de 6 mm. Determine a carga crítica, se a base estiver engastada e o topo preso por pinos.



Problemas 13.18/19

*__13.20.__ A coluna retangular de madeira de 3 m tem as dimensões mostradas na figura. Determine a carga crítica, se considerarmos que as extremidades estão acopladas por pinos. $E_m = 12\ \text{GPa}$, $\sigma_e = 35\ \text{MPa}$.

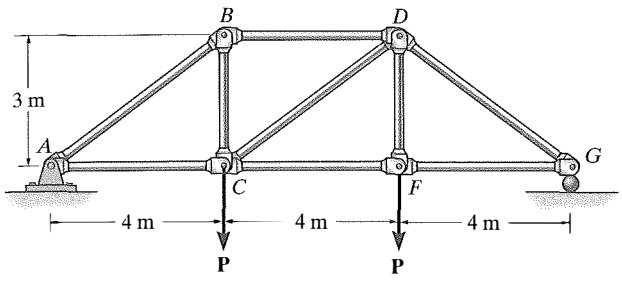
13.21. A coluna de 3 m tem as dimensões mostradas na figura. Determine a carga crítica se a base for engastada e o topo estiver preso por pinos. $E_m = 12\ \text{GPa}$, $\sigma_e = 35\ \text{MPa}$.



Problemas 13.20/21

13.22. Consideramos que os elementos estruturais da treliça estão acoplados por pinos. Se o elemento estrutural BD for uma haste de aço A-36 de raio 50 mm, determine a carga máxima P que pode ser suportada pela treliça sem provocar flambagem no elemento estrutural.

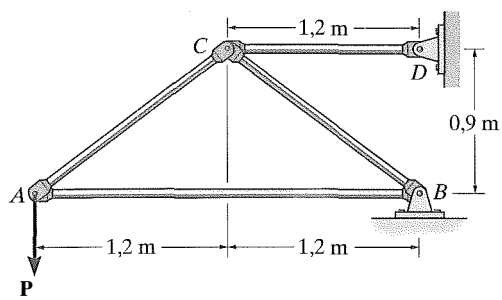
13.23. Resolva o Problema 13.22 no caso de um elemento estrutural AB com raio de 50 mm.



Problemas 13.22/23

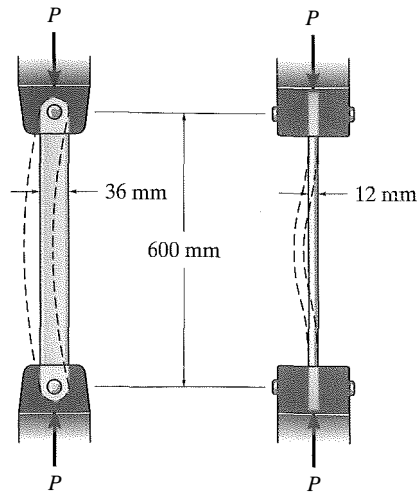
*__13.24.__ A treliça é feita de barras de aço A-36 e cada uma delas tem seção transversal circular com diâmetro de 40 mm. Determine a força máxima P que pode ser aplicada sem provocar flambagem em nenhum dos elementos estruturais. As extremidades dos elementos estruturais estão acopladas por pinos.

13.25. A treliça é feita de barras de aço A-36 e cada uma delas tem seção transversal circular. Se a carga aplicada for $P = 50$ kN, determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro do elemento estrutural AB que impedirá que esse elemento estrutural sofra flambagem. As extremidades dos elementos estruturais estão apoiadas por pinos.



Problemas 13.24/25

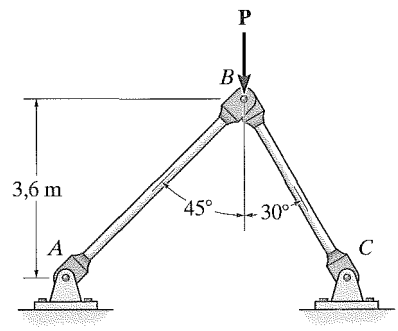
13.26. As extremidades do elo de aço-ferramenta L-2 de uma máquina de forjar estão acopladas aos garfos por pinos, como mostra a figura. Determine a carga máxima P que ele pode suportar sem sofrer flambagem. Use um fator de segurança FS = 1,75 para a flambagem. Observe que, no lado esquerdo da figura, as extremidades estão presas por pino, ao passo que no lado direito, elas estão engastadas.



Problema 13.26

13.27. O mecanismo articulado é composto por duas hastes de aço A-36, cada uma com seção transversal circular. Determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro de cada haste que suportará uma carga $P = 30$ kN. Considere que as extremidades das hastes estão acopladas por pinos. Use fator de segurança de 1,8 para flambagem.

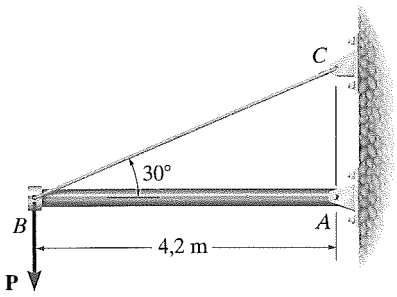
*__13.28.__ O mecanismo articulado é composto por duas hastes de aço A-36, cada uma com seção transversal circular. Se cada haste tiver diâmetro de 20 mm, determine a maior carga que o mecanismo pode suportar sem provocar flambagem em nenhuma das hastes. Considere que as extremidades das hastes estão acopladas por pinos.



Problemas 13.27/28

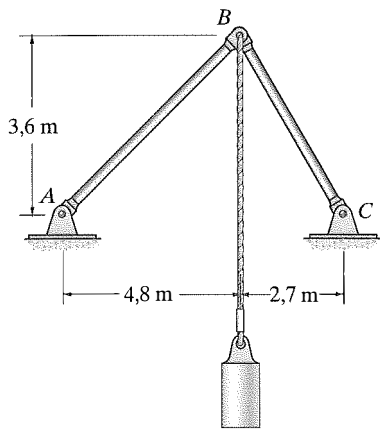
13.29. O tubo de aço A-36 tem diâmetro externo de 50 mm e espessura de 12 mm. Se for mantido no lugar por um cabo de ancoragem, determine a maior força vertical P que pode ser aplicada sem provocar flambagem no tubo. Considere que as extremidades do tubo estão acopladas por pinos.

13.30. O tubo de aço A-36 tem diâmetro externo de 50 mm. Se for mantido no lugar por um cabo de ancoragem, determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro interno exigido para que ele possa suportar uma carga vertical máxima $P = 20$ kN sem provocar flambagem no tubo. Considere que as extremidades do tubo estão acopladas por pinos.



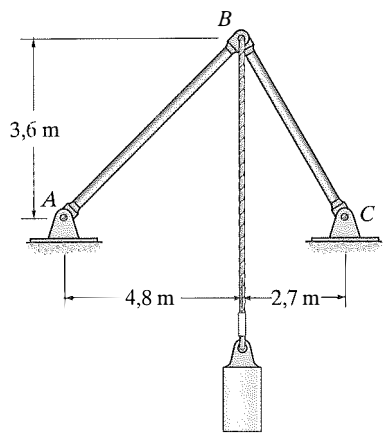
Problemas 13.29/30

13.31. O mecanismo articulado é composto por duas hastes de aço A-36, cada uma com seção transversal circular. Determine, com aproximação de múltiplos de 5 mm, o diâmetro de cada haste que suportará uma carga de 4,5 kN. Considere que as extremidades das hastes estejam acopladas por pinos. Use fator de segurança FS = 1,8 para flambagem.



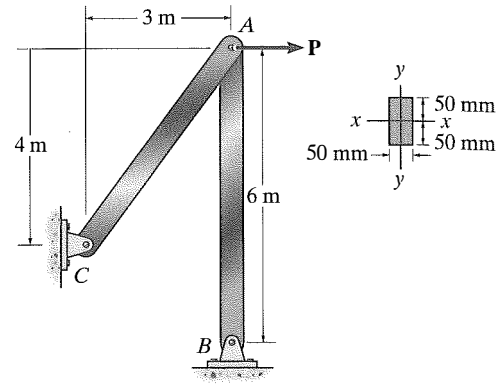
Problema 13.31

***13.32.** O mecanismo articulado é composto por duas hastes de aço A-36, cada uma com seção transversal circular. Se cada haste tiver diâmetro de 20 mm, determine a maior carga que o mecanismo pode suportar sem provocar flambagem em nenhuma das hastes. Considere que as extremidades das hastes estejam conectadas por pinos.



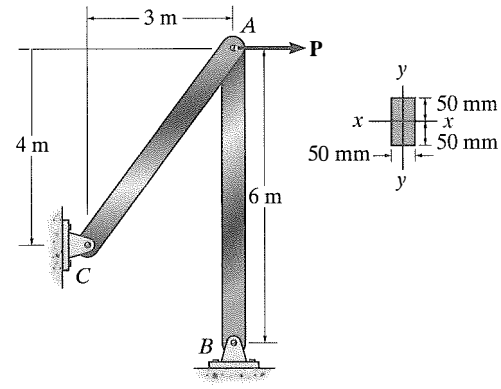
Problema 13.32

13.33. Considere que as extremidades da barra de aço *AB* da estrutura estejam acopladas por pinos para flambagem no eixo *y–y*. Se $P = 18$ kN, determine o fator de segurança para flambagem em torno do eixo *y–y* devido à carga aplicada. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 360$ MPa.



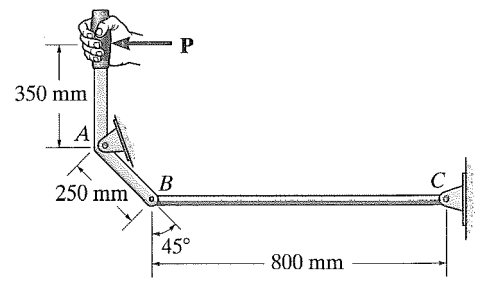
Problema 13.33

13.34. Determine a carga máxima *P* que a estrutura pode suportar sem provocar flambagem no elemento estrutural *AB*. Considere que *AB* é feito de aço e que suas extremidades estão presas por pinos para flambagem no eixo *y–y* e engastadas em ambas as extremidades para flambagem no eixo *x–x*. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 360$ MPa.



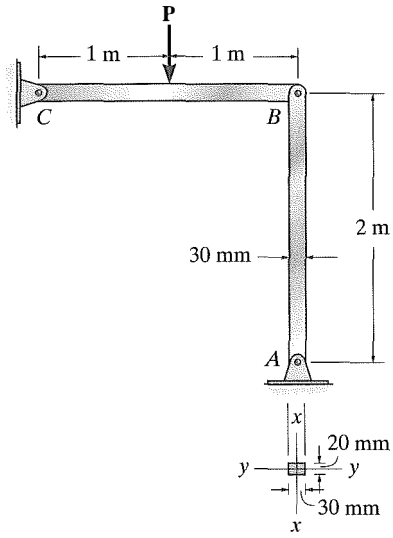
Problema 13.34

13.35. Determine a força máxima *P* que pode ser aplicada ao cabo de modo que a haste de controle *BC* de aço A-36 não sofra flambagem. A haste tem diâmetro de 25 mm.



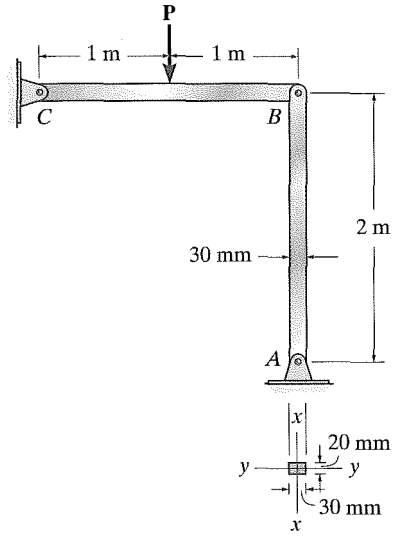
Problema 13.35

13.36. Determine a carga máxima admissível P que pode ser aplicada ao elemento estrutural BC sem provocar flambagem no elemento estrutural AB. Considere que AB é feito de aço e que suas extremidades estejam presas por pinos para flambagem no eixo x–x e engastadas para flambagem no eixo y–y. Use um fator de segurança FS = 3 para flambagem. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 360$ MPa.



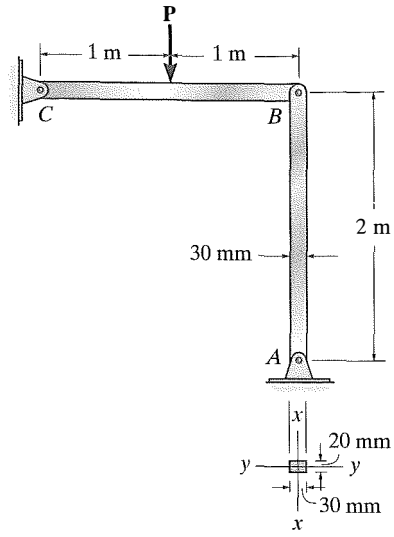
Problema 13.36

13.37. Determine se a estrutura pode suportar uma carga $P = 20$ kN, se o fator de segurança para flambagem do elemento estrutural AB for FS = 3. Considere que AB é feito de aço e que suas extremidades estão presas por pinos para flambagem no eixo x–x e engastadas para flambagem no eixo y–y. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 360$ MPa.



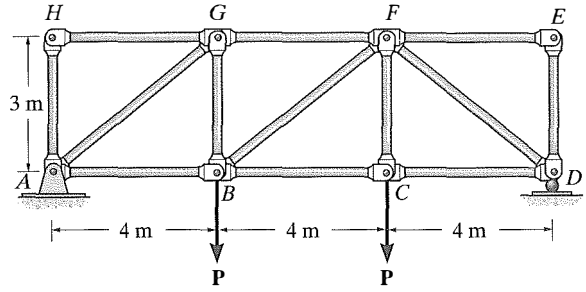
Problema 13.37

13.38. Considere que os elementos estruturais da treliça estão acoplados por pinos. Se o elemento estrutural GF for uma haste de aço A-36 com diâmetro de 50 mm, determine o maior valor da carga $\mathbf{P}$ que pode ser suportada pela treliça sem provocar flambagem naquele elemento estrutural.



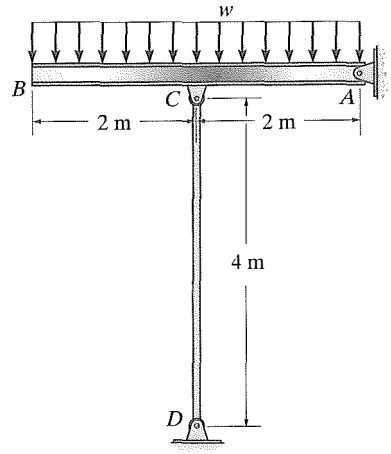
Problema 13.38

*__13.39.__ Considere que os elementos estruturais da treliça estão acoplados por pinos. Se o elemento estrutural AG for uma haste de aço A-36 com diâmetro de 50 mm, determine o maior valor da carga $\mathbf{P}$ que pode ser suportada pela treliça sem provocar flambagem naquele elemento estrutural.



Problemas 13.39/40

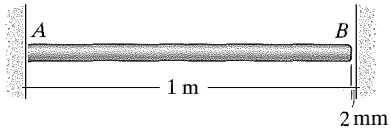
13.40. Determine a carga máxima distribuída que pode ser aplicada à viga de abas largas, de modo que a haste CD não sofra flambagem. A braçadeira é uma haste de aço A-36 com diâmetro de 50 mm.



Problema 13.40

13.41. A haste de bronze C86100 de 50 mm de diâmetro está engastada em A e afastada 2 mm da parede em B. Determine o aumento de temperatura ΔT que provocará a flambagem da haste. Considere que o contato em B age como um pino.

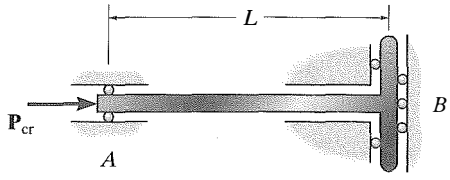
***13.42.** Considere uma coluna ideal como a da Figura 13.12c, com ambas as extremidades engastadas. Mostre que a carga crítica sobre a coluna é dada por $P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$. *Dica*: Devido à deflexão vertical do topo da coluna, um momento constante $\mathbf{M}'$ será desenvolvido nos apoios. Mostre que $d^2v/dx^2 + (P/EI)v = M'/EI$. A solução é da forma $v = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{P/EI_x}) + C_2 \cos(\sqrt{P/EI_x}) + M'/P$.



Problema 13.42

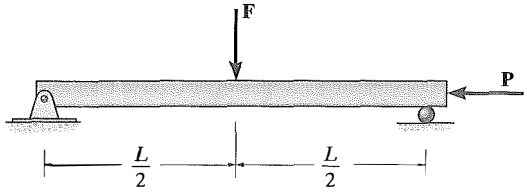
***13.43.** Considere uma coluna ideal como a da Figura 13.12d, com uma extremidade engastada e a outra presa por pinos. Mostre que a carga crítica sobre a coluna é dada por $P_{cr} = 20{,}19EI/L^2$. *Dica*: devido à deflexão vertical no topo da coluna, um momento constante $\mathbf{M}'$ será desenvolvido no apoio engastado e forças horizontais de reação $\mathbf{R}'$ serão desenvolvidas em ambos os apoios. Mostre que $d^2v/dx^2 + (P/EI)v = (R'/EI)(L - x)$. A solução é da forma $v = C_1 \operatorname{sen}(\sqrt{P/EI_x}) + C_2 \cos(\sqrt{P/EI_x}) + (R'/P)(L - x)$. Após a aplicação das condições de contorno, mostre que $\operatorname{tg}(\sqrt{P/EI}\,L) = \sqrt{P/EI}\,L$. Resolva por tentativa e erro para a menor raiz.

13.44. A coluna está apoiada em B e esse apoio não permite rotação, mas sim deflexão vertical. Determine a carga crítica P_{cr}. EI é constante.



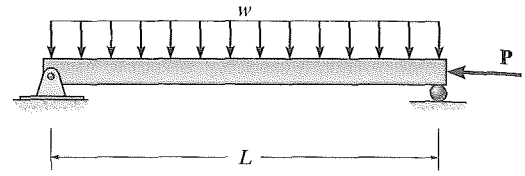
Problema 13.44

13.45. A coluna ideal está sujeita à força $\mathbf{F}$ em seu ponto médio e à carga axial $\mathbf{P}$. Determine o momento máximo da coluna no meio do vão. EI é constante. *Dica*: Defina a equação diferencial para deflexão (Equação 13.1). A solução geral é $v = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx - c^2x/k^2$, onde $c^2 = F/2EI$, $k^2 = P/EI$.



Problema 13.45

13.46. A coluna ideal tem peso w (força/comprimento) e permanece na posição horizontal quando sujeita a uma carga axial $\mathbf{P}$. Determine o momento máximo no ponto médio do vão da coluna. EI é constante. *Dica*: defina a equação diferencial para deflexão (Equação 13.1), com a origem no ponto médio do vão. A solução geral é $v = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx + (w/(2P))x^2 - (wL/(2P))x - (wEI/P^2)$ onde $k^2 = P/EI$.



Problema 13.46

*13.4 A fórmula da secante

A fórmula de Euler foi deduzida partindo da premissa de que a carga P é sempre aplicada no centroide da área da seção transversal da coluna e que a coluna é perfeitamente reta. Na verdade, essa premissa é bastante irreal, visto que colunas fabricadas nunca são perfeitamente retas e não se conhece a aplicação da carga com precisão. Então, na realidade, as colunas nunca sofrem flambagem de forma repentina; em vez disso, elas começam a sofrer flexão, embora bem pequena, imediatamente após a aplicação de uma carga. O resultado é que o próprio critério de aplicação de carga ficará limitado a uma deflexão específica da coluna ou a não permitir que a tensão máxima na coluna ultrapasse uma tensão admissível.

Para estudar esse efeito, aplicaremos a carga P à coluna a uma curta *distância excêntrica* e em relação ao centroide da seção transversal (Figura 13.15a). Essa carga na coluna é estaticamente equivalente à carga axial P e ao momento fletor $M' = Pe$ mostrados na Figura 13.15b. Podemos ver na figura que, em ambos os casos, as extremidades A e B são suportadas de modo tal que ficam livres para girar (suportada por pinos). Como antes, consideraremos somente pequenas inclinações e deflexões e o comportamento linear elástico do material. E mais, o plano x–v é um plano de simetria para a área da seção transversal.

Pelo diagrama de corpo livre da seção arbitrária (Figura 13.15c) o momento interno na coluna é

$$M = -P(e + v) \tag{13.13}$$

A equação diferencial para curva de deflexão é, portanto,

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -P(e + v)$$

ou

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -\frac{P}{EI}e$$

Essa equação é semelhante à Equação 13.7 e tem uma solução geral que consiste nas soluções complementar e particular, a saber,

$$v = C_1 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x - e \tag{13.14}$$

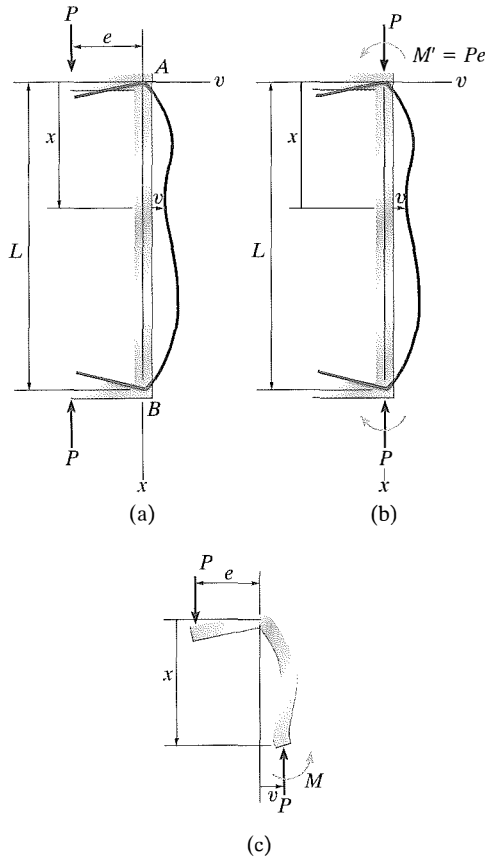


Figura 13.15

Para avaliar as constantes, temos de aplicar as condições de contorno. Em $x = 0, v = 0$, portanto $C_2 = e$. Em $x = L, v = 0$, resulta

$$C_1 = \frac{e[1 - \cos(\sqrt{P/EI}\,L)]}{\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L)}$$

Visto que $1 - \cos(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\operatorname{sen}^2(\sqrt{P/EI}\,L/2)$ e $\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\operatorname{sen}(\sqrt{P/EI}\,L/2)\cos(\sqrt{P/EI}\,L/2)$, temos

$$C_1 = e\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

Por consequência, a curva de deflexão (Equação 13.14) pode ser expressa como

$$v = e\left[\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - 1\right] \tag{13.15}$$

Deflexão máxima. Devido à simetria da carga, ambas, deflexão máxima e tensão máxima, ocorrem no ponto médio da coluna. Portanto, quando $x = L/2$, $v = v_{máx}$ e, por isso,

$$v_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \tag{13.16}$$

Observe que, se e tender a zero, então $v_{máx}$ tende a zero. Todavia, se os termos entre colchetes tenderem a infinito quando e tender a zero, então $v_{máx}$ terá um valor não nulo. Em termos matemáticos, isso representaria o comportamento de uma coluna com carga axial no momento da falha quando sujeita à carga crítica P_{cr}. Portanto, para determinar P_{cr}, é preciso que

$$\sec\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2}\right) = \infty$$

$$\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{13.17}$$

que é o mesmo resultado obtido com a fórmula de Euler (Equação 13.5).

Se representarmos a Equação 13.16 em gráfico como a carga P em relação à deflexão $v_{máx}$ para vários valores de excentricidade e, o resultado será a família de curvas cinza mostradas na Figura 13.16. Aqui a carga crítica torna-se uma assíntota às curvas e, é claro, representa o caso irreal de uma coluna ideal ($e = 0$). Como já dissemos, *e nunca é igual a zero* devido às imperfeições na retidão inicial da coluna e na aplicação da carga; todavia, à medida que $e \to 0$, as curvas tendem a aproximar-se do caso ideal. Além disso, essas são adequadas somente para *pequenas deflexões*, visto que a curvatura foi aproximada por d^2v/dx^2, quando desenvolvemos a Equação 13.16. Se tivéssemos realizado uma análise mais exata, todas essas curvas tenderiam a curvar-se para cima interceptando e, em seguida, ultrapassando a reta $P = P_{cr}$. É claro que isso indica que é necessária uma carga P maior para criar deflexões maiores na coluna. Entretanto, não consideramos essa análise aqui, visto que na maioria das vezes o próprio projeto de engenharia restringe a deflexão de colunas a pequenos valores.

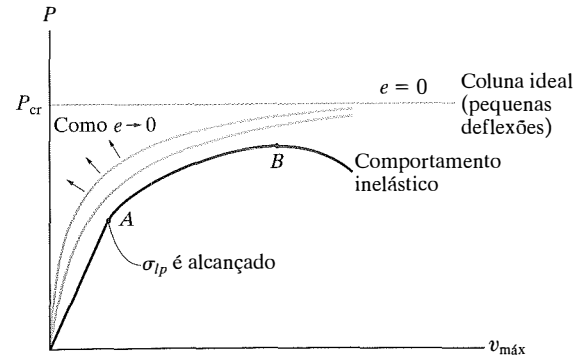


Figura 13.16

Deve-se observar também que as curvas em cinza na Figura 13.16 aplicam-se somente a material de comportamento linear elástico. Será esse o caso, se a coluna for comprida e esbelta. Contudo, se considerarmos uma coluna robusta curta ou de comprimento intermediário, então a carga aplicada, à medida que aumenta, a certa altura poderá provocar o escoamento do material e a coluna começará a comportar-se de maneira *inelástica.* Isso ocorre no ponto A da curva em preto na Figura 13.16. Ainda que a carga continue a aumentar, a curva nunca atingirá a carga crítica; em vez disso, a carga atingirá um valor máximo em B. Depois desse ponto, ocorrerá uma redução repentina na capacidade de carga à medida que a coluna continuar a sofrer deflexões cada vez maiores.

Por fim, as curvas em cinza na Figura 13.16 também ilustram que ocorre uma relação *não linear* entre a carga P e a deflexão v. O resultado é que o princípio da superposição *não pode ser usado* para determinar a deflexão total de uma coluna provocada pela aplicação de *cargas sucessivas.* Em vez disso, primeiro temos de somar as cargas e só então determinar a deflexão correspondente à carga resultante. Em termos físicos, a razão por que as cargas e as deflexões sucessivas não podem ser sobrepostas é que o momento interno da coluna *depende* da carga P, bem como da *deflexão* v, isto é, $M = -P(e + v)$ (Equação 13.13). Em outras palavras, qualquer *deflexão* provocada por uma componente de carga aumenta o momento. Esse comportamento é diferente da flexão de uma viga, na qual a deflexão verdadeira provocada por uma carga *não* aumenta o momento interno.

A fórmula da secante. A tensão máxima na coluna pode ser determinada se entendermos que ela é provocada pela carga axial e também pelo momento (Figura 13.17a). O momento máximo ocorre no ponto médio da coluna e, pelas equações 13.13 e 13.16, seu valor é

$$M = |P(e + v_{máx})| \qquad M = Pe\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) \tag{13.18}$$

Como mostra a Figura 13.17b, a tensão máxima na coluna é de compressão e seu valor é

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

Visto que o raio de giração é definido como $r^2 = I/A$, a equação acima pode ser escrita em uma forma denominada *fórmula da secante*:

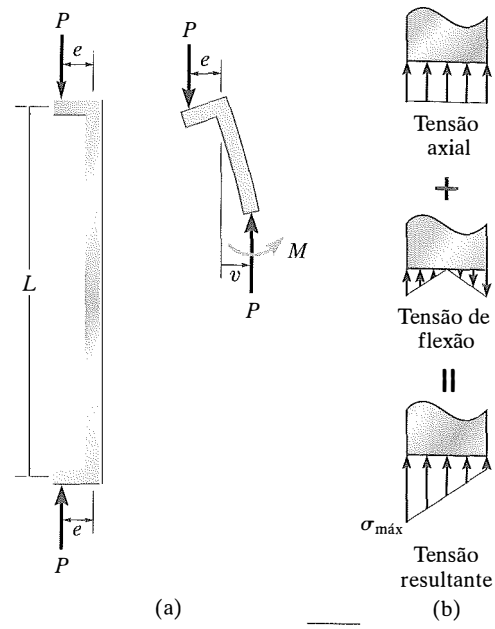


Figura 13.17

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \tag{13.19}$$

Nessa expressão

$\sigma_{máx}$ = *tensão elástica* máxima na coluna, que ocorre no interior do lado côncavo no ponto médio da coluna. Essa tensão é de compressão

P = carga vertical aplicada à coluna. $P < P_{cr}$ a menos que $e = 0$, então $P = P_{cr}$ (Equação 13.5)

e = excentricidade da carga P, medida do eixo neutro da área da seção transversal da coluna até a linha de ação de P

c = distância do eixo neutro até a fibra externa da coluna onde ocorre a tensão de compressão máxima $\sigma_{máx}$

A = área da seção transversal da coluna

L = comprimento não apoiado da coluna *no plano de flexão*. Para outros apoios, exceto pinos, o comprimento efetivo L_e deve ser usado. Veja Figura 13.12

E = módulo de elasticidade para o material

r = raio de giração, $r = \sqrt{I/A}$, onde I é calculado em torno do eixo neutro ou de flexão

Assim como a Equação 13.16, a Equação 13.19 indica que há uma relação não linear entre a carga e a tensão. Por consequência, o princípio da superposição não é aplicável e, portanto, as cargas têm de ser somadas *antes* de determinar a tensão. Além do mais, em razão dessa relação não linear, qualquer fator de segurança usado para a finalidade de projeto aplica-se à carga, e não à tensão.

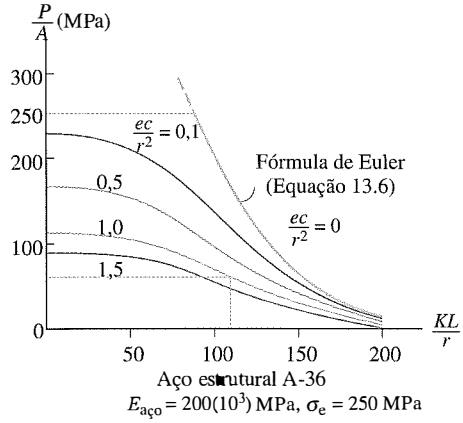


Figura 13.18

Para um dado valor de $\sigma_{máx}$, a Equação 13.19 pode ser representada em gráfico como KL/r em relação a P/A para vários valores do *índice de excentricidade* ec/r^2. A Figura 13.18 mostra um conjunto específico de curvas para um aço estrutural grau A-36 com ponto de escoamento $\sigma_{máx} = \sigma_e = 250$ MPa e módulo de elasticidade $E_{aço} = 200 \times 10^3$ MPa. Nessa figura, a abscissa e a ordenada representam o índice de esbeltez KL/r e a tensão média P/A, respectivamente. Observe que, quando $e \to 0$, ou quando $ec/r^2 \to 0$, a Equação 13.19 dá $\sigma_{máx} = P/A$, onde P é a carga crítica na coluna, definida pela fórmula de Euler. Isso resulta na Equação 13.6, cujo gráfico foi apresentado na Figura 13.8. Uma vez que ambas as equações 13.6 e 13.19 são válidas somente para cargas elásticas, as tensões mostradas na Figura 13.18 não podem ultrapassar $\sigma_e = 250$ MPa representada na figura pela linha horizontal.

As curvas na Figura 13.18 indicam que diferenças no índice de excentricidade têm efeito marcante na capacidade de carga de colunas com índices de esbeltez pequenos. Por outro lado, colunas com índices de esbeltez grandes tendem a falhar na carga crítica de Euler, ou próximo dela, independentemente do índice de excentricidade. Portanto, ao usarmos a Equação 13.19 para a finalidade de projeto, é importante ter um valor mais ou menos preciso para o índice de excentricidade para colunas mais curtas.

Projeto. Uma vez determinado o índice de excentricidade, os dados da coluna podem ser substituídos na Equação 13.19. Se for escolhido um valor de $\sigma_{máx} = \sigma_e$, então a carga correspondente, P_e, pode ser determinada por um procedimento de tentativa e erro, visto que a equação é transcendental e não pode ser resolvida explicitamente para P_e. Como auxílio para o projeto, também podemos usar códigos computacionais ou gráficos como os da Figura 13.18 para determinar P_e diretamente.

Entenda que P_e é a carga que fará a coluna desenvolver uma tensão de compressão máxima σ_e em suas fibras côncavas internas. Devido à aplicação excêntrica de P_e, essa carga sempre será menor do que a carga crítica P_{cr}, determinada pela fórmula de Euler que considera que a coluna suporta carga axial, o que é irreal. Uma vez obtida P_e, podemos aplicar um fator de segurança adequado para especificar a carga segura para a coluna.

EXEMPLO 13.5

Considerando que a coluna de aço mostrada na Figura 13.19 está acoplada por pinos no topo e na base, determine a carga excêntrica admissível P que pode ser aplicada. Calcule também a deflexão máxima da coluna provocada por essa carga. Como a coluna está escorada, considere que não ocorre flambagem em torno do eixo y. Adote $E_{aço} = 200(10^3)$MPa, $\sigma_e = 250$ MPa.

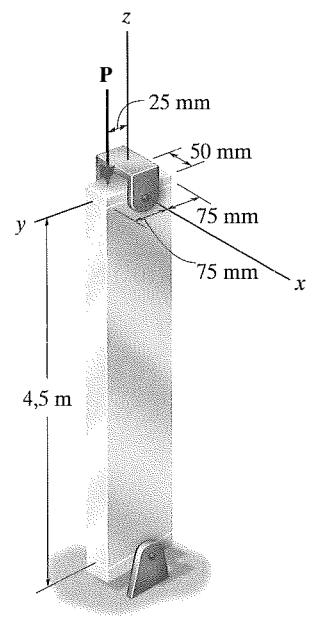


Figura 13.19

PONTOS IMPORTANTES

- Devido a imperfeições na fabricação da coluna ou na aplicação da carga, uma coluna nunca sofrerá flambagem repentina; em vez disso, ela começará a sofrer flexão.
- A carga aplicada à coluna está relacionada com sua deflexão de maneira não linear e, portanto, o princípio da superposição não é aplicável.
- À medida que o índice de esbeltez aumenta, colunas com cargas excêntricas tendem a falhar na carga de flambagem de Euler ou próximo dela.

SOLUÇÃO

O cálculo das propriedades geométricas necessárias nos dá

$$I_x = \frac{1}{12}(50\text{ mm})(150\text{ mm})^3 = 14{,}06 \times 10^6\text{ mm}^4$$

$$A = (50\text{ mm})(150\text{ mm}) = 7.500\text{ mm}^4$$

$$r_x = \sqrt{\frac{14{,}06 \times 10^6\text{ mm}^4}{7.500\text{mm}^2}} = 43{,}30\text{ mm}$$

$$e = 25\text{ mm}$$

$$KL = 1(4{,}5\text{ mm})(1.000) = 4.500\text{ mm}$$

$$\frac{KL}{r_x} = \frac{4.500\text{ mm}}{43{,}30\text{ mm}} = 104$$

Visto que as curvas na Figura 13.18 foram definidas para $E_{aço} = 200(10^3)$ MPa e $\sigma_e = 250$ MPa, podemos usá-las para determinar o valor de P/A e, dessa forma, evitar uma solução por tentativa e erro da fórmula da secante. Aqui, $KL/r_x = 104$. Usando a curva definida pelo índice de excentricidade $ec/r^2 = (25\text{ mm})(75\text{ mm})/(43{,}30\text{ mm})^2 = 1$, obtemos

$$\frac{P}{A} \approx 83\text{ MPa}$$

$P = (83\text{ MPa})(7.500\text{ mm}^2) = 622.500\text{ N} = 622{,}5\text{ kN}$ *Resposta*

Podemos verificar esse valor mostrando que ele satisfaz a fórmula da secante (Equação 13.19):

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

$$250 \stackrel{?}{=} \frac{622{,}5(10^3)\text{ N}}{7.500\text{ mm}^2}\left[1 + (1)\sec\left(\frac{4.500\text{ mm}}{(2)43{,}3\text{ mm}}\sqrt{\frac{622{,}5(10^3)\text{ N}}{200(10^3)\text{ N/mm}^2 \times 7.500\text{ mm}^2}}\right)\right]$$

$$250 \stackrel{?}{=} 83[1 + \sec(1{,}0586\text{ rad})]$$

$$250 \stackrel{?}{=} 83[1 + \sec 60{,}65°]$$

$$250 \approx 252{,}3$$

A deflexão máxima ocorre no centro da coluna, onde $\sigma_{máx} = 250$ MPa. Aplicando a Equação 13.16, temos

$$v_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right]$$

$$= 25\text{ mm}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{622{,}5(10^3)\text{ N}}{200(10^3)\text{ N/mm}^2 \times 14{,}06 \times 100^6\text{ mm}^4}} \times \frac{4.500\text{ mm}}{2}\right) - 1\right]$$

$$= 25\text{ mm}[\sec 1{,}0586\text{ rad} - 1]$$

$$= 25\text{ mm}[\sec 60{,}65° - 1]$$

$$= 26{,}0\text{ mm}$$ *Resposta*

EXEMPLO 13.6

A coluna de aço W200 × 59 A-36 mostrada na Figura 13.20a está engastada na base e escorada no topo de modo que não pode deslocar-se, mas está livre para girar em torno do eixo *y–y*. Além disso, ela pode oscilar para o lado no plano *y–z*. Determine a carga excêntrica máxima que a coluna pode suportar antes de começar a flambar ou antes de o aço sofrer escoamento.

SOLUÇÃO

Pelas condições de apoio, vemos que, em torno do eixo *y–y*, a coluna comporta-se como se estivesse presa por pinos no topo e engastada na base e sujeita a uma carga axial *P* (Figura 13.20b). Em torno do eixo *x–x*, a coluna está livre no topo, engastada na parte inferior e sujeita uma carga axial *P* e ao momento $M = P(200\text{ mm})$ (Figura 13.20c).

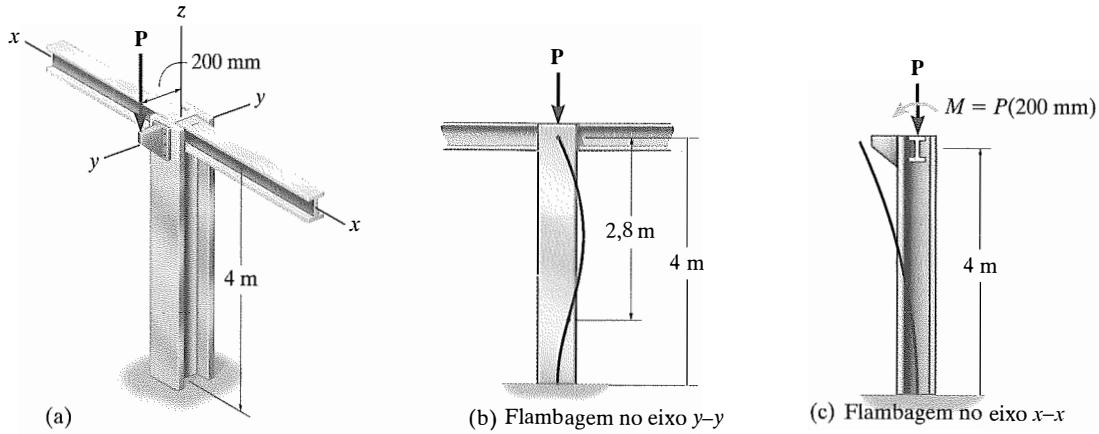


Figura 13.20

Flambagem no eixo y–y. Pela Figura 13.12d, o fator de comprimento efetivo é $K_y = 0{,}7$, portanto $(KL)_y = 0{,}7(4\text{ m}) = 2{,}8\text{ m} = 2.800\text{ mm}$. Pela tabela no Apêndice B determinamos I_y para a seção W200 × 59 e aplicando a Equação 13.11, temos

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[200(10^3)\text{ N/mm}^2](20{,}4)(10^6)\text{ mm}^4)}{(2.800\text{mm})^2}$$
$$= 513.647\text{ N} = 5.136\text{ kN}$$

Escoamento no eixo x–x. Pela Figura 13.12b, $K_x = 2$, portanto $(KL)_x = 2(4\text{ m}) = 8\text{ m} = 8.000\text{ mm}$. Usando novamente a tabela no Apêndice B para determinar $A = 7.580\text{ cm}^2$, $c = 210\text{ mm}/2 = 105\text{ mm}$, e $r_x = 89{,}9\text{ mm}$, e aplicando a fórmula da secante, temos

$$\sigma_e = \frac{P_x}{A}\left[1 + \frac{ec}{r_x^2}\sec\left(\frac{(KL)_x}{2r_x}\sqrt{\frac{P_x}{EA}}\right)\right]$$

ou

$$250 = \frac{P_x}{7.580}\left[1 + \frac{200 \times 105}{89{,}9^2}\sec\left(\frac{8.000}{2(89{,}9)}\sqrt{\frac{P_x}{200(10^3)\cdot 7.580}}\right)\right]$$

$$1{,}895 \times 10^6 = P_x[1 + 2{,}598\sec(1{,}143 \times 10^{-3}\sqrt{P_x})]$$

Resolvendo para P_x por tentativa e erro e observando que o argumento para sec está em radianos, obtemos

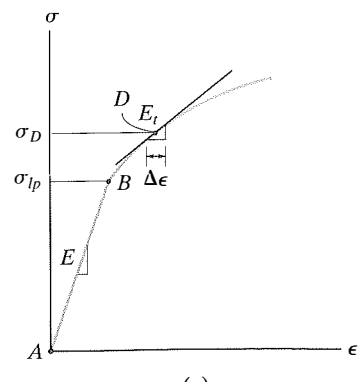
$$P_x = 419.368\text{ N} = 419{,}4\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Como esse valor é menor do que $(P_{cr}) = 5.136\text{ kN}$, ocorrerá falha em torno do eixo x–x. Além disso, $\sigma = 419{,}4 \times 10^3\text{ N}/7.580\text{ mm}^2 = 55{,}3\text{ MPa} < \sigma_e = 250\text{ MPa}$.

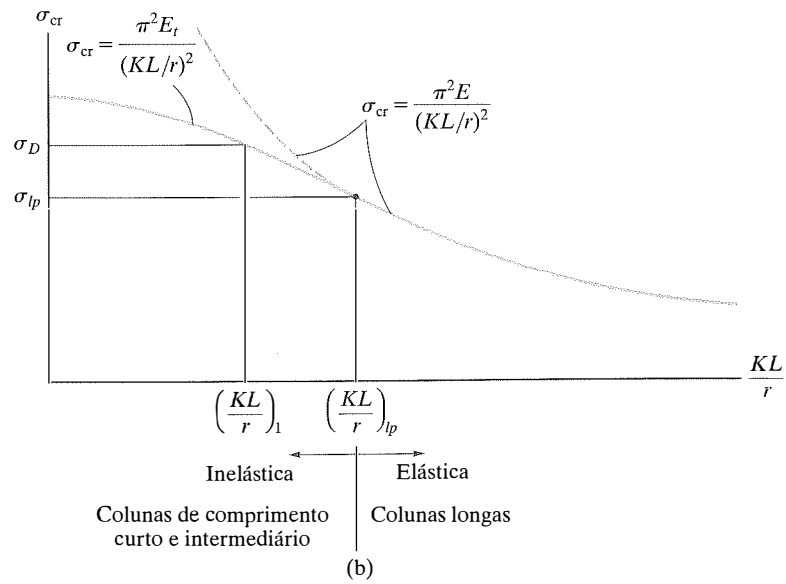
*13.5 Flambagem inelástica

Na prática da engenharia, em geral as colunas são classificadas de acordo com o tipo de tensão desenvolvida em seu interior no momento da falha. *Colunas compridas e esbeltas* se tornarão instáveis quando a tensão de compressão permanecer elástica. A falha que ocorre é denominada *instabilidade elástica. Colunas intermediárias* falham devido a *instabilidade inelástica*, o que significa que a tensão de compressão na falha é maior do que o limite de proporcionalidade do material. E as *colunas curtas,* às vezes denominadas *postes,* não se tornam instáveis; mais exatamente, o material simplesmente escoa ou sofre ruptura.

A aplicação da equação de Euler exige que a tensão na coluna permaneça *abaixo* do limite de escoamento do material (na verdade, o limite de proporcionalidade) quando a coluna sofre flambagem e, por isso, a equação aplica-se somente às colunas compridas. Todavia, na prática, a maioria das colunas selecionadas tem comprimento intermediário. O comportamento dessas colunas pode ser estudado modificando-se a equação de Euler de modo que ela possa ser aplicada à flambagem inelástica. Para mostrar como isso pode ser feito, considere que o material tem diagrama tensão–deformação como o mostrado na Figura 13.21a. Aqui, o limite de proporcionalidade é σ_{lp} e o módulo de elasticidade, ou inclinação da reta AB, é E. Uma representação gráfica da hipérbole de Euler (Figura 13.8), é mostrada na Figura 13.21b. Essa equação é válida para uma coluna que tenha um índice de esbeltez tão pequeno quanto $(KL/r)_{lp}$, visto que, nesse ponto, a tensão axial na coluna torna-se $\sigma_{cr} = \sigma_{lp}$.



(a)



(b)

Figura 13.21

Se a coluna tiver um índice de esbeltez *menor* do que $(KL/r)_{lp}$, a tensão crítica na coluna deve ser maior do que σ_{lp}. Por exemplo, suponha que uma coluna tenha um índice de esbeltez $(KL/r)_1 < (KL/r)_{pl}$, com tensão crítica correspondente $\sigma_D > \sigma_{lp}$ necessária para causar instabilidade. Quando a coluna está *na iminência de sofrer flambagem*, a mudança na deformação que ocorre nela está dentro de uma *pequena faixa* $\Delta\epsilon$, e, por isso, o módulo de elasticidade ou a rigidez do material pode ser considerado como o ***módulo tangente,*** E_t, definido como a inclinação do diagrama σ–ϵ no ponto D (Figura 13.21a). Em outras palavras, no momento da falha, a coluna comporta-se como se fosse feita de um material que tivesse *rigidez menor* que quando comporta-se elasticamente, $E_t < E$.

Portanto, em geral, à medida que o índice de esbeltez diminui, a *tensão crítica* de uma coluna continua a aumentar; e, pelo diagrama σ–ϵ, o *módulo tangente* para o material *diminui.* Usando essa ideia, podemos modificar a equação de Euler para incluir esses casos de flambagem inelástica substituindo o módulo tangente do material E_t em vez de E, de modo que

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \tag{13.20}$$

Esse é o *módulo tangente* ou *equação de Engesser*, proposto por F. Engesser em 1889. A Figura 13.21b mostra uma representação gráfica dessa equação para colunas intermediárias e curtas de um material definido pelo diagrama σ–ϵ na Figura 13.21a.

Nenhuma *coluna real* pode ser considerada como perfeitamente reta nem carregada ao longo de seu eixo centroide, como fizemos aqui. Portanto, na verdade é muito difícil desenvolver uma expressão que nos dê uma análise completa desse fenômeno. Devemos destacar também que outros métodos já foram considerados para descrever a flambagem inelástica de colunas. Um deles foi desenvolvido pelo engenheiro aeronáutico F. R. Shanley e denomina-se *teoria de Shanley* da flambagem inelástica. Embora descreva melhor o fenômeno do que a teoria do módulo tangente, como explicado aqui, testes experimentais realizados em um grande número de colunas, cada qual com uma aproximação da coluna ideal, mostraram que a Equação 13.20 prevê a tensão crítica da coluna com *razoável precisão.* Além do mais, a abordagem do módulo tangente para o comportamento da coluna inelástica é relativamente fácil de aplicar.

EXEMPLO 13.7

Uma haste maciça com 30 mm de diâmetro e 600 mm de comprimento é feita de um material que pode ser modelado pelo diagrama tensão–deformação mostrado na Figura 13.22. Se for usada como uma coluna apoiada por pinos, determine a carga crítica.

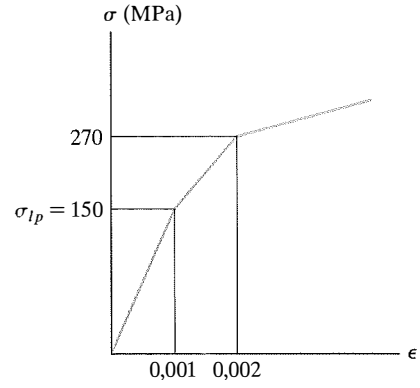


Figura 13.22

SOLUÇÃO

O raio de giração é

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(\pi/4)(15)^4}{\pi(15)^2}} = 7{,}5 \text{ mm}$$

e, portanto, o índice de esbeltez é

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(600 \text{ mm})}{7{,}5 \text{ mm}} = 80$$

A aplicação da Equação 13.20 produz

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2 E_t}{(80)^2} = 1{,}542(10^{-3})E_t \tag{1}$$

Em primeiro lugar, consideraremos que a tensão crítica é elástica. Pela Figura 13.22,

$$E = \frac{150 \text{ MPa}}{0{,}001} = 150 \text{ GPa}$$

Assim, a Equação 1 torna-se

$$\sigma_{cr} = 1{,}542(10^{-3})[150(10^3)]\text{MPa} = 231{,}3 \text{ MPa}$$

Visto que $\sigma_{cr} > \sigma_{lp} = 150$ MPa, ocorre flambagem inelástica.

Pelo segundo segmento de reta do diagrama σ–ϵ da Figura 13.22, temos

$$E_t = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} = \frac{270 \text{ MPa} - 150 \text{ MPa}}{0{,}002 - 0{,}001} = 120 \text{ GPa}$$

A aplicação da Equação 1 produz

$$\sigma_{cr} = 1{,}542(10^{-3})[120(10^3)]\text{MPa} = 185{,}1 \text{ MPa}$$

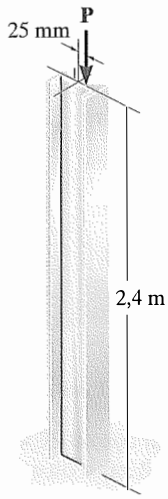
Como esse valor encontra-se entre os limites de 150 MPa e 270 MPa, ele é, na verdade, a tensão crítica.

Portanto, a carga crítica na haste é

$$P_{cr} = \sigma_{cr}A = 185{,}1 \text{ MPa}[\pi(0{,}015 \text{ m})^2] = 131 \text{ kN} \quad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

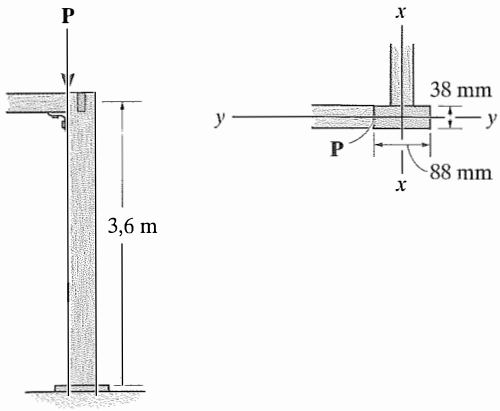
*13.47. Determine a carga P necessária para provocar a falha por flambagem ou por escoamento da coluna W200 × 22 de aço A-36 engastada na base e livre no topo.



Problema 13.47

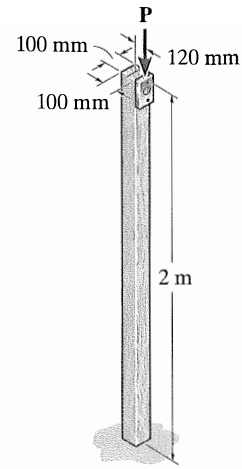
13.48. Considere que a coluna de madeira está engastada na base e presa por pinos no topo. Determine a carga excêntrica máxima P que pode ser aplicada sem provocar flambagem ou escoamento da coluna. $E_m = 12$ GPa, $\sigma_e = 56$ MPa.

13.49. A coluna de madeira está engastada na base e no topo. Determine a carga excêntrica máxima P que pode ser aplicada no topo sem provocar flambagem ou escoamento da coluna. $E_m = 12$ GPa, $\sigma_e = 56$ MPa.



Problemas 13.48/49

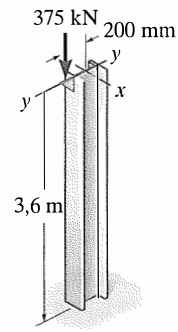
13.50. A coluna de madeira tem seção transversal quadrada de dimensões 100 mm por 100 mm. Está engastada na base e livre no topo. Determine a carga P que pode ser aplicada na borda da coluna sem provocar falha por flambagem ou escoamento. $E_m = 12$ GPa, $\sigma_e = 55$ MPa.



Problema 13.50

*13.51. A coluna W200 × 71 de aço estrutural A-36 está engastada na base e livre no topo. Se for submetida à carga excêntrica de 375 kN, determine o fator de segurança para início de flambagem ou escoamento.

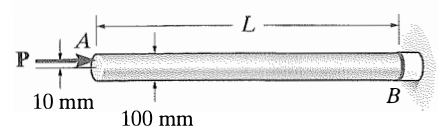
13.52. A coluna W200 × 71 de aço estrutural A-36 está engastada na base e presa por pinos no topo. Se for submetida à carga excêntrica de 375 kN, determine se ela falha por escoamento. A coluna está escorada de modo a não sofrer flambagem em torno do eixo y–y.



Problemas 13.51/52

13.53. A haste de bronze está engastada em uma extremidade e livre na outra. Se for aplicada a carga excêntrica $P = 200$ kN, determine o maior comprimento admissível L da haste de modo que não sofra flambagem ou escoamento. $E_{br} = 101$ GPa, $\sigma_e = 69$ MPa.

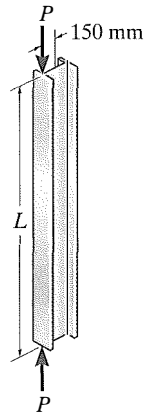
13.54. A haste de bronze está engastada em uma extremidade e livre na outra. Se seu comprimento for $L = 2$ m, determine a maior carga admissível P que pode ser aplicada de modo que ela não sofra flambagem ou escoamento. Calcule também a maior deflexão lateral da haste devido à carga. $E_{br} = 101$ GPa, $\sigma_e = 69$ MPa.



Problemas 13.53/54

*13.55. Uma coluna W310 × 39 de aço estrutural A-36 está engastada nas extremidades e tem comprimento $L = 6{,}9$ m. Determine a carga excêntrica máxima P que pode ser aplicada de modo que a coluna não sofra flambagem ou escoamento. Compare esse valor com uma carga axial crítica P' aplicada no centroide da coluna.

13.56. Uma coluna W360 × 45 de aço estrutural A-36 está engastada pinos nas extremidades e tem comprimento $L = 6{,}0$ m. Determine a carga excêntrica máxima P que pode ser aplicada de modo que a coluna não sofra flambagem ou escoamento. Compare esse valor com uma carga axial crítica P' aplicada no centroide da coluna.

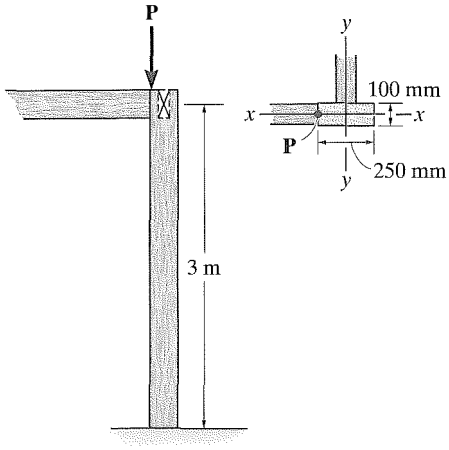


Problemas 13.55/56

13.57. Resolva o Problema 13.56, se a coluna estiver engastada na base e livre no topo.

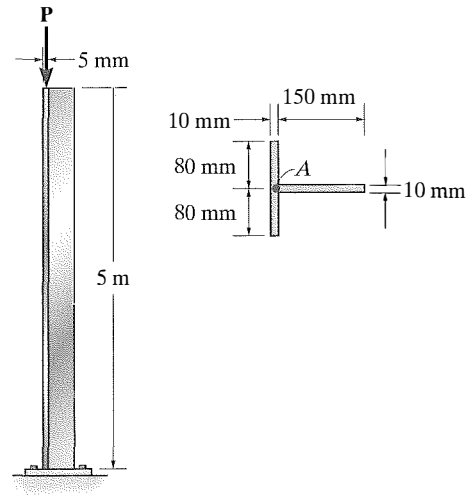
13.58. A coluna de madeira está engastada na base e podemos considerar que está acoplada por pinos no topo. Determine a carga excêntrica máxima P que pode ser aplicada sem provocar flambagem ou escoamento. $E_m = 12$ GPa, $\sigma_e = 56$ MPa.

*13.59. A coluna de madeira está engastada na base e podemos considerar que está fixa e acoplada no topo. Determine a carga excêntrica máxima P que pode ser aplicada sem provocar flambagem ou escoamento. $E_m = 12$ GPa, $\sigma_e = 56$ MPa.



Problemas 13.58/59

13.60. A coluna de alumínio tem a seção transversal mostrada na Figura. Se estiver engastada na base e livre no topo, determine a força máxima P que pode ser aplicada em A sem provocar flambagem ou escoamento. Use um fator de segurança de 3 para flambagem e escoamento. $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_e = 95$ MPa.

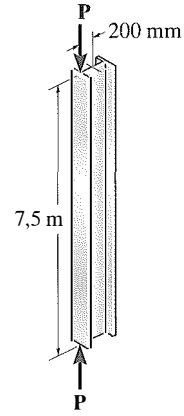


Problema 13.60

13.61. Um elemento estrutural W250 × 22 de aço A-36 é usado como uma coluna fixa acoplada. Determine a carga excêntrica máxima P que pode ser aplicada de modo que a coluna não sofra flambagem ou escoamento. Compare esse valor com uma carga axial crítica P' aplicada no centroide da coluna.

13.62. Resolva o Problema 13.61, se a coluna estiver acoplada por pinos em ambas as extremidades.

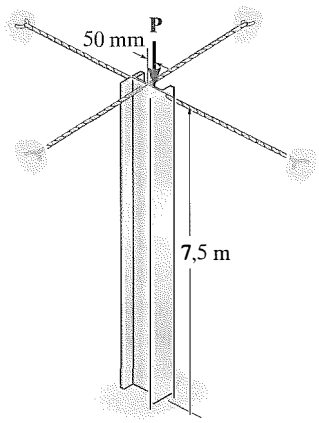
*13.63. Resolva o Problema 13.61, se a coluna estiver engastada na base e presa por pinos no topo.



Problemas 13.61/62/63

13.64. Determine a carga P necessária para provocar a falha por flambagem ou escoamento na coluna W310 × 74 de aço estrutural A-36. A coluna está engastada na base e ancorada por cabos no topo que agem como pinos para mantê-la no lugar.

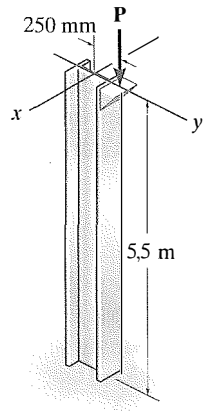
*13.65. Resolva o Problema 13.64, se a coluna for uma seção W310 × 24.



Problemas 13.64/65

13.66. A coluna W360 × 79 de aço estrutural A-36 está engastada na sua base e livre no topo. Se P = 375 kN, determine a deflexão lateral no topo e a tensão máxima na coluna.

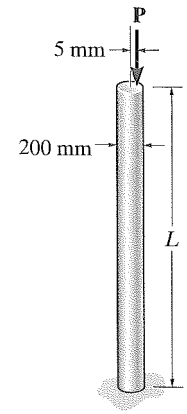
13.67. A coluna W360 × 79 de aço está engastada na base e livre no topo. Determine a carga excêntrica máxima P que ela pode suportar sem sofrer flambagem ou escoamento. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_e = 350 MPa.



Problemas 13.66/67

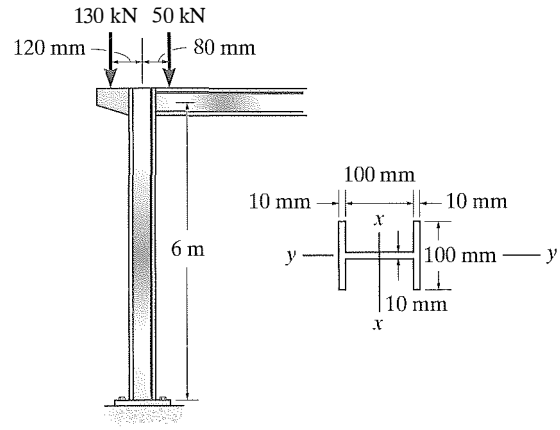
13.68. A haste de alumínio está engastada na base e livre no topo. Se for aplicada a carga excêntrica P = 200 kN, determine o maior comprimento admissível L da haste de modo que ela não sofra flambagem ou escoamento. E_{al} = 72 GPa, σ_e = 410 MPa.

13.69. A haste de alumínio está engastada na base e livre no topo. Se seu comprimento for L = 2 m, determine a maior carga admissível P que pode ser aplicada de modo que a haste não sofra flambagem ou escoamento. Determine também a maior deflexão lateral da haste devido à carga. E_{al} = 72 GPa, σ_e = 410 MPa.



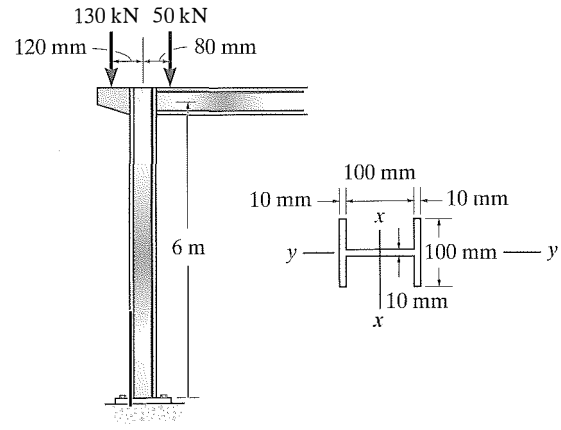
Problemas 13.68/69

13.70. A coluna de aço suporta as duas cargas excêntricas. Se considerarmos que ela está presa por pinos no topo, engastada na base e totalmente escorada contra flambagem em torno do eixo y–y, determine a deflexão máxima da coluna e a tensão máxima na coluna. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_e = 360 MPa.



Problema 13.70

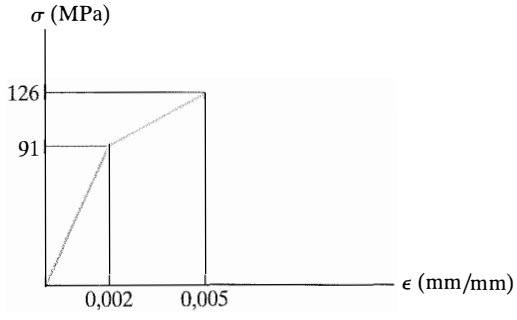
*13.71. A coluna de aço suporta as duas cargas excêntricas. Se considerarmos que ela está engastada no topo e na base e totalmente escorada contra flambagem em torno do eixo y–y, determine a deflexão máxima da coluna e a tensão máxima na coluna. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_e = 360 MPa.



Problema 13.71

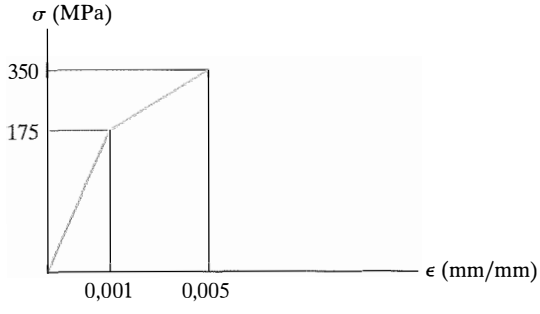
13.72. A coluna de comprimento intermediário sofre flambagem quando a resistência à compressão é 280 MPa. Se o índice de esbeltez for 60, determine o módulo tangente.

***13.73.** Construa a curva de flambagem, P/A em relação a L/r, para uma coluna cuja curva tensão–deformação é bilinear sob compressão, como mostra a figura.



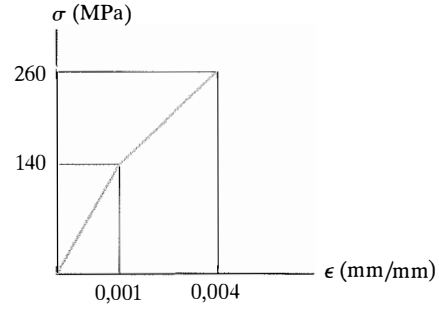
Problema 13.73

***13.74.** Construa a curva de flambagem, P/A em relação a L/r, para uma coluna cuja curva tensão–deformação bilinear sob compressão como mostra a figura.



Problema 13.74

***13.75.** Construa a curva de flambagem, P/A em relação a L/r, para uma coluna cuja curva tensão–deformação é bilinear sob compressão como mostra a figura. A coluna está presa por pinos em ambas as extremidades.



Problema 13.75

*13.6 Projeto de colunas para cargas concêntricas

A teoria apresentada até aqui se aplica a colunas perfeitamente retas, feitas de material homogêneo e, em seu estado original, livres de tensão. Porém, na prática, como já dissemos, não existem colunas perfeitamente retas, e a maioria delas tem tensões residuais que se devem principalmente a resfriamento não uniforme durante a fabricação. Além disso, os apoios para colunas não são muito exatos e os pontos de aplicação e direções das cargas não são conhecidos com certeza absoluta. Para compensar esses efeitos que, ademais, variam de uma coluna para outra, muitos códigos e manuais de projeto especificam a utilização de fórmulas empíricas para colunas. Os resultados de testes experimentais realizados em grande número de colunas com carga axial podem ser representados em gráfico e, a partir desses gráficos, é possível desenvolver uma fórmula de projeto ajustando-se uma curva às médias dos dados.

Um exemplo desses testes para colunas de aço de abas largas é mostrado na Figura 13.23. Observe a semelhança entre esses resultados e os obtidos para a família de curvas, determinados pela fórmula da secante (Figura 13.18b). A razão dessa semelhança tem a ver com a influência de um índice de excentricidade 'acidental' sobre a resistência da coluna. Como afirmamos na Seção 13.4, esse índice provoca um efeito mais acentuado sobre a resistência de colunas curtas ou de comprimento intermediário do que sobre a resistência de colunas longas. Os testes indicaram que ec/r^2 pode variar na faixa de 0,1 a 0,6 para a maioria das colunas com carga axial.

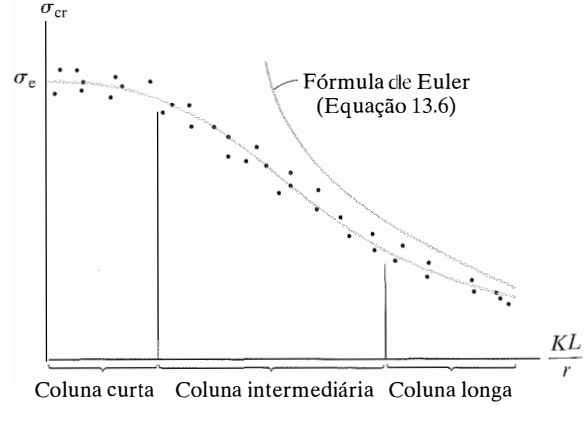


Figura 13.23

Para levar em conta o comportamento de colunas de comprimentos diferentes, os códigos e manuais de projeto especificam várias fórmulas que se ajustarão melhor aos dados que se encontram dentro de cada uma das faixas de colunas curtas, intermediárias e longas. Por consequência, cada fórmula será aplicável somente a uma *faixa* específica de índices de esbeltez e, por isso, é importante que o engenheiro observe cuidadosamente os limites KL/r para os quais uma determinada fórmula é válida. A seguir, discutiremos exemplos de fórmulas de projeto para colunas de aço, alumínio e madeira em uso atualmente. O objetivo é dar uma ideia de como as colunas são projetadas na prática. Todavia, essas fórmulas não devem ser usadas para o projeto de colunas reais, a menos que os respectivos códigos de referência sejam consultados.

Colunas de aço. Atualmente, as colunas feitas de aço estrutural são projetadas com base em fórmulas propostas pelo Structural Stability Research Council (SSRC). Fatores de segurança foram aplicados a essas fórmulas e adotados como especificações para a construção de edifícios pelo American Institute of Steel Construction (AISC). Basicamente, essas especificações nos dão duas fórmulas para projeto de colunas e cada uma delas nos dá a tensão admissível máxima na coluna para uma faixa específica de índices de esbeltez. Para colunas longas, propõe-se a fórmula de Euler, isto é, $\sigma_{máx} = \pi^2 E/(KL/r)^2$.

A aplicação dessa fórmula requer um fator de segurança FS = 23/12 ≈ 1,92. Assim, para projeto,

$$\sigma_{adm} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} \qquad \left(\frac{KL}{r}\right)_c \leq \frac{KL}{r} \leq 200 \qquad (13.21)$$

Como dissemos, essa equação é aplicável a um índice de esbeltez limitado por 200 e $(KL/r)_c$. Obtemos um valor específico de $(KL/r)_c$, desde que a fórmula de Euler seja usada somente para material de comportamento elástico. Por meio de testes experimentais constatou-se que seções de aço laminado podem exibir tensões residuais de compressão, cujos valores podem chegar à metade da tensão de escoamento. Por consequência, se a tensão na fórmula de Euler for maior do que $1/2\sigma_e$, a equação não será aplicável. Portanto, o valor de $(KL/r)_c$ pode ser determinado da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)_c^2}$$

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} \qquad (13.22)$$

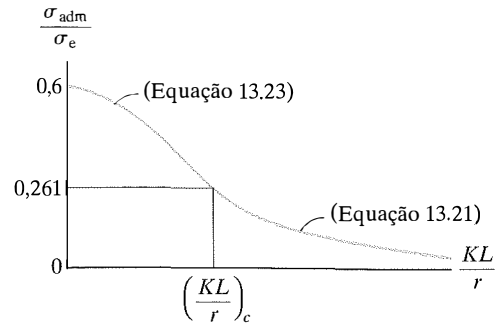


Figura 13.24

Colunas com índices de esbeltez menores que $(KL/r)_c$ são projetadas com base em uma fórmula empírica parabólica cuja forma é

$$\sigma_{máx} = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_e$$

Como há maior incerteza na utilização dessa fórmula para colunas mais longas, ela é dividida por um fator de segurança definido da seguinte maneira:

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(KL/r)}{(KL/r)_c} - \frac{(KL/r)^3}{8(KL/r)_c^3}$$

Vemos, nessa expressão, que FS = 5/3 ≈ 1,67 em $\frac{KL}{r} = 0$ e aumenta até FS = 23/12 ≈ 1,92 em $(KL/r)_c$. Por consequência, para a finalidade de projeto

$$\sigma_{adm} = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_e}{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - \left[(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3\right]} \qquad (13.23)$$

A Figura 13.24 mostra a representação gráfica das equações 13.21 e 13.23.

Colunas de alumínio. O projeto de colunas de alumínio estrutural é especificado pela Aluminum Association usando três equações, cada uma aplicável a uma faixa específica de índices de esbeltez. Visto que existem vários tipos de liga de alumínio, há um conjunto de fórmulas exclusivo para cada um. Para uma liga comum (2014-T6) usada na construção de edifícios, as fórmulas são

$$\sigma_{adm} = 195 \text{ MPa} \quad 0 \leq \frac{KL}{r} \leq 12 \qquad (13.24)$$

$$\sigma_{adm} = \left[214{,}5 - 1{,}628\left(\frac{KL}{r}\right)\right] \text{MPa} \quad 12 < \frac{KL}{r} < 55 \qquad (13.25)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{378.125 \text{ MPa}}{(KL/r)^2} \quad 55 \leq \frac{KL}{r} \qquad (13.26)$$

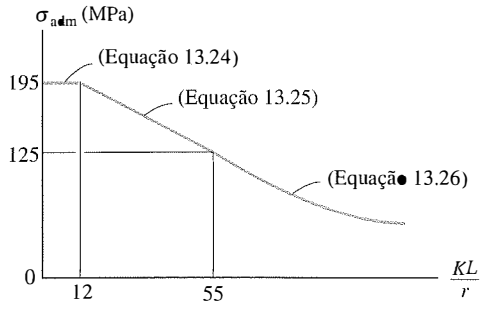


Figura 13.25

A Figura 13.25 mostra a representação gráfica dessas equações. Como se vê, as duas primeiras representam linhas retas e são usadas para modelar os efeitos de colunas nas faixas curta e intermediária. A terceira fórmula tem a mesma forma da de Euler e é usada para colunas longas.

Colunas de madeira. Colunas de madeira usadas em construção são projetadas com base nas fórmulas publicadas pela National Forest Products Association (NFPA) ou pelo American Institute of Timber Construction (AITC). Por exemplo, as fórmulas NFPA para a tensão admissível em colunas curtas, intermediárias e longas com seção transversal retangular de dimensões b e d, onde d é a *menor* dimensão da seção transversal, são

$$\sigma_{adm} = 8{,}25 \text{ MPa} \quad 0 \le \frac{KL}{d} \le 11 \qquad (13.27)$$

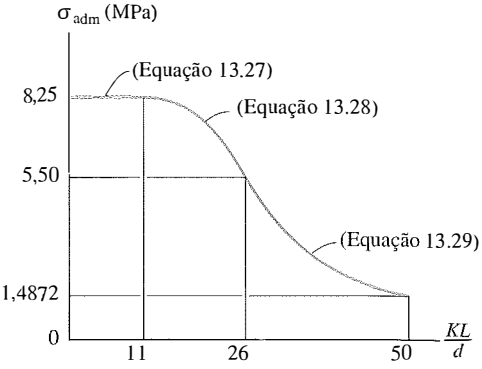


Figura 13.26

$$\sigma_{adm} = 8{,}25\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{KL/d}{26{,}0}\right)^2\right] \text{MPa} \quad 11 < \frac{KL}{d} \le 26 \qquad (13.28)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{3.781 \text{ MPa}}{(KL/d)^2} \quad 26 < \frac{KL}{d} \le 50 \qquad (13.29)$$

Aqui, a madeira tem módulo de elasticidade $E_m = 12{,}4(10^3)$MPa e tensão de compressão de 8,25 MPa paralela à fibra. Em particular, a Equação 13.29 é simplesmente a de Euler com um fator de segurança 3. A Figura 13.26 mostra a representação gráfica dessas três equações.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

Análise da coluna

- Quando usar qualquer fórmula para *analisar* uma coluna, isto é, determinar sua carga admissível, em primeiro lugar necessita-se calcular o índice de esbeltez para determinar qual das fórmulas de coluna aplicar.
- Uma vez calculada a tensão admissível média, a carga admissível na coluna é determinada por $P = \sigma_{adm}A$.

Projeto da coluna

- Se usarmos uma fórmula para *projetar* uma coluna, isto é, para determinar a área de sua seção transversal para uma carga específica e um comprimento efetivo específico, em geral será necessário seguir um procedimento de tentativa e erro, se a forma da coluna for composta como no caso de uma seção de abas largas.
- Um modo possível de aplicar um procedimento de tentativa e erro seria *considerar* que a área da seção transversal da coluna é A' e calcular a tensão correspondente $\sigma' = P/A'$. Para determinar a tensão admissível σ_{adm}, use A' em uma fórmula de projeto adequada. Com isso, calcule a área *exigida* da coluna, $A_{req} = P/\sigma_{adm}$.
- Se $A' > A_{req}$, o projeto é seguro. Ao fazer a comparação, torna-se prático adotar um valor de A' próximo, porém maior que o de A_{req}, normalmente dentro de uma faixa de 2 a 3%. Se $A' < A_{req}$, será necessário fazer um novo projeto.
- Sempre que um processo de tentativa e erro for repetido, a escolha de uma área é determinada pela área exigida calculada anteriormente. Na prática da engenharia, esse método de projeto é normalmente abreviado com a utilização de códigos computacionais ou tabelas e gráficos publicados.

EXEMPLO 13.8

Um elemento estrutural W250 × 149 de aço A-36 é usado como uma coluna apoiada por pinos (Figura 13.27). Usando as fórmulas de projeto do AISC, determine a maior carga que ele pode suportar com segurança. $E_{aço} = 200(10^3)$ MPa, $\sigma_e = 250$ MPa.

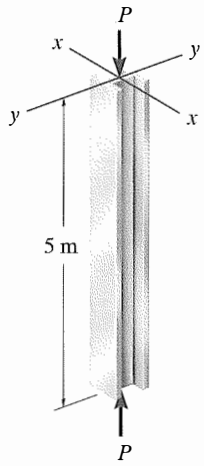


Figura 13.27

SOLUÇÃO

A tabela no Apêndice B apresenta os seguintes dados para um W250 × 149:

$$A = 19.000 \text{ mm}^2 \qquad r_x = 117 \text{ mm} \qquad r_y = 67{,}4 \text{ mm}$$

Visto que $K = 1$ para flambagem em ambos os eixos x e y, o índice de esbeltez será o maior de todos, se usarmos r_e. Logo,

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(5 \text{ m})(1.000 \text{ mm/m})}{(67{,}4 \text{ mm})} = 74{,}18$$

Pela Equação 13.22, temos

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200)(10^3) \text{ MPa}}{250 \text{ MPa}}} = 125{,}66$$

Aqui, $0 < KL/r < (KL/r)_c$, portanto, a Equação 13.23 é aplicável.

$$\sigma_{adm} = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_e}{[(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r_c)^3]]}$$

$$= \frac{[1 - (74{,}18)^2/2(125{,}66)^2]250 \text{ MPa}}{[(5/3) + [(3/8)(74{,}18/125{,}66)] - [(74{,}18)^3/8(125{,}66)^3]]}$$

$$= 110{,}85 \text{ MPa}$$

A carga admissível P na coluna é, portanto,

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A}; \qquad 110{,}85 \text{ N/mm}^2 = \frac{P}{19.000 \text{ mm}^2}$$

$$P = 2.106.150 \text{ N} = 2.106 \text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 13.9

A haste de aço na Figura 13.28 deve ser usada para suportar uma carga axial de 80 kN. Se $E_{aço} = 210(10^3)$ MPa e $\sigma_e = 360$ MPa, determine o menor diâmetro da haste permitido pela especificação AISC. A haste está engastada em ambas as extremidades.

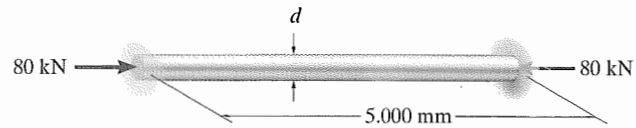


Figura 13.28

SOLUÇÃO

Para uma seção transversal circular, o raio de giração torna-se

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(1/4)\pi(d/2)^4}{(1/4)\pi d^2}} = \frac{d}{4}$$

Aplicando a Equação 13.22, temos

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{2\pi^2[210(10^3) \text{ MPa}]}{360 \text{ MPa}}} = 107{,}3$$

Como o raio de giração da haste é desconhecido, KL/r é desconhecido e, portanto, temos de escolher se a Equação 13.21 ou a Equação 13.23 é aplicável. Consideraremos a Equação 13.21. Para uma coluna de extremidades engastadas $K = 0{,}5$, portanto,

$$\sigma_{adm} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$

$$\frac{80(10^3) \text{ N}}{(1/4)\pi d^2} = \frac{12\pi^2[210(10^3) \text{ N/mm}^2]}{23[0{,}5(5000 \text{ mm})/(d/4)]^2}$$

$$\frac{101{,}86 \times 10^3}{d^2} = 0{,}0108 d^2 \text{ mm}$$

$$d = 55{,}42 \text{ mm}$$

Use

$$d = 56 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Para esse projeto, temos de verificar os limites do índice de esbeltez, isto é,

$$\frac{KL}{r} = \frac{0{,}5(5)(1.000)}{(56/4)} = 179$$

Visto que $107{,}3 < 179 < 200$, a utilização da Equação 13.21 é adequada.

EXEMPLO 13.10

Uma barra com 750 mm de comprimento é usada para suportar uma carga de compressão axial de 60 kN (Figura 13.29). A barra é apoiada por pinos nas extremidades e é feita de liga de alumínio 2014-T6. Determine as dimensões da área da seção transversal, se a largura for duas vezes a espessura.

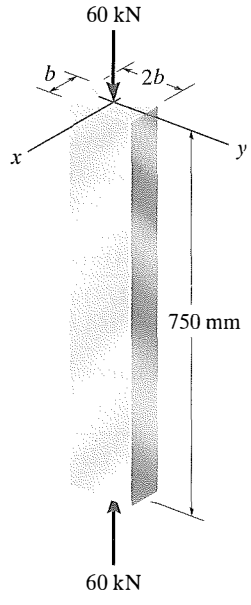


Figura 13.29

SOLUÇÃO

Como $KL = 750$ mm é o mesmo para a flambagem em ambos os eixos x–x e y–y, o maior índice de esbeltez é determinado pelo menor raio de giração, isto é, usando $I_{min} = I_y$:

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{KL}{\sqrt{I_y/A}} = \frac{1(750)}{\sqrt{(1/12)2b(b^3)/[2b(b)]}} = \frac{2.598{,}1}{b} \quad (1)$$

Aqui, temos de aplicar a Equação 13.24, 13.25 ou 13.26. Visto que ainda não conhecemos o índice de esbeltez, começaremos usando a Equação 13.24.

$$\frac{P}{A} = 195 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{60(10^3) \text{ N}}{2b(b)} = 195 \text{ N/mm}^2$$

$$b = 12{,}40 \text{ mm}$$

Verificando o índice de esbeltez, temos

$$\frac{KL}{r} = \frac{2.598{,}1}{12{,}40} = 209{,}5 > 12$$

Tente a Equação 13.26, que é válida para $KL/r \geq 55$:

$$\frac{P}{A} = \frac{378.125 \text{ MPa}}{(KL/r)^2}$$

$$\frac{60(10^3)}{2b(b)} = \frac{378.125}{(2.598{,}1/b)^2}$$

$$b = 27{,}05 \text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Pela Equação 1,

$$\frac{KL}{r} = \frac{2.598{,}1}{27{,}05} = 96{,}0 > 55 \quad \text{OK}$$

OBSERVAÇÃO: Seria satisfatório escolher a seção transversal com dimensões 27 mm por 54 mm.

EXEMPLO 13.11

Uma tábua com seção transversal de 150 mm por 40 mm é usada para suportar uma carga axial de 20 kN (Figura 13.30). Se considerarmos que ela é suportada por pinos no topo e na base, determine seu *maior* comprimento admissível L como especificado pela NFPA.

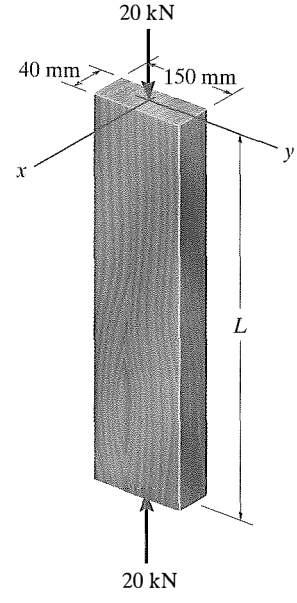


Figura 13.30

SOLUÇÃO

Por inspeção, a tábua sofrerá flambagem em torno do eixo y. Nas equações da NFPA, $d = 40$ mm. Considerando que a Equação 13.29 é aplicável, temos

$$\frac{P}{A} = \frac{3.781\ \text{MPa}}{(KL/d)^2}$$

$$\frac{20(10^3)\ \text{N}}{(150\ \text{mm})(40\ \text{mm})} = \frac{3.781\ \text{MPa}}{(1\ L/40\ \text{mm})^2}$$

$$L = 1.336\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Aqui,

$$\frac{KL}{d} = \frac{(1)1.336\ \text{mm}}{40\ \text{mm}} = 33{,}4$$

Visto que $26 < KL/d \leq 50$, a solução é válida.

PROBLEMAS

13.76. Determine o maior comprimento de uma haste de aço estrutural A-36, se ela estiver engastada e sujeita a uma carga axial de 100 kN. A haste tem diâmetro de 50 mm. Use as equações AISC.

13.77. Determine o maior comprimento de uma seção W250 × 18 de aço estrutural A-36, se ela estiver engastada e sujeita a uma carga axial de 140 kN. Use as equações AISC.

13.78. Determine o maior comprimento de uma coluna W310 × 67 de aço estrutural A-36, se ela estiver apoiada por pinos e for submetida a uma carga axial de 1.000 kN. Use as equações AISC.

13.79. Determine o maior comprimento de uma seção W200 × 46 de aço estrutural A-36, se ela estiver apoiada por pinos e sujeita a uma carga axial de 400 kN. Use as equações AISC.

13.80. Usando as equações AISC, verifique se uma coluna W150 × 14 de aço estrutural A-36 com 3 m de comprimento pode suportar uma carga axial de 200 kN. As extremidades estão engastadas.

13.81. Usando as equações AISC, selecione no Apêndice B a coluna de aço estrutural de menor peso que tenha 4,2 m de comprimento e suporte uma carga axial de 200 kN. As extremidades estão presas por pinos. Adote $\sigma_e = 350$ MPa.

13.82. Usando as equações AISC, selecione no Apêndice B a coluna de aço estrutural A-36 de menor peso que tenha 3,6 m de comprimento e suporte uma carga axial de 200 kN. As extremidades estão engastadas. Considere $\sigma_e = 350$ MPa.

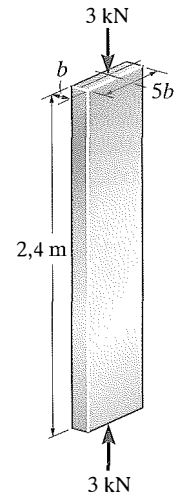
13.83. Usando as equações AISC, selecione no Apêndice B a coluna de aço estrutural A-36 de menor peso que tenha 4,2 m de comprimento e suporte uma carga axial de 200 kN. As extremidades estão engastadas.

13.84. Usando as equações AISC, selecione no Apêndice B a coluna de aço estrutural A-36 de menor peso que tenha 9 m de comprimento e suporte uma carga axial de 1.000 kN. As extremidades estão engastadas.

13.85. Determine o maior comprimento de uma seção W200 × 46 de aço estrutural A-36, se for suportada por pinos e estiver sujeita a uma carga axial de 90 kN. Use as equações AISC.

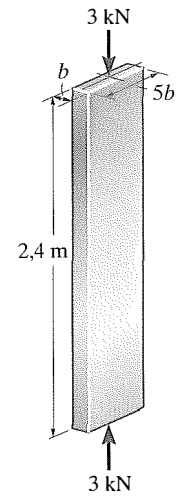
13.86. Determine o maior comprimento de uma coluna W150 × 22 de aço estrutural A-36, se for suportada por pinos e estiver sujeita a uma carga axial de 350 kN. Use as equações AISC.

13.87. A barra é feita de liga de alumínio 2014-T6. Determine sua espessura b, se a largura for $5b$. Considere que ela está acoplada por pinos nas extremidades.



Problema 13.87

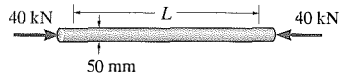
13.88. A barra é feita de liga de alumínio 2014-T6. Determine sua espessura b, se a largura for $5b$. Considere que ela está engastada nas extremidades.



Problema 13.88

13.89. A haste de 50 mm de diâmetro é usada para suportar uma carga axial de 40 kN. Determine seu maior comprimento admissível L, se for feita de alumínio 2014-T6. Considere que as extremidades estão acopladas por pinos.

13.90. A haste de 50 mm de diâmetro é usada para suportar uma carga axial de 40 kN. Determine seu maior comprimento admissível L, se for feita de alumínio 2014-T6. Considere que as extremidades estão engastadas.

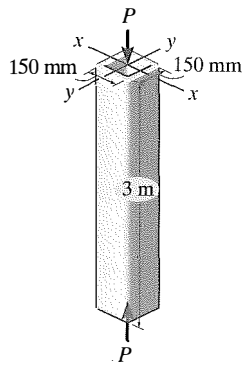


Problemas. 13.89/90

*13.91. O tubo tem 6 mm de espessura, é feito de liga de alumínio 2014-T6 e está engastado na base e preso por pinos no topo. Determine a maior carga axial que ele pode suportar.

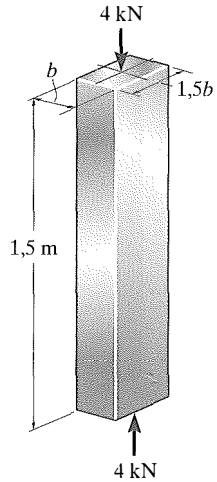
13.92. O tubo tem 6 mm de espessura, é feito de liga de alumínio 2014-T6 e está engastado nas extremidades. Determine a maior carga axial que ele pode suportar.

13.93. O tubo tem 6 mm de espessura, é feito de liga de alumínio 2014-T6 e está acoplado por pinos nas extremidades. Determine a maior carga axial que ele pode suportar.



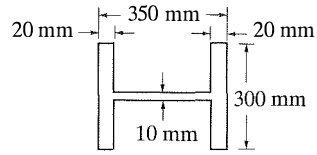
Problemas 13.91/92/93

13.94. A barra é feita de liga de alumínio 2014-T6. Determine sua espessura b, se a largura for $1{,}5b$. Considere que ela está acoplada por pinos nas extremidades.



Problema 13.94

*13.95. Usando as equações AISC, verifique se a coluna que tem a seção transversal mostrada na figura pode suportar uma força axial de 1.500 kN. A coluna tem comprimento de 4 m, é feita de aço A-36 e suas extremidades estão presas por pinos.

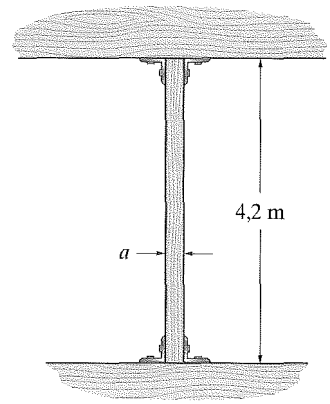


Problema 13.95

13.96. Uma haste de 1,5 m de comprimento é usada em uma máquina para transmitir uma carga de compressão axial de 15 kN. Determine seu diâmetro, se suas extremidades estiverem acopladas por pinos e ela for feita de liga de alumínio a 2014-T6.

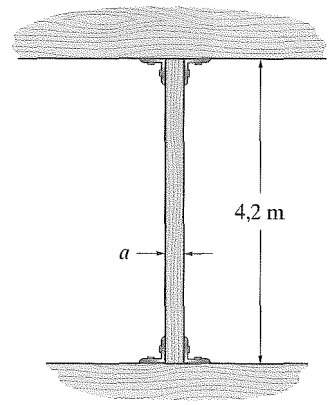
13.97. Resolva o Problema 13.96, se as extremidades da haste estiverem engastadas.

13.98. A coluna de madeira tem seção transversal quadrada e consideramos que esteja acoplada por pinos no topo e na base. Se ela suportar uma carga axial de 250 kN, determine suas dimensões laterais a com aproximação de múltiplos de 10 mm. Use as fórmulas NFPA.



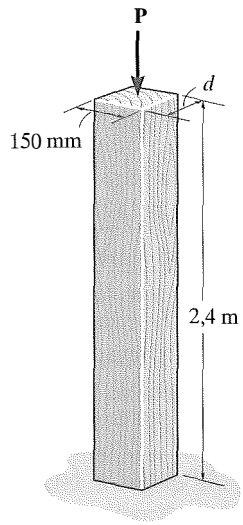
Problema 13.98

*13.99. Resolva o Problema 13.98, considerando que a coluna está engastada no topo e na base.



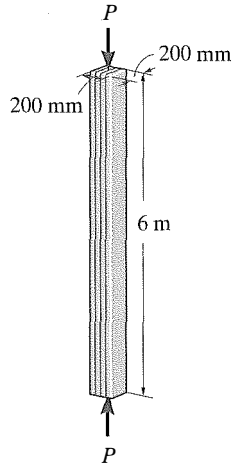
Problema 13.99

13.100. A coluna de madeira é usada para suportar uma carga axial $P = 150$ kN. Se estiver engastada na base e livre no topo, determine a largura mínima da coluna com base nas fórmulas NFPA.



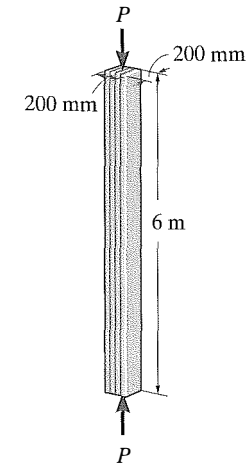
Problema 13.100

13.101. A coluna de madeira tem 6 m de comprimento e está acoplada por pinos nas extremidades. Use as fórmulas NFPA para determinar a maior força axial P que ela pode suportar.



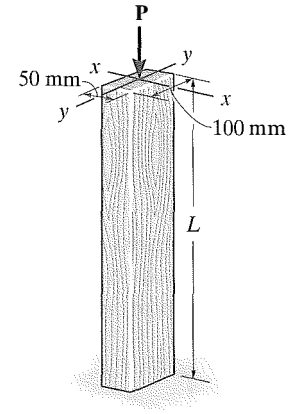
Problema 13.101

13.102. A coluna de madeira tem 6 m de comprimento e está engastada nas extremidades. Use as fórmulas NFPA para determinar a maior força axial P que ela pode suportar.



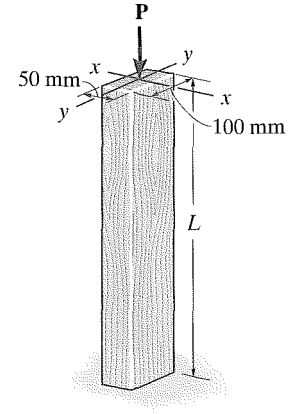
Problema 13.102

*__13.103.__ A coluna é feita de madeira e está engastada na base e livre no topo. Use as fórmulas NFPA para determinar o maior comprimento admissível, se ela suportar uma carga axial $P = 10$ kN.



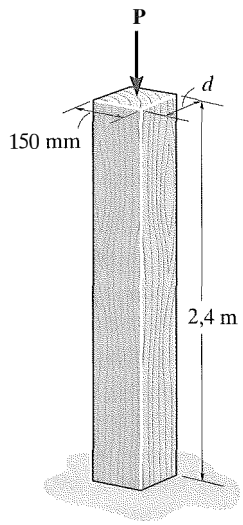
Problema 13.103

13.104. A coluna é feita de madeira e está engastada na base e livre no topo. Use as fórmulas NFPA para determinar a maior carga axial admissível P que ela pode suportar, se tiver comprimento $L = 1{,}2$ m.



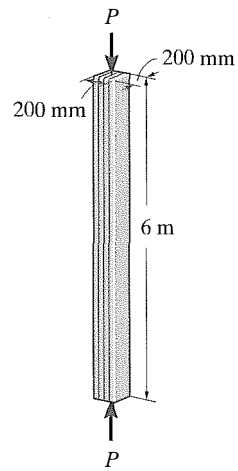
Problema 13.104

13.100. A coluna de madeira é usada para suportar uma carga axial $P = 150$ kN. Se estiver engastada na base e livre no topo, determine a largura mínima da coluna com base nas fórmulas NFPA.



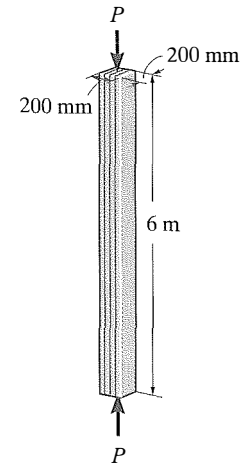
Problema 13.100

13.101. A coluna de madeira tem 6 m de comprimento e está acoplada por pinos nas extremidades. Use as fórmulas NFPA para determinar a maior força axial P que ela pode suportar.



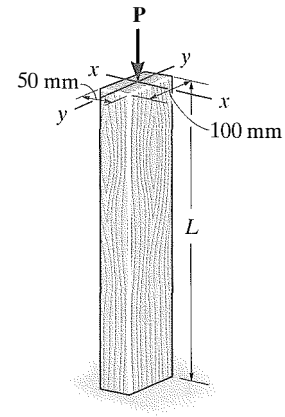
Problema 13.101

13.102. A coluna de madeira tem 6 m de comprimento e está engastada nas extremidades. Use as fórmulas NFPA para determinar a maior força axial P que ela pode suportar.



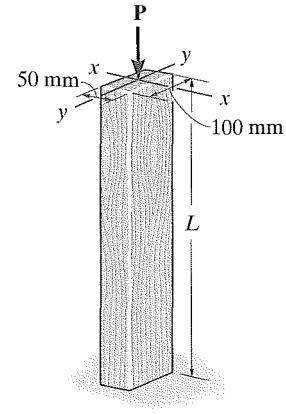
Problema 13.102

13.103. A coluna é feita de madeira e está engastada na base e livre no topo. Use as fórmulas NFPA para determinar o maior comprimento admissível, se ela suportar uma carga axial $P = 10$ kN.



Problema 13.103

13.104. A coluna é feita de madeira e está engastada na base e livre no topo. Use as fórmulas NFPA para determinar a maior carga axial admissível P que ela pode suportar, se tiver comprimento $L = 1{,}2$ m.



Problema 13.104

*13.7 Projeto de colunas para cargas excêntricas

Às vezes, uma coluna terá de suportar uma carga que age em sua borda ou em uma cantoneira acoplada à sua lateral, como mostra a Figura 13.31a. O momento fletor $M = Pe$ causado pela carga excêntrica deve ser levado em conta no projeto da coluna. Há várias maneiras aceitáveis de fazer isso na prática da engenharia. Discutiremos dois dos métodos mais comuns.

Utilização de fórmulas disponíveis para colunas. A distribuição de tensão que age sobre a área da seção transversal da coluna mostrada na Figura 13.31a é determinada pela força axial P e pelo momento fletor $M = Pe$. Em particular, a tensão de compressão máxima é

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{13.30}$$

Um perfil de tensão comum é mostrado na Figura 13.31b. Se formos conservadores e *considerarmos* que toda a seção transversal está sujeita à tensão uniforme $\sigma_{\text{máx}}$ como determinada pela Equação 13.30, então podemos comparar $\sigma_{\text{máx}}$ com σ_{adm}, que é determinada pelas fórmulas dadas na Seção 13.6. No cálculo de σ_{adm} normalmente é usado o *maior* índice de esbeltez para a coluna, independentemente do eixo em torno do qual ela sofre flexão. Esse requisito é normalmente especificado em códigos e manuais de projeto e, na maioria das vezes, resultará em um projeto conservador. Se

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \sigma_{\text{adm}}$$

a coluna pode suportar a carga especificada. Se essa desigualdade não valer, então a área da coluna, A, deverá ser aumentada e novas $\sigma_{\text{máx}}$ e σ_{adm}, calculadas. Esse método de projeto é bastante simples de aplicar e funciona bem para colunas curtas ou de comprimento intermediário.

Fórmula da interação. Quando *projetamos* uma coluna submetida à carga excêntrica, é desejável verificar como as cargas de flexão e axiais *interagem*, de modo a conseguir equilíbrio entre esses dois efeitos. Para tal, consideraremos as contribuições isoladas dadas à área total da coluna pela força axial e pelo momento. Se a tensão admissível para a carga axial for $(\sigma_a)_{\text{adm}}$, então a área exigida para a coluna necessária para suportar a carga P é

$$A_a = \frac{P}{(\sigma_a)_{\text{adm}}}$$

De maneira semelhante, se a tensão de flexão admissível for $(\sigma_f)_{\text{adm}}$, visto que $I = Ar^2$, a área exigida para a coluna necessária para suportar o momento excêntrico é determinada pela fórmula da flexão, isto é,

$$A_f = \frac{Mc}{(\sigma_f)_{\text{adm}}\, r^2}$$

A área total A para a coluna necessária para resistir à carga axial e também ao momento exige que

$$A_a + A_f = \frac{P}{(\sigma_a)_{\text{adm}}} + \frac{Mc}{(\sigma_f)_{\text{adm}}\, r^2} \leq A$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{P/A}{(\sigma_a)_{\text{adm}}} + \frac{Mc/Ar^2}{(\sigma_f)_{\text{adm}}} &\leq 1 \\ \frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{\text{adm}}} + \frac{\sigma_f}{(\sigma_f)_{\text{adm}}} &\leq 1 \end{aligned} \tag{13.31}$$

Nessas expressões

- σ_a = tensão axial causada pela força P e determinada por $\sigma_a = P/A$, onde A é a área da seção transversal da coluna
- σ_f = tensão de flexão provocada por uma carga excêntrica ou por um momento aplicado M; σ_f é determinada por $\sigma_f = Mc/I$, onde I é o momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo de flexão ou do eixo neutro
- $(\sigma_a)_{\text{adm}}$ = tensão axial admissível como definida por fórmulas dadas na Seção 13.6 ou por outras especificações encontradas em códigos ou manuais de projeto. Para essa finalidade, use sempre o *maior* índice de esbeltez para a coluna, independentemente do eixo em torno do qual ela sofre flexão
- $(\sigma_f)_{\text{adm}}$ = tensão de flexão admissível como definida por especificações encontradas em códigos ou manuais de projeto.

Em particular, se a coluna for submetida somente a uma carga axial, a razão referente à tensão de flexão na Equação 13.31 será igual a zero, e o projeto será baseado somente na tensão axial admissível. Da mesma forma, quando não há nenhuma carga axial presente, a

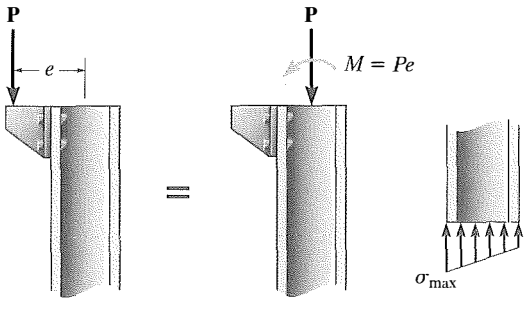


Figura 13.31

razão referente à tensão axial equivale a zero e o requisito de tensão se baseará na tensão de flexão admissível. Por consequência, cada razão de tensão indica a contribuição da carga axial ou do momento fletor. Considerando-se que a Equação 13.31 mostra como essas cargas interagem, às vezes ela é denominada ***fórmula da interação***. Essa abordagem de projeto exige um procedimento de tentativa e erro no qual o projetista *escolhe* uma coluna disponível e, a seguir, verifica se a desigualdade é satisfeita. Em caso negativo, ele escolhe uma seção maior e repete o processo. Uma escolha econômica seria aquela na qual o lado esquerdo está próximo de 1, porém é menor que ele.

O método da interação é frequentemente especificado em códigos e manuais de projeto de elementos estruturais feitos de aço, alumínio ou madeira. Em particular, o American Institute of Steel Construction especifica o uso dessa equação somente quando a razão à tensão axial for $\sigma_a/(\sigma_a)_{adm} \leq 0{,}15$. Para outros valores dessa razão usa-se uma forma modificada da Equação 13.31.

Os exemplos dados a seguir ilustram os métodos citados para projeto e análise de colunas submetidas a cargas excêntricas.

EXEMPLO 13.12

A coluna na Figura 13.32 é feita de liga de alumínio 2014-T6 e é usada para suportar uma carga excêntrica $\mathbb{P}$. Determine o valor de $\mathbb{P}$ que pode ser suportado, se a coluna estiver engastada na base e livre no topo. Use a Equação 13.30.

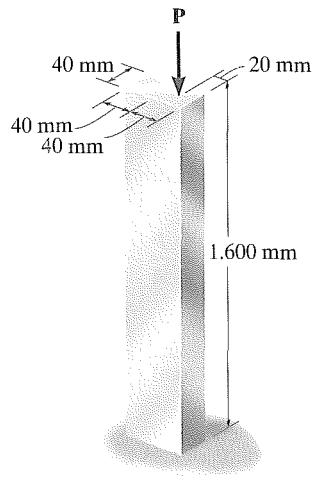


Figura 13.32

SOLUÇÃO

Pela Figura 13.12*b*, $K = 2$. O maior índice de esbeltez para a coluna é, portanto,

$$\frac{KL}{r} = \frac{2(1.600 \text{ mm})}{\sqrt{[(1/12)(80 \quad)(40 \text{ m})^3]/[(40 \quad)80 \text{ m}]}} = 277{,}1$$

Por inspeção, a Equação 13.26 deve ser usada. Assim,

$$\sigma_{adm} = \frac{378.125 \text{ MPa}}{(KL/r)^2} = \frac{378.125 \text{ MPa}}{(277{,}1)^2} = 4{,}92 \text{ MPa}$$

A tensão de compressão máxima verdadeira na coluna é determinada pela combinação de carga axial e de flexão. Temos

$$\begin{aligned}\sigma_{máx} &= \frac{P}{A} + \frac{(Pe)c}{I} \\ &= \frac{P}{40 \quad (80 \text{ mm})} + \frac{P(20 \text{ mm})(40 \text{ mm})}{(1/12)(40 \text{ m})(80 \text{ mm})^3} \\ &= 0{,}00078125P\end{aligned}$$

Considerando que essa tensão é *uniforme* em toda a seção transversal, em vez de apenas no contorno externo, exige-se

$$\sigma_{adm} = \sigma_{máx};$$
$$4{,}92 = 0{,}00078125P$$
$$P = 6.297{,}6 \text{ N} = 6{,}30 \text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 13.13

A coluna W150 × 30 de aço A-36 na Figura 13.33 está acoplada por pinos nas extremidades e está sujeita à carga excêntrica P. Determine o valor máximo admissível de P pelo método da interação, se a tensão de flexão admissível for $(\sigma_f)_{adm} = 160$ MPa. $E = 200$ GPa, $\sigma_e = 250$ MPa.

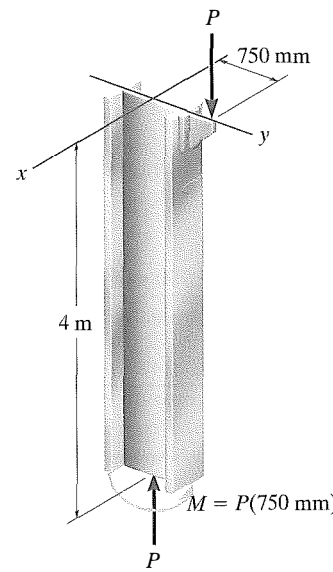


Figura 13.33

SOLUÇÃO

Aqui, $K = 1$. As propriedades geométricas necessárias para a W150 × 30 são consultadas na tabela no Apêndice B.

$A = 3.790\,\text{mm}^2$ $I_x = 17{,}1 \times 106\,\text{mm}^4$ $r_y = 38{,}2\,\text{mm}$ $d = 157\,\text{mm}$

Consideraremos r_y porque isso resultará no *maior* valor para o índice de esbeltez. Além disso, precisamos de I_x, visto que ocorre flexão em torno do eixo x ($c = 157\,\text{mm}/2 = 78{,}5\,\text{mm}$). Para determinar a tensão de compressão admissível, temos

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(4\text{ m})(1.000\text{ mm/m})}{38{,}2\text{ mm}} = 104{,}71$$

Visto que

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200)(10^3)\text{ MPa}}{250\text{ MPa}}} = 125{,}66$$

então, $KL/r < (KL/r)_c$ e, portanto, a Equação 13.23 deve ser usada.

$$\sigma_{adm} = \frac{[1 - (KL/r)^2/2(KL/r)_c^2]\sigma_e}{[(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3]}$$
$$= \frac{[1 - (104{,}71)^2/2(125{,}66)^2]\ 250\text{ MPa}}{[(5/3) + [(3/8)(104{,}71)/(125{,}66)] - [(104{,}71)^3/8(125{,}66)^3]}$$
$$= 85{,}59\text{ MPa}$$

Aplicando a equação da interação (Equação 13.31), obtemos

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{adm}} + \frac{\sigma_f}{(\sigma_f)_{adm}} \le 1$$

$$\frac{P/3.790\text{mm}^2}{85{,}59\text{ N/mm}^2} + \frac{P(750\text{ mm})(157\text{ mm}/2)/17{,}1(10^6)\text{ mm}^4}{160\text{ N/mm}^2} = 1$$

$$P = 40{,}65\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

Verificando a aplicação do método da interação para a seção de aço, exige-se

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{adm}} + \frac{40{,}65(10^3)\text{ N}/(3.790\text{ mm}^2)}{85{,}59\text{ N/mm}^2} = 0{,}125 < 0{,}15 \quad \text{OK}$$

EXEMPLO 13.14

A coluna de madeira na Figura 13.34 é composta por duas tábuas pregadas de modo que a seção transversal tem as dimensões mostradas na figura. Se a coluna estiver engastada na base e livre no topo, use a Equação 13.30 para determinar a carga excêntrica **P** que pode ser suportada.

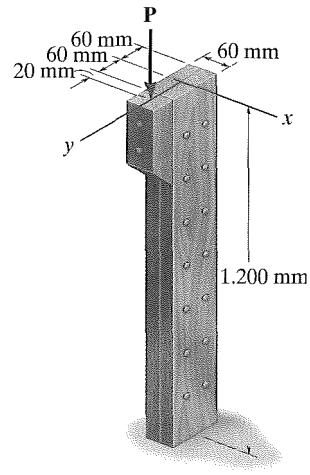


Figura 13.34

SOLUÇÃO

Pela Figura 13.12*b*, $K = 2$. Aqui, temos de calcular KL/d para determinar qual das equações de 13.27 a 13.29 deve ser usada. Visto que σ_{adm} é determinada usando o maior índice de esbeltez, escolhemos $d = 60$ mm. Fazemos isso para obter o maior índice possível e, desse modo, obter a menor tensão axial admissível possível. Fazemos isso ainda que a flexão provocada por P seja em torno do eixo x. Temos

$$\frac{KL}{d} = \frac{2(1.200\text{ mm})}{60\text{ mm}} = 40$$

A tensão axial admissível é determinada pela Equação 13.29, visto que $26 < KL/d < 50$. Logo,

$$\sigma_{adm} = \frac{3.718\text{ MPa}}{(KL/d)^2} = \frac{3.718\text{MPa}}{(40)^2} = 2{,}324\text{ MPa}$$

Aplicando a Equação 13.30 com $\sigma_{adm} = \sigma_{máx}$, temos

$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

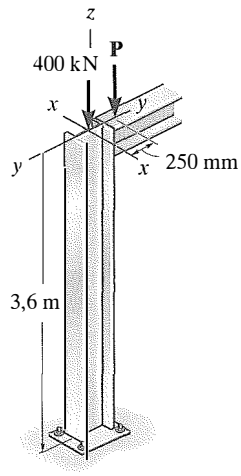
$$2{,}324\text{ N/mm}^2 = \frac{P}{60\text{mm}(120\text{ mm})} + \frac{P(80\text{ mm})(60\text{ mm})}{(1/12)(600\text{ mm})(120\text{ mm})^3}$$

$$P = 3{,}35\text{ kN} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

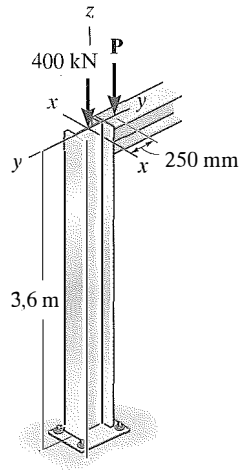
13.105. A coluna W360 × 79 de aço estrutural A-36 suporta uma carga axial de 400 kN além de uma carga excêntrica

P. Determine o valor máximo admissível de *P* com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30. Considere que a coluna está engastada na base e que seu topo está livre para oscilar no plano *x*–*z* enquanto presa por pinos no plano *y*–*z*.



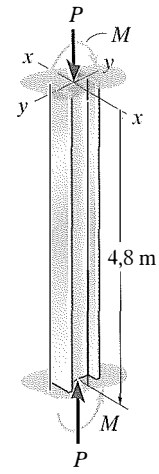
Problema 13.105

13.106. A coluna W310 × 67 de aço estrutural A-36 suporta uma carga axial de 400 kN além de uma carga excêntrica P = 300 kN. Determine se a coluna falhará com base nas equações AISC da Seção 13.6 e Equação 13.30. Considere que a coluna está engastada na base e que seu topo está livre para oscilar no plano *x*–*z* enquanto preso por pinos no plano *y*–*z*.



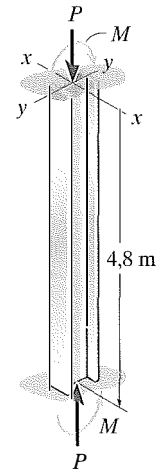
Problema 13.106

*13.107. A coluna W200 × 22 de aço estrutural A-36 está engastada no topo e na base. Se suportar os momentos M = 7,5 kN·m nas extremidades, determine a força axial P que pode ser aplicada. Ocorre flexão em torno do eixo *x*–*x*. Use as equações AISC da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



Problema 13.107

13.108. A coluna W200 × 22 de aço estrutural A-36 está engastada no topo e na base. Se suportar os momentos M = 35 kN·m nas extremidades, determine a força axial P que pode ser aplicada. Ocorre flexão em torno do eixo *x*–*x*. Use a fórmula da interação com $(\sigma_f)_{adm}$ = 168 MPa.



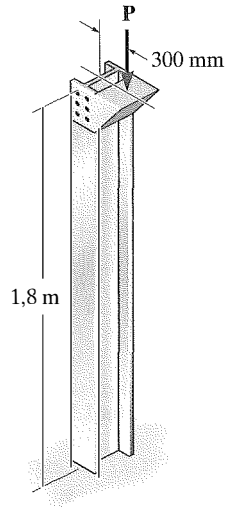
Problema 13.108

13.109. A coluna W310 × 33 de aço estrutural A-36 está engastada na base e é livre no topo. Determine a maior carga excêntrica P que pode ser aplicada usando a Equação 13.30 e as equações AISC da Seção 13.6.

13.110. A coluna W250 × 22 de aço estrutural A-36 está engastada na base e é livre no topo. Determine a maior carga excêntrica P que pode ser aplicada usando a Equação 13.30 e as equações AISC da Seção 13.6.

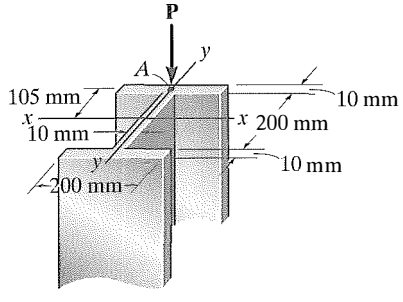
*13.111. A coluna W250 × 22 de aço estrutural A-36 está engastada na base e é livre no topo. Se for submetida a uma carga P = 10 kN, determine se ela é segura com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30.

13.112. A coluna W310 × 33 de aço estrutural A-36 está engastada na base e é livre no topo. Se for submetida a uma carga $P = 20$ kN, determine se ela é segura com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30.



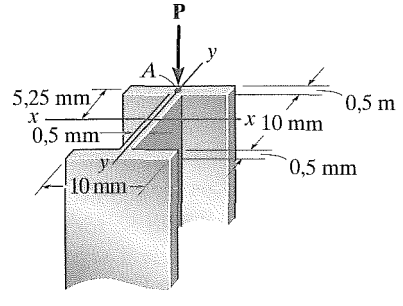
Problemas 13.109/110/111/112

13.113. Uma coluna de 6 m de comprimento é feita de liga de alumínio 2014-T6. Se estiver presa por pinos no topo e na base e uma carga de compressão P for aplicada no ponto A, determine o valor permissível máximo de P pelas equações da Seção 13.6 e pela Equação 13.30.



Problema 13.113

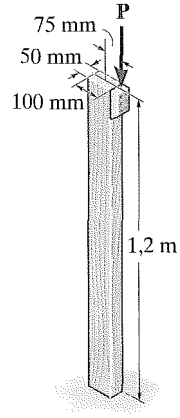
13.114. Uma coluna de 6 m de comprimento é feita de liga de alumínio 2014-T6. Se estiver presa por pinos no topo e na base e uma carga de compressão P for aplicada no ponto A, determine o valor máximo admissível de P pelas equações da Seção 13.6 e pela fórmula da interação com $(\sigma_f)_{adm} = 140$ MPa.



Problema 13.114

*13.115. Verifique se a coluna de madeira é adequada para suportar a carga excêntrica $P = 3$ kN aplicada no topo. Ela está engastada na base e é livre no topo. Use as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30.

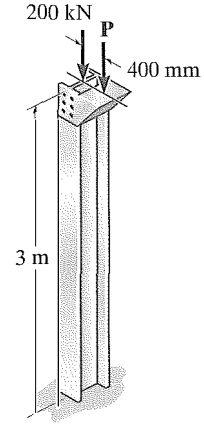
13.116. Determine a carga excêntrica máxima admissível P que pode ser aplicada à coluna de madeira engastada na base e livre no topo. Use as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



Problemas 13.115/116

13.117. A coluna W360 × 64 de aço estrutural A-36 está engastada na base e é livre no topo. Determine a maior carga excêntrica P que pode ser aplicada usando a Equação 13.30 e as equações AISC da Seção 13.6.

13.118. A coluna W250 × 67 de aço estrutural A-36 está engastada na base e é livre no topo. Se for submetida a uma carga $P = 10$ kN, determine se ela é segura com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30.

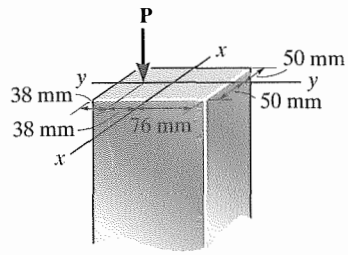


Problemas 13.117/118

*13.119. A barra de 3 m de comprimento é feita de liga de alumínio 2014-T6. Se estiver engastada na base e presa por pinos no topo, determine a carga excêntrica máxima admissível P que pode ser aplicada pelas fórmulas na Seção 13.6 e pela Equação 13.30.

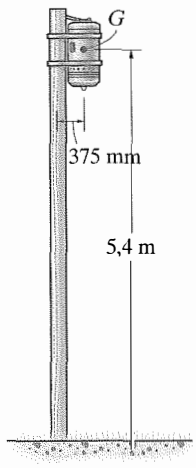
13.120. A coluna de 3 m de comprimento é feita de liga de alumínio 2014-T6. Se estiver engastada na base e presa por pinos no topo, determine a carga excêntrica máxima admis-

sível P que pode ser aplicada pelas equações da Seção 13.6 e pela fórmula da interação com $(\sigma_f)_{adm} = 126$ MPa.



Problemas 13.119/120

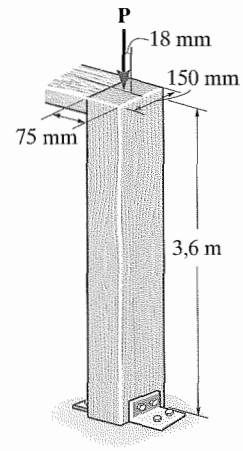
13.121. O poste de utilidades de 250 mm de diâmetro suporta o transformador que pesa 3 kN e tem centro de gravidade em *G*. Se o poste estiver engastado no solo e livre no topo, determine se ele é adequado de acordo com as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30.



Problema 13.121

13.122. Usando as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30, determine a carga excêntrica máxima admissível *P* que pode ser aplicada à coluna de madeira. Considere que a coluna está presa por pinos no topo e na base.

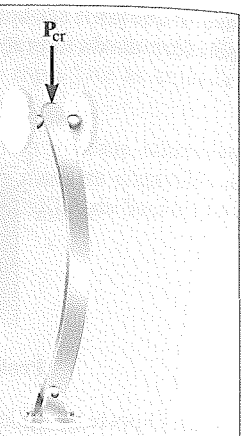
13.123. Usando as equações NFPA da Seção 13.6 e a Equação 13.30, determine a carga excêntrica máxima admissível *P* que pode ser aplicada à coluna de madeira. Considere que ela está presa por pinos no topo e engastada na base.



Problemas 13.122/123

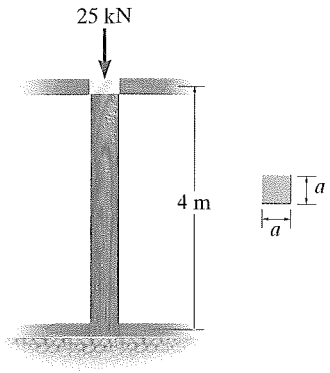
Revisão do capítulo

Flambagem é a instabilidade repentina que ocorre em colunas ou elementos estruturais que suportam uma carga axial. A carga axial máxima que um elemento estrutural pode suportar imediatamente antes de ocorrer a flambagem é denominada carga crítica P_{cr}.

A carga crítica para uma coluna ideal é determinada pela Equação de Euler, onde $K = 1$ para apoios de pinos, $K = 0{,}5$ para apoios fixos, $K = 0{,}7$ para um apoio de pinos e um apoio engastado e $K = 2$ para um apoio engastado e uma extremidade livre.	$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$	
Se uma carga excêntrica for aplicada à coluna, a fórmula da secante deverá ser usada para determinar a tensão máxima na coluna.	$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$	
Quando a carga axial tende a provocar o escoamento da coluna, deve-se usar o módulo tangente com a equação de Euler para determinar a carga de flambagem. Isso é denominado equação de Engesser.	$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2}$$	
Fórmulas empíricas baseadas em dados experimentais foram desenvolvidas para utilização no projeto de colunas de aço, alumínio e madeira.		

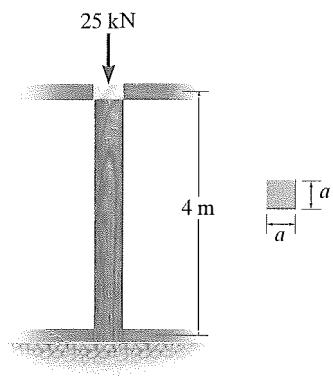
PROBLEMAS DE REVISÃO

13.124. A coluna de madeira tem 4 m de comprimento e deve suportar a carga axial de 25 kN. Se a seção transversal for quadrada, determine a dimensão a de cada um de seus lados usando um fator de segurança FS = 2,5 contra flambagem. Considere que a coluna está presa por pinos no topo e na base. Use a equação de Euler. $E_m = 11$ GPa e $\sigma_e = 10$ MPa.



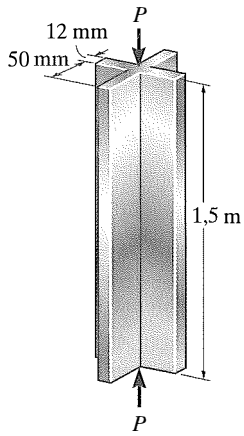
Problema 13.124

13.125. A coluna de madeira tem 4 m de comprimento e deve suportar a carga axial de 25 kN. Se a seção transversal for quadrada, determine a dimensão a de cada um de seus lados usando um fator de segurança FS = 1,5 contra flambagem. Considere que a coluna está engastada no topo e na base. Use a equação de Euler, $E_m = 11$ GPa e $\sigma_e = 10$ MPa.



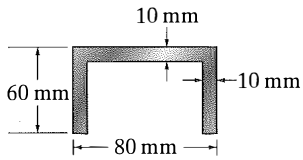
Problema 13.125

13.126. O elemento estrutural feito de liga de alumínio 2014-T6 tem seção transversal simétrica. Se estiver acoplado por pinos nas extremidades, determine a maior força que ele pode suportar.



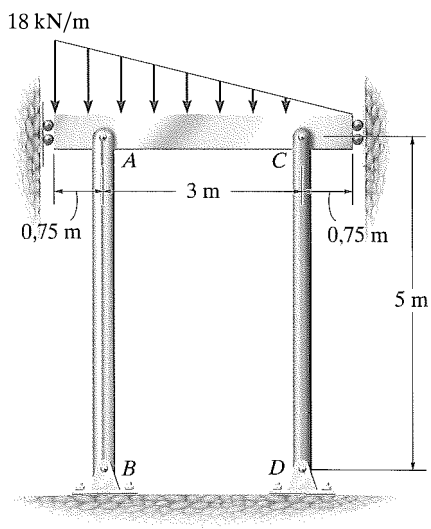
Problema 13.126

*13.127. A coluna de aço tem comprimento de 5 m e é livre em uma extremidade e engastada na outra. Se a área da seção transversal tiver as dimensões mostradas na figura, determine a carga crítica. $E_{aço} = 200$ GPa e $\sigma_e = 360$ MPa.



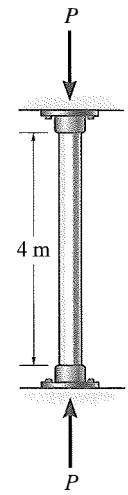
Problema 13.127

13.128. A carga distribuída é suportada por duas colunas acopladas por pinos, cada uma com seção transversal circular maciça. Se *AB* for feita de alumínio e *CD* de aço, determine o diâmetro exigido para cada coluna, de modo que ambas estejam na iminência de sofrer flambagem ao mesmo tempo. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 70$ GPa, $(\sigma_e)_{aço} = 250$ MPa e $(\sigma_e)_{al} = 100$ MPa.



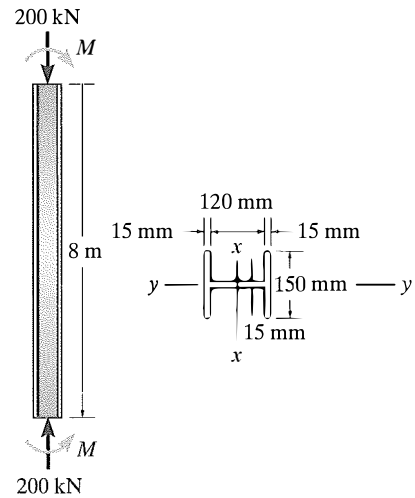
Problema 13.128

13.129. O tubo de aço está engastado em ambas as extremidades. Se tiver 4 m de comprimento e diâmetro externo de 50 mm, determine a espessura exigida para que possa suportar uma carga axial $P = 100$ kN sem sofrer flambagem. $E_{aço} = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa.



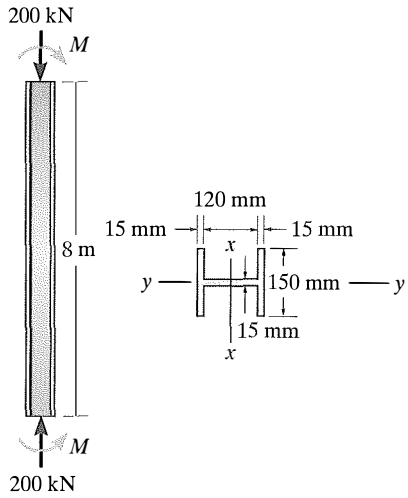
Problema 13.129

13.130. Considere que a coluna está acoplada por pinos no topo e na base e totalmente escorada contra flambagem em torno do eixo *y*–*y*. Se for submetida a uma carga axial de 200 kN, determine o momento máximo *M* que pode ser aplicado às suas extremidades sem provocar escoamento. $E_{aço} = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa.



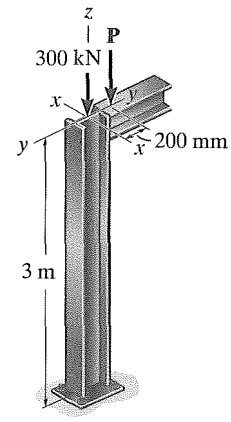
Problema 13.130

*13.131. Considere que a coluna está engastada no topo e na base e escorada contra flambagem em torno do eixo *y*–*y*. Se for submetida a uma carga axial de 200 kN, determine o momento máximo *M* que pode ser aplicado às suas extremidades sem provocar escoamento. $E_{aço} = 200$ GPa e $\sigma_e = 250$ MPa.



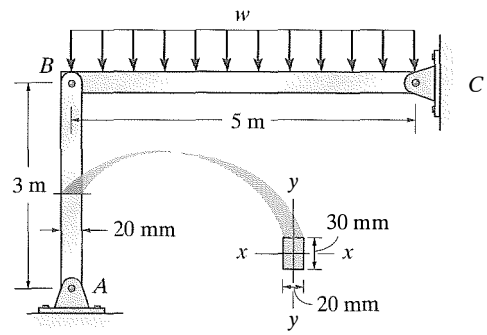
Problema 13.131

13.132. A coluna W250 × 67 de aço suporta uma carga axial de 300 kN, além de uma carga excêntrica $\mathbb{P}$. Determine o valor máximo admissível de $\mathbb{P}$ com base nas equações AISC da Seção 13.6 e na Equação 13.30. Considere que, no plano x–z, $K_x = 1{,}0$, e no plano y–z, $K_y = 2{,}0$. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 350$ MPa.



Problema 13.132

13.133. Uma barra de aço AB tem seção transversal retangular. Se considerarmos que ela está acoplada por pinos nas extremidades, determine se o elemento estrutural AB sofrerá flambagem, caso a carga distribuída seja $w = 2$ kN/m. Use um fator de segurança FS = 1,5 contra flambagem. $E_{aço} = 200$ GPa e $\sigma_e = 360$ MPa.



Problema 13.133

14 Métodos de energia

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Neste capítulo, mostraremos como aplicar métodos de energia para resolver problemas que envolvam deflexão. O capítulo começa com uma discussão de trabalho e energia de deformação, seguida pelo desenvolvimento do princípio da conservação de energia. Usando esse princípio, determinaremos a tensão e a deflexão de um elemento estrutural quando submetido a impacto. Em seguida, serão desenvolvidos o método do trabalho virtual e o teorema de Castigliano, e esses métodos serão usados para determinar o deslocamento e a inclinação em pontos sobre elementos estruturais e mecânicos.

14.1 Trabalho externo e energia de deformação

Antes de desenvolver qualquer dos métodos de energia utilizados neste capítulo, definiremos o trabalho provocado por uma força interna e momento e mostraremos como expressá-lo em relação à energia de deformação de um corpo. As formulações que serão apresentadas nesta e na próxima seção proporcionarão a base para a aplicação dos métodos de trabalho e energia que se seguem por todo o capítulo.

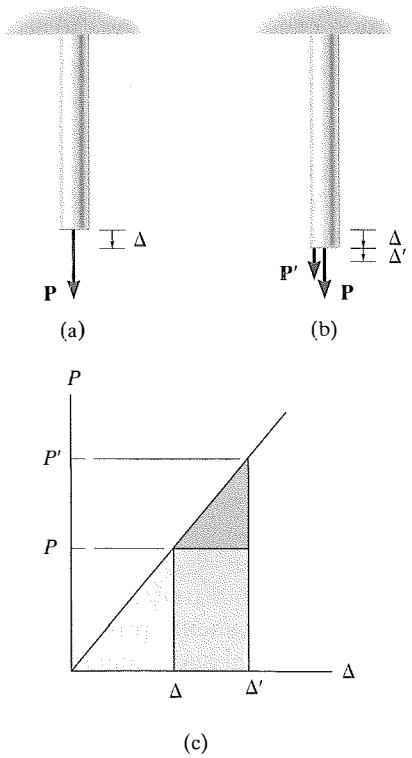


Figura 14.1

Trabalho de uma força. Em mecânica, uma força realiza *trabalho* quando sofre um deslocamento dx que está na mesma direção dela. O trabalho realizado é um escalar, definido como $dU_e = F\,dx$. Se o deslocamento total for x, o trabalho torna-se

$$U_e = \int_0^x F\,dx \tag{14.1}$$

Para mostrar como aplicar essa equação, calcularemos o trabalho realizado por uma força axial aplicada à extremidade da barra mostrada na Figura 14.1a. À medida que a intensidade de **F** aumenta *gradualmente* de zero até algum valor limite $F = P$, o deslocamento final da extremidade da barra torna-se Δ. Se o material comportar-se de maneira linear elástica, a força será diretamente proporcional ao deslocamento; isto é, $F = (P/\Delta)x$. Substituindo na Equação 14.1 e integrando de 0 a Δ, obtemos

$$U_e = \frac{1}{2}P\Delta \tag{14.2}$$

Portanto, à medida que a força é gradualmente aplicada à barra, sua intensidade aumenta de zero até algum valor P e, por consequência, o trabalho realizado é igual à *intensidade média da força*, $P/2$, vezes o deslocamento total Δ. Podemos representar isso graficamente como a área sombreada mais clara do triângulo na Figura 14.1c.

Entretanto, suponha que $\mathbb{P}$ já está aplicada à barra e que *outra força* $\mathbb{P}'$ é aplicada, de modo que a extremidade da barra desloca-se por uma quantidade *adicional* Δ' (Figura 14.1b). Então, o trabalho realizado por $\mathbb{P}$ (não $\mathbb{P}'$) quando a barra sofre esse deslocamento adicional Δ' é

$$U_e' = P\Delta' \tag{14.3}$$

Nessa expressão, o trabalho representa a *área retangular* sombreada mais escura na Figura 14.1c. Nesse caso, $\mathbb{P}$ não muda de intensidade, visto que o deslocamento da barra Δ' é provocado somente por $\mathbb{P}'$. Portanto, aqui o trabalho é simplesmente a intensidade da força P vezes o deslocamento Δ'.

Em resumo, quando uma força $\mathbb{P}$ é aplicada à barra, seguida pela aplicação da força $\mathbb{P}'$, o trabalho total realizado por ambas as forças é representado pela área do triângulo inteiro na Figura 14.1c. A área triangular mais clara representa o trabalho de $\mathbb{P}$ que é provocado por seu deslocamento Δ. A área triangular sombreada mais escura representa o trabalho de $\mathbb{P}'$, visto que essa força desloca-se Δ'; e, por fim, a área retangular escura representa o trabalho adicional realizado por $\mathbb{P}$ quando $\mathbb{P}$ desloca-se Δ', em razão de $\mathbb{P}'$.

Trabalho de um momento. Um momento $\mathbb{M}$ realiza trabalho quando sofre um deslocamento rotacional $d\theta$ ao longo de sua linha de ação. O trabalho realizado é definido como $dU_e = M\,d\theta$ (Figura 14.2). Se o ângulo total de deslocamento rotacional for θ rad, o trabalho torna-se

$$U_e = \int_0^\theta M\,d\theta \tag{14.4}$$

Como ocorreu no caso da força, se o momento for aplicado a um corpo que tenha comportamento de material linear elástico, tal que sua intensidade aumente gradualmente de zero em $\theta = 0$ a M em θ, então o trabalho será

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta \tag{14.5}$$

Todavia, se o momento já estiver aplicado ao corpo e outras cargas provocarem rotação adicional θ' ao corpo, então o trabalho será

$$U'_e = M\theta'$$

Energia de deformação. Quando cargas são aplicadas a um corpo, elas deformam o material. Contanto que nenhuma energia seja perdida sob forma de calor, o trabalho externo realizado pelas cargas será convertido em trabalho interno denominado energia de deformação. Essa energia, que se apresenta sempre positiva, é armazenada no corpo e provocada pela ação da tensão normal ou da tensão de cisalhamento.

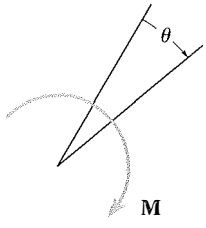


Figura 14.2

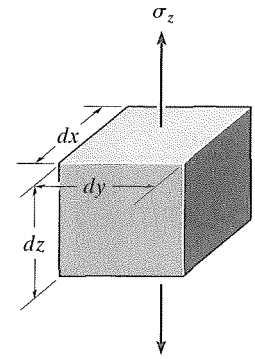


Figura 14.3

Tensão normal. Se o elemento de volume mostrado na Figura 14.3 for submetido à tensão normal σ_z, a força criada nas faces superior e inferior é $dF_z = \sigma_z dA = \sigma_z dx dy$. Se essa força for aplicada gradualmente ao elemento, como a força $\mathbb{P}$ que discutimos anteriormente, sua intensidade aumentará de zero a dF_z, enquanto o elemento sofrerá um deslocamento $d\Delta_z = \epsilon_z dz$. Portanto, o trabalho realizado por dF_z é $dU_i = \frac{1}{2}dF_z\,d\Delta_z = \frac{1}{2}[\sigma_z\,dx\,dy]\epsilon_z\,d_z$. Visto que o volume do elemento é $dV = dx\,dy\,dz$, temos

$$dU_i = \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z\,dV \tag{14.6}$$

Observe que U_i é *sempre positivo*, mesmo que σ_z seja uma força de compressão, uma vez que σ_z e ϵ_z estarão sempre na mesma direção.

Então, em geral, se o corpo for submetido somente a uma *tensão normal* uniaxial σ, que age em uma direção específica, a energia de deformação no corpo será

$$U_i = \int_V \frac{\sigma\epsilon}{2}dV \tag{14.7}$$

Além disso, se o material comportar-se de maneira linear elástica, a lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, é aplicável e, portanto, podemos expressar a energia de deformação em termos da tensão normal como

$$\boxed{U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}dV} \tag{14.8}$$

Tensão de cisalhamento. Uma expressão da energia de deformação semelhante à da tensão normal também pode ser estabelecida para o material quando ele é submetido à tensão de cisalhamento. Considere o elemento de volume mostrado na Figura 14.4. Nesse caso, a tensão de cisalhamento provoca a deformação do elemento de modo tal que somente a força de cisalhamento $dF = \tau(dx\,dy)$, que age sobre a face superior do elemento, desloca-se $\gamma\,d_z$ em relação à face inferior. As faces verticais só giram, portanto as forças de

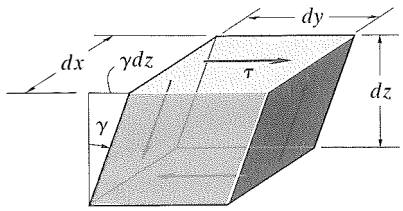


Figura 14.4

cisalhamento nessas faces não realizam nenhum trabalho. Por consequência, a energia de deformação armazenada no elemento é

$$dU_i = \frac{1}{2}[\tau(dx\,dy)]\gamma\,dz$$

ou

$$dU_i = \frac{1}{2}\tau\gamma\,dV \tag{14.9}$$

onde $dV = dx\,dy\,dz$ é o volume do elemento.

Integrando sobre todo o volume do corpo para obter a energia de deformação armazenada no corpo, temos

$$U_i = \int_V \frac{\tau\gamma}{2}dV \tag{14.10}$$

Como ocorreu no caso da tensão normal, a energia de deformação por cisalhamento é sempre positiva, visto que τ e γ estão sempre na mesma direção. Se o material for linear elástico, aplicando-se a lei de Hooke, $\gamma = \tau/G$, podemos expressar a energia de deformação em termos da tensão de cisalhamento como

$$\boxed{U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G}dV} \tag{14.11}$$

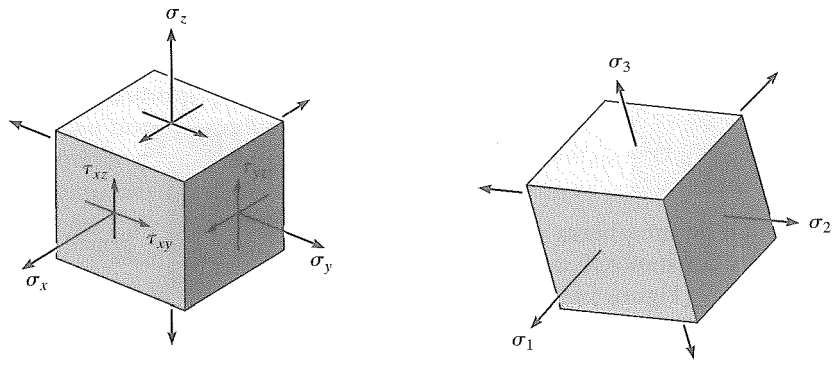
Na próxima seção, usaremos as equações 14.8 e 14.11 para obter expressões formais para a energia de deformação armazenada em elementos estruturais submetidos a vários tipos de carga. Isso feito, poderemos desenvolver os métodos de energia necessários para determinar o deslocamento e a inclinação em pontos sobre um corpo.

Tensão multiaxial. O desenvolvimento anterior pode ser ampliado para determinar a energia de deformação em um corpo quando ele é submetido a um estado geral de tensão (Figura 14.5a). As energias de deformação associadas a cada componente da tensão normal e da tensão de cisalhamento podem ser obtidas pelas equações 14.6 e 14.9. Como a energia é um escalar, a energia total de deformação no corpo é, portanto,

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\epsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz}\right]dV \tag{14.12}$$

As tensões podem ser eliminadas usando-se a forma generalizada da lei de Hooke dada pelas equações 10.18 e 10.19. Após substituir e reunir termos, temos:

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)\right]dV \tag{14.13}$$



(a) (b)

Figura 14.5

Se somente as tensões principais σ_1, σ_2 e σ_3 agirem sobre o elemento (Figura 14.5b), essa equação é reduzida a uma forma mais simples, a saber,

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] dV \qquad (14.14)$$

Lembre-se de que usamos essa equação na Seção 10.7 como base para desenvolver a teoria da energia de distorção máxima.

14.2 Energia de deformação elástica para vários tipos de carga

Usando as equações para energia de deformação elástica desenvolvidas na seção anterior, formularemos agora a energia de deformação armazenada em um elemento estrutural quando submetido a carga axial, momento fletor, cisalhamento transversal e momento de torção. Daremos exemplos para mostrar como calcular a energia de deformação em elementos estruturais submetidos a cada uma dessas cargas.

Carga axial. Considere uma barra de seção transversal variável ligeiramente cônica, que é submetida a uma carga axial que coincide com o eixo centroide da barra (Figura 14.6). A força axial interna em uma seção localizada à distância x de uma extremidade é N. Se a área da seção transversal nessa seção for A, então a tensão normal na seção é $\sigma = N/A$. Aplicando a Equação 14.8, temos

$$U_i = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_V \frac{N^2}{2EA^2} dV$$

Se escolhermos um elemento ou uma lâmina diferencial com volume $dV = A\,dx$, a fórmula geral para a energia de deformação na barra será, portanto,

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx} \qquad (14.15)$$

Para o caso mais comum de uma barra prismática de área de seção transversal constante A, comprimento L e carga axial constante N (Figura 14.7), Equação 14.15, quando integrada, dá

$$\boxed{U_i = \frac{N^2 L}{2AE}} \qquad (14.16)$$

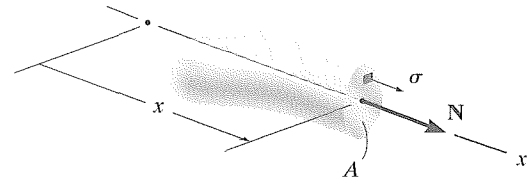


Figura 14.6

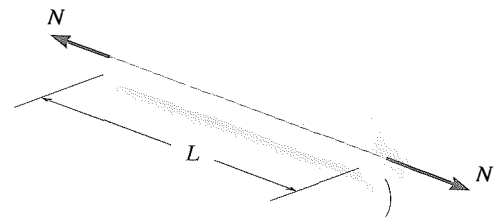


Figura 14.7

Por essa equação, podemos ver que a energia de deformação elástica da barra *aumentará* se o comprimento da barra aumentar, ou se o módulo de elasticidade ou a área da seção transversal diminuir. Por exemplo, uma haste de alumínio [E_{al} = 70 GPa] armazenará aproximadamente três vezes a quantidade de energia armazenada por uma haste de aço [$E_{aço}$ = 200 GPa] que tenha o mesmo tamanho e seja submetida à mesma carga. Por outro lado, dobrar a área da seção transversal de uma determinada haste reduzirá à metade sua capacidade de armazenar energia. Os seguintes exemplos ilustram esse ponto numericamente.

EXEMPLO 14.1

Um dos dois parafusos de aço de alta resistência A e B mostrados na Figura 14.8 deve ser escolhido para suportar uma carga de tração repentina. Para escolher, é necessário determinar a maior quantidade de energia de deformação elástica que cada parafuso pode absorver. O parafuso A tem diâmetro de 20 mm por 50 mm de comprimento e diâmetro de rosca (ou menor diâmetro) de 18 mm dentro da região rosqueada de 6 mm. O parafuso B tem roscas 'recalcadas', de modo tal que o diâmetro em todo o seu comprimento

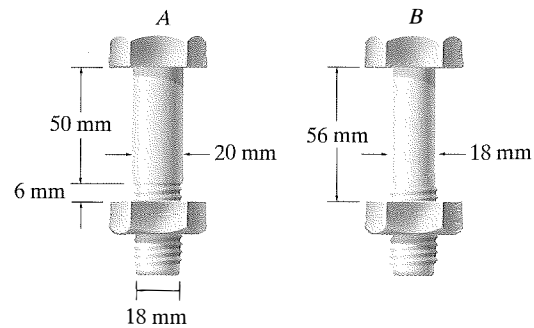


Figura 14.8

de 56 mm pode ser considerado como 18 mm. Em ambos os casos, despreze o material extra que compõe as roscas. Considere $E_{aço} = 210(10^3)$ MPa, $\sigma_e = 310$ MPa.

SOLUÇÃO

Parafuso A. Se o parafuso for submetido à tração máxima, ocorrerá uma tensão máxima $\sigma_e = 310$ N/mm² na região de 6 mm. Essa força de tração é

$$P_{máx} = \sigma_e A = 310 \text{ N/mm}^2 \left[\pi \left(\frac{18 \text{ mm}}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 78.886 \text{ N} = 78,89 \text{ kN}$$

Aplicando a Equação 14.16 a cada região do parafuso, temos

$$U_i = \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

$$= \frac{(78,89 \times 10^3 \text{ N})^2 (50 \text{ mm})}{2[\pi(20 \text{ mm}/2)^2][210(10^3) \text{ N/mm}^2]} +$$

$$+ \frac{(78,89 \times 10^3 \text{ N})^2 (6 \text{ mm})}{2[\pi(18 \text{ mm}/2)^2][210(10^3) \text{ N/mm}^2]}$$

$$= 2.707,8 \text{ N} \cdot \text{mm} = 2,708 \text{ N} \cdot \text{m} = 2,708 \text{ J} \qquad \textit{Resposta}$$

Parafuso B. Aqui consideramos que o parafuso tem diâmetro uniforme de 18 mm em todo o seu comprimento de 56 mm. Além disso, pelos cálculos acima, ele pode suportar uma força de tração máxima $P_{máx} = 78,89$ kN. Logo,

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} = \frac{(78,89 \times 10^3 \text{ N})^2 (56 \text{ mm})}{2[\pi(18 \text{ mm}/2)^2][210(10^3) \text{ N/mm}^2]}$$
$$= 3.261,0 \text{ N} \cdot \text{mm} = 3,26 \text{ N} \cdot \text{m} = 3,26 \text{ J} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Por comparação, o parafuso *B* pode absorver 20% mais energia elástica do que o parafuso *A*, porque tem seção transversal menor ao longo de sua haste.

Momento fletor. Visto que um momento fletor aplicado a um elemento estrutural prismático reto desenvolve nele uma tensão normal, podemos usar a Equação 14.8 para determinar a energia de deformação armazenada no elemento estrutural decorrente da flexão. Por exemplo, considere a viga assimétrica mostrada na Figura 14.9. Aqui, o momento interno é M e a tensão normal que age sobre o elemento arbitrário à distância y do eixo neutro é $\sigma = My/I$. Se o volume do elemento for $dV = dA\,dx$, onde dA é a área de sua face exposta e dx seu comprimento, a energia de deformação elástica na viga é

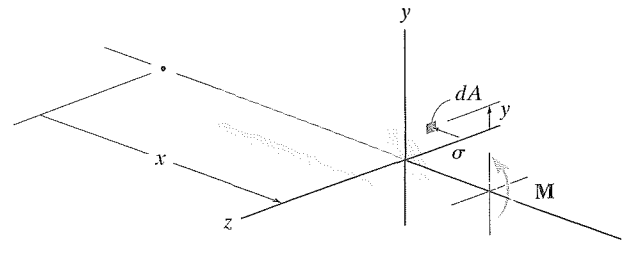


Figura 14.9

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{1}{2E} \left(\frac{My}{I} \right)^2 dA\,dx$$

ou

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2\,dA \right) dx$$

Percebendo que a integral de área representa o momento de inércia da viga em torno do eixo neutro, o resultado final pode ser escrito como

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}} \qquad (14.17)$$

Portanto, para se obter a energia de deformação, em primeiro lugar temos de expressar o momento interno em função de sua posição x ao longo da viga, e então efetuar a integração sobre o comprimento total da viga.* Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

EXEMPLO 14.2

Determine a energia de deformação elástica provocada pela flexão da viga em balanço, se ela for submetida à carga distribuída uniforme w (Figura 14.10a). EI é constante.

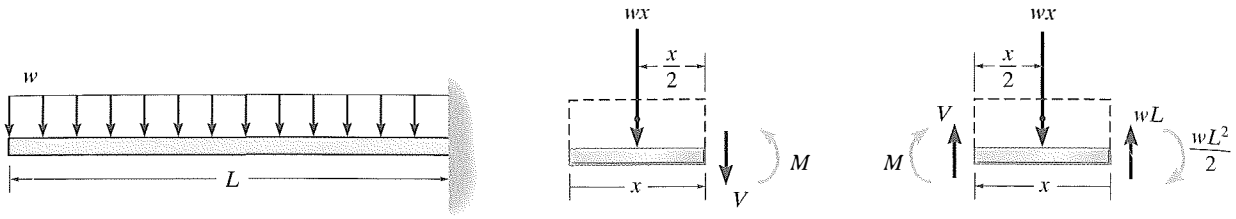
SOLUÇÃO

O momento interno na viga é determinado estabelecendo-se a coordenada x com origem no lado esquerdo. O segmento à esquerda na viga é mostrado na Figura 14.10b. Temos

$$\zeta + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M = -w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

* Lembre-se de que a fórmula da flexão, como aplicada aqui, também pode ser usada com exatidão justificável para determinar a tensão em vigas ligeiramente cônicas. (Veja a Seção 6.4.) Portanto, em sentido geral, I na Equação 14.17 também pode ser expresso em função de x.



(a) (b) (c)

Figura 14.10

Aplicando a Equação 14.17, obtemos

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[-w(x^2/2)]^2\,dx}{2EI} = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4\,dx$$

ou

$$U_i = \frac{w^2L^5}{40EI} \qquad \textit{Resposta}$$

Também podemos obter a energia de deformação usando uma coordenada x que tenha origem no lado direito da viga e prolonga-se para o lado positivo à esquerda (Figura 14.10c). Nesse caso,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad -M - wx\left(\frac{x}{2}\right) + wL(x) - \frac{wL^2}{2} = 0$$

$$M = -\frac{wL^2}{2} + wLx - w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

Aplicando a Equação 14.17, obtemos o mesmo resultado anterior.

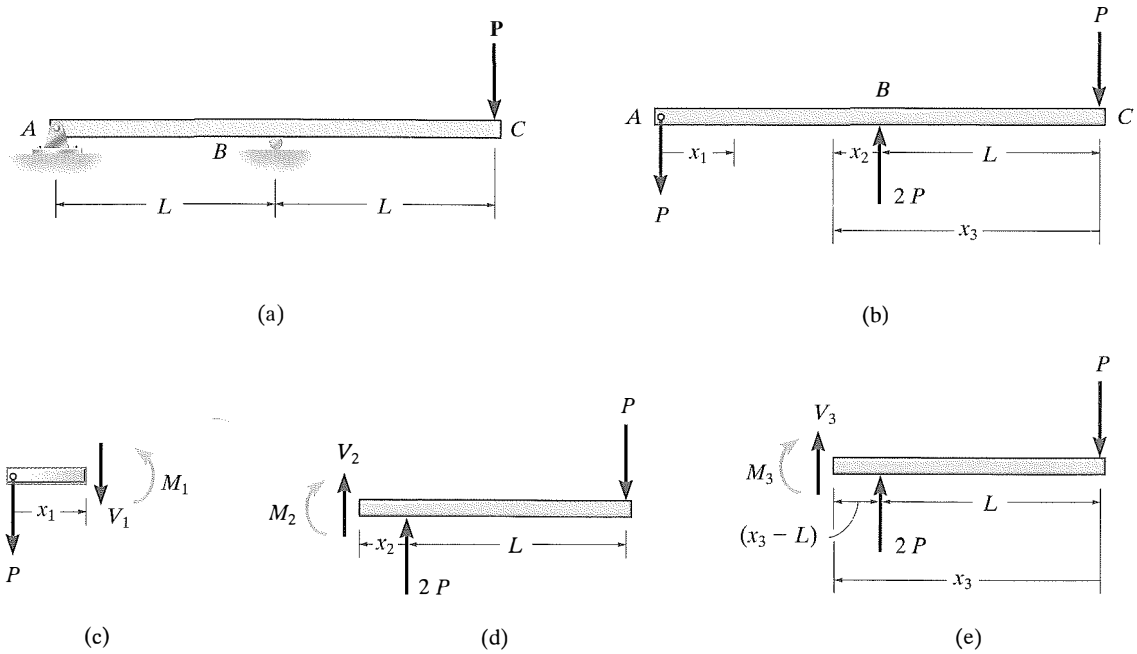
EXEMPLO 14.3

Determine a energia de deformação por flexão na região AB da viga mostrada na Figura 14.11a. EI é constante.

SOLUÇÃO

Um diagrama de corpo livre da viga é mostrado na Figura 14.11*b*. Para obter a resposta, podemos expressar o momento interno em termos de qualquer uma das três coordenadas 'x' indicadas e, a seguir, aplicar a Equação 14.17. Agora consideraremos cada uma dessas soluções.

$0 \le x_1 \le L$. Pelo diagrama de corpo livre da seção na Figura 14.11c, temos



(a) (b) (c) (d) (e)

Figura 14.11

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M_1 + Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px_1)^2\,dx_1}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resposta}$$

$0 \le x_2 \le L$. Usando o diagrama de corpo livre da seção na Figura 14.11d, obtemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad -M_2 + 2P(x_2) - P(x_2 + L) = 0$$

$$M_2 = P(x_2 - L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[P(x_2 - L)]^2\,dx_2}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resposta}$$

$L \le x_3 \le 2L$. Pelo diagrama de corpo livre na Figura 14.11e, temos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad -M_3 + 2P(x_3 - L) - P(x_3) = 0$$

$$M_3 = P(x_3 - 2L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_L^{2L} \frac{[P(x_3 - 2L)]^2\,dx_3}{2EI}$$

$$= \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Resposta}$$

OBSERVAÇÃO: Esse exemplo e o anterior indicam que a energia de deformação para a viga pode ser calculada por meio de *qualquer* coordenada x adequada. Basta integrar na faixa da coordenada onde a energia interna deve ser determinada. Aqui, a escolha de x_1 dá a solução mais simples.

Cisalhamento transversal. A energia de deformação decorrente da tensão de cisalhamento em um elemento de uma viga pode ser determinada pela Equação 14.11. Aqui consideraremos que a viga é prismática e tem um eixo de simetria em torno do eixo y como mostra a Figura 14.12. Se o cisalhamento interno na seção x for V, a tensão de cisalhamento que age sobre o elemento de volume de material, que tem comprimento dx e área dA, é $\tau = VQ/It$. Substituindo na Equação 14.11, a energia de deformação para o cisalhamento torna-se

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_L \frac{1}{2G}\left(\frac{VQ}{It}\right)^2 dA\,dx$$

$$U_i = \int_0^L \frac{V^2}{2GI^2}\left(\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA\right) dx$$

A integral entre parênteses é calculada em toda a área da seção transversal da viga. Para simplificar essa expressão, definiremos o *fator de forma* para cisalhamento como

$$f_s = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA \tag{14.18}$$

Substituindo na equação acima, obtemos

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{f_s V^2\,dx}{2GA}} \tag{14.19}$$

O fator de forma definido pela Equação 14.18 é um número adimensional exclusivo para cada área de seção transversal específica. Por exemplo, se a viga tiver uma seção transversal retangular com largura b e altura h (Figura 14.13), então

$$t = b$$

$$A = bh$$

$$I = \frac{1}{12}bh^3$$

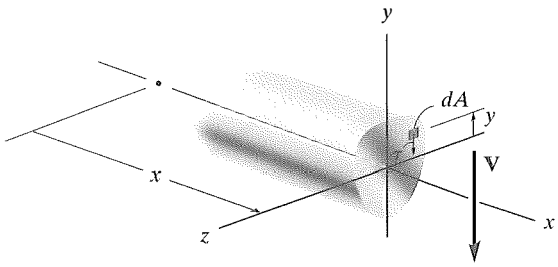


Figura 14.12

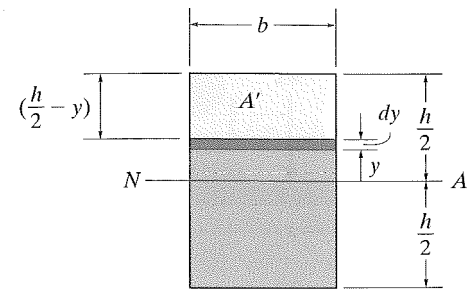


Figura 14.13

$$Q = \bar{y}'A' = \left(y + \frac{(h/2) - y}{2}\right)b\left(\frac{h}{2} - y\right)$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Substituindo esses termos na Equação 14.18, obtemos

$$f_s = \frac{bh}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)^2}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{b^2}{4b^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 b\,dy = \frac{6}{5} \quad (14.20)$$

O fator de forma para outras seções pode ser determinado de maneira semelhante. Uma vez obtido, esse número é substituído na Equação 14.19 e, a seguir, a energia de deformação para o cisalhamento transversal pode ser calculada.

EXEMPLO 14.4

Determine a energia de deformação na viga em balanço decorrente de cisalhamento, se a viga tiver seção transversal quadrada e for submetida a uma carga distribuída uniforme w (Figura 14.14a). EI e G são constantes.

SOLUÇÃO

Pelo diagrama de corpo livre de uma seção arbitrária (Figura 14.14b) temos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -V - wx = 0$$

$$V = -wx$$

Como a seção transversal é quadrada, o fator de forma $f_s = \frac{6}{5}$ (Equação 14.20), portanto a Equação 14.19, torna-se

$$(U_i)_c = \int_0^L \frac{\frac{6}{5}(-wx)^2\,dx}{2GA} = \frac{3w^2}{5GA}\int_0^L x^2\,dx$$

ou

$$(U_i)_c = \frac{w^2L^3}{5GA} \qquad \textit{Resposta}$$

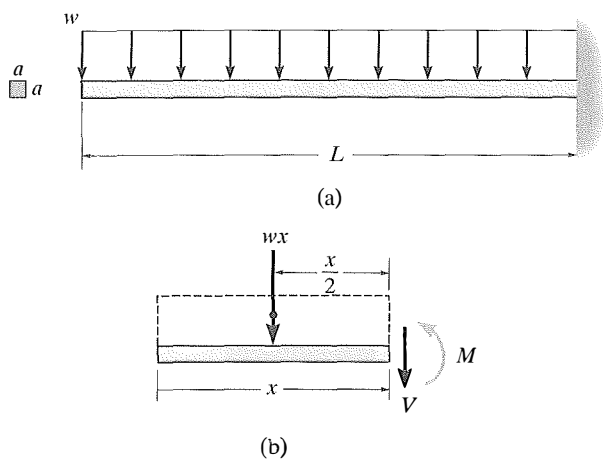


Figura 14.14

Usando os resultados do Exemplo 14.2, com $A = a^2$, $I = \frac{1}{12}a^4$, a relação entre energia de deformação por cisalhamento e energia de deformação por flexão é

$$\frac{(U_i)_c}{(U_i)_f} = \frac{w^2L^3/5Ga^2}{w^2L^5/40E\left(\frac{1}{12}a^4\right)} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{L}\right)^2\frac{E}{G}$$

Visto que $G = E/2(1 + \nu)$ e $\nu \leq \frac{1}{2}$ (Seção 10.6), temos como limite *superior* $E = 3G$, de modo que

$$\frac{(U_i)_c}{(U_i)_f} = 2\left(\frac{a}{L}\right)^2$$

OBSERVAÇÃO: Podemos ver que essa relação aumentará à medida que L diminuir. Todavia, mesmo para vigas muito curtas, para as quais, digamos, $L = 5a$, a contribuição dada pela energia de deformação por cisalhamento é somente 8% da energia de deformação por flexão. Por essa razão, a energia de deformação por cisalhamento armazenada em vigas é normalmente desprezada na análise de engenharia.

Momento de torção. Para determinar a energia de deformação interna em um eixo ou tubo circular decorrente de um momento de torção aplicado, temos de aplicar a Equação 14.11. Considere o eixo ligeiramente cônico na Figura 14.15. A seção do eixo tomada à distância x de uma extremidade é submetida a um torque interno T. A distribuição de tensão de cisalhamento que provoca esse torque varia linearmente em relação ao centro do eixo. No elemento de comprimento arbitrário dx e área dA, a tensão é $\tau = T\rho/J$. Assim, a energia de deformação armazenada no eixo é

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G}dV = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{T\rho}{J}\right)^2 dA\,dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int_A \rho^2\,dA\right)dx$$

Visto que a integral de área representa o momento polar de inércia J para o eixo na seção, o resultado final pode ser escrito como

$$\boxed{U_i = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}dx} \quad (14.21)$$

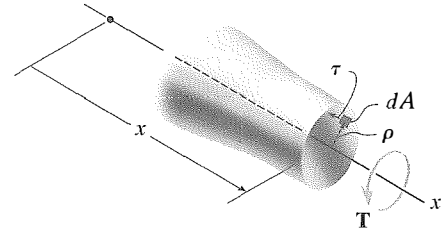


Figura 14.15

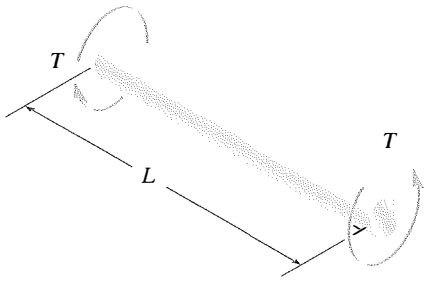


Figura 14.16

O caso mais comum ocorre quando o eixo (ou tubo) tem uma área de seção transversal constante e o torque aplicado é constante (Figura 14.16). Logo, a integração da Equação 14.21 dá

$$U_i = \frac{T^2 L}{2GJ} \tag{14.22}$$

Por essa equação, podemos concluir que, do mesmo modo que ocorre com um elemento estrutural submetido a carga axial, a capacidade de absorção de energia de um eixo submetido à carga de torção *diminui* quando o diâmetro do eixo aumenta, visto que isso aumenta J.

Se a seção transversal do eixo tiver alguma outra forma que não a circular ou tubular, a Equação 14.22 deve ser modificada. Por exemplo, se for retangular com dimensões $h > b$, por meio de uma análise matemática baseada na teoria da elasticidade, pode-se demonstrar que a energia de deformação no eixo é determinada por

$$U_i = \frac{T^2 L}{2Cb^3 hG} \tag{14.23}$$

onde

$$C = \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3} - 3{,}336\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right] \tag{14.24}$$

O exemplo a seguir ilustra como determinar a energia de deformação em um eixo decorrente de uma carga de torção.

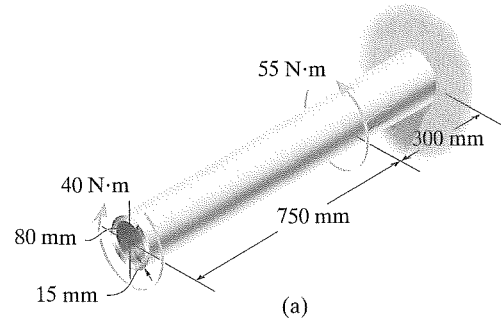
EXEMPLO 14.5

O eixo tubular na Figura 14.17a está engastado na parede e é submetido aos dois torques mostrados. Determine a energia de formação armazenada no eixo decorrente dessa carga. $G = 75$ GPa.

SOLUÇÃO

Usando o método das seções, determinamos em primeiro lugar o torque interno dentro das duas regiões do eixo onde ele é constante (Figura 14.17b). Embora esses torques (40 N · m e 15 N · m) estejam em direções opostas, isso não terá consequência para a determinação da energia de deformação, visto que o torque é elevado ao quadrado na Equação 14.22. Em outras palavras, a energia de deformação é sempre positiva. O momento polar de inércia para o eixo é

$$J = \frac{\pi}{2}[(0{,}08\text{ m})^4 - (0{,}065\text{ m})^4] = 36{,}30(10^{-6})\text{ m}^4$$



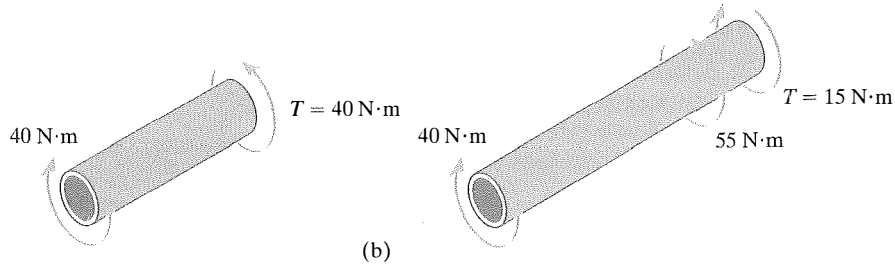


Figura 14.17

PONTOS IMPORTANTES

- A *força* realiza trabalho quando se move por um *deslocamento*. Se a intensidade da força for aumentada gradualmente de zero a F, o trabalho é $U = (F/2)\Delta$, ao passo que, se a força for constante quando ocorrer o deslocamento, então $U = F\Delta$.
- Um *momento* realiza trabalho quando se move por uma *rotação*.
- *Energia de deformação* resulta do trabalho interno das tensões normal e de cisalhamento. Ela é sempre uma quantidade *positiva*.
- A energia de deformação pode ser relacionada com as cargas internas resultantes N, V, M e T.
- À medida que o comprimento da viga aumenta, a energia de deformação provocada por flexão torna-se muito maior do que a energia de deformação provocada por cisalhamento. Por essa razão, de modo geral, a *energia de deformação por cisalhamento* em vigas pode ser *desprezada*.

Aplicando a Equação 14.22, temos

$$U_i = \sum \frac{T^2 L}{2GJ}$$

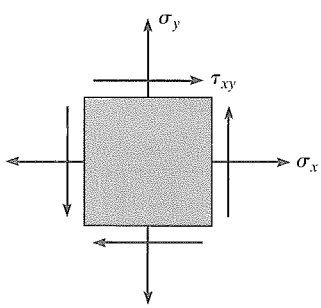
$$= \frac{(40\ \text{N}\cdot\text{m})^2(0{,}750\ \text{m})}{2[75(10^9)\ \text{N/m}^2]36{,}30(10^{-6})\ \text{m}^4} +$$

$$+ \frac{(15\ \text{N}\cdot\text{m})^2(0{,}300\ \text{m})}{2[75(10^9)\ \text{N/m}^2]36{,}30(10^{-6})\ \text{m}^4}$$

$$= 233\ \mu\text{J} \qquad \textit{Resposta}$$

PROBLEMAS

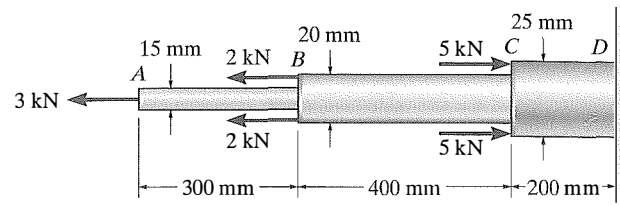
14.1. Um material é submetido a um estado plano de tensão geral. Expresse a densidade de energia de deformação em termos das constantes elásticas E, G e ν e das componentes da tensão σ_x, σ_y e τ_{xy}.



Problema 14.1

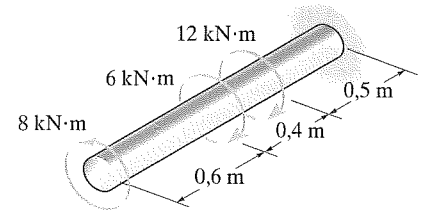
14.2. A densidade de energia de deformação deve ser a mesma, quer o estado de tensão seja representado por σ_x, σ_y e τ_{xy} quer pelas tensões principais σ_1 e σ_2. Sendo esse o caso, iguale as expressões da energia de deformação para cada um desses dois casos e mostre que $G = E/[2(1 + \nu)]$.

14.3. Determine a energia de deformação no conjunto de hastes. A porção AB é de aço, BC de latão e CD de alumínio. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{lat} = 101$ GPa e $E_{al} = 73{,}1$ GPa.



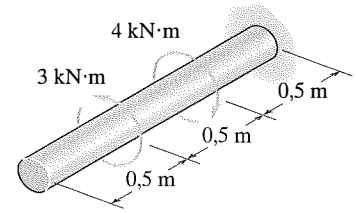
Problema 14.3

14.4. Determine a energia de deformação por torção no eixo de aço A-36. O eixo tem raio de 40 mm.



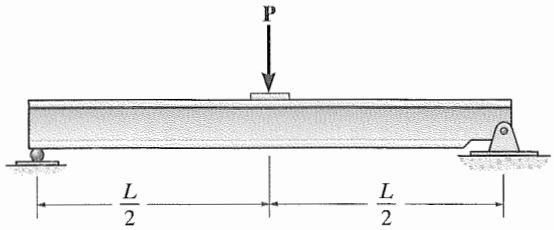
Problema 14.4

14.5. Determine a energia de deformação por torção no eixo de aço A-36. O eixo tem raio de 30 mm.



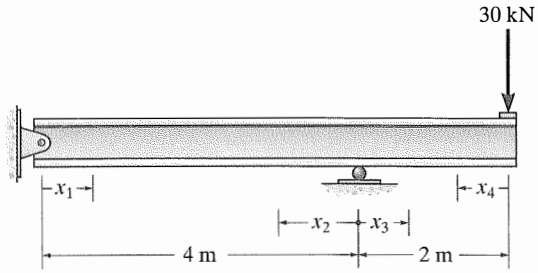
Problema 14.5

14.6. Determine a energia de deformação por flexão na viga. EI é constante.



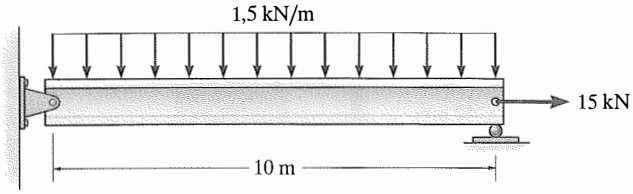
Problema 14.6

14.7. Determine a energia de deformação por flexão na viga de perfil W250 × 18 de aço estrutural A-36. Obtenha a resposta usando as coordenadas (a) x_1 e x_4, e (b) x_2 e x_3.



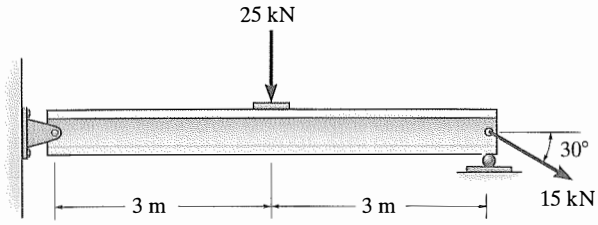
Problema 14.7

*14.8. Determine a energia de deformação total axial e por flexão na viga de aço A-36. $A = 2.300\ mm^2$, $I = 9{,}5(10^6)\ mm^4$.



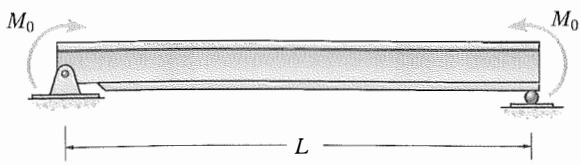
Problema 14.8

14.9. Determine a energia de deformação total axial e por flexão na viga de perfil W200 × 86 de aço estrutural A-36.



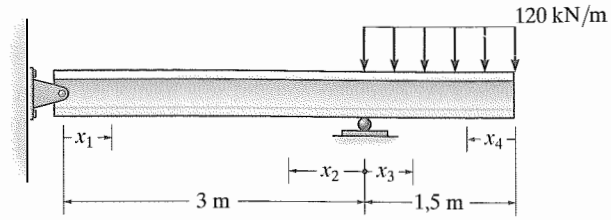
Problema 14.9

14.10. Determine a energia de deformação por flexão na viga. EI é constante.



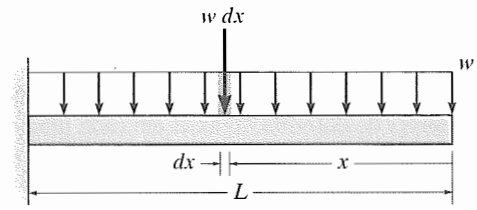
Problema 14.10

14.11. Determine a energia de deformação por flexão na viga de aço A-36 decorrente da carga mostrada. Obtenha a resposta usando as coordenadas (a) x_1 e x_4, e (b) x_2 e x_3. $I = 21(10^6)\ mm^4$.



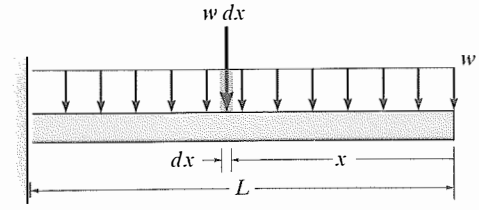
Problema 14.11

*14.12. Determine a energia de deformação por flexão na viga em balanço decorrente de uma carga uniforme w. Resolva o problema de dois modos. (a) Aplique a Equação 14.17. (b) A carga $w\,dx$ que age sobre um segmento dx da viga é deslocada à distância y, onde $y = w(-x^4 + 4L^3x - 3L^4)/(24EI)$, a equação da linha elástica. Por consequência, a energia de deformação interna no segmento diferencial dx da viga é igual ao trabalho externo, isto é, $dU_i = \frac{1}{2}(w\,dx)(-y)$. Integre essa equação para obter a energia de deformação total na viga. EI é constante.



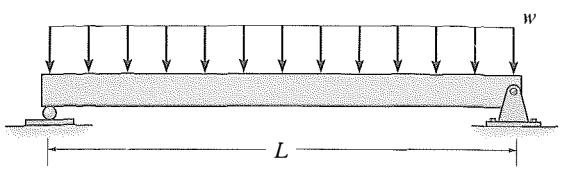
Problema 14.12

14.13. Determine a energia de deformação por flexão na viga simplesmente apoiada decorrente de uma carga uniforme w. Resolva o problema de dois modos. (a) Aplique a Equação 14.17. (b) A carga $w\,dx$ que age sobre o segmento dx da viga é deslocada à distância y, onde $y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x^2)$, a equação da linha elástica. Por consequência, a energia de deformação interna no segmento diferencial dx da viga é igual ao trabalho externo, isto é, $dU_i = \frac{1}{12}(w\,dx)(-y)$. Integre essa equação para obter a energia de deformação total na viga. EI é constante.



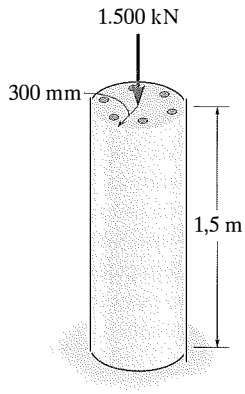
Problema 14.13

14.14. Determine a energia de deformação por cisalhamento na viga. A viga tem seção transversal retangular de área A, e o módulo de cisalhamento é G.



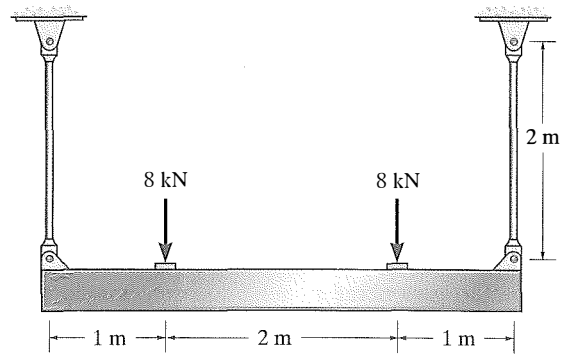
Problema 14.14

14.15. A coluna de concreto contém seis hastes de reforço feitas de aço, com 25 mm de diâmetro. Se ela suporta uma carga de 1.500 kN, determine a energia de deformação na coluna. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_c = 25$ GPa.



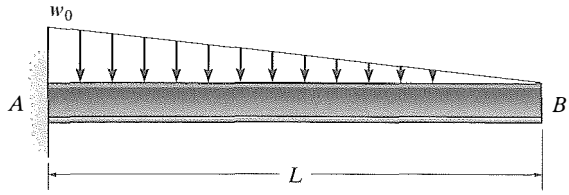
Problema 14.15

*__14.16.__ Determine a energia de deformação por flexão na viga e a energia de deformação axial em cada uma das duas hastes. A viga é feita de alumínio 2014-T6 e tem seção transversal quadrada de 50 mm por 50 mm. As hastes são feitas de aço A-36 e têm seção transversal circular com 20 mm diâmetro.



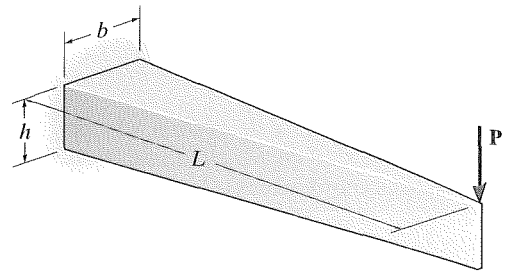
Problema 14.16

14.17. Determine a energia de deformação por flexão na viga, decorrente da carga distribuída. *EI* é constante.



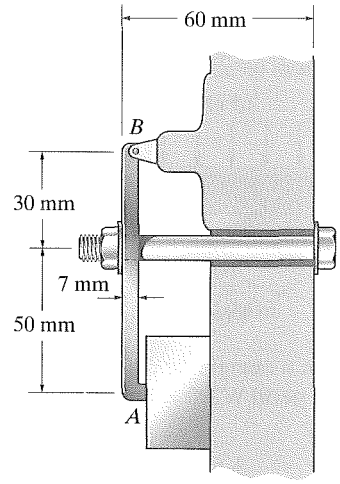
Problema 14.17

14.18. A viga mostrada na figura é cônica ao longo de sua largura. Se uma força **P** for aplicada a sua extremidade, determine a energia de deformação na viga e compare esse resultado com o de uma viga que tenha uma seção transversal retangular constante de largura b e altura h.



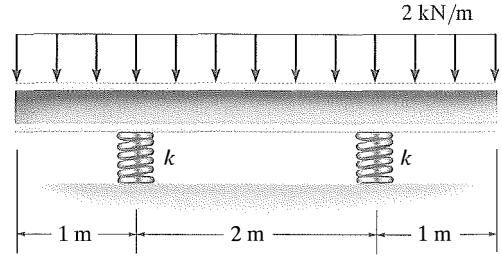
Problema 14.18

14.19. O parafuso tem diâmetro de 10 mm e o elo AB tem seção transversal retangular de 12 mm de largura por 7 mm de espessura. Determine a energia de deformação no elo decorrente de flexão e no parafuso decorrente de força axial. O parafuso é apertado de modo que tenha tração de 500 N. Ambos os elementos estruturais são feitos de aço A-36. Despreze o furo no elo.



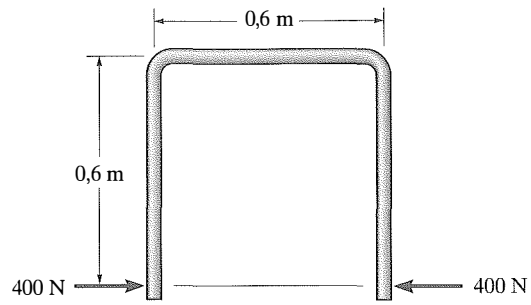
Problema 14.19

*__14.20.__ A viga de aço está apoiada sobre duas molas, cada uma com rigidez $k = 8$ MN/m. Determine a energia de deformação em cada uma das molas e a energia de deformação por flexão na viga. $E_{aço} = 200$ GPa, $I = 5(10^6)\text{mm}^4$.



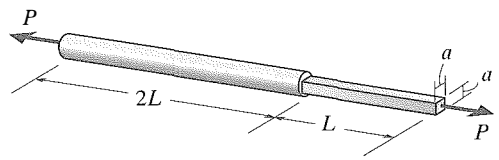
Problema 14.20

14.21. Determine a energia de deformação por flexão na haste de aço A-36 com 50 mm de diâmetro decorrente da carga mostrada.



Problema 14.21

14.22. A barra de aço A-36 é composta por dois segmentos, um com seção transversal circular de raio r e outro com seção transversal quadrada. Se for submetida à carga axial P, determine as dimensões a do segmento quadrado, de modo que a energia de deformação dentro desse segmento seja a mesma que no segmento circular.



Problema 14.22

14.23. Considere o tubo de parede fina da Figura 5.30. Use a fórmula para tensão de cisalhamento, $\tau_{méd} = T/2tA_m$ (Equação 5.18), e a equação geral da energia de deformação por cisalhamento (Equação 14.11), para mostrar que a torção do tubo é dada pela Equação 5.20. *Dica*: iguale o trabalho realizado pelo torque T à energia de deformação no tubo, determinada pela integração da energia de deformação para um elemento diferencial (Figura 14.4), sobre o volume de material.

14.3 Conservação de energia

Todos os métodos de energia usados em mecânica baseiam-se em um equilíbrio de energia, muitas vezes denominado conservação de energia. Neste capítulo, somente a energia mecânica será considerada no equilíbrio de energia; isto é, aquela desenvolvida por calor, reações químicas e efeitos eletromagnéticos será desprezada. Como resultado, se uma carga for aplicada *lentamente* a um corpo, de modo que a energia cinética também possa ser desprezada, as cargas externas tendem a deformar o corpo fisicamente, de modo que as cargas realizam *trabalho externo* U_e à medida que são deslocadas. Esse trabalho externo provocado pelas cargas transforma-se em *trabalho interno* ou energia de deformação U_i, que é armazenada no corpo. Além do mais, quando se removem as cargas, a energia de deformação restitui o corpo à posição original não deformada, desde que o limite de elasticidade do material não seja ultrapassado. Portanto, a conservação de energia para o corpo pode ser expressa matematicamente como

$$U_e = U_i \tag{14.25}$$

Mostraremos agora três exemplos de como essa equação pode ser aplicada para determinar o deslocamento de um ponto sobre um elemento estrutural ou estrutura deformável. Como primeiro exemplo, considere a treliça na Figura 14.18 sujeita à carga conhecida $\mathbb{P}$. Contanto que $\mathbb{P}$ seja aplicada de modo gradual, o trabalho externo realizado por $\mathbb{P}$ é determinado pela Equação 14.2, isto é, $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$, onde Δ representa o deslocamento vertical da treliça na articulação onde se aplica $\mathbb{P}$. Considerando que $\mathbb{P}$ desenvolve uma força axial $\mathbb{N}$ em um determinado elemento estrutural, a energia de deformação armazenada nesse elemento é determinada pela Equação 14.16, isto é, $U_i = N^2L/2AE$. Somando as energias de deformação para todos os elementos da treliça, podemos escrever a Equação 14.25 como

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE} \tag{14.26}$$

Uma vez determinadas as força internas (N) em todos os elementos da treliça e calculados os termos à direita, é possível determinar o deslocamento desconhecido Δ.

Como segundo exemplo, considere determinar o deslocamento vertical Δ sob a carga conhecida $\mathbb{P}$ que age sobre a viga na Figura 14.19. Novamente, o trabalho externo é $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$. Contudo, nesse caso, a energia

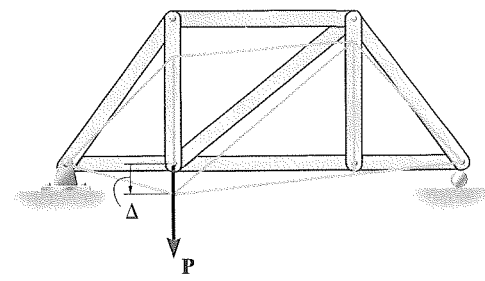


Figura 14.18

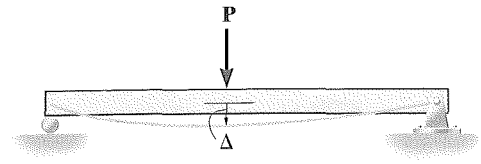


Figura 14.19

de deformação seria o resultado das cargas do cisalhamento e momentos internos provocados por $\mathbb{P}$. Em particular, a contribuição da energia de deformação decorrente do cisalhamento é *desprezada* na maioria dos problemas de deflexão em vigas, a menos que a viga seja curta e suporte uma carga muito elevada. (Veja o Exemplo 14.4.) Por consequência, a energia de deformação da viga será determinada somente pelo momento fletor interno M e, portanto, pela Equação 14.17, pode-se escrever a Equação 14.25 de modo simbólico como

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \qquad (14.27)$$

Desde que M seja expresso em função da posição e que a integral seja calculada, pode-se determinar Δ.

Como último exemplo, consideraremos uma viga carregada por um momento $\mathbb{M}_0$, como mostrado na Figura 14.20. Esse momento provoca o deslocamento rotacional θ no ponto de sua aplicação. Visto que o momento só realiza trabalho quando *gira,* pela Equação 14.5, o trabalho externo é $U_e = \frac{1}{2}M_0\theta$. Portanto, a Equação 14.25 torna-se

$$\frac{1}{2}M_0\theta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \qquad (14.28)$$

Aqui a energia de deformação é determinada como resultado do momento fletor interno M provocado pela aplicação do momento $\mathbb{M}_0$. Uma vez que M tenha sido expresso em função de x e a energia de deformação calculada, pode-se calcular θ.

Em cada um desses exemplos, deve-se observar que a aplicação da Equação 14.25 é *bastante limitada,* porque somente uma *única* força interna ou momento interno deve agir sobre o elemento estrutural ou estrutura. Em outras palavras, o deslocamento *só* pode ser calculado no ponto e na direção da força externa ou do momento externo. Se mais de uma força externa ou momento externo fosse aplicado, o trabalho externo de cada carga envolveria seu deslocamento desconhecido associado. O resultado é que *todos* esses deslocamentos desconhecidos não poderiam ser determinados, visto que há somente uma Equação 14.25 disponível para a solução. Embora a aplicação da conservação de energia como descrita aqui tenha essas restrições, ela serve como introdução aos métodos de energia mais gerais, que consideraremos no restante deste capítulo.

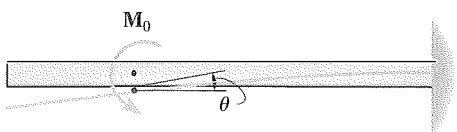


Figura 14.20

Nas seções posteriores, mostraremos especificamente que, modificando o método de aplicação do princípio de conservação de energia, poderemos realizar uma análise completamente geral da deflexão de um elemento estrutural ou estrutura.

EXEMPLO 14.6

A treliça de três barras na Figura 14.21a está sujeita a uma força horizontal de 20 kN. Se a área da seção transversal de cada elemento estrutural for 100 mm², determine o deslocamento horizontal no ponto B. $E = 200$ GPa.

SOLUÇÃO

Podemos aplicar a conservação de energia para resolver esse problema porque somente uma *única* força externa age sobre a treliça e o deslocamento exigido está na mesma direção da força. Além disso, as forças de reação na treliça não realizam nenhum trabalho, visto que elas não são deslocadas.

Usando o método dos nós, a força em cada elemento é determinada como mostram os diagramas de corpo livre dos pinos em B e C (Figura 14.21b).

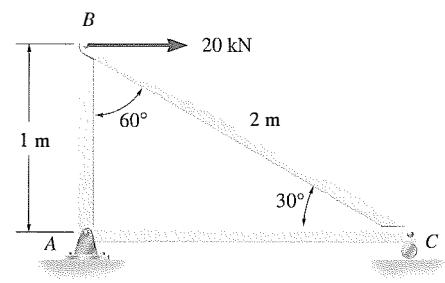
Aplicando a Equação 14.26, temos

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE}$$

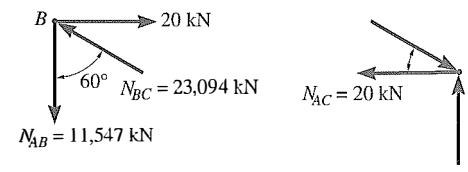
$$\frac{1}{2}(20 \times 10^3\ \text{N})(\Delta_B)_h = \frac{(11{,}547 \times 10^3)^2(1\ \text{m})}{2AE}$$

$$+ \frac{(-23{,}094 \times 10^3\ \text{N})^2(2\ \text{m})}{2AE} + \frac{[-20(10^3)\ \text{N}]^2(1{,}732\ \text{m})}{2AE}$$

$$(\Delta_B)_h = \frac{94.640{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}}{AE}$$



(a)



(b)

Figura 14.21

Observe que, como N é elevada ao quadrado, não importa se um determinado elemento estrutural está sob tração ou compressão. Substituindo A e E pelos dados numéricos respectivos, obtemos

$$(\Delta_B)_h = \frac{94.640{,}0\ \text{N}\cdot\text{m}}{(100\text{mm}^2)(1\ \text{m}/1.000\ \text{mm})^2 200(10^9)\ \text{N/m}^2}$$
$$= 4{,}73 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4{,}73\ \text{mm} \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 14.7

A viga em balanço na Figura 14.22a tem seção transversal retangular e está sujeita a uma carga $\mathbf{P}$ em sua extremidade. Determine o deslocamento da carga. EI é constante.

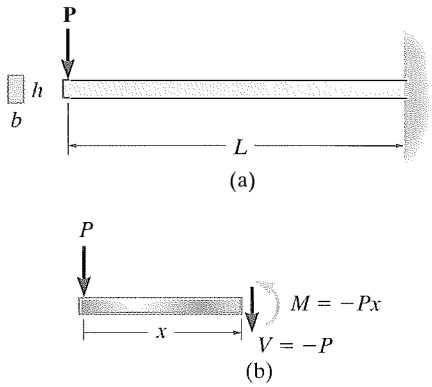


Figura 14.22

SOLUÇÃO

O cisalhamento interno e o momento interno na viga em função de x são determinados pelo método das seções (Figura 14.22b).

Quando da aplicação da Equação 14.25, consideraremos a energia de deformação decorrente de cisalhamento e flexão. Usando as equações 14.19 e 14.17, temos

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{f_s V^2\,dx}{2GA} + \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$= \int_0^L \frac{\left(\frac{6}{5}\right)(-P)^2\,dx}{2GA} + \int_0^L \frac{(-Px)^2\,dx}{2EI} = \frac{3P^2L}{5GA} + \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad (1)$$

O primeiro termo no lado direito dessa equação representa a energia de deformação decorrente do cisalhamento, enquanto o segundo é a energia de deformação decorrente da flexão. Como afirmamos no Exemplo 14.4, para a maioria das vigas, a energia de deformação por cisalhamento é muito menor do que a energia de deformação por flexão. Para mostrar quando isso ocorre para a viga na Figura 14.22a, exige-se que

$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{GA} \ll \frac{P^2L^3}{6EI}$$
$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{G(bh)} \ll \frac{P^2L^3}{6E\left[\frac{1}{12}(bh^3)\right]}$$
$$\frac{3}{5G} \ll \frac{2L^2}{Eh^2}$$

Como $E \leq 3G$ (veja o Exemplo 14.4),

$$0{,}9 \ll \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

Por consequência, se h for pequena e L relativamente longo (em comparação com h), a viga torna-se esbelta e a energia de deformação por cisalhamento pode ser desprezada. Em outras palavras, a *energia de deformação por cisalhamento* torna-se importante *somente* para vigas *curtas* e *largas*. Por exemplo, vigas para as quais $L = 5h$ têm 28 vezes mais energia de deformação por flexão do que energia de deformação por cisalhamento, portanto desprezar a energia de deformação por cisalhamento representa um erro de aproximadamente 3,6%. Com isso em mente, a Equação 1 pode ser simplificada para

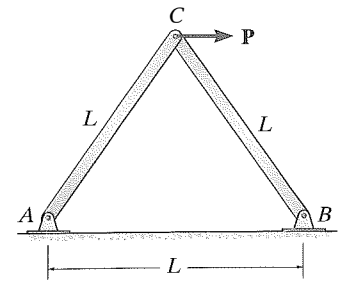
$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

De modo que

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \textit{Resposta}$$

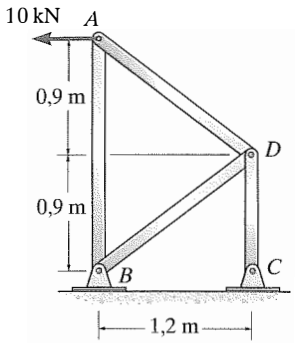
PROBLEMAS

*14.24. Determine o deslocamento horizontal da articulação C. AE é constante.



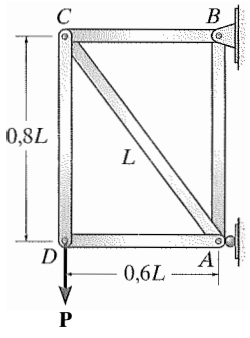
Problema 14.24

14.25. Determine o deslocamento horizontal da articulação A. Cada barra é feita de aço A-36 e tem área de seção transversal de 950 mm².



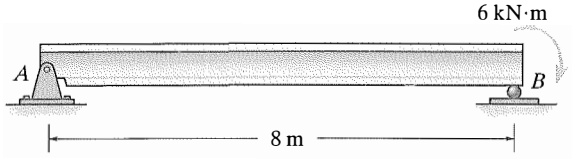
Problema 14.25

14.26. Determine o deslocamento vertical da articulação *D*. *AE* é constante.



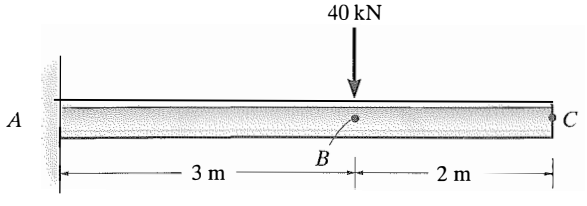
Problema 14.26

14.27. Determine a inclinação na extremidade *B* da viga de aço A-36. $I = 80(10^6)\text{mm}^4$.



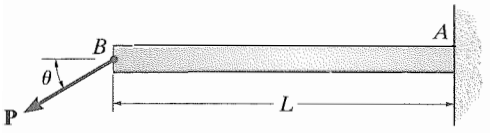
Problema 14.27

*__14.28.__ Determine o deslocamento do ponto *B* na viga de aço A-36. $I = 97{,}7(10^6)\text{ mm}^4$.



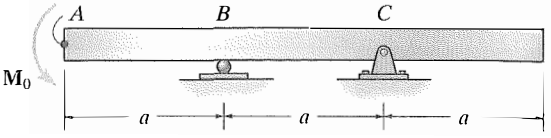
Problema 14.28

14.29. A viga em balanço tem área de seção transversal retangular *A*, momento de inércia *I* e módulo de elasticidade *E*. Se uma carga **P** agir no ponto *B* como mostra a figura, determine o deslocamento em *B* na direção de **P**, levando em conta flexão, força axial e cisalhamento.



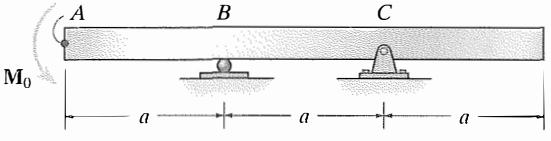
Problema 14.29

14.30. Use o método do trabalho e energia e determine a inclinação da viga no ponto *B*. *EI* é constante.



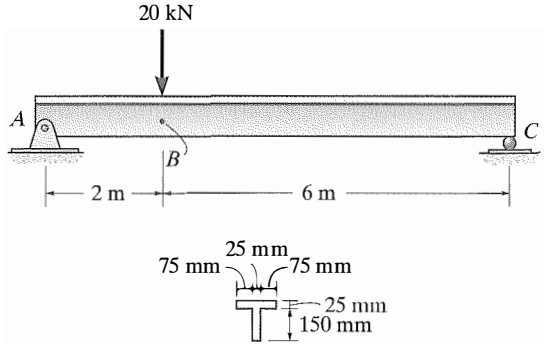
Problema 14.30

14.31. Determine a inclinação no ponto *A* da viga. *EI* é constante.



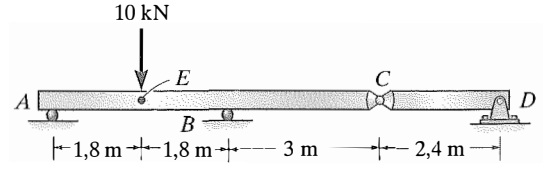
Problema 14.31

*__14.32.__ Determine o deslocamento do ponto *B* na viga de alumínio 2014-T6.



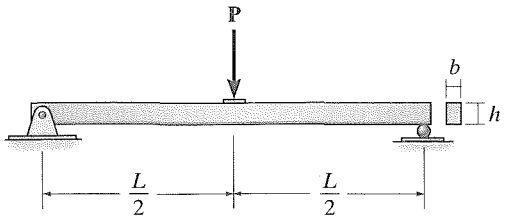
Problema 14.32

14.33. As barras de aço A-36 estão acopladas por pinos em *C*. Se cada uma delas tiver diâmetro de 50 mm, determine o deslocamento em *E*.



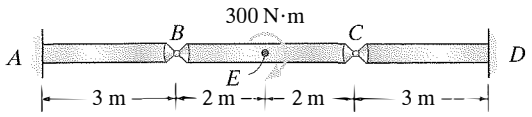
Problema 14.33

14.34. Determine a deflexão no centro da viga, provocada por cisalhamento. O módulo de cisalhamento é *G*.



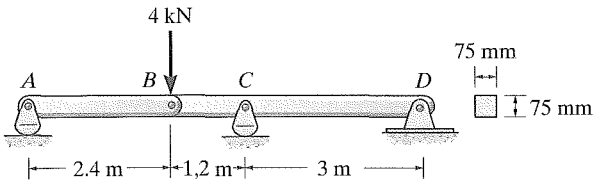
Problema 14.34

14.35. As barras de aço A-36 estão acopladas por pinos em *B* e *C*. Se cada uma delas tiver diâmetro de 30 mm, determine a inclinação em *E*.



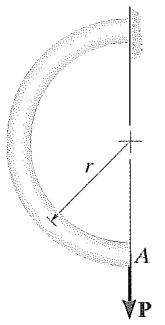
Problema 14.35

14.36. As barras de aço A-36 estão acopladas por pinos em *B*. Se cada uma delas tiver seção transversal quadrada, determine o deslocamento vertical em *B*.



Problema 14.36

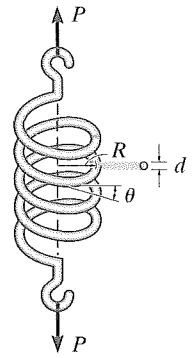
14.37. A haste tem seção transversal circular com momento de inércia *I*. Se uma força vertical **P** for aplicada em *A*, determine o deslocamento vertical nesse ponto. Considere somente a energia de deformação decorrente da flexão. O módulo de elasticidade é *E*.



Problema 14.37

14.38. A carga **P** provoca uma inclinação nas espiras da mola equivalente a um ângulo θ com a horizontal, quando a mola é esticada. Mostre que, para essa posição, ocorre um torque $T = PR \cos \theta$ e momento fletor $M = PR \operatorname{sen} \theta$ na seção transversal. Use esses resultados para determinar a tensão normal máxima no material.

14.39. A mola em espiral tem *n* espiras e constitui-se de um material cujo módulo de cisalhamento é *G*. Determine o quanto a mola é esticada quando submetida à carga **P**. Considere que as espiras estão perto uma da outra de modo que $\theta \approx 0°$ e que a deflexão é provocada inteiramente pela tensão de torção na espira.



Problemas 14.38/39

14.4 Carga de impacto

Em todo o texto, consideramos que todas as cargas são aplicadas a um corpo de um modo gradual tal que, quando elas atingem um valor máximo, permanecem constantes ou estáticas. Entretanto, algumas cargas são dinâmicas; isto é, variam com o tempo. Um exemplo comum é a carga provocada pela colisão de objetos, denominada carga de impacto. Especificamente, ocorre ***impacto*** quando um objeto atinge outro de modo tal que forças de grande intensidade são desenvolvidas entre eles durante um período muito curto.

Se considerarmos que não há perda de energia durante o impacto, podemos estudar a mecânica do impacto usando a conservação de energia. Para mostrar como isso se dá, em primeiro lugar analisaremos o movimento de um sistema simples de bloco e mola, como mostra a Figura 14.23. Quando o bloco é solto de sua posição de repouso, cai uma distância *h*, atinge a mola e comprime-a uma distância $\Delta_{máx}$ antes de retornar momentaneamente à posição de repouso. Se desprezarmos a massa da mola e considerarmos que ela responde *elasticamente,* a conservação de energia exigirá

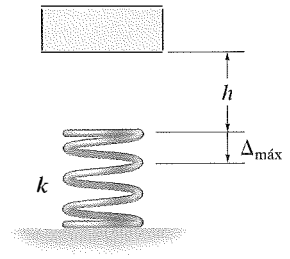


Figura 14.23

que a energia do bloco que cai seja transformada em energia (de deformação) armazenada na mola; ou, em outras palavras, o trabalho realizado pelo peso do bloco que cai $h + \Delta_{máx}$ é igual ao trabalho necessário para deslocar a extremidade da mola por uma quantidade $\Delta_{máx}$. Como a força em uma mola está relacionada com $\Delta_{máx}$ pela equação $F = k\Delta_{máx}$, onde k é a rigidez da mola, aplicando a conservação de energia e a Equação 14.2, temos

$$U_e = U_i$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}(k\Delta_{máx})\,\Delta_{máx}$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}k\Delta_{máx}^2$$

$$\Delta_{máx}^2 - \frac{2W}{k}\Delta_{máx} - 2\left(\frac{W}{k}\right)h = 0 \qquad (14.29)$$

Essa equação quadrática pode ser resolvida para $\Delta_{máx}$. A raiz máxima é

$$\Delta_{máx} = \frac{W}{k} + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{W}{k}\right)h}$$

Se o peso W for aplicado de modo estático (ou gradual) à mola, o deslocamento na extremidade da mola é $\Delta_{est} = W/k$. Usando essa simplificação, a equação acima torna-se

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est} + \sqrt{(\Delta_{est})^2 + 2\Delta_{est}h}$$

ou

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right] \qquad (14.30)$$

Uma vez calculado $\Delta_{máx}$, a força máxima aplicada à mola pode ser determinada por

$$F_{máx} = k\Delta_{máx} \qquad (14.31)$$

Todavia, é preciso entender que essa força e o deslocamento associado ocorrem somente em um *instante*. Desde que o bloco não rebata na mola, ele continuará a vibrar até que o movimento amorteça e cesse, e o bloco repouse em sua posição estática, Δ_{est}. Observe também que, se bloco estiver suspenso um pouco acima da mola, $h = 0$, e for *solto,* pela Equação 14.30, o deslocamento máximo do bloco é

$$\Delta_{máx} = 2\Delta_{est}$$

Em outras palavras, quando o bloco for solto da posição próxima ao topo da mola (carga aplicada dinamicamente), o deslocamento é *duas vezes* o que seria, se estivesse apoiado sobre a mola (carga aplicada estaticamente).

Usando uma análise semelhante, também será possível determinar o deslocamento máximo da extremidade da mola, se o bloco estiver deslizando sobre uma superfície horizontal lisa a uma velocidade conhecida v imediatamente antes de colidir com a mola (Figura 14.24). Aqui a energia cinética do bloco,* $\frac{1}{2}(W/g)v^2$, é transformada em energia armazenada na mola. Por consequência,

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2 = \frac{1}{2}k\Delta_{máx}^2$$

$$\Delta_{máx} = \sqrt{\frac{Wv^2}{gk}} \qquad (14.32)$$

Visto que o deslocamento estático no topo da mola provocado pelo peso W que repousa sobre ela é $\Delta_{est} = W/k$,

$$\Delta_{máx} = \sqrt{\frac{\Delta_{est}v^2}{g}} \qquad (14.33)$$

Os resultados dessa análise simplificada podem ser usados para determinar a deflexão aproximada, bem como a tensão desenvolvida em um elemento estrutural deformável quando submetido a impacto. Para tal, devemos adotar algumas premissas necessárias em relação à colisão, de modo que o comportamento de corpos em colisão seja semelhante à resposta dos modelos de bloco e mola que discutimos acima. Por consequência, consideramos que o corpo em movimento é *rígido* como o bloco, e o corpo estacionário é deformável como a mola. Consideramos também que o material comporta-se de maneira linear elástica. Além do mais, durante a colisão nenhuma energia é perdida sob a forma de calor, som ou deformações plásticas localizadas. Quando ocorre colisão, os corpos permanecem em contato até que o corpo elástico atinja sua deformação

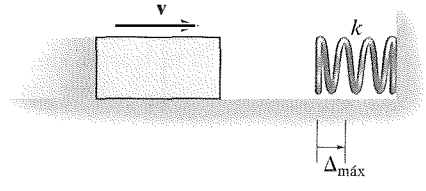


Figura 14.24

* Lembre-se de que, na física, a energia cinética é 'energia de movimento'. Na translação de um corpo, ela é determinada por $\frac{1}{2}mv^2$, onde m é a massa do corpo, $m = W/g$.

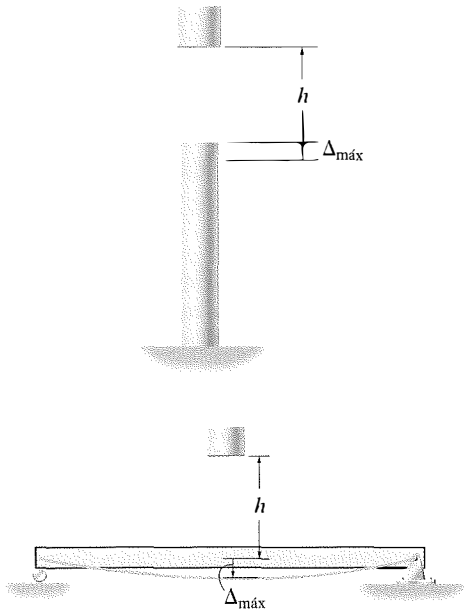


Figura 14.25

máxima, e, durante o movimento, a inércia ou massa do corpo elástico é desprezada. Entenda que cada uma dessas premissas levará a uma estimativa *conservadora* da tensão, bem como da deflexão do corpo elástico. Em outras palavras, seus valores serão maiores do que os que realmente ocorrem.

Alguns exemplos da aplicabilidade dessa teoria são mostrados na Figura 14.25. Aqui, um peso conhecido (bloco) é solto sobre um poste ou viga, provocando uma quantidade máxima de deformação $\Delta_{máx}$. A energia do bloco em queda transforma-se momentaneamente em energia de deformação axial no poste e em energia de deformação por flexão na viga.* Embora surjam vibrações em cada elemento estrutural após o impacto, elas tenderão a se dissipar com o passar do tempo. Para determinar a deformação $\Delta_{máx}$, poderíamos usar a mesma abordagem do sistema bloco e mola, que é escrever a equação de conservação de energia para bloco e poste ou bloco e viga, e a seguir resolver para $\Delta_{máx}$. Contudo, também podemos resolver esses problemas de maneira mais direta modelando o poste e a viga por uma *mola equivalente*. Por exemplo, se uma força $\mathbb{P}$ deslocar o topo do poste por $\Delta = PL/AE$, uma mola que tenha rigidez $k = AE/L$ seria deslocada pela mesma quantidade por $\mathbb{P}$, isto é, $\Delta = P/k$. De modo semelhante, pelo Apêndice C, uma força $\mathbb{P}$ aplicada ao centro de uma viga simplesmente apoiada desloca o centro $\Delta = PL^3/48EI$ e, portanto, uma mola equivalente teria rigidez $k = 48EI/L^3$. Entretanto, na realidade não é necessário determinar a rigidez da mola equivalente para aplicar a Equação 14.30 ou a Equação 14.32. Para determinar o deslocamento dinâmico, $\Delta_{máx}$, basta calcular o *deslocamento estático*, Δ_{est}, provocado pelo peso W do bloco que repousa sobre o elemento estrutural.

Uma vez determinado $\Delta_{máx}$, a força dinâmica máxima pode ser calculada por $P_{máx} = k\Delta_{máx}$. Se considerarmos que $P_{máx}$ é uma *carga estática equivalente,* a tensão máxima no elemento estrutural pode ser determinada usando-se estática e a teoria da mecânica dos materiais. Lembre-se de que essa tensão age somente por *um instante.* Na realidade, ondas vibracionais passam pelo material e a tensão no poste ou viga, por exemplo, não permanece constante.

A razão entre a carga estática equivalente $P_{máx}$ e a carga W é denominada *fator de impacto*, n. Visto que $P_{máx} = k\Delta_{máx}$ e $W = k\Delta_{est}$, pela Equação 14.30, podemos expressá-lo como

$$n = 1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)} \tag{14.34}$$

Esse fator representa a ampliação de uma carga estaticamente aplicada, de modo que ela possa ser tratada dinamicamente. Usando a Equação 14.34, n pode ser calculado para qualquer elemento estrutural que tenha uma relação linear entre carga e deflexão. Contudo, para um sistema complicado de elementos estruturais acoplados, os fatores de impacto são determinados pela experiência ou por testes experimentais. Uma vez determinado n, as tensão e deflexões dinâmicas são facilmente encontradas pela tensão estática σ_{est} e deflexão estática Δ_{est} provocadas pela carga W, isto é, $\sigma_{máx} = n\sigma_{est}$ e $\Delta_{máx} = n\Delta_{est}$.

PONTOS IMPORTANTES

- Ocorre *impacto* quando uma força de grande intensidade é desenvolvida entre dois objetos que atingem um ao outro durante um curto período.
- Podemos analisar os efeitos do impacto considerando que o corpo em movimento é rígido, o material do corpo estacionário é linear elástico, nenhuma energia é perdida na colisão, os corpos permanecem em contato durante a colisão e a inércia do corpo elástico é desprezada.
- As cargas dinâmicas sobre um corpo podem ser tratadas como uma carga aplicada estaticamente, multiplicando-se a carga estática por um *fator de impacto*.

* A energia de deformação decorrente de cisalhamento é desprezada pelas razões discutidas no Exemplo 14.4.

EXEMPLO 14.8

O tubo de alumínio mostrado na Figura 14.26 é usado para suportar uma carga de 600 kN. Determine o deslocamento máximo no topo do tubo, se a carga for (a) aplicada gradualmente e (b) aplicada repentinamente soltando-a do topo do tubo $h = 0$. Adote $E_{al} = 70(10^3)\text{N/mm}^2$ e considere que o alumínio comporta-se elasticamente.

SOLUÇÃO

Parte (a). Quando a carga é aplicada gradualmente, o trabalho realizado pelo o peso é transformado em energia de deformação elástica no tubo. Aplicando a conservação de energia, temos

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}W\Delta_{est} = \frac{W^2L}{2AE}$$

$$\Delta_{est} = \frac{WL}{AE} = \frac{600\text{ kN}(240\text{ mm})}{\pi[(60\text{ mm})^2 - (50\text{ mm})^2]70\text{ kN/mm}^2}$$

$$= 0{,}5953\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Parte (b). Aqui a Equação 14.30 pode ser aplicada, com $h = 0$. Logo,

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right]$$

$$= 2\Delta_{est} = 2(0{,}5953\text{ mm})$$

$$= 1{,}1906\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Por consequência, o deslocamento do peso é duas vezes maior do que quando se aplica a carga de forma estática. Em outras palavras, o fator de impacto é $n = 2$ (Equação 14.34).

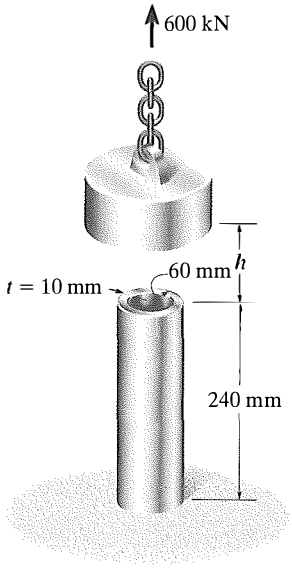


Figura 14.26

EXEMPLO 14.9

A viga de aço A-36 mostrada na Figura 14.27a é um perfil W250 × 58. Determine a tensão de flexão máxima na viga e sua deflexão máxima, se o peso $W = 6.000$ N for solto de uma altura $h = 50$ mm sobre a viga. $E_{aço} = 210(10^3)\text{N/mm}^2$.

SOLUÇÃO I

Aplicaremos a Equação 14.30. Entretanto, primeiro temos de calcular Δ_{est}. Usando a tabela no Apêndice C e os dados no Apêndice B para as propriedades de um perfil W250 × 58, temos

$$\Delta_{est} = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{(6.000\text{ N})[5\text{ m}(1.000\text{ mm/m}^3)}{48[210(10^3)\text{ N/mm}^2]87{,}3(10^6)\text{ mm}^2}$$

$$= 0{,}8523\text{ mm}$$

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{est}}\right)}\right]$$

$$= 0{,}8523\text{ mm}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{50\text{ mm}}{0{,}8523\text{ mm}}\right)}\right] = 10{,}124\text{ mm}$$

Resposta

Essa deflexão é provocada por uma carga estática equivalente $P_{máx}$ determinada por $P_{máx} = (48EI/L^3)\Delta_{máx}$.

O momento interno provocado por essa carga é máximo no centro da viga, de modo que, pelo método das seções (Figura 14.27b), $M_{máx} = P_{máx}L/4$. Aplicando a fórmula da flexão para determinar a tensão de flexão, temos

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}c}{I} = \frac{P_{máx}Lc}{4I} = \frac{12E\Delta_{máx}c}{L^2}$$

$$= \frac{12[210(10^3)\text{ N/mm}^2](10{,}124\text{ mm})(252\text{ mm}/2)}{[(5\text{ m})(1.000\text{ mm/m})]^2} = 128{,}58\text{ N/mm}^2$$

Resposta

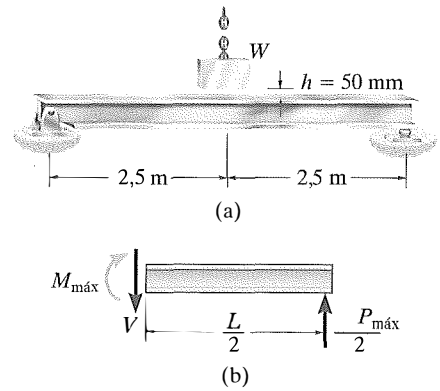


Figura 14.27

SOLUÇÃO II

Também é possível obter a deflexão dinâmica ou máxima $\Delta_{máx}$ pelos princípios fundamentais. O trabalho externo do peso em queda W é $U_e = W(h + \Delta_{máx})$. Visto que a viga sofre deflexão $\Delta_{máx}$, e $P_{máx} = 48EI\Delta_{máx}/L^3$, então

$$U_e = U_i$$

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}\left(\frac{48EI\Delta_{máx}}{L^3}\right)\Delta_{máx}$$

$$(6.000\text{N})(50\text{ mm} + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}\left[\frac{48[210(10^3)\text{ N/mm}^2](87{,}3 \times 10^6\text{ mm}^4)}{(5\text{ m})(1.000\text{ mm/m})^3}\right]\Delta_{máx}^2$$

$$3.519{,}94\Delta_{máx}^2 - 6.000\Delta_{máx} - 300.000 = 0$$

Resolvendo e escolhendo a raiz positiva, temos

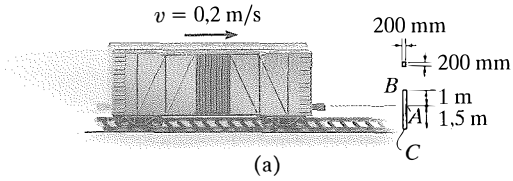
$$\Delta_{máx} = 10{,}12\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 14.10

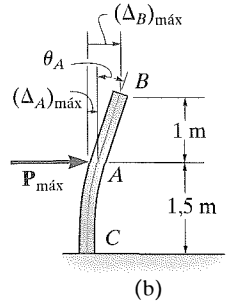
Um vagão ferroviário considerado rígido tem massa de 80 Mg e move-se para diante a uma velocidade $v = 0{,}2$ m/s, quando atinge um poste de aço de 200 mm por 200 mm em A (Figura 14.28a). Se o poste estiver fixo ao solo em C, determine o deslocamento horizontal máximo de seu topo B devido ao impacto. Considere $E_{aço} = 200$ GPa.

SOLUÇÃO

Aqui a energia cinética do vagão ferroviário é transformada em energia de deformação por flexão interna somente para a região AC do poste. Considerando que o ponto A é deslocado $(\Delta_A)_{máx}$, a força $P_{máx}$ que provoca esse deslocamento pode ser determinada pela Tabela no Apêndice C. Temos



(a)



(b)

Figura 14.28

$$P_{máx} = \frac{3EI(\Delta_A)_{máx}}{L_{AC}^3} \qquad (1)$$

$$U_e = U_i; \qquad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P_{máx}(\Delta_A)_{máx}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{3EI}{L_{AC}^3}(\Delta_A)_{máx}^2; \quad (\Delta_A)_{máx} = \sqrt{\frac{mv^2L_{AC}^3}{3EI}}$$

Substituindo os dados numéricos na equação, temos

$$(\Delta_A)_{máx} = \sqrt{\frac{80(10^3)\text{ kg}(0{,}2\text{ m/s})^2(1{,}5\text{ m})^3}{3[200(10^9)\text{ N/m}^2]\left[\frac{1}{12}(0{,}2\text{ m})^4\right]}}$$

$$= 0{,}0116\text{ m} = 11.6$$

Usando a Equação 1, a força $P_{máx}$ é, portanto,

$$P_{máx} = \frac{3[200(10^9)\text{ N/m}^2]\left[\frac{1}{12}(0{,}2\text{ m})^4\right](0{,}0116\text{ m})}{(1{,}5\text{ m})^3} = 275{,}4\text{ kN}$$

Com referência à Figura 14.28b, o segmento AB do poste permanece reto. Para determinar o deslocamento máximo em B, em primeiro lugar temos de determinar a inclinação em A. Usando a fórmula adequada da tabela no Apêndice C para determinar θA, temos

$$\theta_A = \frac{P_{máx}L_{AC}^2}{2EI} = \frac{275{,}4(10^3)\text{ N}(1{,}5\text{ m})^2}{2[200(10^9)\text{ N/m}^2]\left[\frac{1}{12}(0{,}2\text{ m})^4\right]} = 0{,}01162\text{ rad}$$

Assim, o deslocamento máximo em B é

$$(\Delta_B)_{máx} = (\Delta_A)_{máx} + \theta_A L_{AB}$$
$$= 11{,}62\text{ mm} + (0{,}01162\text{ rad})\,1(10^3)\text{ mm} = 23{,}2\text{ mm}$$
Resposta

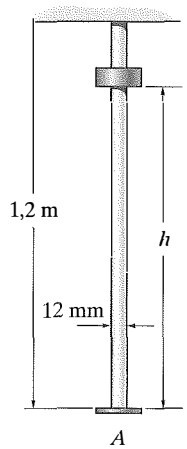
PROBLEMAS

*14.40. Uma barra tem 4 m de comprimento e 30 mm de diâmetro. Se for usada para absorver energia sob tração resultante de uma carga de impacto, determine a quantidade total de energia elástica que ela pode absorver (a) se for feita de aço para o qual $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 800$ MPa e (b) se for feita de uma liga de alumínio para a qual $E_{al} = 70$ GPa, $\sigma_e = 405$ MPa.

14.41. Determine o diâmetro de uma barra de latão de 2,4 m de comprimento, se ela tiver de ser usada para absorver 1.200 kN·m de energia sob tração resultante de uma carga de impacto. Considere $\sigma_e = 70$ MPa, $E = 100$ GPa.

14.42. O colar tem peso de 250 N ($\approx$ 25 kg) e cai ao longo da barra de titânio. Se o diâmetro da barra for 12 mm, determine a tensão máxima desenvolvida na barra, se o peso (a) cair de uma altura h = 300 mm, (b) for solto de uma altura $h \approx 0$ e (c) for colocado lentamente sobre a flange em A. E_{ti} = 120 GPa, σ_e = 420 MPa.

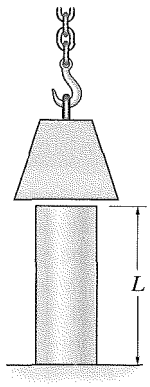
14.43. O colar tem um peso de 250 N ($\approx$ 25 kg) e cai ao longo da barra de titânio. Se o diâmetro for 12 mm, determine a maior altura h da qual o peso pode ser solto, sem causar dano permanente à barra após atingir a flange em A. E_{ti} = 120 GPa, σ_e = 420 MPa.



Problemas 14.42/43

*14.44. A massa de 50 Mg está suspensa logo acima do topo do poste de aço de comprimento L = 2 m e área de seção transversal de 0,01 m^2. Se a massa for solta, determine a tensão máxima desenvolvida na barra e sua deflexão máxima. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_e = 600 MPa.

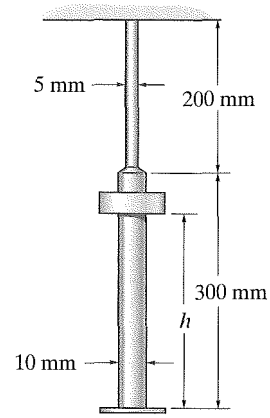
14.45. Determine a velocidade v da massa de 50 Mg quando está suspensa logo acima do topo do poste de aço se, após o impacto, a tensão máxima desenvolvida no poste for 550 MPa. O poste tem comprimento L = 1 m e área da seção transversal de 0,01 m^2. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_e = 600 MPa.



Problemas 14.44/45

14.46. A barra de alumínio é composta por dois segmentos com diâmetros de 5 mm e 10 mm. Determine a tensão axial máxima desenvolvida na barra, se o colar de 5 kg for solto de uma altura h = 100 mm. E_{al} = 70 GPa, σ_e = 410 MPa.

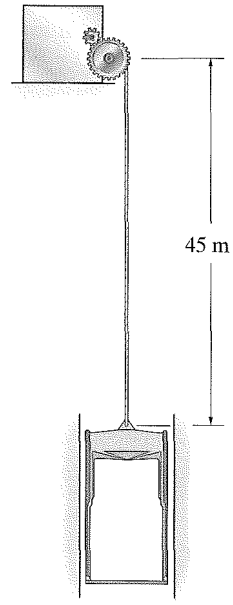
14.47. A barra de alumínio é composta por dois segmentos com diâmetros de 5 mm e 10 mm. Determine a altura máxima h da qual o colar de 5 kg deve ser solto de modo a produzir uma tensão axial máxima na barra $\sigma_{máx}$ = 300 MPa. E_{al} = 70 GPa, σ_e = 410 MPa.



Problemas 14.46/47

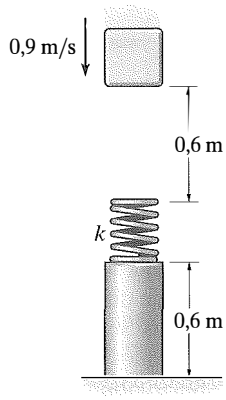
*14.48. Um cabo de aço com diâmetro de 10 mm está enrolado em um tambor e é usado para baixar um elevador que pesa 4 kN ($\approx$ 400 kg). O elevador está 45 m abaixo do tambor e desce a uma velocidade constante de 0,6 m/s quando o tambor para subitamente. Determine a tensão máxima desenvolvida no cabo quando isso ocorre. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_e = 350 MPa.

14.49. Resolva o Problema 14.48, se o elevador estiver descendo à velocidade constante de 0,9 m/s.



Problemas 14.48/49

14.50. O peso de 250 N ($\approx$ 25 kg) está caindo à velocidade de 0,9 m/s no instante em que se encontra 0,6 m acima do conjunto mola e poste. Determine a tensão máxima no poste, se a rigidez da mola for k = 40 MN/m. O poste tem diâmetro de 75 mm e módulo de elasticidade E = 48 GPa. Considere que o material não escoará.

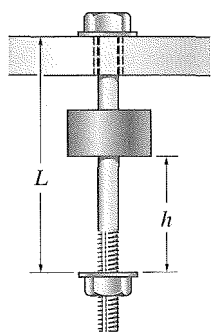


Problema 14.50

14.51. O parafuso de aço A-36 deve absorver a energia de uma massa de 2 kg que cai de uma altura $h = 30$ mm. Se o parafuso tiver diâmetro de 4 mm, determine o comprimento L exigido de modo que a tensão no parafuso não ultrapasse 150 MPa.

14.52. O parafuso de aço A-36 deve absorver a energia de uma massa de 2 kg que cai de uma altura $h = 30$ mm. Se o parafuso tiver diâmetro de 4 mm e comprimento $L = 200$ mm, verifique se a tensão no parafuso não ultrapassará 175 MPa.

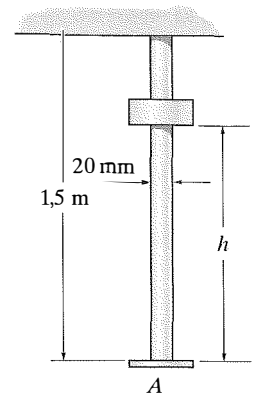
14.53. O parafuso de aço A-36 deve absorver a energia de uma massa de 2 kg que cai ao longo da haste de 4 mm de diâmetro e 150 mm de comprimento. Determine a altura máxima h da qual a massa pode ser solta de modo que a tensão no parafuso não ultrapasse 150 MPa.



Problemas 14.51/52/53

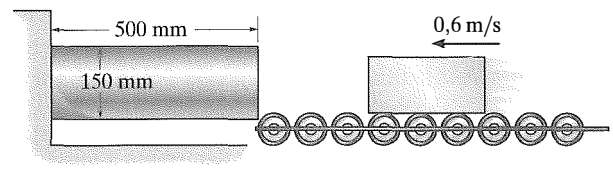
14.54. O colar tem massa de 5 kg e cai ao longo de uma barra de titânio Ti-6A1-4V. Se o diâmetro da barra for 20 mm, determine a tensão máxima desenvolvida na barra se o peso (a) cair de uma altura $h = 1$ m, (b) for solto de uma altura $h \approx 0$ e (c) for colocado lentamente sobre a flange em A.

14.55. O colar tem massa de 5 kg e cai ao longo de uma barra de titânio Ti-6A1-4V. Se o diâmetro da barra for 20 mm, determine se o peso poderá ser solto de uma posição de repouso em qualquer ponto ao longo da barra, sem causar dano permanente à barra após atingir a flange em A.



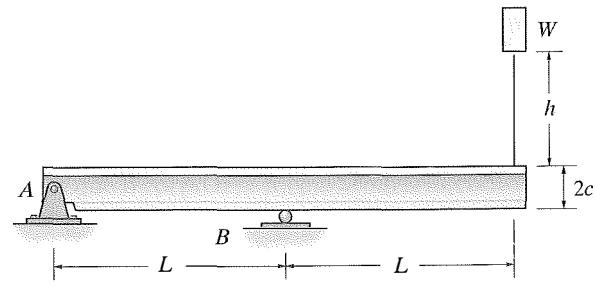
Problemas 14.54/55

14.56. Um cilindro com as dimensões mostradas na figura é feito de magnésio Am 1004-T61. Se for atingido por um bloco rígido com peso de 4 kN que está se movimentando a 0,6 m/s, determine a tensão máxima no cilindro. Despreze a massa do cilindro.



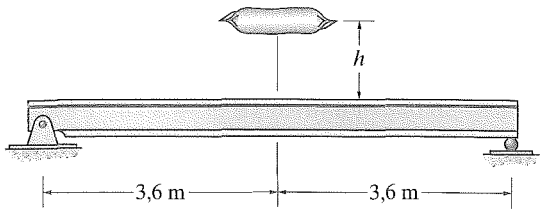
Problema 14.56

14.57. A viga de abas largas tem comprimento $2L$, altura $2c$ e EI constante. Determine a altura máxima h da qual um peso W pode ser solto sobre sua extremidade sem ultrapassar a tensão elástica máxima $\sigma_{máx}$ na viga.



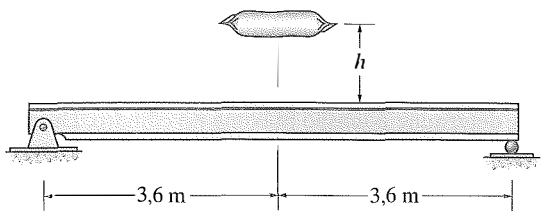
Problema 14.57

14.58. O saco de cimento pesa 450 N (≈ 45 kg). Se ele for solto a partir do repouso de uma altura $h = 1{,}2$ m sobre o centro da viga de perfil W250 × 58 de aço estrutural A-36, determine a tensão de flexão máxima desenvolvida na viga decorrente do impacto. Calcule também o fator de impacto.



Problema 14.58

14.59. O saco de cimento pesa 450 N (≈ 45 kg). Determine a altura máxima h da qual ele pode cair a partir do repouso sobre o centro da viga de perfil W250 × 58 de aço estrutural A-36, de modo que a tensão de flexão máxima resultante do impacto não ultrapasse 210 MPa.

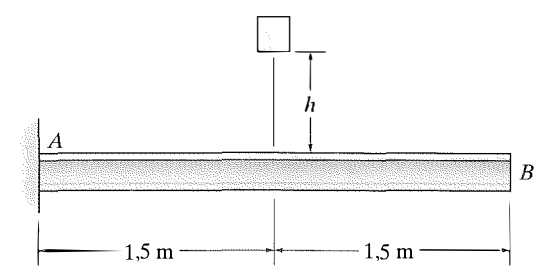


Problema 14.59

*14.60. Um peso de 200 N (≈ 20 kg) cai de uma altura h = 0,6 m sobre o centro da viga em balanço feita de aço A-36. Se a viga for um perfil W250 × 22, determine a tensão de flexão máxima nela desenvolvida.

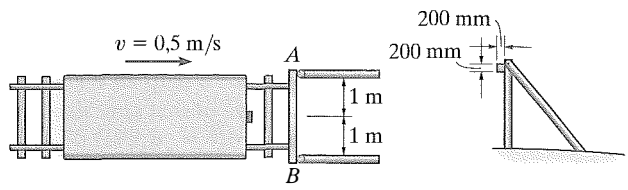
14.61. Se a tensão de flexão admissível máxima para a viga de perfil W250 × 22 de aço estrutural A-36 for σ_{adm} = 140 MPa, determine a altura máxima h da qual um peso de 250 N (≈ 25 kg) pode ser solto a partir do repouso e atingir o centro da viga.

14.62. Um peso de 200 N (≈ 20 kg) cai de uma altura h = 0,6 m sobre o centro da viga em balanço feita de aço A-36. Se a viga for um perfil W250 × 22, determine o deslocamento vertical de sua extremidade B provocado pelo impacto.



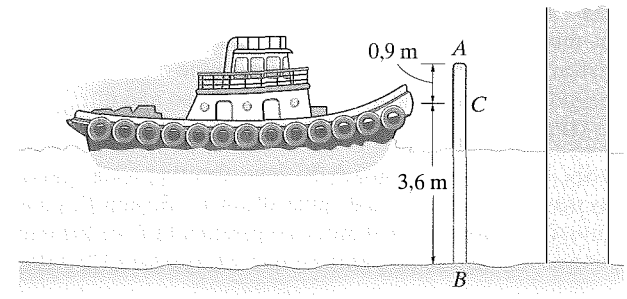
Problemas 14.60/61/62

14.63. Uma viga de aço AB deve parar o vagão ferroviário de 10 Mg de massa que se aproxima dela à velocidade v = 0,5 m/s. Determine a tensão máxima desenvolvida na viga, se for atingida no centro pelo vagão. Ela é simplesmente apoiada, e somente forças horizontais ocorrem em A e B. Considere que o vagão ferroviário e a estrutura de suporte da viga permanecem rígidos. Calcule também a deflexão máxima da viga. $E_{aço}$ = 200 GPa, σ_e = 250 MPa.



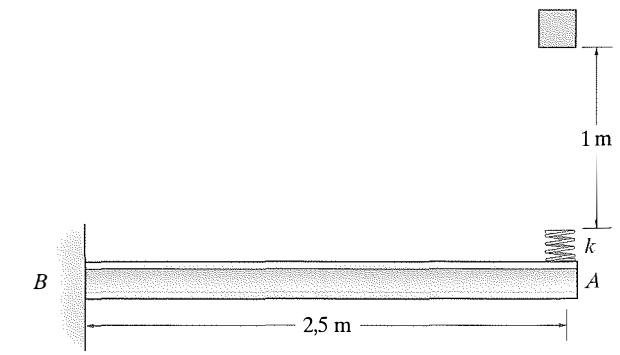
Problema 14.63

*14.64. O rebocador pesa 600 kN (≈ 60 toneladas) e está deslocando-se para diante a uma velocidade de 0,6 m/s, quando atinge o poste de 300 mm de diâmetro AB usado para proteger a ponte do atracadouro. Se o poste for feito de espruce branco tratado e considerarmos que está preso ao leito do rio, determine a distância horizontal máxima à qual se deslocará o topo do poste como resultado do impacto. Considere que o rebocador é rígido e despreze o efeito da água.



Problema 14.64

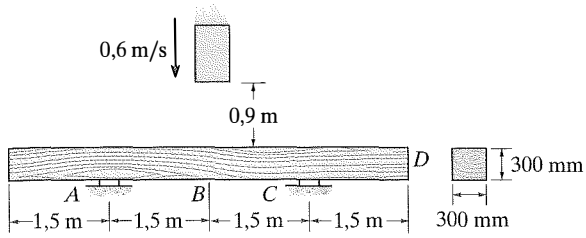
14.65. A viga de perfil W250 × 18 é feita de aço A-36 aço e está em balanço apoiada na parede em B. A mola montada sobre a viga tem rigidez k = 200 kN/m. Se um peso de 40 N (≈ 4 kg) cair sobre a mola de uma altura de 1 m, determine a tensão de flexão máxima desenvolvida na viga.



Problema 14.65

14.66. O bloco de 375 N (≈ 37,5 kg) tem velocidade de descida de 0,6 m/s, quando está a 0,9 m do topo da viga de madeira. Determine a tensão de flexão máxima na viga provocada pelo impacto e calcule a deflexão máxima de sua extremidade D. E_m = 14 GPa. Considere que o material não escoará.

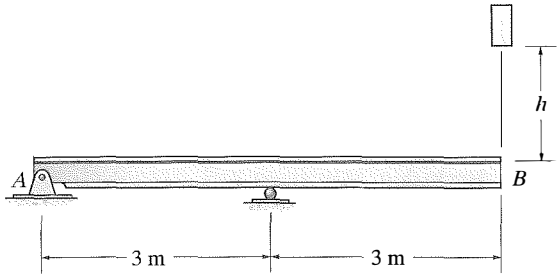
14.67. O bloco de 375 N (≈ 37,5 kg) tem velocidade de descida de 0,6 m/s, quando está a 0,9 m do topo da viga de madeira. Determine a tensão de flexão máxima na viga provocada pelo impacto e calcule a deflexão máxima no ponto B. E_m = 14 GPa.



Problemas 14.66/67

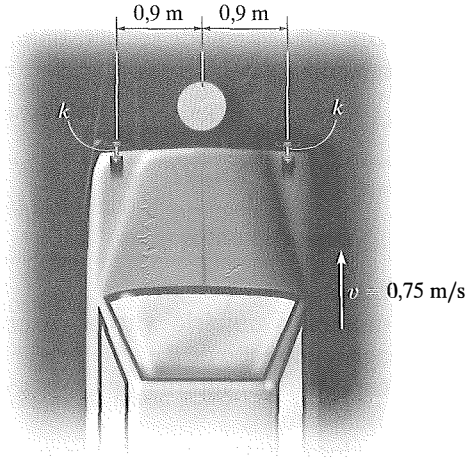
***14.68.** Determine a altura máxima h da qual um peso de 400 N ($\approx$ 40 kg) pode cair sobre a extremidade da viga de perfil W150 × 18 de aço A-36 sem ultrapassar a tensão elástica máxima.

14.69. O peso de 400 N ($\approx$ 40 kg) cai de sua posição de repouso à altura h = 1,2 m sobre a extremidade da viga de perfil W150 × 18 de aço A-36. Determine a tensão de flexão máxima desenvolvida na viga.



Problemas 14.68/69

14.70. O parachoque do carro é feito de tereftalato de policarbonato-polibutileno. Se E = 2,0 GPa, determine a deflexão máxima e a tensão máxima no parachoque, se ele atingir o poste rígido quando o carro estiver aproximando-se à velocidade v = 0,75 m/s. O carro tem massa de 1,80 Mg e o parachoque pode ser considerado simplesmente apoiado sobre dois suportes de mola acoplados à estrutura rígida do carro. Considere para o parachoque $I = 300(10^6)\text{mm}^4$, c = 75 mm, σ_e = 30 MPa e k = 1,5 MN/m.



Problema 14.70

*14.5 Princípio do trabalho virtual

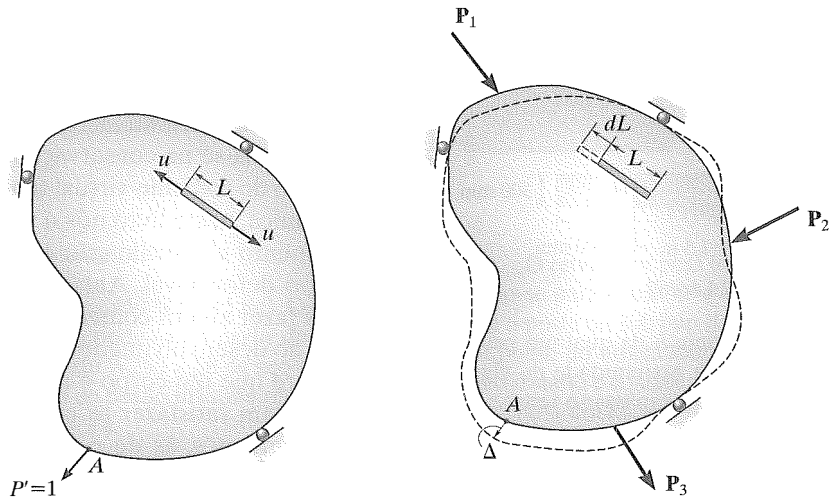
O princípio do trabalho virtual foi desenvolvido por John Bernoulli em 1717 e, como outros métodos de análise, baseia-se na conservação de energia. Embora o princípio do trabalho virtual tenha muitas aplicações em mecânica, neste livro nós o usaremos para obter o deslocamento e a inclinação em vários pontos sobre um corpo deformável. Antes disso, entretanto, precisaremos fazer alguns comentários preliminares que se aplicam ao desenvolvimento desse método.

Sempre que um corpo é impedido de mover-se, as cargas devem satisfazer as condições de equilíbrio, e os deslocamentos, as de compatibilidade. Especificamente, as *condições de equilíbrio* exigem que as cargas externas estejam relacionadas apenas às cargas internas, e as *condições de compatibilidade* exigem que os deslocamentos externos estejam relacionados apenas com as deformações internas. Por exemplo, se considerarmos um corpo deformável de qualquer forma ou tamanho e aplicarmos a ele uma série de cargas externas $\mathbb{P}$, estas provocarão cargas internas u dentro do corpo. Aqui as cargas externas e internas estão relacionadas pelas equações de equilíbrio. Além do mais, como o corpo é deformável, as cargas externas serão deslocadas Δ, e as cargas internas sofrerão deslocamentos δ. Em geral, o material *não tem* de comportar-se elasticamente e, portanto, os deslocamentos podem *não* estar relacionados com as cargas. Contudo, se os deslocamentos externos forem conhecidos, os internos correspondentes estarão definidos unicamente visto que o corpo é contínuo. Para esse caso, a conservação de energia afirma que

$$U_e = U_i; \qquad \Sigma P\Delta = \Sigma u\delta \tag{14.35}$$

Com base nesse conceito, agora desenvolveremos o princípio do trabalho virtual de modo que ele possa ser usado para determinar o deslocamento e a inclinação em *qualquer ponto* sobre um corpo. Para tal, consideraremos que o corpo tem forma arbitrária, como mostra a Figura 14.29b, e está submetido às 'cargas reais' $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ e $\mathbb{P}_3$. Deve ficar entendido que essas cargas não provocam nenhum movimento nos apoios; todavia, em geral elas podem deformar o material *além* do limite elástico. Suponha que seja necessário determinar o deslocamento Δ do ponto A sobre o corpo provocado por essas cargas. Para isso, consideraremos aplicar o princípio da conservação de energia (Equação 14.35). Contudo, nesse caso, não há nenhuma força agindo em A e, portanto, o deslocamento desconhecido Δ *não* será incluído como um 'termo de trabalho' externo na equação.

Para contornar essa limitação, aplicaremos uma força *imaginária* ou 'virtual' $\mathbb{P}'$ sobre o corpo no ponto A, tal que $\mathbb{P}'$ aja na *mesma direção* de Δ. Além do



Aplicação de carga unitária virtual (a)

Aplicação de cargas reais (b)

Figura 14.29

mais, essa carga é aplicada ao corpo *antes* da aplicação das cargas reais (Figura 14.29a). Por conveniência, que esclareceremos mais tarde, atribuiremos uma intensidade 'unitária' a $\mathbb{P}'$, isto é, $\mathbb{P}' = 1$. Enfatizamos que se utiliza o termo ***'virtual'*** para descrever a carga porque ela é *imaginária* e, na verdade, não existe como parte da carga real. Todavia, essa carga virtual externa *cria* uma carga virtual interna $\mathbb{u}$ em um elemento ou fibra representativa do corpo, como mostra a Figura 14.29a. Como esperado, P' e u podem ser relacionadas pelas equações de equilíbrio. Além disso, por causa de P' e u, o corpo e o elemento sofrerão, cada qual, um deslocamento virtual, embora nós *não* nos preocupemos com suas intensidades. Uma vez aplicada a carga virtual e submetido o corpo às *cargas reais* $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ e $\mathbb{P}_3$, o ponto A será deslocado por uma quantidade real Δ, que provocará um deslocamento dL no elemento (Figura 14.29b). O resultado é que a força virtual externa $\mathbb{P}'$ e a carga virtual interna $\mathbb{u}$ 'deslocam-se juntas' por Δ e dL, respectivamente; por consequência, essas cargas realizam *trabalho virtual externo* de $1 \cdot \Delta$ sobre o corpo e *trabalho virtual interno* de $u \cdot dL$ sobre o elemento. Considerando *somente* a conservação de energia *virtual*, o trabalho virtual externo é igual ao trabalho virtual interno realizado sobre todos os elementos do corpo. Portanto, podemos escrever a equação do trabalho virtual como

$$\underbrace{1 \cdot \Delta}_{\text{cargas virtuais}} = \underbrace{\Sigma u \cdot dL}_{\text{deslocamentos reais}} \qquad (14.36)$$

Nessa expressão,

$P' = 1$ = carga virtual externa unitária que age na direção de Δ

u = carga virtual interna que age sobre o elemento

Δ = deslocamento externo provocado pelas cargas reais

dL = deslocamento interno do elemento na direção de $\mathbb{u}$, provocado pelas cargas reais

Escolhendo $P' = 1$, podemos ver que a solução para Δ decorre diretamente, visto que $\Delta = \Sigma u\, dL$.

De maneira semelhante, se tivermos que determinar o deslocamento rotacional ou a inclinação da tangente em um ponto sobre o corpo, aplicamos um *momento* virtual $\mathbb{M}'$ de intensidade 'unitária' ao ponto. Por consequência, esse momento provoca uma carga virtual u_θ em um dos elementos do corpo. Considerando que as cargas reais deformam o elemento por uma quantidade dL, a rotação θ pode ser determinada pela equação do trabalho virtual

$$\underbrace{1 \cdot \theta}_{\text{cargas virtuais}} = \underbrace{\Sigma u_\theta\, dL}_{\text{deslocamentos reais}} \qquad (14.37)$$

Nessa expressão,

$M' = 1$ = momento unitário virtual externo que age na direção de θ

u_θ = carga virtual interna que age sobre um elemento

θ = deslocamento rotacional em radianos provocado pelas cargas reais

dL = deslocamento interno do elemento na direção de u_θ provocado pelas cargas reais

Esse método de aplicação do princípio do trabalho virtual costuma ser denominado *método das forças virtuais*, visto que se aplica uma *força virtual*, resultando no cálculo de um *deslocamento real* externo. Nesse caso, a equação do trabalho virtual representa uma declaração de *requisitos de compatibilidade* para o corpo. Embora não seja importante aqui, entenda que também podemos aplicar o princípio do trabalho virtual como um *método de deslocamentos virtuais*. Nesse caso, *deslocamentos virtuais* são impostos ao corpo quando ele é submetido a *cargas reais*. Esse método pode ser usado para determinar a força de reação externa sobre o corpo ou uma carga interna desconhecida dentro do corpo. Quando usada dessa maneira, a equação do trabalho virtual é uma declaração de *requisitos de equilíbrio* para o corpo.*

Trabalho virtual interno. Os termos do lado direito das equações 14.36 e 14.37 representam o trabalho virtual interno desenvolvido no corpo. Os deslocamentos reais internos dL nesses termos podem ser produzidos de vários modos diferentes. Por exemplo, esses deslocamentos podem resultar dos erros de fabricação na geometria, da temperatura, ou o que é mais comum, da tensão. Em particular, nenhuma restrição foi aplicada à intensidade da carga externa, portanto a tensão pode ser grande o suficiente para provocar o escoamento ou até mesmo o endurecimento por deformação (encruamento) do material.

Se considerarmos que o comportamento do material é linear elástico e que a tensão não ultrapassa o limite de proporcionalidade, podemos formular as expressões para o trabalho virtual interno provocado por tensão usando as equações de energia de deformação elástica desenvolvidas na Seção 14.2. Elas estão relacionadas na coluna do centro da Tabela 14.1. Lembre-se de que cada uma dessas expressões considera que a tensão resultante $\mathbb{N}$, $\mathbf{V}$, $\mathbb{M}$ ou $\mathbf{T}$ foi aplicada gradualmente de zero até seu valor total. Como resultado, o trabalho realizado pela tensão resultante é mostrado nessas expressões como *metade* do produto entre a tensão resultante e seu deslocamento. No caso do método da força virtual, entretanto, a carga virtual 'total' é aplicada *antes* de as cargas reais provocarem deslocamentos e, portanto, o trabalho das cargas virtuais internas consiste simplesmente no produto entre a carga virtual interna e seu deslocamento real. Designando essas cargas virtuais internas (u) pelos símbolos correspondentes em letras minúsculas n, v, m e t, o trabalho virtual decorrente da carga axial, cisalhamento, momento fletor e momento de torção é apresentado na coluna do lado direito da Tabela 14.1. Portanto, usando esses resultados, a equação do trabalho virtual para um corpo submetido a uma carga geral pode ser escrita como

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{nN}{AE} dx + \int \frac{mM}{EI} dx + \int \frac{f_s vV}{GA} dx + \int \frac{tT}{GJ} dx \qquad (14.38)$$

Nas seções seguintes aplicaremos a equação acima a problemas que envolvem deflexões de treliças, vigas e elementos mecânicos. Incluiremos também uma discussão sobre como tratar os efeitos de erros de fabricação e mudanças de temperaturas. Para aplicação, é importante usar um conjunto consistente de unidades para todos os termos. Por exemplo, se as cargas reais forem expressas em quilonewtons e as dimensões do corpo em metros, uma força virtual de 1 kN ou um momento virtual de 1 kN·m deve ser aplicado ao corpo. Desse modo, um deslocamento calculado Δ será expresso em metros, e uma inclinação, calculada em radianos.

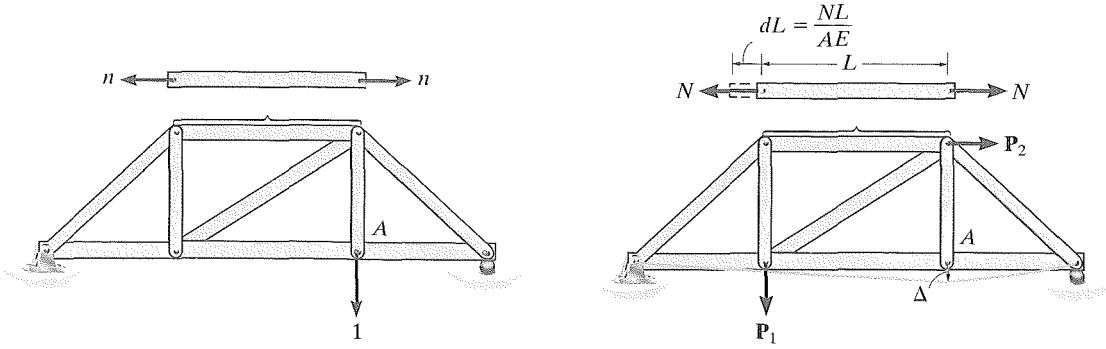
TABELA 14.1

Deformação causada por	Energia de deformação	Trabalho virtual interno
Carga axial N	$\int_0^L \frac{N^2}{2EA} dx$	$\int_0^L \frac{nN}{EA} dx$
Cisalhamento V	$\int_0^L \frac{f_s V^2}{2GA} dx$	$\int_0^L \frac{f_s vV}{GA} dx$
Momento fletor M	$\int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$	$\int_0^L \frac{mM}{EI} dx$
Momento de torsão T	$\int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$	$\int_0^L \frac{tT}{GJ} dx$

*14.6 Método das forças virtuais aplicado a treliças

Nesta seção, aplicaremos o método das forças virtuais para determinar o deslocamento de uma articulação de treliça. Para ilustrar os princípios, determinaremos o deslocamento vertical da articulação A da treliça mostrada na Figura 14.30b. Esse deslocamento é provocado pelas 'cargas reais' $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$; como essas cargas provocam apenas força axial nos elementos estruturais, basta considerar o trabalho virtual interno devido à carga axial (Tabela 14.1). Para obter esse

* Veja Engineering mechanics: statics, 11ª edição, R. C. Hibbeler, Prentice Hall, Inc.,2007.



Aplicação de carga virtual unitária (a)

Aplicação de cargas reais (b)

Figura 14.30

trabalho virtual, consideraremos que cada elemento da treliça tem área de seção transversal constante A e que a carga virtual n e a carga real N são constantes em todo o comprimento do elemento. Como resultado, o trabalho virtual interno para um elemento é

$$\int_0^L \frac{nN}{AE}dx = \frac{nNL}{AE}$$

Portanto, a equação do trabalho virtual para toda a treliça é

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \tag{14.39}$$

Nessa expressão,

1 = carga virtual externa unitária que age sobre a articulação de treliça na direção declarada de Δ
Δ = deslocamento da articulação provocado pelas cargas reais sobre a treliça
n = força virtual interna em um elemento da treliça provocada pela carga virtual externa unitária
N = força interna em um elemento da treliça provocada pelas cargas reais
L = comprimento de um elemento
A = área da seção transversal de um elemento
E = módulo de elasticidade de um elemento

A formulação dessa equação decorre naturalmente do desenvolvimento na Seção 14.5. Aqui a carga virtual externa unitária cria forças 'n' virtuais internas em cada um dos elementos da treliça (Figura 14.30a). Quando as cargas reais são aplicadas à treliça, provocam um deslocamento Δ na articulação da treliça na mesma direção da carga virtual unitária (Figura 14.30b), e cada elemento sofre um deslocamento NL/AE na mesma direção de sua respectiva força n. Por consequência, o trabalho virtual externo $1 \cdot \Delta$ é igual ao trabalho virtual interno ou à energia de deformação (virtual) interna armazenada em *todos* os elementos da treliça, isto é, Equação 14.39.

Mudança de temperatura. O comprimento de elementos de treliças pode mudar em razão de uma mudança de temperatura. Se α for o coeficiente de expansão térmica de um elemento e ΔT a mudança de temperatura, a mudança no comprimento de um elemento é $\Delta L = \alpha\, \Delta T L$ (Equação 4.4). Por consequência, podemos determinar o deslocamento de uma articulação de treliça selecionada provocada por essa mudança de temperatura pela Equação 14.36, escrita como

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n \alpha\, \Delta T L \tag{14.40}$$

Nessa expressão,

1 = carga virtual externa unitária que age sobre a articulação da treliça na direção determinada de Δ
n = força virtual interna em um elemento de treliça provocada pela carga virtual externa unitária
Δ = deslocamento externo da articulação causado pela mudança de temperatura
α = coeficiente de expansão térmica do elemento
ΔT = mudança na temperatura do elemento
L = comprimento do elemento

Erros de fabricação. Às vezes podem ocorrer erros de fabricação que afetam o comprimento dos elementos de uma treliça. Se isso acontecer, o deslocamento em uma determinada direção de uma articulação de treliça em relação à sua posição esperada pode ser determinado pela aplicação direta da Equação 14.36 escrita como

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n\, \Delta L \tag{14.41}$$

Nessa expressão,

1 = carga virtual externa unitária que age sobre a articulação de treliça na direção determinada de Δ

n = força virtual interna em um elemento de treliça provocada pela carga virtual externa unitária

Δ = deslocamento externo da articulação causado pelos erros de fabricação

ΔL = diferença no comprimento do elemento em relação ao comprimento pretendido, provocada por um erro de fabricação

Uma combinação dos lados direitos das equações 14.39 a 14.41 será necessária, se cargas externas agirem sobre a treliça e alguns dos elementos sofrerem uma mudança de temperatura ou forem fabricados com dimensões erradas.

EXEMPLO 14.11

Determine o deslocamento vertical da articulação C da treliça de aço mostrada na Figura 14.31a. A área da seção transversal de cada elemento é $A = 400\ \text{mm}^2$ e $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$.

SOLUÇÃO

Forças virtuais *n*. Visto que o deslocamento vertical na articulação C deve ser determinado, *somente* uma carga virtual vertical de 1 kN é colocada na articulação C; e a força em cada elemento é calculada pelo método dos nós. Os resultados dessa análise são mostrados na Figura 14.31b. Usando nossa convenção de sinal, números positivos indicam forças de tração e os negativos, forças de compressão.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um método que pode ser usado para determinar o deslocamento de qualquer articulação em uma treliça pelo método da força virtual.

Forças virtuais *N*

- Coloque a carga virtual unitária sobre a treliça na articulação na qual se deve determinar o deslocamento desejado. A carga deve estar orientada ao longo da linha de ação do deslocamento.
- Com a carga unitária assim posicionada e todas as cargas reais *removidas* da treliça, calcule a força n interna em cada elemento dela. Considere que as forças de tração são positivas e as de compressão, negativas.

Forças reais *N*

- Determine as forças N em cada elemento. Essas forças são provocadas somente pelas cargas reais que agem sobre a treliça. Novamente, considere que as forças de tração são positivas e as de compressão, negativas.

Equação do trabalho virtual

- Aplique a equação do trabalho virtual para determinar o deslocamento desejado. É importante conservar o sinal algébrico de cada uma das forças n e N correspondentes, ao substituir esses termos na equação.
- Se a soma resultante $\Sigma nNL/AE$ for positiva, o deslocamento Δ estará na mesma direção da carga virtual unitária. Se resultar um valor negativo, Δ estará na direção contrária à da carga virtual unitária.
- Quando aplicar $1 \cdot \Delta = \Sigma n\alpha \Delta T L$, entenda que, se qualquer dos elementos sofrer um *aumento* na temperatura, ΔT será *positivo*; ao passo que uma *diminuição* na temperatura resultará em um valor *negativo* para ΔT.
- Para $1 \cdot \Delta = \Sigma n \Delta L$, quando um erro de fabricação *aumentar* o comprimento de um elemento, ΔL é *positivo*, ao passo que para uma *redução* no comprimento, ΔL é *negativo*.
- Ao aplicar esse método, deve-se dar atenção às unidades de cada quantidade numérica. Contudo, observe que podemos atribuir qualquer unidade arbitrária à carga virtual unitária: libras, kips, newtons etc., visto que as forças n terão essas *mesmas* unidades e, por isso, as unidades da carga virtual unitária, bem como as das forças n, serão canceladas em ambos os lados da equação.

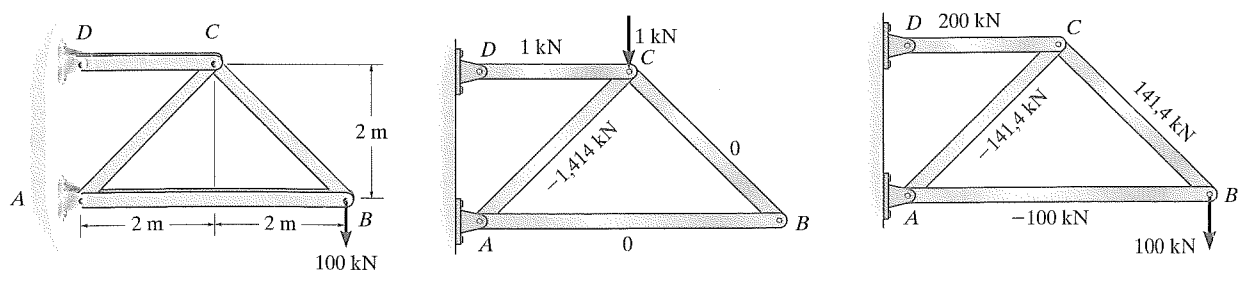


Figura 14.31

Forças reais *N*. A carga de 100 kN aplicada provoca forças nos elementos que podem ser calculadas pelo método dos nós. Os resultados dessa análise são mostrados na Figura 14.31c.

Equação do trabalho virtual. Arranjando os dados em forma tabular, temos

Membro	n	N	L	nNL
AB	0	−100	4	0
BC	0	141,4	2,828	0
AC	−1,414	−141,4	2,828	565,7
CD	1	200	2	400
				Σ 965,7 kN^2 · m

Logo,

$$1\text{ kN}\cdot\Delta_{C_v} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{965{,}7\text{ kN}^2\cdot\text{m}}{AE}$$

Substituindo A e E por seus valores numéricos, temos

$$1\text{ kN}\cdot\Delta_{C_v} = \frac{965{,}7\text{ kN}^2\cdot\text{m}}{[400(10^{-6})\text{ m}^2]\,200(10^6)\text{ kN/m}^2}$$

$$\Delta_{C_v} = 0{,}01207\text{ m} = 12{,}1\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 14.12

A área da seção transversal de cada elemento da treliça de aço mostrada na Figura 14.32a é $A = 300\text{ mm}^2$, e o módulo de elasticidade para os elementos de aço é $E_{aço} = 210(10^3)$ MPa. (a) Determine o deslocamento horizontal da articulação C, se uma força de 60 kN for aplicada à treliça em B. (b) Se nenhuma carga externa agir sobre a treliça, qual é o deslocamento horizontal da articulação C, se o elemento AC for 6 mm mais curto devido a erro de fabricação?

SOLUÇÃO

Parte (a).

Forças virtuais *n*. Visto que o *deslocamento horizontal* da articulação C deve ser determinado, aplica-se uma força virtual horizontal de 1 kN em C. A força n em cada elemento é determinada pelo método dos nós e mostrada na treliça na Figura 14.32b. Como sempre, um número positivo indica uma força de tração e um negativo representa uma força de compressão.

Forças reais *N*. A força em cada elemento provocada pela força de 60 kN aplicada externamente é mostrada na Figura 14.32c.

Equação do trabalho virtual. Visto que AE é constante, ΣnNL é calculado da seguinte maneira:

Membro	n	N	L	nNL
AB	0	0	1,5	0
AC	1,25	75	2,5	234,375
CB	0	−60	2	0
CD	−0,75	−45	1,5	50,625
				Σ285(kN)^2 · m

$$1\text{ kN}\ \Delta_{C_h} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{285(\text{kN})^2\ \text{m}}{AE}$$

$$1\text{ kN}\ \Delta_{C_h} = \frac{285(\text{kN})^2\ \text{m}(1.000\text{ mm/m})}{(300\text{ mm}^2)210(10^6)\text{ kN/mm}^2(1\text{ m}/1.000\text{ mm})^2}$$

$$\Delta_{C_h} = 4{,}524\text{ mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Parte (b). Aqui temos de aplicar a Equação 14.41. Visto que temos de determinar o deslocamento horizontal de C, podemos usar os resultados da Figura 14.32b. Percebendo que o elemento AC é $\Delta L = -6$ mais curto, temos

$$1\cdot\Delta = \Sigma n\,\Delta L; \qquad 1\text{ kN}\cdot\Delta_{C_h} = (1{,}25\text{ kN})(-6\text{ mm})$$

$$\Delta_{C_h} = -7{,}5\text{ mm} = 7{,}5\text{ mm}\leftarrow$$

Resposta

O sinal negativo indica que a articulação C é deslocada para a esquerda, na direção contrária à da carga horizontal de 1 kN.

EXEMPLO 14.13

Determine o deslocamento horizontal da articulação B da treliça mostrada na Figura 14.33a. Devido a aquecimento por radiação, o elemento AB é submetido a um *aumento* na temperatura $\Delta T = +60°\text{C}$. Os elementos são feitos de aço, para o qual $\alpha_{aço} = 12(10^{-6})/°\text{C}$ e $E_{aço} = 200$ GPa. A área da seção transversal de cada elemento é 250 mm^2.

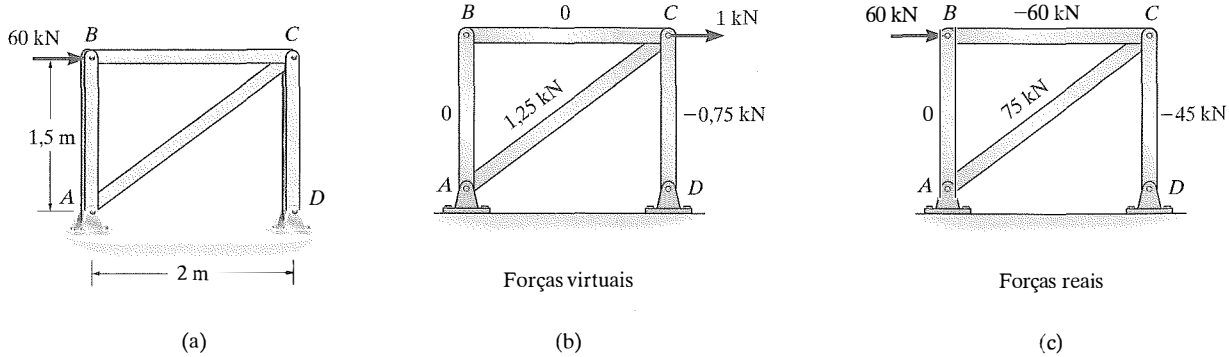


Figura 14.32

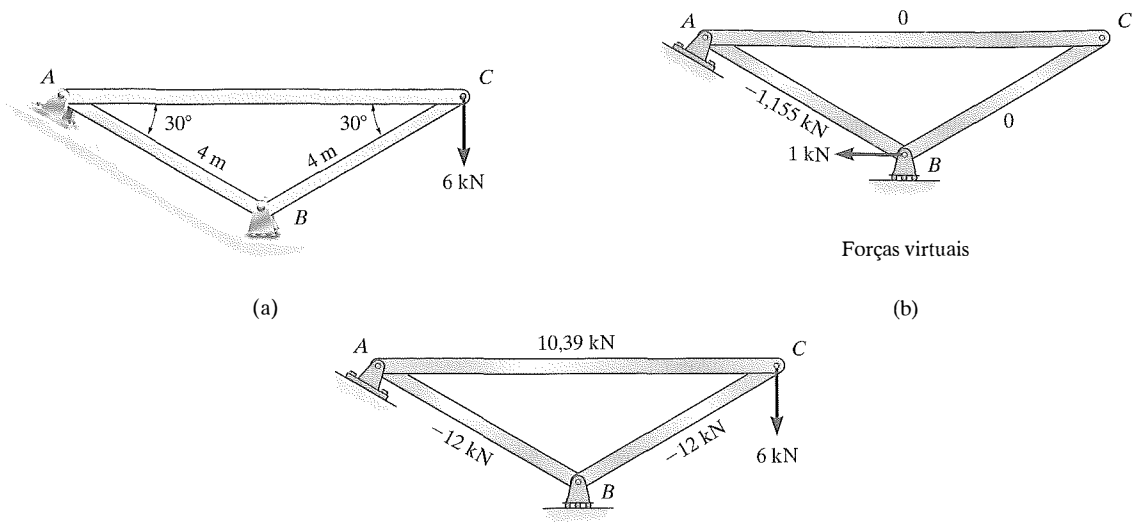


Figura 14.33

SOLUÇÃO

Forças virtuais *n*. Uma carga virtual horizontal de 1 kN é aplicada à treliça na articulação B, e as forças em cada elemento são calculadas (Figura 14.33b).

Forças reais *N*. Visto que as forças n nos elementos AC e BC são iguais a *zero*, as forças N nesses elementos *não* precisam ser determinadas. Por quê? Entretanto, para melhor entendimento, a análise completa da força 'real' é mostrada na Figura 14.33c.

Equação do trabalho virtual. Ambas, cargas e temperatura, afetam a deformação; portanto, as equações 14.39 e 14.40 são combinadas, o que dá

$$1\,\text{kN}\cdot\Delta_{B_h} = \sum\frac{nNL}{AE} + \Sigma n\alpha\,\Delta T L$$

$$= 0 + 0 + \frac{(-1{,}155\,\text{kN})(-12\,\text{kN})(4\,\text{m})}{[250(10^{-6})\,\text{m}^2][200(10^6)\,\text{kN/m}^2]}$$

$$+ 0 + 0 + (-1{,}155\,\text{kN})[12(10^{-6})/°\text{C}](60°\text{C})(4\,\text{m})$$

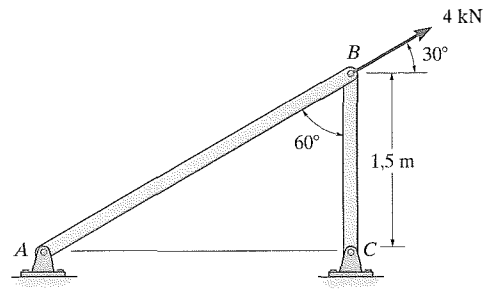
$$\Delta_{B_h} = -0{,}00222\,\text{m}$$

$$= 2{,}22\,\text{mm} \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que o rolete B move-se para a direita, na direção oposta à da carga virtual (Figura 14.33b).

PROBLEMAS

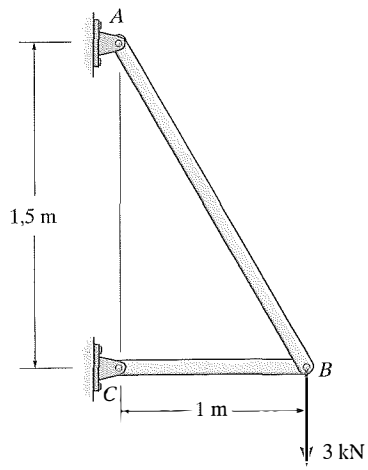
14.71. Determine o deslocamento horizontal da articulação B na armação de dois elementos. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 1.250 mm².



Problema 14.71

*14.72. Determine o deslocamento horizontal da articulação B. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 1.250 mm².

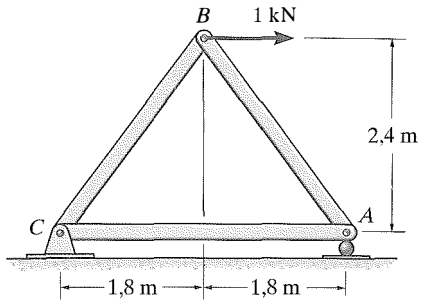
14.73. Determine o deslocamento vertical da articulação B. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 1.250 mm².



Problemas 14.72/73

14.74. Determine o deslocamento horizontal do ponto *B*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 1.250 mm².

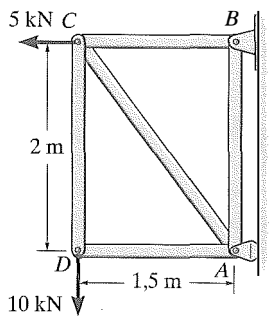
14.75. Determine o deslocamento vertical do ponto *B*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 1.250 mm².



Problemas 14.74/75

*14.76. Determine o deslocamento horizontal do ponto *C*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 400 mm².

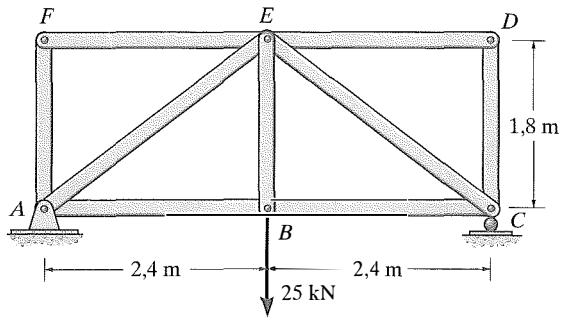
14.77. Determine o deslocamento vertical do ponto *D*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 400 mm².



Problemas 14.76/77

14.78. Determine o deslocamento vertical do ponto *B*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 2.800 mm². $E_{aço}$ = 200 GPa.

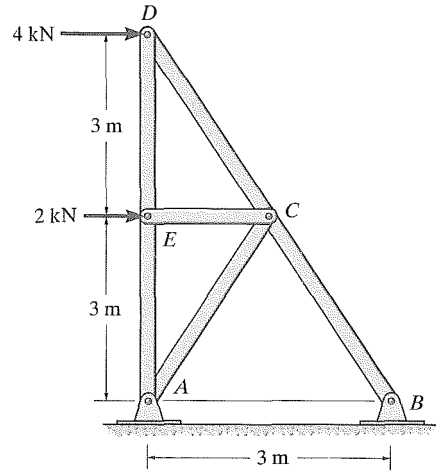
14.79. Determine o deslocamento vertical do ponto *E*. Cada elemento de aço A-36 estrutural tem área de seção transversal de 2.800 mm².



Problemas 14.78/79

*14.80. Determine o deslocamento horizontal do ponto *D*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 300 mm².

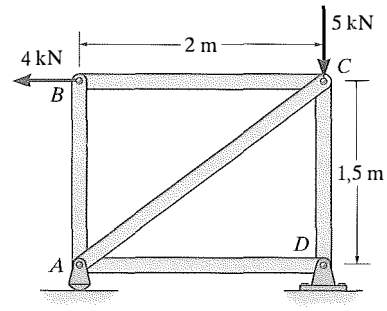
14.81. Determine o deslocamento horizontal do ponto *E*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 300 mm².



Problemas 14.80/81

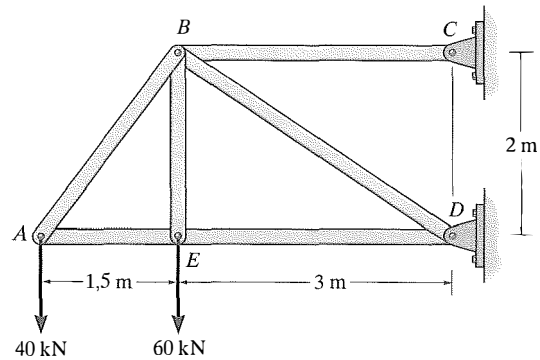
14.82. Determine o deslocamento horizontal da articulação *B* da treliça. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 400 mm².

14.83. Determine o deslocamento vertical da articulação *C* da treliça. Cada elemento de aço A-36 estrutural tem área de seção transversal de 400 mm².



Problemas 14.82/83

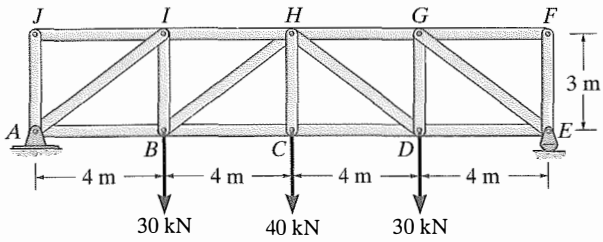
*14.84. Determine o deslocamento vertical da articulação *A*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 400 mm².



Problema 14.84

14.85. Determine o deslocamento vertical da articulação *C*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 2.800 mm².

14.86. Determine o deslocamento vertical da articulação *H*. Cada elemento de aço A-36 tem área de seção transversal de 2.800 mm².



Problemas 14.85/86

*14.7 Método das forças virtuais aplicado a vigas

Nesta seção, aplicaremos o método das forças virtuais para determinar o deslocamento e a inclinação em um ponto sobre uma viga. Para ilustrar os princípios, o deslocamento Δ do ponto *A* sobre a viga mostrada na Figura 14.34b será determinado. Esse deslocamento é provocado pela 'carga distribuída real' *w* e, visto que essa carga provoca cisalhamento e também momento no interior da viga, na verdade teremos de considerar o trabalho virtual interno decorrente de ambas as cargas. No Exemplo 14.7, entretanto, mostramos que deflexões em vigas provocadas por cisalhamento são desprezíveis em comparação com as provocadas por flexão, em particular se a viga for comprida e esbelta. Como esse tipo de viga é muito usado na prática, consideraremos somente a energia de deformação virtual decorrente de flexão (Tabela 14.1). Portanto, aplicando a Equação 14.36, a equação do trabalho virtual é

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \tag{14.42}$$

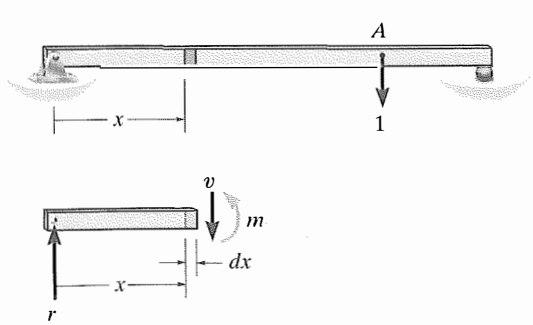
Nessa expressão,

1 = carga virtual externa unitária que age sobre a viga na direção de Δ
Δ = deslocamento provocado pelas cargas reais que agem sobre a viga
m = momento virtual interno na viga, expresso em função de x e provocado pela carga virtual externa unitária
M = momento interno na viga, expresso em função de x e provocado pelas cargas reais
E = módulo de elasticidade do material
I = momento de inércia da área da seção transversal, calculado em torno do eixo neutro

De modo semelhante, se tivermos que determinar a inclinação θ da tangente em um ponto sobre a linha elástica da viga, um momento virtual unitário deve ser aplicado ao ponto, e o momento virtual interno correspondente m_θ tem de ser determinado. Se aplicarmos a Equação 14.37 para esse caso e desprezarmos o efeito de deformações por cisalhamento, temos

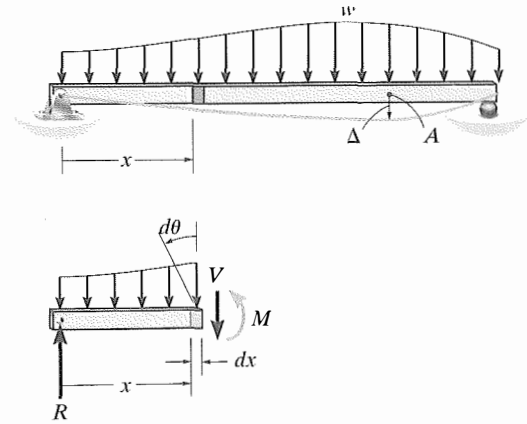
$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \tag{14.43}$$

Observe que a formulação das equações acima decorre naturalmente do desenvolvimento na Seção 14.5. Por exemplo, a carga virtual externa unitária cria um momento virtual interno m na viga na posição x (Figura 14.34a). Quando a carga real w é aplicada, ela provoca uma deformação dx ou uma rotação por um ângulo $d\theta$ no elemento em x (Figura 14.34b). Contanto que o material responda elasticamente, então $d\theta$ é igual a $(M/EI)dx$. Por consequência, o trabalho virtual



Carga virtuais

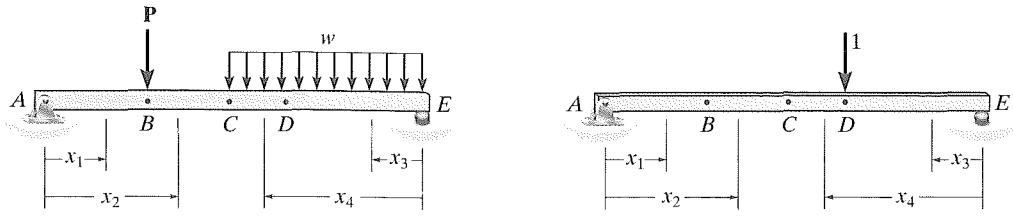
(a)



Cargas reais

(b)

Figura 14.34



Cargas reais (a) Carga virtual (b)

Figura 14.35

externo $1 \cdot \Delta$ é igual ao trabalho virtual interno para a viga inteira, $\int m(M/EI)dx$ (Equação 14.42).

Diferentemente das vigas, como discutidas aqui, alguns elementos também podem estar sujeitos à significativa energia de deformação virtual provocada por carga axial, cisalhamento e momento de torção. Quando for esse o caso, devemos incluir nas equações anteriores os termos de energia para essas cargas, como formulado na Equação 14.38.

Quando da aplicação das equações 14.42 e 14.43, é importante entender que as integrais no lado direito representam a quantidade de energia de deformação virtual por flexão que é *armazenada* na viga. Se forças concentradas ou momentos agirem sobre a viga ou a carga distribuída for descontínua, *não poderemos* efetuar uma integração única em todo o comprimento da viga. Em vez disso, teremos de escolher coordenadas x separadas dentro de regiões que não apresentam descontinuidade de carga. Também não é necessário que cada x tenha a mesma origem; todavia, a coordenada x selecionada para determinar o momento real M em uma determinada região deve ser a *mesma coordenada x* selecionada para determinar o momento virtual m ou m_θ dentro da mesma região. Por exemplo, considere a viga mostrada na Figura 14.35a. Para determinar o deslocamento em D, podemos usar x_1 para determinar a energia de deformação na região AB, x_2 para a região BC, x_3 para a região DE e x_4 para a região DC. Em qualquer caso, cada coordenada x deve ser selecionada de modo que ambos, M e m (ou m_θ) possam ser facilmente formulados.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um método que pode ser usado para determinar o deslocamento e a inclinação em um ponto sobre a linha elástica de uma viga usando o método do trabalho virtual.

Momentos virtuais m ou m_θ

- Coloque uma *carga virtual unitária* sobre a viga no ponto e oriente-a ao longo da linha de ação do deslocamento desejado.
- Se a inclinação tiver de ser determinada, coloque um *momento unitário* virtual no ponto.
- Determine coordenadas x adequadas válidas dentro de regiões da viga onde não houver nenhuma descontinuidade na carga real, nem na virtual.
- Com a carga virtual no lugar e todas as cargas reais *removidas* da viga, calcule o momento interno m ou m_θ em função de cada coordenada x.
- Considere que m ou m_θ age na direção positiva de acordo com a convenção de sinal estabelecida para vigas (Figura 6.3).

Momentos reais

- Usando as mesmas coordenadas x estabelecidas para m ou m_θ, determine os momentos internos M provocados pelas cargas reais.
- Visto que consideramos que m ou m_θ positivo age na 'direção positiva' convencional, é importante que M positivo aja nessa *mesma direção*. Isso é necessário uma vez que o trabalho virtual positivo ou negativo depende do sentido da direção da carga virtual definida por $\pm m$ ou $\pm m_\theta$, bem como do deslocamento, provocado por $\pm M$.

Equação do trabalho virtual

- Aplique a equação do trabalho virtual para determinar o deslocamento Δ ou a inclinação θ desejada. É importante conservar o sinal algébrico de cada integral calculada dentro de sua região especificada.
- Se a soma algébrica de todas as integrais para a viga inteira for positiva, Δ ou θ está na mesma direção da carga virtual unitária ou do momento virtual unitário, respectivamente. Se resultar um valor negativo, Δ ou θ estão na direção oposta à da carga virtual unitária ou momento.

EXEMPLO 14.14

Determine o deslocamento do ponto B sobre a viga mostrada na Figura 14.36a. EI é constante.

SOLUÇÃO

Momento virtual *m*. O deslocamento vertical do ponto B é obtido colocando-se uma carga virtual unitária em B (Figura 14.36b). Por inspeção, não há nenhuma descontinuidade de carga sobre a viga para a carga real, *nem* para a virtual. Assim, podemos usar uma *única* coordenada x para determinar a energia de deformação virtual. Essa coordenada será selecionada com origem em B, visto que as reações em A não precisam ser determinadas para encontrar os momentos internos m e M. Pelo método das seções, o momento interno m é calculado como mostra a Figura 14.36b.

Momento real *M*. Usando a *mesma* coordenada x, o momento interno M é calculado como mostra a Figura 14.36c.

Equação do trabalho virtual. Assim, o deslocamento vertical em B é

$$1 \cdot \Delta_B = \int \frac{mM}{EI} dx = \int_0^L \frac{(-1x)(-wx^2/2)\, dx}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO 14.15

Determine a inclinação no ponto B da viga mostrada na Figura 14.37a. EI é constante.

SOLUÇÃO

Momentos virtuais m_θ. A inclinação em B é determinada colocando-se um momento virtual unitário em B (Figura 14.37b). Duas coordenadas x devem ser selecionadas para determinar a energia de deformação virtual total na viga. A coordenada x_1 representa a energia de deformação dentro do segmento AB e a x_2 representa a energia de deformação no segmento BC. Os momentos internos m_θ dentro de cada um desses segmentos são calculados pelo método das seções como mostrado na Figura 14.37b.

Momentos reais *M*. Usando as *mesmas coordenadas* x_1 *e* x_2 (por quê?), os momentos internos M são calculados como mostra a Figura 14.37c.

Equação do trabalho virtual. Assim, a inclinação em B é

$$1 \cdot \theta_B = \int \frac{m_\theta M}{EI} dx$$

$$= \int_0^{L/2} \frac{0(-Px_1)\, dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{1\{-P[(L/2) + x_2]\}\, dx_2}{EI}$$

$$\theta_B = -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal *negativo* indica que θ_B está na direção *oposta* à do momento virtual mostrado na Figura 14.37b.

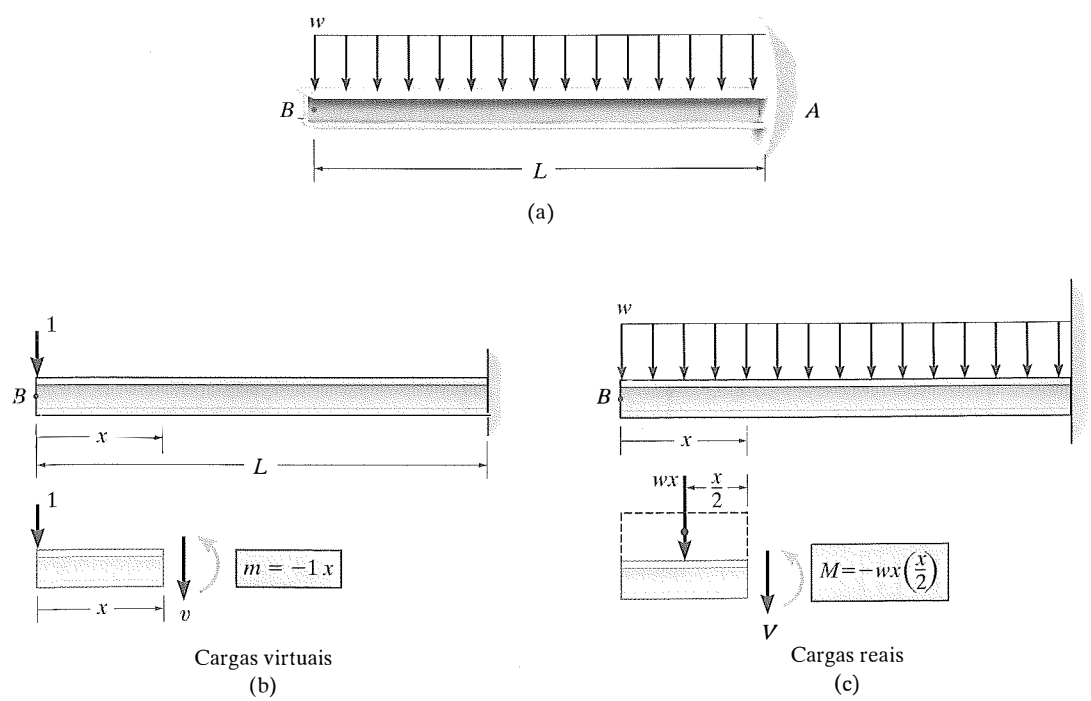


Figura 14.36

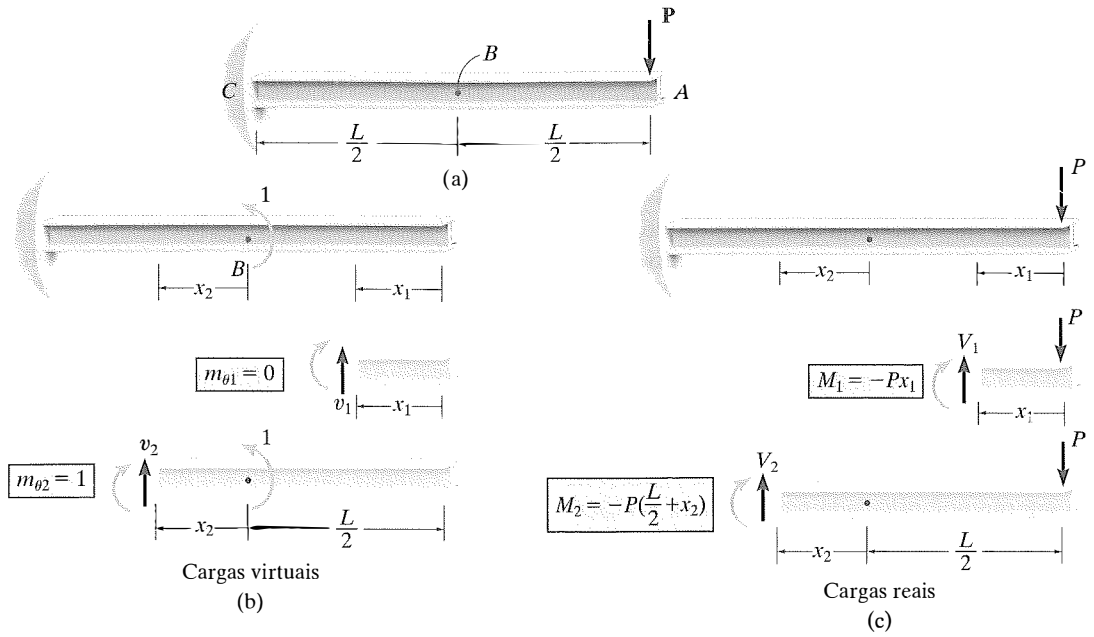


Figura 14.37

EXEMPLO 14.16

Determine o deslocamento do ponto A da viga de aço mostrada na Figura 14.38a. $I = 175{,}8(10^{-6})\text{m}^4$, $E_{aço} = 200$ GPa.

SOLUÇÃO

Momentos virtuais *m*. A viga está sujeita à carga virtual unitária em A e as reações são calculadas (Figura 14.38b). Por inspeção, duas coordenadas x_1 e x_2 devem ser escolhidas para abranger todas as regiões da viga. Para a finalidade de integração, é mais simples usar origens em A e C. Usando-se o método das seções, os momentos internos m são mostrados na Figura 14.38b.

Momentos reais *M*. As reações na viga real são determinadas em primeiro lugar (Figura 14.38a). Então, usando as *mesmas* coordenadas x que usamos para m, os momentos internos M são determinados.

Equação do trabalho virtual. Aplicando a equação do trabalho virtual à viga, temos

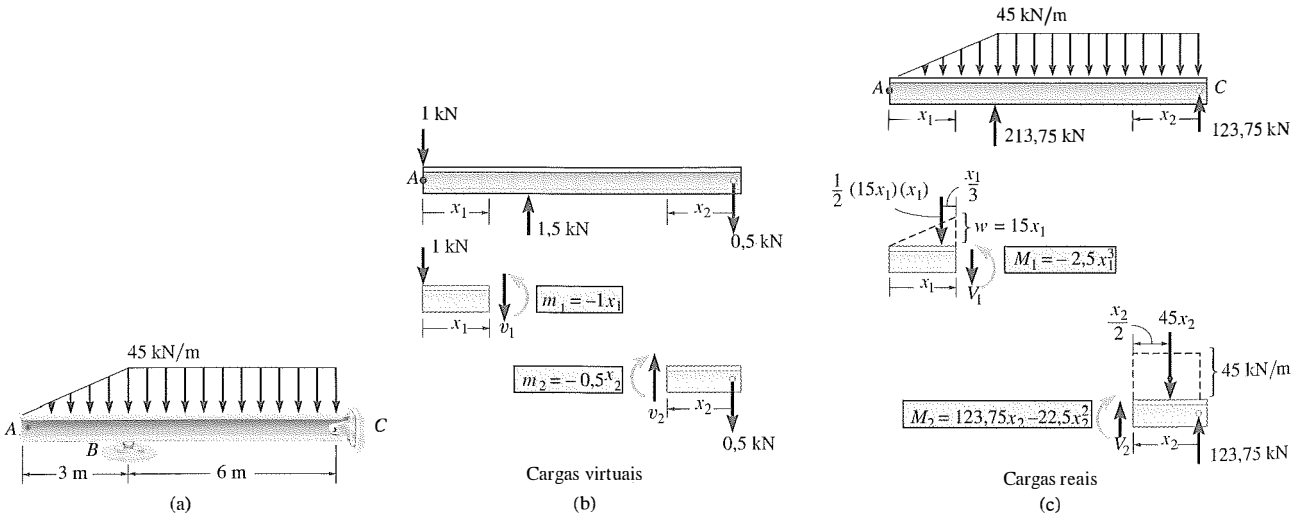


Figura 14.38

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_A = \int \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^3 \frac{(-1x_1)(-2{,}5x_1^{\,3})\,dx_1}{EI} + \int_0^3 \frac{(-0{,}5x_2)(123{,}75x_2 - 22{,}5x_2^{\,2})\,dx_2}{EI}$$

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_A = \frac{0{,}5(3)^3}{EI} - \frac{20{,}625(6)^3}{EI} + \frac{2{,}8125(6)^3}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{-688{,}5\ \text{kN m}^3}{EI}$$

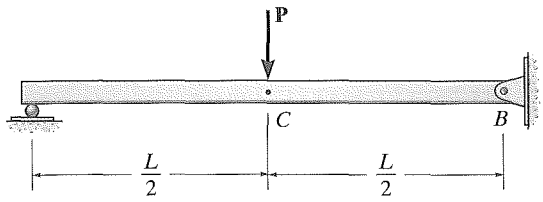
Substituindo E e I pelos dados numéricos, obtemos

$$\Delta_A = \frac{-688{,}5\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{[200(10^6)\ \text{kN/m}^2]175{,}8(10^{-6})\ \text{m}^4}\ \text{m} = -0{,}0196\ \text{m} = -19{,}6\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que o ponto A é deslocado para cima.

PROBLEMAS

14.87. Determine o deslocamento do ponto C e a inclinação no ponto B. EI é constante.

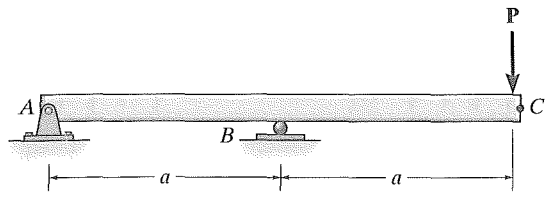


Problema 14.87

*14.88. Determine o deslocamento no ponto C. EI é constante.

14.89. Determine a inclinação no ponto C. EI é constante.

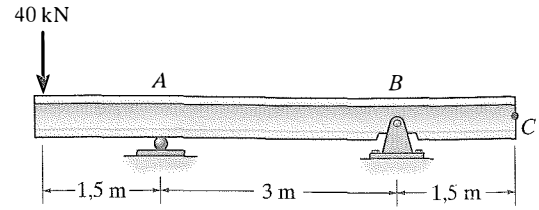
14.90. Determine a inclinação no ponto A. EI é constante.



Problemas 14.88/89/90

14.91. Determine o deslocamento do ponto C da viga feita de aço A-36 com momento de inércia $I = 21(10^6)\text{mm}^4$.

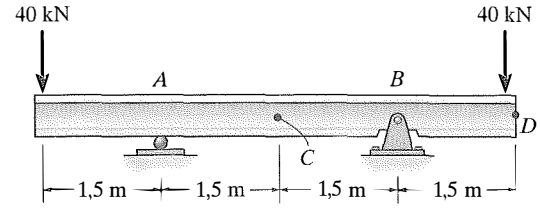
*14.92. Determine a inclinação em B da viga feita de aço A-36 com momento de inércia $I = 21(10^6)\ \text{mm}^4$.



Problemas 14.91/92

14.93. Determine o deslocamento do ponto C da viga de perfil W360 × 39 feita de aço A-36.

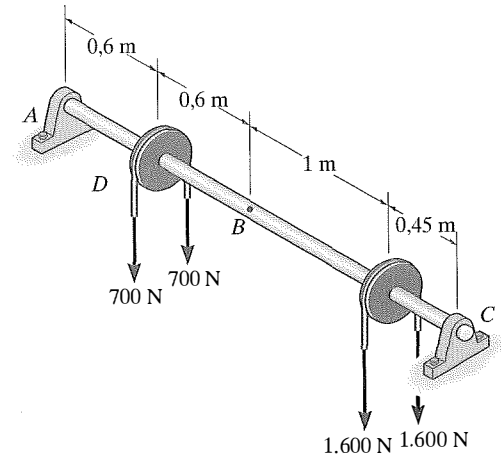
14.94. Determine a inclinação em A da viga de perfil W360 × 39 feita de A-36.



Problemas 14.93/94

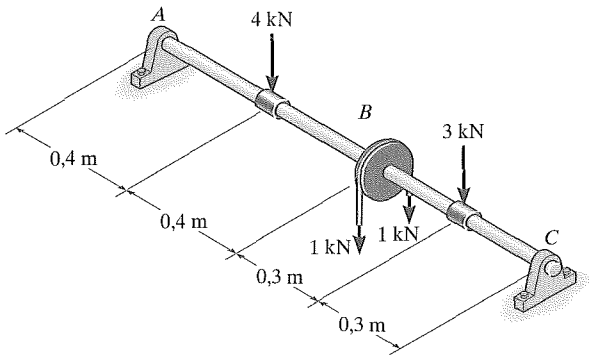
14.95. Determine o deslocamento em B do eixo de aço A-36 de 30 mm de diâmetro.

*14.96. Determine a inclinação do eixo de aço A-36 de 30 mm de diâmetro no mancal de apoio A.



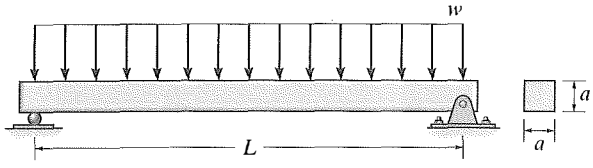
Problemas 14.95/96

14.97. Determine o deslocamento na polia B. O eixo de aço A-36 tem diâmetro de 30 mm.



Problema 14.97

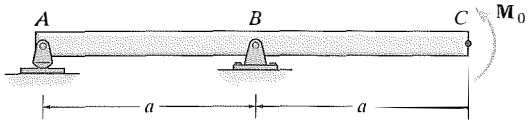
14.98. A viga simplesmente apoiada com seção transversal quadrada é submetida a uma carga uniforme w. Determine a deflexão máxima da viga causada somente por flexão e causada por flexão e cisalhamento. Considere $E = 3G$.



Problema 14.98

14.99. Determine o deslocamento no ponto C. EI é constante.

*__14.100.__ Determine a inclinação em B. EI é constante.

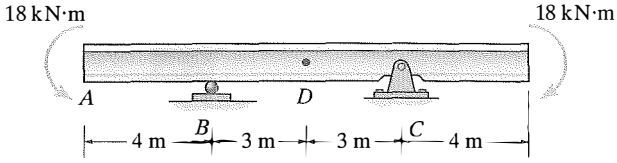


Problemas 14.99/100

14.101. A viga de aço A-36 tem momento de inércia $I = 125(10^6)$ mm^4. Determine o deslocamento em D.

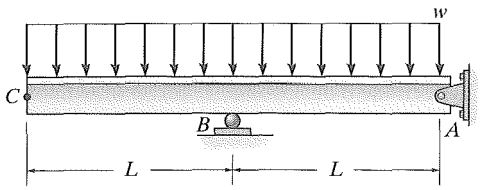
14.102. A viga de aço A-36 tem momento de inércia $I = 125(10^6)$ mm^4. Determine a inclinação em A.

14.103. A viga estrutural de aço A-36 tem momento de inércia $I = 125(10^6)$mm^4. Determine a inclinação da viga em B.



Problemas 14.101/102/103

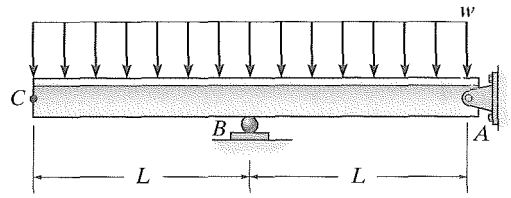
*__14.104.__ Determine a inclinação em A. EI é constante.



Problema 14.104

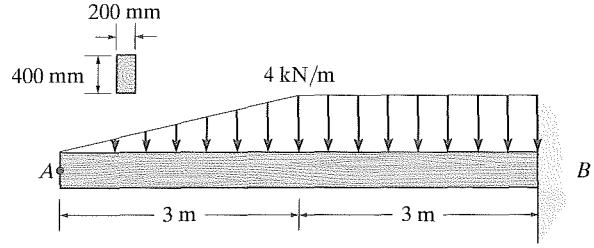
14.105. Determine o deslocamento em C. EI é constante.

14.106. Determine a inclinação em B. EI é constante.



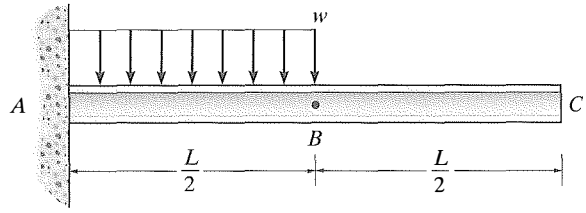
Problemas 14.105/106

14.107. A viga é feita de carvalho, para o qual $E_c = 11$ GPa. Determine a inclinação e o deslocamento em A.



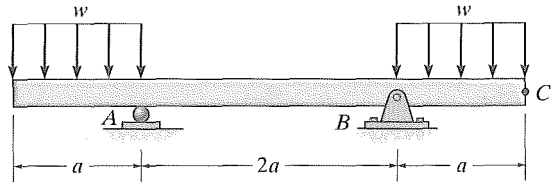
Problema 14.107

*__14.108.__ Determine o deslocamento em B. EI é constante.



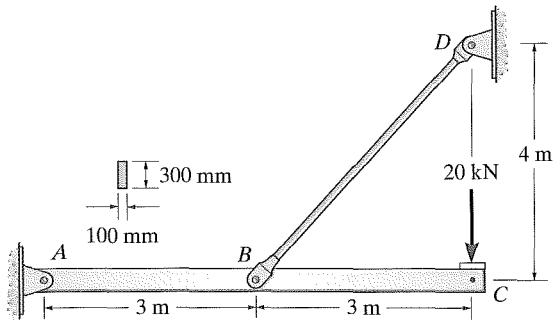
Problema 14.108

14.109. Determine a inclinação e o deslocamento no ponto C. EI é constante.



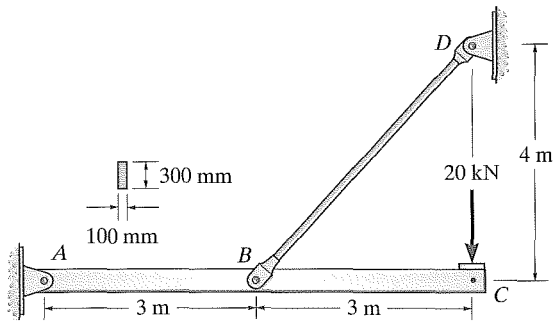
Problema 14.109

14.110. A barra ABC tem seção transversal retangular de 300 mm por 100 mm. A haste acoplada DB tem diâmetro de 20 mm. Se ambos os elementos forem feitos de aço A-36, determine o deslocamento vertical do ponto C provocado pela carga. Considere somente o efeito da flexão em ABC e da força axial em DB.



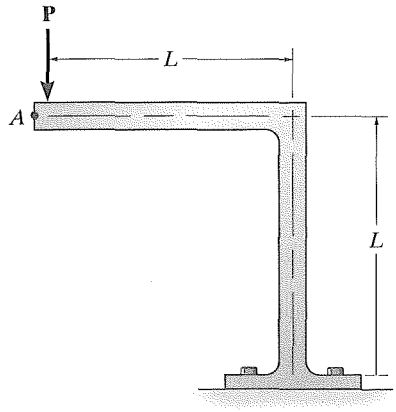
Problema 14.110

14.111. A barra *ABC* tem seção transversal retangular de 300 mm por 100 mm. A haste acoplada *DB* tem diâmetro de 20 mm. Se ambos os elementos forem feitos de aço A-36, determine a inclinação em *A* provocada pela carga. Considere somente o efeito da flexão em *ABC* e da força axial em *DB*.



Problema 14.111

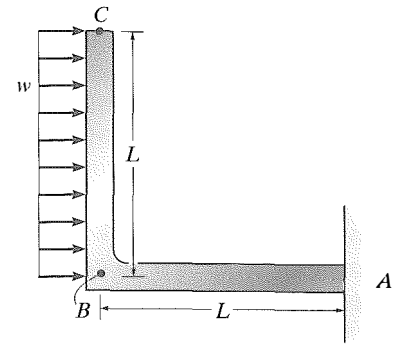
*__14.112.__ Determine o deslocamento vertical do ponto *A* na cantoneira, resultante da força concentrada **P**. A cantoneira está engastada em seu apoio. *EI* é constante. Considere somente o efeito da flexão.



Problema 14.112

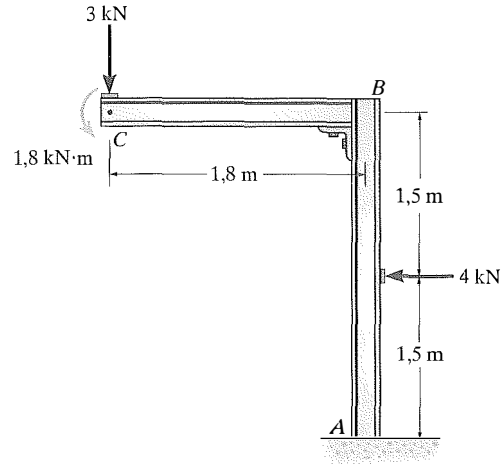
14.113. A estrutura em L é composta por dois segmentos, cada um com comprimento *L* e rigidez à flexão *EI*. Se for submetida à carga distribuída uniforme, determine o deslocamento horizontal da extremidade *C*.

14.114. A estrutura em L é composta por dois segmentos, cada um com comprimento *L* e rigidez à flexão *EI*. Se for submetida à carga distribuída uniforme, determine o deslocamento vertical do ponto *B*.



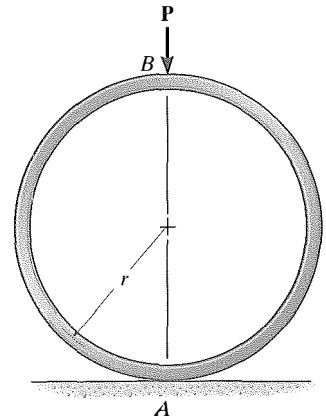
Problema 14.113/114

14.115. Determine o deslocamento horizontal do ponto *C*. *EI* é constante. Há um apoio fixo em *A*. Considere somente o efeito da flexão.



Problema 14.115

*__14.116.__ O anel repousa sobre a superfície rígida e está sujeito à carga vertical **P**. Determine o deslocamento vertical em B. *EI* é constante.



Problema 14.116

*14.8 Teorema de Castigliano

In 1879, Alberto Castigliano, um engenheiro de ferrovias italiano, publicou um livro no qual descrevia um método para determinar o deslocamento e a inclinação em um ponto em um corpo. Esse método, denominado segundo teorema de Castigliano, aplica-se somente a corpos que tenham temperatura constante e cujo material tenha comportamento linear elástico. Se o deslocamento em um ponto tiver de ser determinado, o teorema afirma que o deslocamento é igual à derivada parcial de primeira ordem da energia de deformação no corpo em relação a uma força que age no ponto e na direção do deslocamento. De modo semelhante, a inclinação da tangente em um ponto em um corpo é igual à derivada parcial de primeira ordem da energia de deformação no corpo com relação a um momento que age no ponto e na direção do ângulo da inclinação.

Para deduzir o segundo teorema de Castigliano, considere um corpo de forma arbitrária, que é submetido a uma série de n forças, $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ..., \mathbb{P}_n$ (Figura 14.39). Visto que o trabalho externo realizado por essas forças equivale à energia de deformação interna armazenada no corpo, podemos aplicar a conservação de energia, isto é,

$$U_i = U_e$$

Todavia, o trabalho externo é função das cargas externas, $U_e = \Sigma \int P\, dx$ (Equação 14.1), portanto o trabalho interno também é função das cargas externas. Assim,

$$U_i = U_e = f(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad (14.44)$$

Agora, se qualquer uma das forças externas, digamos P_j, aumentar de uma quantidade diferencial $d\mathbb{P}_j$, o trabalho interno também aumentará, de modo tal que a energia de deformação torna-se

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_j} dP_j \qquad (14.45)$$

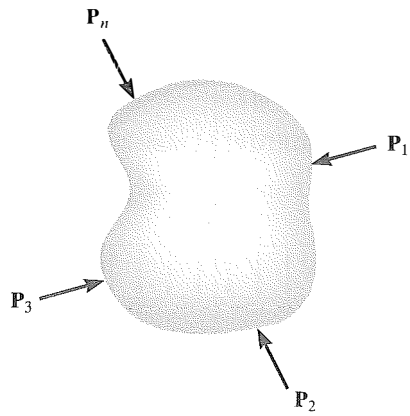


Figura 14.39

Entretanto, esse valor não deve depender da sequência na qual as n forças são aplicadas ao corpo. Por exemplo, poderíamos aplicar *primeiro* $d\mathbb{P}_j$ ao corpo, então aplicar as cargas $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ..., \mathbb{P}_n$. Nesse caso, $d\mathbb{P}_j$ provocaria o deslocamento do corpo por uma quantidade diferencial $d\Delta i$ na direção de $d\mathbb{P}_j$. Pela Equação 14.2, $(U_e = \frac{1}{2} P_j \Delta_j)$, o incremento de energia de deformação seria $\frac{1}{2} dP_j d\Delta_j$. Todavia, essa quantidade é uma diferencial de segunda ordem e pode ser desprezada. A aplicação adicional das cargas $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ..., \mathbb{P}_n$ faz com que $d\mathbb{P}_j$ desloque-se *de* Δ_j, de modo que a energia de deformação torna-se

$$U_i + dU_j = U_i + dP_j\, \Delta_i \qquad (14.46)$$

Aqui, como acima, U_i é a energia de deformação interna no corpo, provocada pelas cargas $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ..., \mathbb{P}_n$ e $dU_j = dP_j \Delta_j$ é a energia de deformação *adicional* provocada por $d\mathbb{P}_j$.

Resumindo, a Equação 14.45 representa a energia de deformação no corpo determinada pela aplicação em primeiro lugar das cargas $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ..., \mathbb{P}n$, e a seguir $d\mathbb{P}_j$; a Equação 14.46 representa a energia de deformação determinada aplicando-se em primeiro lugar $d\mathbb{P}_j$ e a seguir as cargas $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, ..., \mathbb{P}_n$. Visto que essas duas equações devem ser iguais, exige-se

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} \qquad (14.47)$$

o que prova o teorema; isto é, o deslocamento Δ_j na direção de $\mathbb{P}_j$ é igual à derivada parcial de primeira ordem da energia de deformação em relação a $\mathbb{P}_j$.

Devemos observar que a Equação 14.47 é uma declaração referente aos *requisitos de compatibilidade* do corpo, visto que é uma condição relacionada com deslocamento. Além disso, a dedução acima exige que *somente forças conservativas* sejam consideradas para a análise. Essas forças podem ser aplicadas em qualquer ordem e, além disso, realizam trabalho que é independente do caminho e, portanto, não criam nenhuma perda de energia. Como o material tem comportamento linear elástico, as forças aplicadas serão conservativas e o teorema é válido. Devemos mencionar também que o primeiro teorema de Castigliano assemelha-se ao segundo; todavia, relaciona a carga P_j com a derivada parcial da energia de deformação em relação ao deslocamento correspondente, isto é, $P_j = \partial U_i / \partial \Delta_j$. A prova é semelhante à dada acima. Esse teorema constitui outro modo de expressar os *requisitos de equilíbrio* para o corpo; contudo, sua aplicação é limitada e não o discutiremos aqui.

*14.9 Teorema de Castigliano aplicado a treliças

Visto que um elemento de treliça está sujeito a uma carga axial, a energia de deformação é dada pela

Equação 14.16, $U_i = N^2L/2AE$. Substituindo essa equação na Equação 14.47 e omitindo o índice i, temos

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\sum \frac{N^2L}{2AE}$$

Geralmente é mais fácil efetuar a diferenciação antes do somatório. Além disso, L, A e E são constantes para um dado elemento de treliça e, portanto, podemos escrever

$$\boxed{\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}} \qquad (14.48)$$

Nessa expressão,

Δ = deslocamento da articulação da treliça
P = força externa de *intensidade variável* aplicada a uma articulação de treliça na direção de Δ
N = força axial interna em um elemento provocada por ambas, a força $\mathbb{P}$ e as cargas sobre a treliça
L = comprimento de um elemento
A = área da seção transversal de um elemento
E = módulo de elasticidade do material

Para determinar a derivada parcial $\partial N/\partial P$, será necessário tratar P como uma *variável,* e não como uma quantidade numérica específica. Em outras palavras, cada força axial interna N deve ser expressa em função de P.

Por comparação, a Equação 14.48 assemelha-se à usada para o método do trabalho virtual (Equação 14.39) ($1 \cdot \Delta = \Sigma nNL/AE$), exceto que n é substituída por $\partial N/\partial P$. Contudo, esse termos, n e $\partial N/\partial P$, serão os *mesmos,* visto que representam a taxa de variação da força axial interna em relação à carga P ou, em outras palavras, a força axial por carga unitária.

EXEMPLO 14.17

Determine o deslocamento horizontal da articulação C da treliça de aço mostrada na Figura 14.40a. A área da seção transversal de cada elemento é indicada na figura. Considere $E_{aço} = 210(10^3)\text{N/mm}^2$.

SOLUÇÃO

Força externa P. Visto que o deslocamento horizontal de C deve ser determinado, uma força horizontal *variável* $\mathbb{P}$ é aplicada à articulação C (Figura 14.40b). Mais adiante essa força será igualada ao valor fixo de 40 kN.

Forças internas N. Usando o método dos nós, determinamos a força N em cada elemento. Os resultados são mostrados na Figura 14.40b. Arranjando os dados em forma tabular, temos

Membro	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P = 40\text{ kN})$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	0	0	0	4.000	0
BC	0	0	0	3.000	0
AC	$1{,}67P$	1,67	$66{,}67(10^3)$	5.000	$556{,}7(10^6)$
CD	$-1{,}33P$	−1,33	$-53{,}33(10^3)$	4.000	$283{,}7(10^6)$

Segundo teorema de Castigliano. Aplicando a Equação 14.48, obtemos

$$\Delta_{C_h} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$$

$$= 0 + 0 + \frac{556{,}7(10^6)\ \text{N·m}}{(625\ \text{mm}^2)[210(10^3)\ \text{N/mm}^2]} + \frac{283{,}7(10^3)\ \text{N·m}}{(1.250\text{mm}^2)[210(10^3)\text{N/mm}^2]}$$

$$= 4{,}24 + 1{,}08 + 5{,}32\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um método que pode ser usado para determinar o deslocamento de qualquer articulação em uma treliça aplicando-se o segundo teorema de Castigliano.

Força externa P

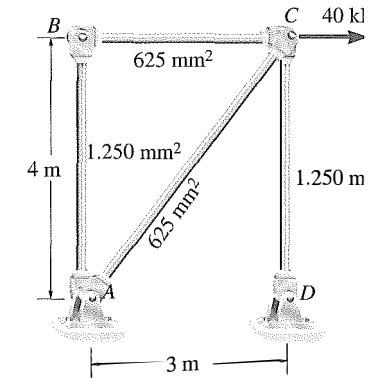
- Coloque uma força $\mathbb{P}$ sobre a treliça na articulação onde o deslocamento deve ser determinado. Considera-se que essa força tem *intensidade variável* e deve ser orientada ao longo da linha de ação do deslocamento.

Forças internas N

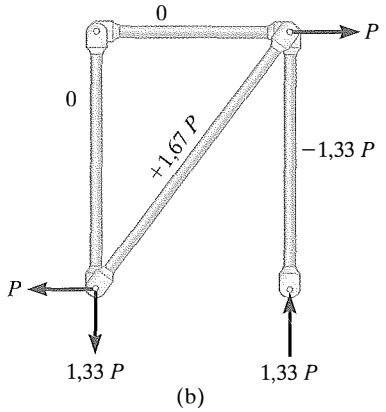
- Determine a força N em cada elemento, provocada por ambas, as cargas reais (numéricas) e a força variável P. Considere que as forças de tração são positivas e as de compressão, negativas.
- Determine a derivada parcial $\partial N/\partial P$ respectiva para cada elemento.
- Depois que N e $\partial N/\partial P$ foram determinadas, atribua a P seu valor numérico, se ela realmente substituiu uma força real na treliça. Senão, iguale P a zero.

Segundo teorema de Castigliano

- Aplique o teorema de Castigliano para determinar o deslocamento desejado Δ. É importante conservar os sinais algébricos para os valores correspondentes de N e $\partial N/\partial P$ quando substituirmos esses termos na equação.
- Se a soma resultante $\Sigma N(\partial N/\partial P)L/AE$ for positiva, Δ está na mesma direção de $\mathbb{P}$. Se resultar um valor negativo, Δ está na direção contrária à de $\mathbb{P}$.



(a)



(b)

Figura 14.40

EXEMPLO 14.18

Determine o deslocamento vertical da articulação C da treliça de aço mostrada na Figura 14.41a. A área da seção transversal de cada elemento é $A = 400\ \text{mm}^2$ e $E_{aço} = 200\ \text{GPa}$.

SOLUÇÃO

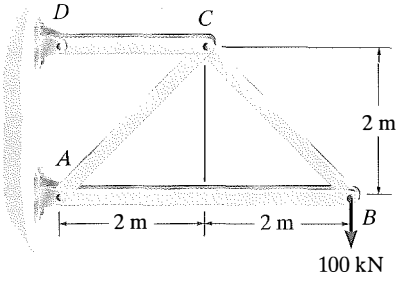
Força externa P. Aplica-se a força vertical $\mathbb{P}$ à treliça na articulação C, já que é nesse lugar que o deslocamento vertical deve ser determinado (Figura 14.41*b*).

Forças internas N. As reações nos apoios A e D da treliça são calculadas e os resultados mostrados na Figura 14.41b. Usando o método dos nós, as forças $\mathbb{N}$ em cada elemento são determinadas (Figura 14.41c).* Por conveniência, esses resultados, juntamente com as derivadas parciais $\partial N/\partial P$ são apresentadas em forma tabular. Observe que, visto que $\mathbb{P}$ na verdade não existe como uma carga real sobre a treliça, exige-se $P = 0$.

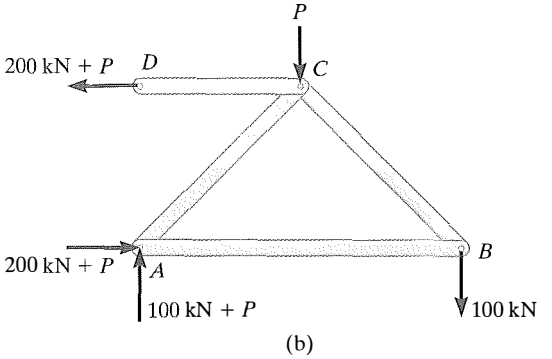
Membro	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P=0)$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	-100	0	-100	4	0
BC	141,4	0	141,4	2,828	0
AC	$-141,4 - 1,414P$	$-1,414$	$-141,4$	2,828	565,7
CD	$200 + P$	1	200	2	400
					Σ 965,7 kN · m

Segundo teorema de Castigliano. Aplicando a Equação 14.48, temos

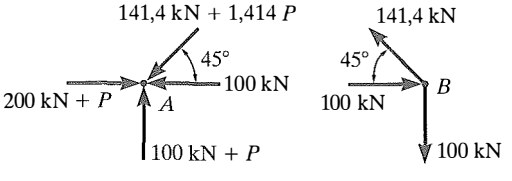
$$\Delta_{C_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{965{,}7\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 14.41

* Pode ser mais conveniente analisar a treliça com apenas a carga de 100 kN sobre ela, e então analisar a treliça com a carga $\mathbb{P}$ sobre ela. A seguir, os resultados podem ser somados para dar as forças $\mathbb{N}$.

Substituindo A e E pelos valores numéricos, obtemos

$$\Delta_{C_v} = \frac{965{,}7\ \text{kN} \cdot \text{m}}{[400(10^{-6})\ \text{m}^2]\ 200(10^6)\ \text{kN/m}^2} = 0{,}01207\ \text{m} = 12{,}1\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

Essa solução deve ser comparada com a do Exemplo 14.11, usando o método do trabalho virtual.

PROBLEMAS

14.117. Resolva o Problema 14.71 usando o teorema de Castigliano.
14.118. Resolva o Problema 14.73 usando o teorema de Castigliano.
14.119. Resolva o Problema 14.74 usando o teorema de Castigliano.
***14.120.** Resolva o Problema 14.72 usando o teorema de Castigliano.
14.121. Resolva o Problema 14.75 usando o teorema de Castigliano.
14.122. Resolva o Problema 14.76 usando o teorema de Castigliano.
14.123. Resolva o Problema 14.77 usando o teorema de Castigliano.
***14.124.** Resolva o Problema 14.80 usando o teorema de Castigliano.
14.125. Resolva o Problema 14.78 usando o teorema de Castigliano.
14.126. Resolva o Problema 14.79 usando o teorema de Castigliano.
14.127. Resolva o Problema 14.81 usando o teorema de Castigliano.
***14.128.** Resolva o Problema 14.84 usando o teorema de Castigliano.
14.129. Resolva o Problema 14.82 usando o teorema de Castigliano.
14.130. Resolva o Problema 14.83 usando o teorema de Castigliano.
14.131. Resolva o Problema 14.85 usando o teorema de Castigliano.
***14.132.** Resolva o Problema 14.86 usando o teorema de Castigliano.

*14.10 Teorema de Castigliano aplicado a vigas

A energia de deformação interna para uma viga é provocada por ambas, flexão e cisalhamento. Todavia, como destacamos no Exemplo 14.7, se a viga for comprida e esbelta, a energia de deformação decorrente do cisalhamento pode ser desprezada em comparação com a de flexão. Considerando que seja esse o caso, a energia de deformação interna para uma viga é dada por $U_i = \int M^2 dx/2EI$ (Equação 14.17). Substituindo em $\Delta_i = \partial U_i/\partial P_i$ (Equação 14.47), e omitindo o índice i, temos

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

Em vez de elevar a expressão ao quadrado para o momento interno M, integrar e então calcular a derivada parcial, em geral é mais fácil derivar antes da integração. Uma vez que E e I são constantes, temos

$$\boxed{\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}} \qquad (14.49)$$

onde

Δ = deslocamento do ponto provocado pelas cargas reais que agem sobre a viga
P = força externa de intensidade variável aplicada à viga na direção de Δ
M = momento interno na viga, expresso em função de x e provocado por ambas, a força P e as cargas sobre a viga
E = módulo de elasticidade do material
I = momento de inércia da área da seção transversal, calculado em torno do eixo neutro

Se tivermos que determinar a inclinação da tangente θ em um ponto sobre a linha elástica, temos que determinar a derivada parcial do momento interno M em relação a um *momento externo* M' que age no ponto. Para esse caso,

$$\boxed{\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}} \qquad (14.50)$$

As equações acima assemelham-se às usadas para o método do trabalho virtual (equações 14.42 e 14.43), exceto que m e m_θ substituem $\partial M/\partial P$ e $\partial M/\partial M'$, respectivamente.

Devemos mencionar que, se a carga que age sobre um elemento provocar energia de deformação significativa dentro do elemento devido a carga axial, cisalhamento, momento fletor e momento de torção, então os efeitos de todas essas cargas devem ser incluídos quando da aplicação do teorema de Castigliano. Para tal, devemos usar as funções de energia de deformação desenvolvidas na Seção 14.2, juntamente com suas derivadas parciais associadas. O resultado é

$$\Delta = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} + \int_0^L f_s V\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)\frac{dx}{GA} + \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^L T\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\frac{dx}{GJ} \qquad (14.51)$$

O método de aplicação dessa formulação geral é semelhante ao usado na aplicação das equações 14.49 e 14.50.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

O seguinte procedimento fornece um método que pode ser usado para aplicar o segundo teorema de Castigliano.

Força externa P ou Momento M′

- Coloque a força **P** sobre a viga no ponto e oriente-a ao longo da linha de ação do deslocamento desejado.
- Se a inclinação da tangente tiver de ser determinada, coloque um momento **M′** no ponto.
- Considere que ambos, **P** e **M′** têm intensidade variável.

Momentos internos *M*

- Estabeleça *coordenadas* x adequadas que sejam válidas dentro de regiões da viga onde não há nenhuma descontinuidade de força, carga distribuída ou momento.
- Calcule os momentos internos M em função de P ou M' e as derivadas parciais $\partial M/\partial P$ ou $\partial M/\partial M'$ para cada coordenada x.
- Depois que M e $\partial M/\partial P$ ou $\partial M/\partial M'$ forem determinados, atribua a P ou M' seu valor numérico se, de fato, ela (ou ele) substituiu uma força ou momento real. Senão, iguale P ou M' a zero.

Segundo teorema de Castigliano

- Aplique a Equação 14.49 ou 14.50 para determinar o deslocamento desejado Δ ou θ. É importante conservar os sinais algébricos correspondentes de M e $\partial M/\partial P$ ou $\partial M/\partial M'$.
- Se a soma resultante de todas as integrais definidas for positiva, Δ ou θ estará na mesma direção de **P** ou **M′**. Se resultar um valor negativo, Δ ou θ estará na direção contrária à de **P** ou **M′**.

EXEMPLO 14.19

Determine o deslocamento do ponto B sobre a viga mostrada na Figura 14.42a. EI é constante.

SOLUÇÃO

Força externa P. A força vertical **P** é colocada sobre a viga em B como mostra a Figura 14.42b.

Momentos internos *M*. É necessário apenas uma única coordenada x para a solução, visto que não há nenhuma descontinuidade de carga entre A e B. Usando o método das seções (Figura 14.42c), o momento interno e a derivada parcial são determinados da seguinte maneira:

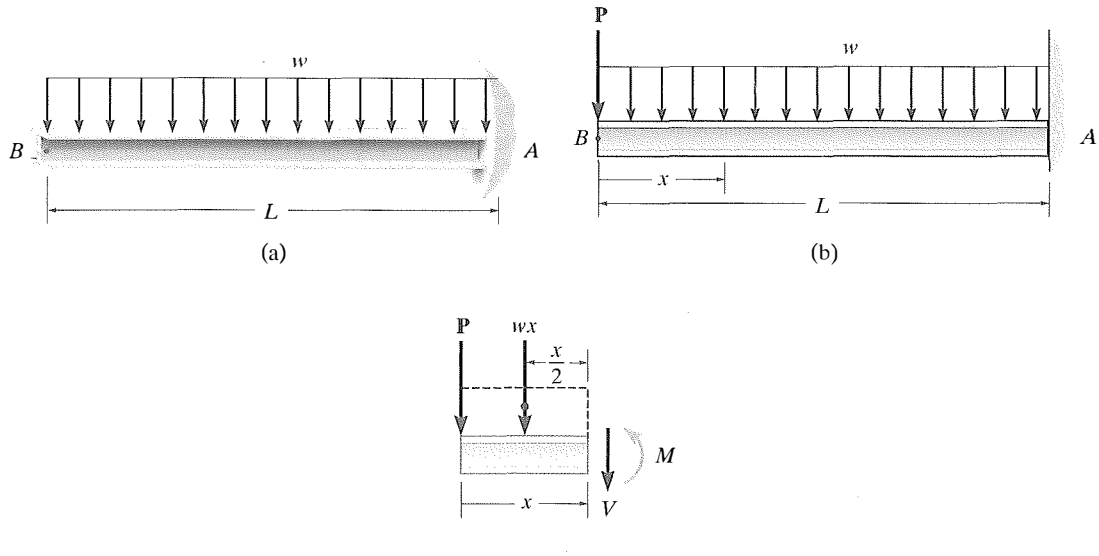


Figura 14.42

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) + P(x) = 0$$

$$M = -\frac{wx^2}{2} - Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Fazendo $P = 0$, temos

$$M = \frac{-wx^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Segundo teorema de Castigliano. Aplicando a Equação 14.49, temos

$$\Delta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-x)\,dx}{EI}$$

$$= \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textit{Resposta}$$

A semelhança entre essa solução e a do método do trabalho virtual (Exemplo 14.14), deve ser notada.

EXEMPLO 14.20

Determine a inclinação no ponto B da viga mostrada na Figura 14.43a. EI é constante.

SOLUÇÃO

Momento externo M'. Visto que a inclinação no ponto B deve ser determinada, um momento externo $\mathbf{M}'$ é colocado sobre a viga nesse ponto (Figura 14.43b).

Momentos internos M. Duas coordenadas, x_1 e x_2, devem ser usadas para determinar os momentos internos dentro da viga, visto que há uma descontinuidade, $\mathbf{M}'$, em B. Como mostra a Figura 14.43b, x_1 abrange a faixa de A a B e x_2 abrange a de B a C. Usando o método das seções (Figura 14.43c), os momentos internos e as derivadas parciais são determinados da seguinte maneira:

Para x_1,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M_1 - Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$$

Para x_2

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M_2 + M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right) = 0$$

$$M_2 = M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial M'} = 1$$

Segundo teorema de Castigliano. Fazendo $M' = 0$ e aplicando a Equação 14.50, temos

$$\theta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$= \int_0^{L/2} \frac{(-Px_1)(0)\,dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{-P[(L/2) + x_2](1)\,dx_2}{EI}$$

$$= -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Resposta}$$

O sinal negativo indica que $\boldsymbol{\theta}_B$ está na direção oposta à do momento $\mathbf{M}'$. Observe a semelhança entre essa solução e a do Exemplo 14.15.

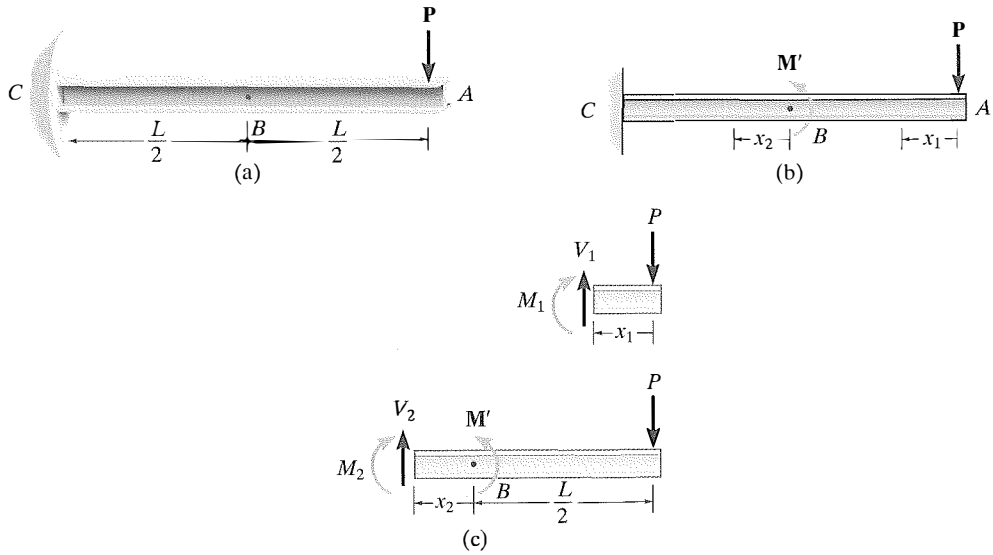


Figura 14.43

EXEMPLO 14.21

Determine o deslocamento vertical do ponto C da viga de aço mostrada na Figura 14.44a. Considere $E_{aço} = 200$ GPa, $I = 125(10^{-6})\text{m}^4$.

SOLUÇÃO

Força externa P. Uma força vertical **P** é aplicada no ponto C (Figura 14.44b). Mais adiante, essa força será igualada ao valor fixo de 5 kN.

Momentos internos *M*. Nesse caso são necessárias duas *coordenadas* x para a integração, visto que a carga é descontínua em C. Usando o método das seções (Figura 14.44c), os momentos internos e as derivadas parciais são determinados da seguinte maneira:

Para x_1,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M_1 + \frac{1}{3}x_1{}^2\left(\frac{x_1}{3}\right) - (9 + 0{,}4P)x_1 = 0$$

$$M_1 = (9 + 0{,}4P)x_1 - \frac{1}{9}x_1{}^3$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0{,}4x_1$$

Para x_2,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M_2 + 18 + (3 + 0{,}6P)x_2 = 0$$

$$M_2 = 18 + (3 + 0{,}6P)x_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0{,}6x_2$$

Segundo teorema de Castigliano. Fazendo $P = 5$ kN e aplicando a Equação 14.49, temos

$$\Delta_{C_v} = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$= \int_0^6 \frac{\left(11x_1 - \frac{1}{9}x_1{}^3\right)(0{,}4x_1)\,dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{(18 + 6x_2)(0{,}6x_2)\,dx_2}{EI}$$

$$= \frac{410{,}9\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{[200(10^6)\ \text{kN/m}^2]125(10^{-6})\ \text{m}^4}$$

$$= 0{,}0164\ \text{m} = 16{,}4\ \text{mm} \qquad \textit{Resposta}$$

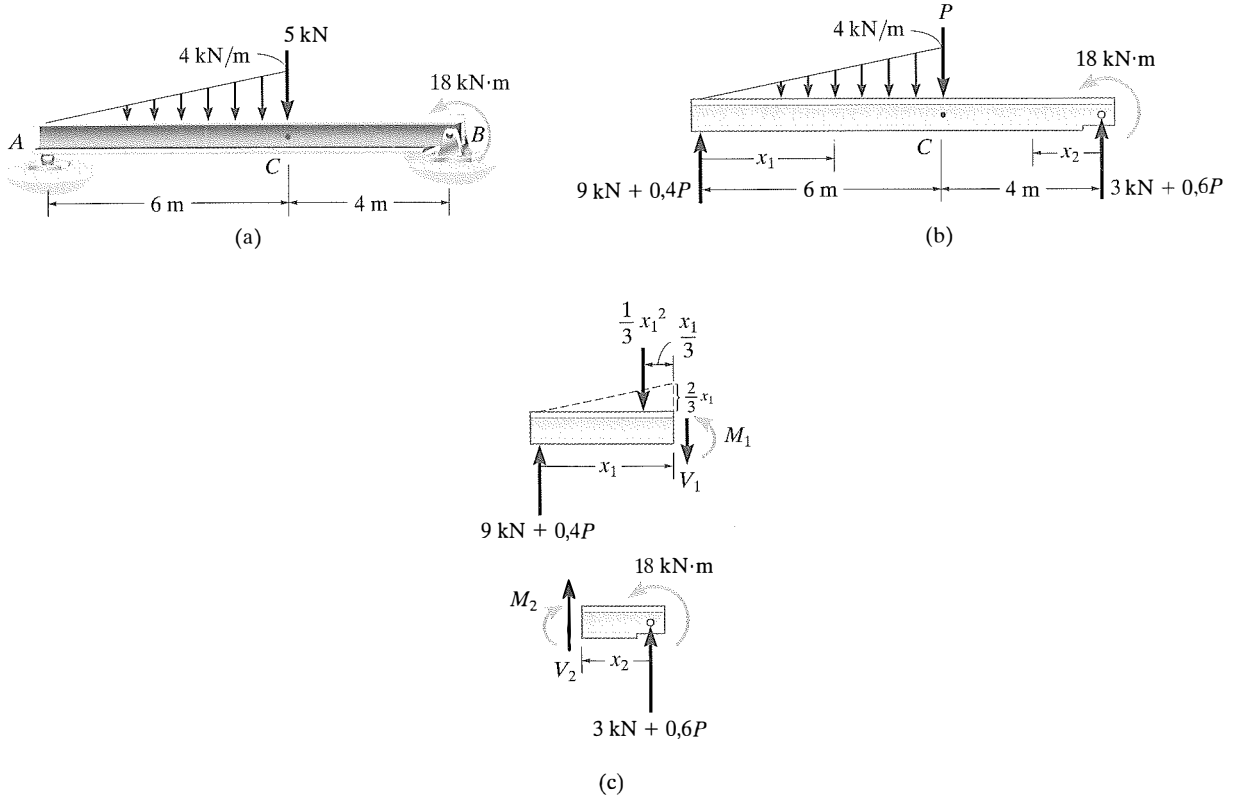


Figura 14.44

PROBLEMAS

14.133. Resolva o Problema 14.87 usando o teorema de Castigliano.
14.134. Resolva o Problema 14.89 usando o teorema de Castigliano.
14.135. Resolva o Problema 14.90 usando o teorema de Castigliano.
***14.136.** Resolva o Problema 14.88 usando o teorema de Castigliano.
14.137. Resolva o Problema 14.91 usando o teorema de Castigliano.
14.138. Resolva o Problema 14.93 usando o teorema de Castigliano.
14.139. Resolva o Problema 14.94 usando o teorema de Castigliano.
***14.140.** Resolva o Problema 14.92 usando o teorema de Castigliano.
14.141. Resolva o Problema 14.95 usando o teorema de Castigliano.
14.142. Resolva o Problema 14.97 usando o teorema de Castigliano.
14.143. Resolva o Problema 14.99 usando o teorema de Castigliano.
***14.144.** Resolva o Problema 14.96 usando o teorema de Castigliano.
14.145. Resolva o Problema 14.101 usando o teorema de Castigliano.
14.146. Resolva o Problema 14.102 usando o teorema de Castigliano.
14.147. Resolva o Problema 14.103 usando o teorema de Castigliano.
***14.148.** Resolva o Problema 14.100 usando o teorema de Castigliano.
14.149. Resolva o Problema 14.105 usando o teorema de Castigliano.
14.150. Resolva o Problema 14.106 usando o teorema de Castigliano.
14.151. Resolva o Problema 14.107 usando o teorema de Castigliano.
***14.152.** Resolva o Problema 14.104 usando o teorema de Castigliano.
14.153. Resolva o Problema 14.109 usando o teorema de Castigliano.
14.154. Resolva o Problema 14.113 usando o teorema de Castigliano.
14.155. Resolva o Problema 14.114 usando o teorema de Castigliano.
***14.156.** Resolva o Problema 14.108 usando o teorema de Castigliano.
14.157. Resolva o Problema 14.116 usando o teorema de Castigliano.
14.158. Resolva o Problema 14.115 usando o teorema de Castigliano.

Revisão do capítulo

Quando uma força (momento) age sobre um corpo deformável, realizará trabalho externo quando deslocar-se (ou girar). As tensões internas produzidas no corpo também sofrem deslocamento e, por isso, criam energia de deformação elástica que é armazenada no material. A conservação de energia afirma que o trabalho externo realizado pela carga equivale à energia de deformação interna produzida pelas tensões no corpo.	$U_e = U_i$
A conservação de energia pode ser usada para resolver problemas que envolvem impacto elástico, que considera o corpo em movimento como rígido e toda a energia de deformação é armazenada no corpo estacionário. Isso leva à utilização de um fator de impacto, que é a relação entre a carga dinâmica e a carga estática.	$n = 1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{\text{est}}}\right)}$
O princípio do trabalho virtual pode ser usado para determinar o deslocamento de uma articulação em uma treliça ou a inclinação e o deslocamento de pontos sobre uma viga ou estrutura. Requer colocar uma força externa unitária virtual (momento unitário virtual) no ponto onde o deslocamento (rotação) deve ser determinado. Então, o trabalho virtual externo produzido é igualado à energia de deformação virtual interna no elemento ou estrutura.	$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE}$ $1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$ $1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx$

O teorema de Castigliano também pode ser usado para determinar o deslocamento de uma articulação em uma treliça e a inclinação ou o deslocamento de um ponto sobre uma viga ou estrutura. Nesse caso, uma força variável P (momento M) é colocada no ponto onde o deslocamento (inclinação) deve ser determinado. Então, determinam-se a carga interna em função de P (M) e sua derivada parcial em relação a P (M). Em seguida, o teorema de Castigliano é aplicado para obter o deslocamento (rotação) desejado.

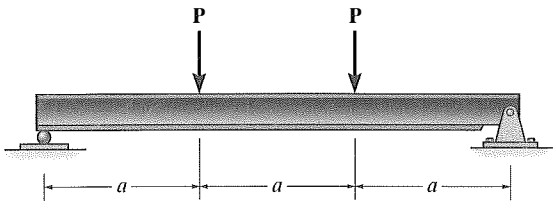
$$\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$$

$$\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$$

$$\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$$

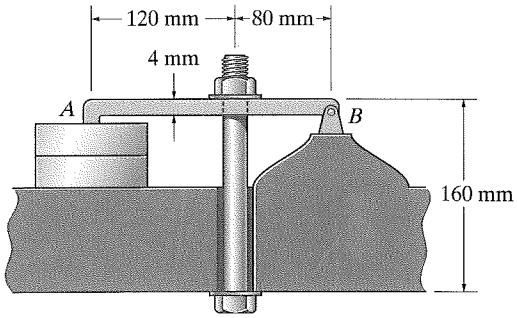
PROBLEMAS DE REVISÃO

14.159. Determine a energia de deformação por flexão na viga provocada pela carga mostrada EI é constante.



Problema 14.159

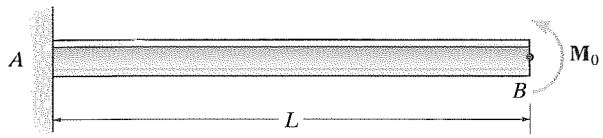
*__14.160.__ O parafuso de aço L2 tem diâmetro de 5 mm e o elo AB tem seção transversal retangular de 10 mm de largura por 4 mm de espessura. Determine a energia de deformação no elo AB provocada pela flexão, e no parafuso provocada pela força axial. O parafuso é apertado de modo que tenha tração de 1.750 N. Despreze o furo no elo.



Problema 14.160

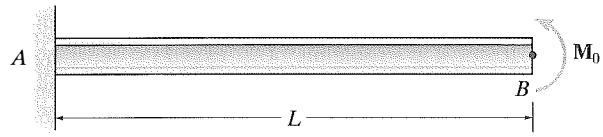
14.161. A viga em balanço é submetida a um momento $\mathbf{M}_0$ aplicado a sua extremidade. Determine a inclinação da viga em B. EI é constante. Use o método do trabalho virtual.

14.162. Resolva o Problema 14.161 usando o teorema de Castigliano.



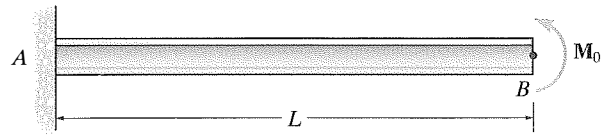
Problemas 14.161/162

14.163. A viga em balanço é submetida a um momento $\mathbf{M}_0$ aplicado a sua extremidade. Determine o deslocamento da viga em B. EI é constante. Use o método do trabalho virtual.



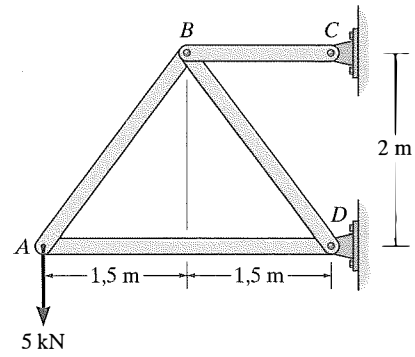
Problema 14.163

*__14.164.__ Resolva o Problema 14.163 usando o teorema de Castigliano.

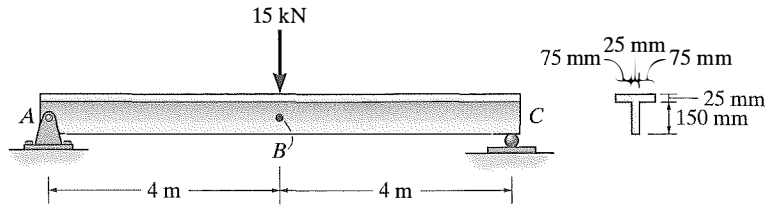


Problema 14.164

14.165. Determine o deslocamento vertical da articulação A. Cada barra é feita de aço A-36 e tem área de seção transversal de 600 mm^2. Use a conservação de energia.



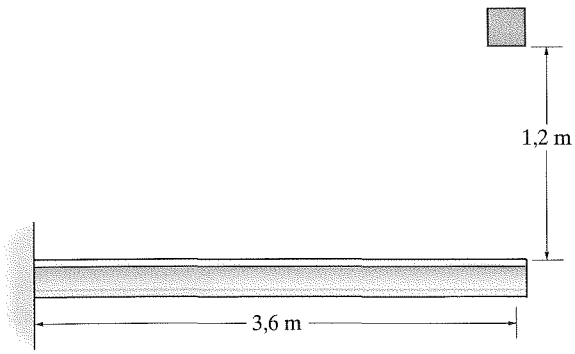
Problema 14.165



Problema 14.166

14.166. Determine o deslocamento do ponto B sobre a viga de alumínio. $E_{al} = 75$ GPa. Use a conservação de energia.

14.167. Um peso de 100 N (≈10 kg) é solto de uma altura de 1,2 m e cai sobre a extremidade de uma viga em balanço de aço A-36. Se a viga for um perfil W310 × 74, determine a tensão máxima desenvolvida na viga.



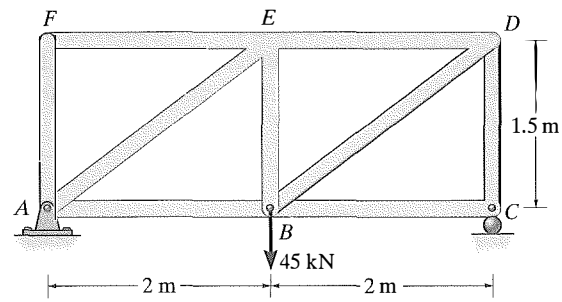
Problema 14.167

*__14.168.__ Determine o deslocamento vertical da articulação B. Para cada elemento $A = 400$ mm², $E = 200$ GPa. Use o método do trabalho virtual.

14.169. Resolva o Problema 14.168 usando o teorema de Castigliano.

14.170. Determine o deslocamento vertical da articulação E. Para cada elemento $A = 400$ mm², $E = 200$ GPa. Use o método do trabalho virtual.

14.171. Resolva o Problema 14.170 usando o teorema de Castigliano.



Problemas 14.168/169/170/171

A Propriedades geométricas de uma área

A.1 Centroide de uma área

O ***centroide*** de uma área refere-se ao ponto que define o centro geométrico dela. Se a área tiver uma forma arbitrária, como mostra a Figura A.1a, as coordenadas x e y que definem a localização do centroide C são determinadas pelas fórmulas

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} \tag{A.1}$$

Os numeradores dessas equações são formulações do 'momento de primeira ordem' do elemento de área dA em torno dos eixos y e x, respectivamente (Figura A.1b); os denominadores representam a área total A da forma.

Devemos observar que a localização do centroide de algumas áreas pode ser especificada parcial ou completamente pelas condições de simetria. Nos casos em que a área tem um eixo de simetria, o centroide estará localizado ao longo desse eixo. Por exemplo, o centroide C da área mostrada na Figura A.2 deve encontrar-se ao longo do eixo y, visto que, para cada área elementar dA à distância $+x$ à direita do eixo y há um elemento idêntico à distância $-x$ à esquerda. Portanto, o momento total para todos os elementos em torno do eixo de simetria se cancelará; isto é, $\int x\,dA = 0$ (Equação A.1), de modo que $x = 0$. Nos casos em que a forma tem dois eixos de simetria, decorre que o centroide encontra-se na interseção desses eixos (Figura A.3). Tomando como base o princípio da simetria ou usando a Equação A.1, as localizações dos centroides para formas de área comuns são apresentadas na parte interna da primeira capa deste livro.

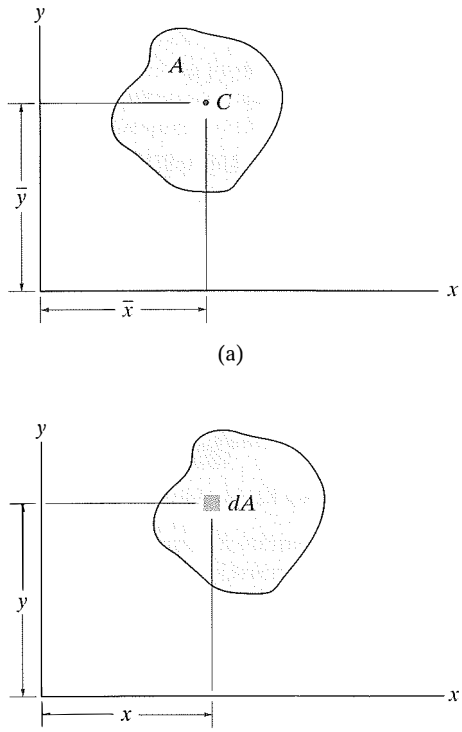


Figura A.1

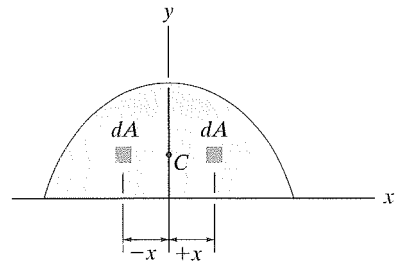


Figura A.2

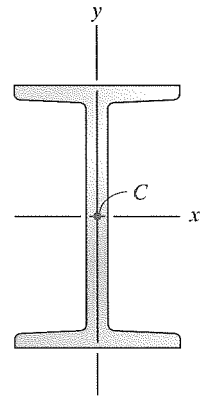


Figura A.3

Áreas compostas. Muitas vezes, uma área pode ser secionada ou dividida em várias partes com formas mais simples. Contanto que a área e a localização do centroide de cada uma dessas 'formas compostas' sejam conhecidas, podemos eliminar a necessidade de integração para determinar o centroide da área inteira. Nesse caso, devem ser usadas equações análogas à Equação A.1, porém substituindo as integrais por sinais de somatório finito; isto é,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x} A}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} \tag{A.2}$$

Nessas expressões matemáticas, $\bar{x}$ e $\bar{y}$ representam as *distâncias algébricas* ou coordenadas x, y do centroide de cada parte composta, e ΣA representa a soma das áreas das partes compostas ou, simplesmente, a *área total*. Em particular, se um furo ou uma região geométrica onde não exista nenhum material estiver localizado no interior de uma parte composta, o furo será considerado uma parte composta adicional com área *negativa*. Além disso, como já discutimos, se a área total for simétrica em torno de um eixo, o centroide da área encontra-se no eixo.

O exemplo a seguir ilustra a aplicação da Equação A.2.

EXEMPLO A.1

Localize o centroide C da área da seção transversal da viga T mostrada na Figura A.4a.

SOLUÇÃO I

O eixo y está localizado ao longo do eixo de simetria, de modo que $\bar{x} = 0$ (Figura A.4a). Para obter $\bar{y}$, definiremos o eixo x (eixo de referência) passando pela base da área, que é segmentada em dois retângulos como mostra a figura, e a localização $\bar{y}$ do centroide é definida para cada um deles. Aplicando a Equação A.2, temos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{[5\text{ cm}](10\text{ cm})(2\text{ cm}) + [11{,}5\text{ cm}](3\text{ cm})(8\text{ cm})}{(10\text{ cm})(2\text{ cm}) + (3\text{ cm})(8\text{ cm})}$$

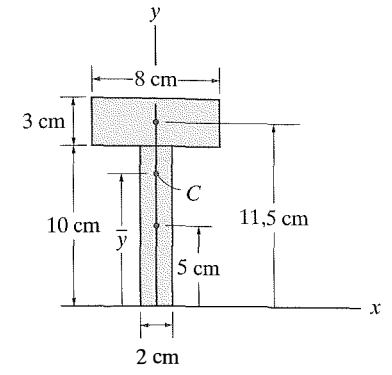
$$= 8{,}55\text{ cm} \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

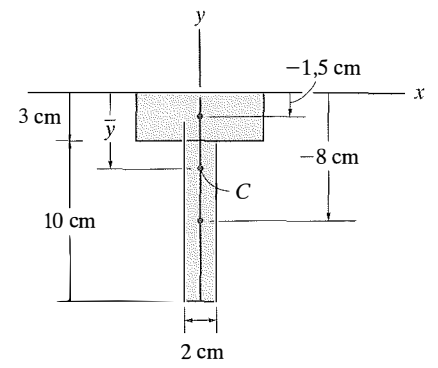
Usando os mesmos dois segmentos, o eixo x pode ser localizado na parte superior da área, como mostra a Figura A.4b. Nesse caso,

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{[-1{,}5\text{ cm}](3\text{ cm})(8\text{ cm}) + [-8\text{ cm}](10\text{ cm})(2\text{ cm})}{(3\text{ cm})(8\text{ cm}) + (10\text{ cm})(2\text{ cm})}$$

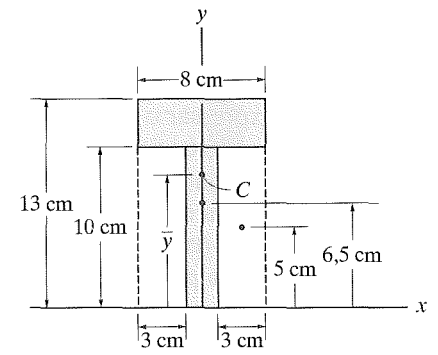
$$= -4{,}45\text{ cm}$$



(a)



(b)



(c)

Figura A.4

O sinal negativo indica que C está localizado *abaixo* da origem, o que era previsível. Observe também que, pelas duas respostas, 8,55 cm + 4,45 cm = 13,0 cm, que também é a profundidade da viga.

SOLUÇÃO III

Pode-se também considerar que a área da seção transversal é um único retângulo grande *menos* dois retângulos pequenos (Figura A.4c). Então, teremos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{[6{,}5\text{ cm}](13\text{ cm})(8\text{ cm}) - 2[5\text{ cm}](10\text{ cm})(3\text{ cm})}{(13\text{ cm})(8\text{ cm}) - 2(10\text{ cm})(3\text{ cm})}$$

$$= 8{,}55\text{ cm} \qquad \textit{Resposta}$$

A.2 Momento de inércia de uma área

Quando calculamos o centroide de uma área, consideramos o momento de primeira ordem da área em torno de um eixo; isto é, para executar o cálculo foi preciso calcular uma integral da forma $\int x\, dA$. Há alguns tópicos da resistência dos materiais que exigem o cálculo de uma integral do momento de segunda ordem de uma área, isto é, $\int x^2\, dA$. Essa integral é denominada ***momento de inércia*** de uma área. Para mostrar a definição formal do momento de inércia, considere a área A, mostrada na Figura A.5, que se encontra no plano x–y. Por definição, os momentos de inércia do elemento diferencial dA em torno dos eixos x e y são $dI_x = y^2 dA$ e $dI_y = x^2 dA$, respectivamente. Para a área inteira, o momento de inércia é determinado por integração, isto é,

$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2\, dA \\ I_y &= \int_A x^2\, dA \end{aligned}} \qquad \text{(A.3)}$$

Também podemos expressar o momento de segunda ordem do elemento diferencial em torno do polo O ou eixo z (Figura A.5), denominado *momento polar de inércia*, $dJ_O = r^2 dA$. Nessa expressão, r é a distância perpendicular entre o polo (eixo z) e o elemento dA. O momento polar de inércia para a área inteira é

$$J_O = \int_A r^2\, dA = I_x + I_y \qquad \text{(A.4)}$$

A relação entre J_O e I_x, I_y é possível, contanto que $r^2 = x^2 + y^2$ (Figura A.5).

Pelas formulações acima, vemos que I_x, I_y e J_O *sempre* serão *positivos*, já que envolvem o produto entre o quadrado de uma distância e uma área. Além disso, as unidades para o momento de inércia envolvem comprimento elevado à quarta potência, por exemplo, m^4, mm^4 ou $pé^4$, pol^4.

As equações acima foram usadas para calcular os momentos de inércia em torno dos *eixos centroides* de algumas formas de áreas comuns, apresentados no final deste livro.

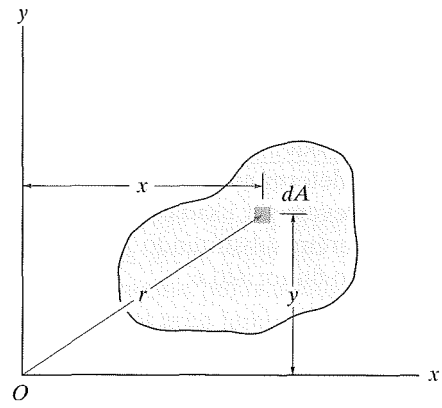


Figura A.5

Teorema dos eixos paralelos para uma área. Se o momento de inércia de uma área em torno de um eixo centroide for conhecido, poderemos determinar o momento de inércia da área em torno de um eixo paralelo correspondente por meio do *teorema dos eixos paralelos*. Para deduzir esse teorema, considere a determinação do momento de inércia em torno do eixo x da área mostrada na Figura A.6. Nesse caso, um elemento diferencial dA está localizado a uma distância arbitrária y' do eixo centroide x', ao passo que a *distância fixa* entre os eixos paralelos x e x' é definida como d_y. Visto que o momento de inércia de dA em torno do eixo x é $dI_x = (y' + dy)^2 dA$, então, para a área inteira,

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2\, dA$$

$$= \int_A y'^2\, dA + 2d_y \int_A y'\, dA + d_y^2 \int_A dA$$

O primeiro termo do lado direito representa o momento de inércia da área em torno do eixo x', $\bar{I}x'$.

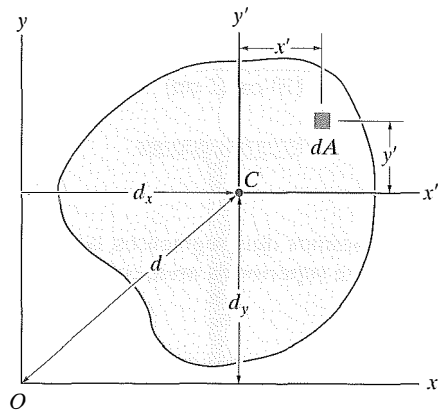


Figura A.6

O segundo termo é zero, visto que o eixo x' passa pelo centroide da área C, isto é, $\int y'\,dA = \bar{y}'A = 0$, já que $\bar{y}' = 0$. Portanto, o resultado final é

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 \qquad \text{(A.5)}$$

Uma expressão semelhante pode ser escrita para I_y, isto é,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 \qquad \text{(A.6)}$$

E, por fim, para o momento polar de inércia em torno de um eixo perpendicular ao plano x–y e que passa pelo polo O (*eixo z*) (Figura A.6), temos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \qquad \text{(A.7)}$$

A forma de cada uma dessas equações estipula que o momento de inércia de uma área em torno de um eixo é igual ao momento de inércia em torno de um eixo paralelo que passa pelo 'centroide' mais o produto entre a área e o quadrado da distância perpendicular entre os eixos.

Áreas compostas. Muitas áreas de seção transversal consistem em uma série de formas mais simples interligadas, como retângulos, triângulos e semicírculos. Contanto que o momento de inércia de cada uma dessas formas seja conhecido ou possa ser determinado em torno de um eixo comum, o momento de inércia da 'área composta' pode ser determinado como a *soma algébrica* dos momentos de inércia de suas partes compostas.

Para determinar adequadamente o momento de inércia de tal área em torno de um eixo específico, em primeiro lugar é necessário dividir a área em suas partes compostas e indicar a distância perpendicular entre o eixo especificado e o eixo centroide paralelo de cada parte. A tabela apresentada no final deste livro pode ser usada para calcular o momento de inércia em torno do eixo centroide de cada parte. Se esse eixo não coincidir com o especificado, o teorema do eixo paralelo, $I = \bar{I} + Ad^2$, deve ser usado para determinar o momento de inércia da parte em questão em torno do eixo especificado. Então, o momento de inércia da área inteira em torno desse eixo é determinado pela soma dos resultados de suas partes compostas. Em particular, se uma parte composta tiver um 'furo', o momento de inércia para a parte composta será determinado 'subtraindo-se' o momento de inércia do furo do momento de inércia da área inteira que inclui o furo.

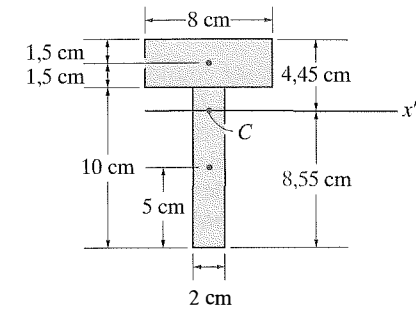
Os exemplos apresentados a seguir ilustram a aplicação desse método.

EXEMPLO A.2

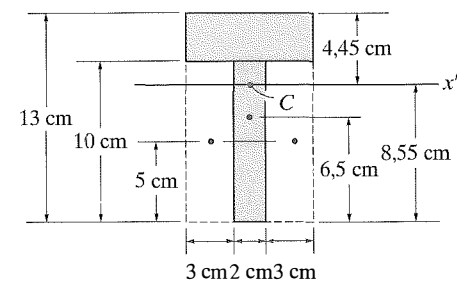
Determine o momento de inércia da área da seção transversal da viga T mostrada na Figura A.7a em torno do eixo centroide x'.

SOLUÇÃO I

A área é subdividida em dois retângulos como mostra a Figura A.7a para determinar a distância entre o eixo x' e cada eixo centroide. Pela tabela apresentada no final deste livro, o momento de inércia de um retângulo em torno de seu eixo centroide é $I = 1/12bh^3$. Aplicando o teorema dos eixos paralelos (Equação A.5), a cada retângulo e somando os resultados, temos



(a)



(b)

Figura A.7

$$I = \Sigma \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \left[\frac{1}{12}(2\text{ cm})(10\text{ cm})^3 + (2\text{ cm})(10\text{ cm})(8{,}55\text{ cm} - 5\text{ cm})^2\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{12}(8\text{ cm})(3\text{ cm})^3 + (8\text{ cm})(3\text{ cm})(4{,}45\text{ cm} - 1{,}5\text{ cm})^2\right]$$
$$I = 646\text{ cm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

SOLUÇÃO II

A área pode ser considerada como um único retângulo grande menos dois retângulos pequenos, como mostram as linhas tracejadas na Figura A.7b. Temos

$$I = \Sigma \bar{I}_{x'} + Ad_y^2$$
$$= \left[\frac{1}{12}(8\text{ cm})(13\text{ cm})^3 + (8\text{ cm})(13\text{ cm})(8{,}55\text{ cm} - 6{,}5\text{ cm})^2\right]$$
$$- \left[\frac{1}{12}(3\text{ cm})(10\text{ cm})^3 + (3\text{ cm})(10\text{ cm})(8{,}55\text{ cm} - 5\text{ cm})^2\right]$$
$$I = 646\text{ cm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

EXEMPLO A.3

Determine os momentos de inércia da área da seção transversal da viga mostrada na Figura A.8a em torno dos eixos centroides x e y.

SOLUÇÃO

A seção transversal pode ser considerada como três áreas compostas retangulares A, B e D mostradas na Figura A.8b. Para o cálculo, o centroide de cada um desses retângulos é localizado na figura. Pela tabela apresentada no final deste livro, o momento de inércia de um retângulo em torno de seu eixo centroide é $I = 1/12bh^3$. Por consequência, usando o teorema dos eixos paralelos para os retângulos A e D, os cálculos são os seguintes:

Retângulo A:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3$$
$$+ (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}425(10^9)\text{ mm}$$

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3$$
$$+ (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}90(10^9)\text{ mm}^4$$

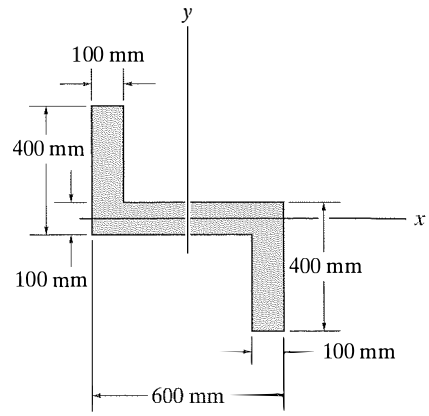
Retângulo B:

$$I_x = \frac{1}{12}(600\text{ mm})(100\text{ mm})^3 = 0{,}05(10^9)\text{ mm}^4$$

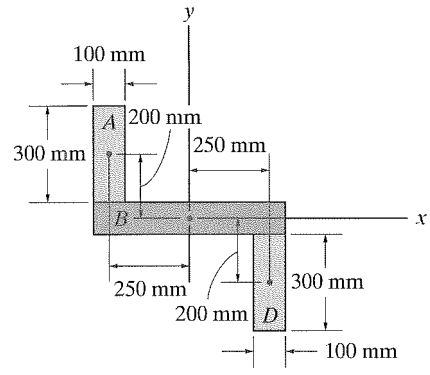
$$I_y = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(600\text{ mm})^3 = 1{,}80(10^9)\text{ mm}^4$$

Retângulo D:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3$$
$$+ (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}425(10^9)\text{ mm}^4$$



(a)



(b)

Figura A.8

$$I_y = \bar{I}_{y'} + Ad_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3$$
$$+ (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1{,}90(10^9)\text{ mm}^4$$

Logo, os momentos de inércia para a seção transversal inteira são

$$I_x = 1{,}425(10^9) + 0{,}05(10^9) + 1{,}425(10^9)$$
$$= 2{,}90(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

$$I_y = 1{,}90(10^9) + 1{,}80(10^9) + 1{,}90(10^9)$$
$$= 5{,}60(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

A.3 Produto de inércia para uma área

Em geral, o momento de inércia para uma área é diferente para cada eixo em torno do qual é calculado. Em

algumas aplicações de projeto mecânico ou estrutural, necessita-se saber a orientação desses eixos que dão, respectivamente, os momentos de inércia máximo e mínimo da área. A Seção A.4 discute o método para determinar isso. Todavia, para utilizá-lo, em primeiro lugar deve-se calcular o produto de inércia para a área, bem como seus momentos de inércia para os eixos x, y dados.

O ***produto de inércia*** para o elemento diferencial dA na Figura A.9, que está localizado no ponto (x, y), é definido como $dI_{xy} = xy\,dA$. Dessa forma, para a área inteira A, o produto de inércia é

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA \tag{A.8}$$

Como ocorre para o momento de inércia, as unidades de comprimento do produto de inércia são elevadas à quarta potência, por exemplo, m^4, mm^4, $pé^4$, pol^4. Entretanto, visto que x ou y podem representar uma quantidade negativa, ao passo que o elemento de área é sempre positivo, o produto de inércia pode ser positivo, negativo ou zero, dependendo da localização e orientação dos eixos coordenados. Por exemplo, o produto de inércia I_{xy} para uma área será *zero* se o eixo x ou o *eixo* y, for um eixo de simetria para a área. Para mostrar isso, considere a área sombreada na Figura A.10, na qual, para cada elemento dA localizado no ponto (x, y), há um elemento de área correspondente dA localizado em $(x, -y)$. Visto que os produtos de inércia para esses elementos são, respectivamente, $xy\,dA$ e $-xy\,dA$, quando da soma algébrica ou da integração de todos os elementos de área escolhidos desse modo, eles se cancelarão mutuamente. Por consequência, o produto de inércia para a área total torna-se zero. Além disso, decorre da definição de I_{xy} que o 'sinal' dessa quantidade depende do quadrante no qual a área está localizada. Como mostra a Figura A.11, o sinal de I_{xy} mudará à medida que a área girar de um quadrante para outro.

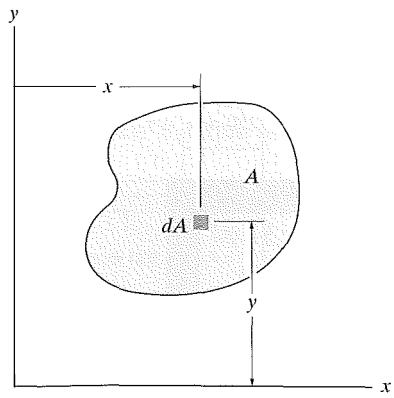


Figura A.9

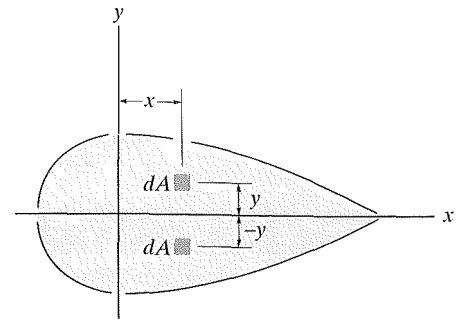


Figura A.10

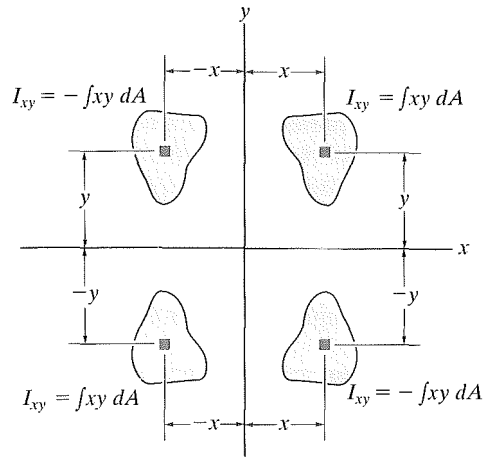


Figura A.11

Teorema dos eixos paralelos. Considere a área sombreada mostrada na Figura A.12, na qual x' e y' representam um conjunto de eixos centroides e x e y representam um conjunto correspondente de eixos paralelos. Considerando que o produto de inércia de dA em relação aos eixos x e y é $dI_{xy} = (x' + dx)(y' + dy)dA$, para a área inteira,

$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y)\,dA$$

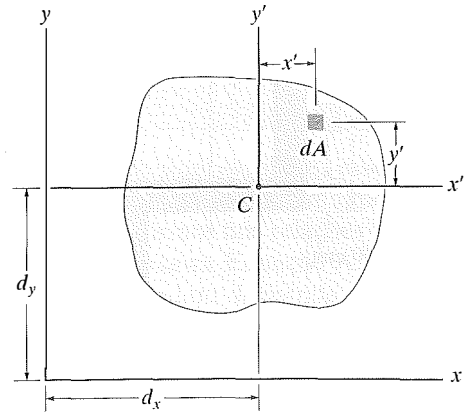


Figura A.12

$$= \int_A x'y'\,dA + d_x \int_A y'\,dA$$

$$+ d_y \int_A x'\,dA + d_x d_y \int_A dA$$

O primeiro termo à direita representa o produto de inércia da área em relação ao eixo centroide $\bar{I}_{x'y'}$. Os segundo e terceiro termos equivalem a zero, já que os momentos da área são considerados em torno do eixo centroide. Como sabemos que a quarta integral representa a área total A, temos, portanto, como resultado final

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \tag{A.9}$$

Deve-se notar a similaridade entre essa equação e o teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia. Em particular, é importante que os *sinais algébricos* para d_x e d_y sejam mantidos quando da aplicação da Equação A.9. Como ilustrado no exemplo a seguir, o teorema dos eixos paralelos encontra importante aplicação na determinação do produto de inércia de uma *área composta* em relação a um conjunto de eixos x, y.

EXEMPLO A.4

Determine o produto de inércia da área da seção transversal da viga mostrada na Figura A.13a em torno dos eixos centroides x e y.

SOLUÇÃO

Como no exemplo A.3, a seção transversal pode ser considerada como três áreas retangulares compostas, A, B e D (Figura A.13b). As coordenadas para os centroides de cada um desses retângulos são mostradas na figura. Devido à simetria, o produto de inércia de *cada retângulo* é igual *zero* em torno de um conjunto de eixos x', y' que passam pelo centroide do retângulo. Por consequência, a aplicação do teorema dos eixos paralelos a cada um dos retângulos dá como resultado

Retângulo *A*:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \\ &= 0 + (300\text{ mm})(100\text{ mm})(-250\text{ mm})(200\text{ mm}) \\ &= -1{,}50(10^9)\text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Retângulo *B*:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Retângulo *D*:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \\ &= 0 + (300\text{ mm})(100\text{ mm})(250\text{ mm})(-200\text{ mm}) \\ &= -1{,}50(10^9)\text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Logo, o produto de inércia para a seção transversal inteira é

$$\begin{aligned} I_{xy} &= [-1{,}50(10^9)] + 0 + [-1{,}50(10^9)] \\ &= -3{,}00(10^9)\text{ mm}^4 \end{aligned}$$ *Resposta*

A.4 Momentos de inércia para uma área em torno de eixos inclinados

Em projeto mecânico ou estrutural, às vezes é necessário calcular os momentos e produtos de inércia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ para uma área em relação a um conjunto de eixos x' e y' inclinados quando os valores de θ, I_x, I_y e

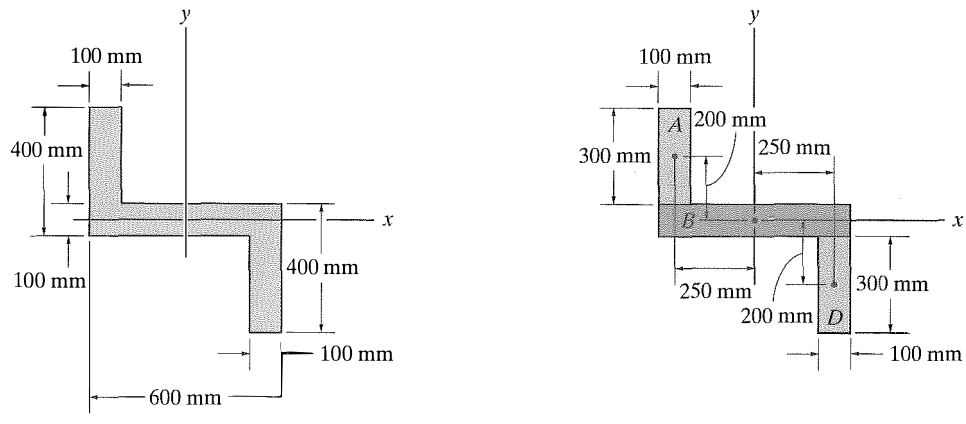


Figura A.13

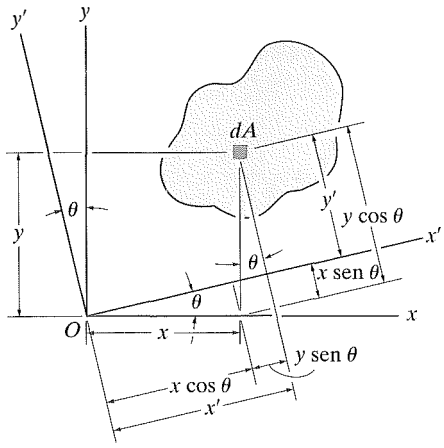


Figura A.14

I_{xy} são *conhecidos.* Como mostra a Figura A.14, as coordenadas para o elemento de área dA em relação aos dois sistemas de coordenadas estão relacionadas pelas *equações de transformação*

$$x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta$$
$$y' = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta$$

Por essas equações, os momentos e produto de inércia de dA em torno dos eixos x' e y' tornam-se

$$dI_{x'} = y'^2\,dA = (y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)^2\,dA$$
$$dI_{y'} = x'^2\,dA = (x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta)^2\,dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y'\,dA$$

$$= (x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta)(y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta)\,dA$$

Expandindo cada expressão e integrando, e percebendo que $I_x = \int y^2\,dA$, $I_y = \int x^2\,dA$ e $I_{xy} = \int xy\,dA$, obtemos

$$I_{x'} = I_x\cos^2\theta + I_y\,\text{sen}^2\theta - 2I_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$I_{y'} = I_x\,\text{sen}^2\theta + I_y\cos^2\theta + 2I_{xy}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$
$$I_{x'y'} = I_x\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - I_y\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$$

Essas equações podem ser simplificadas por meio das identidades trigonométricas $\text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$, o que dá como resultado

$$\boxed{\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \\ I_{y'} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \\ I_{x'y'} &= \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \end{aligned}} \quad \text{(A.10)}$$

Observe que, se somarmos a primeira e a segunda equações, veremos que o momento polar de inércia em torno do eixo z que passa pelo ponto O é *independente* da orientação dos eixos x' e y', isto é,

$$J_O = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

Momentos principais de inércia. A Equação A.10 mostra que $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ dependem do ângulo de inclinação, θ, dos eixos x', y'. Agora, determinaremos a orientação desses eixos em torno dos quais os momentos de inércia da área, $I_{x'}$ e $I_{y'}$ são máximos e mínimos. Esse conjunto particular de eixos é denominado ***eixos principais*** *de inércia* para a área, e os momentos de inércia correspondentes em relação a esses eixos são denominados *momentos principais de inércia.* Em geral, há um conjunto de eixos principais para cada origem escolhida O; todavia, normalmente o centroide da área é a localização mais importante para O.

O ângulo $\theta = \theta_p$, que define a orientação dos eixos principais para a área, pode ser determinado diferenciando a primeira Equação A.10 em relação a θ e igualando o resultado a zero. Assim,

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\text{sen}\,2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

Portanto, em $\theta = \theta_p$,

$$\boxed{\text{tg}\,2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2}} \quad \text{(A.11)}$$

Essa equação tem duas raízes, θ_{p1} e θ_{p2}, separadas por um ângulo de 90° e, portanto, especificam a inclinação de cada eixo principal.

O seno e o cosseno de $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ podem ser obtidos pelos triângulos mostrados na Figura A.15, que se baseiam na Equação A.11. Substituindo essas relações trigonométricas na primeira ou na segunda Equação A.10 e simplificando, o resultado é

$$\boxed{I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}} \quad \text{(A.12)}$$

Dependendo do sinal escolhido, esse resultado dá o momento de inércia máximo ou mínimo da área. Além do mais, se substituirmos tais relações trigonométricas para θ_{p1} e θ_{p2} na terceira Equação A.10, veremos que $I_{x'y'} = 0$; isto é, o *produto de inércia em relação aos eixos principais equivale a zero.* Visto que na Seção A.3 indicamos que o produto de inércia é igual a zero em relação a qualquer eixo simétrico, decorre, por consequência, que *qualquer eixo simétrico representa um eixo principal de inércia para a área.*

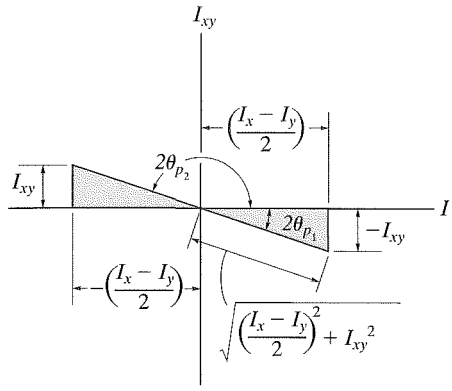


Figura A.15

Observe também que as equações deduzidas nesta seção são semelhantes àquelas para a transformação de tensão e deformação desenvolvidas nos capítulos 9 e 10, respectivamente. O exemplo a seguir ilustra sua aplicação.

EXEMPLO A.5

Determine os momentos principais de inércia para a área da seção transversal da viga mostrada na Figura A.16 em relação a um eixo que passa pelo centroide C.

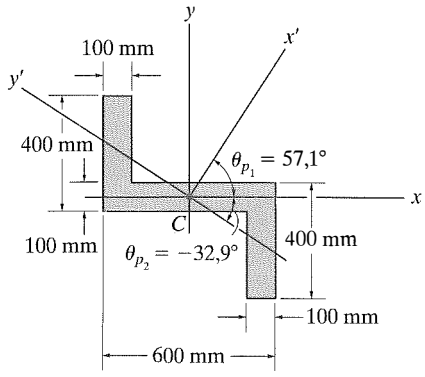


Figura A.16

SOLUÇÃO

Os momentos e o produto de inércia da seção transversal em relação aos eixos x, y foram calculados nos exemplos A.3 e A.4. Os resultados são

$$I_x = 2,90(10^9)\text{mm}^4 \quad I_y = 5,60(10^9)\text{mm}^4 \quad I_{xy} = -3,00(10^9)\text{mm}^4$$

A Equação A.11 nos dá os ângulos de inclinação dos eixos principais x' e y'

$$\text{tg}\,2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{3,00(10^9)}{[2,90(10^9) - 5,60(10^9)]/2} = -2,22$$

$$2\theta_{p_1} = 114,2° \quad \text{e} \quad 2\theta_{p_2} = -65,8°$$

Logo, como mostra a Figura A.16,

$$\theta_{p1} = 57,1° \quad \text{e} \quad \theta_{p2} = -32,9°$$

Os momentos principais de inércia em relação aos eixos x' e y' são determinados pela Equação A.12. Por consequência,

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{2,90(10^9) + 5,60(10^9)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{2,90(10^9) - 5,60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3,00(10^9)]^2}$$

$$= 4,25(10^9) \pm 3,29(10^9)$$

ou

$$I_{\text{máx}} = 7,54(10^9)\text{mm}^4 \quad I_{\text{mín}} = 0,960(10^9)\text{mm}^4 \quad \textit{Resposta}$$

Especificamente, o momento de inércia máximo, $I_{\text{máx}} = 7,54(10^9)\text{mm}^4$, ocorre em relação ao eixo x' (eixo maior) já que, *por inspeção,* grande parte da área da seção transversal encontra-se na posição mais afastada desse eixo. Provamos isso substituindo os dados na primeira Equação A.10 por $\theta = 57,1°$.

A.5 Círculo de Mohr para momentos de inércia

As equações A.10 a A.12 têm uma solução gráfica que é conveniente usar e, de modo geral, fácil de lembrar. Elevando ao quadrado a primeira e a terceira das Equações A.10 e somando, temos como resultado

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2 \quad \text{(A.13)}$$

Em qualquer problema dado, $I_{x'}$ e $I_{y'}$ são *variáveis* e I_x, I_y e I_{xy} são *constantes conhecidas.* Assim, a Equação A.13 pode ser escrita em forma compacta como

$$(I_{x'} - a)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

A representação gráfica dessa equação é um *círculo* de raio

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

cujo centro está localizado no ponto $(a, 0)$, onde $a = (I_x + I_y)/2$. O círculo construído dessa maneira é denominado *círculo de Mohr.* Sua aplicação assemelha-se à usada para as transformações de tensão e deformação desenvolvidas nos capítulos 9 e 10, respectivamente.

PROCEDIMENTO DE ANÁLISE

A principal finalidade da utilização do círculo de Mohr aqui é dispor de um modo conveniente para transformar I_x, I_y e I_{xy} nos momentos principais de inércia. O procedimento descrito a seguir nos dá um método para fazer isso.

Calcule I_x, I_y e I_{xy}

Determine os eixos x, y para a área, com a origem localizada no ponto P de interesse, normalmente o centroide, e determine I_x, I_y e I_{xy} (Figura A.17a).

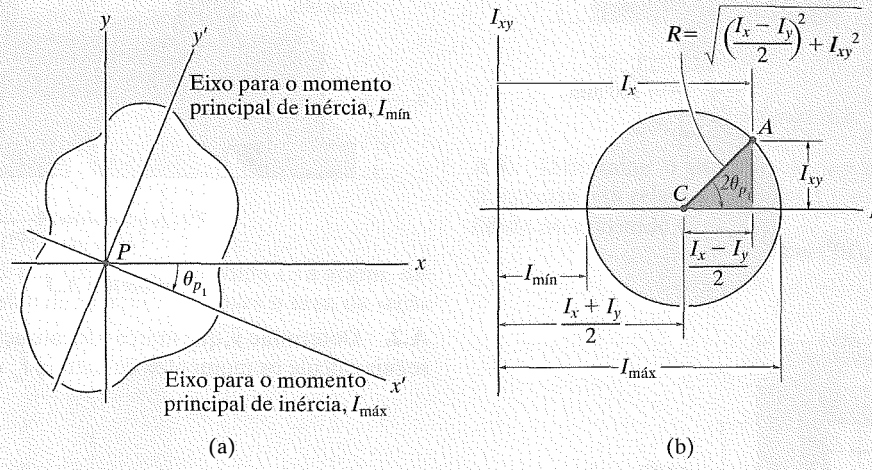


Figura A.17

Construa o círculo

Determine um sistema coordenado retangular tal que a abscissa represente o momento de inércia I e a ordenada represente o produto de inércia I_{xy} (Figura A.17b). Determine o centro do círculo, C, que está localizado a uma distância $(I_x + I_y)/2$ da origem, e marque o 'ponto de referência' A cujas coordenadas são (I_x, I_{xy}). Por definição, I_x é sempre positivo, ao passo que I_{xy} será ou positivo ou negativo. Ligue o ponto de referência A ao centro do círculo e determine a distância CA por trigonometria. Essa distância representa o raio do círculo (Figura A.17b.) Por fim, trace o círculo.

Momentos principais de inércia

Os pontos onde o círculo intercepta a abscissa dão os valores dos momentos principais de inércia $I_{mín}$ e $I_{máx}$. Observe que o *produto de inércia será igual a zero nesses pontos* (Figura A.17b).

Para determinar a direção do eixo principal maior, calcule por trigonometria o ângulo $2\theta_{p1}$, *medido entre o raio CA e o eixo I positivo* (Figura A.17b). Esse ângulo representa duas vezes o ângulo entre o eixo x e o eixo de momento de inércia máximo $I_{máx}$ (Figura A.17a). O ângulo no círculo, $2\theta_{p1}$, e o ângulo na área, θ_{p1}, *devem ser medidos no mesmo sentido,* como mostrado na Figura A.17. O eixo menor serve para o momento de inércia mínimo $I_{mín}$, que é perpendicular ao eixo maior que define $I_{máx}$.

EXEMPLO A.6

Use o Círculo de Mohr para determinar os momentos principais de inércia para a área da seção transversal da viga mostrada na Figura A.18a, em relação aos eixos que passam pelo centroide C.

SOLUÇÃO

Calcule I_x, I_y, I_{xy}. Os momentos de inércia e o produto de inércia foram determinados nos exemplos A.3 e A.4 em relação aos *eixos x, y* mostrados na Figura A.18a. Os resultados são $I_x = 2{,}90(10^9)\text{mm}^4$, $I_y = 5{,}60(10^9)\text{mm}^4$ e $I_{xy} = -3{,}00(10^9)\text{mm}^4$.

Construa o círculo. Os eixos I e I_{xy} são mostrados na Figura A.18b. O centro do círculo, C, está a uma distância $(I_x + I_y)/2 = (2{,}90 + 5{,}60)/2 = 4{,}25$ da origem. Ligando o ponto de referência A(2,90, −3,00) ao ponto C, o raio CA pode ser determinado aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo sombreado CBA:

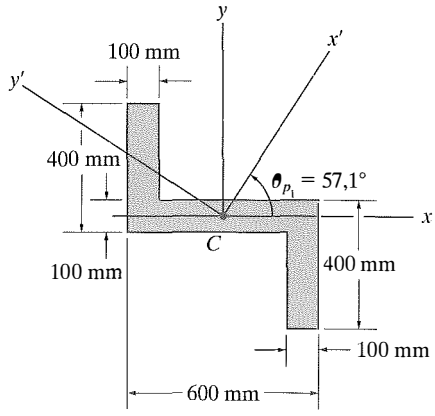
$$CA = \sqrt{(1{,}35)^2 + (-3{,}00)^2} = 3{,}29$$

O círculo construído é mostrado na Figura A.18c.

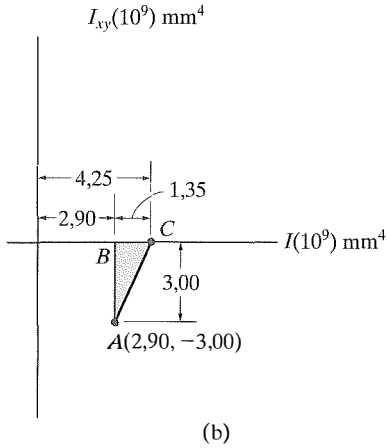
Momentos principais de inércia. O círculo intercepta o eixo I nos pontos (7,54, 0) e (0,960, 0). Por consequência,

$$I_{máx} = 7{,}54(10^9)\text{mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$

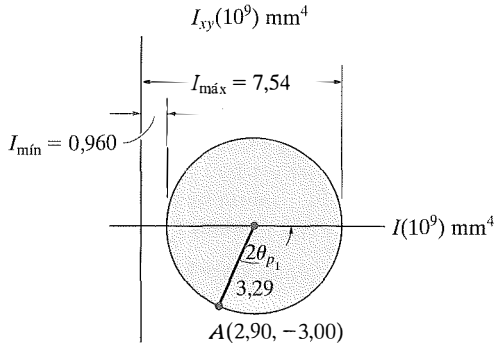
$$I_{mín} = 0{,}960(10^9)\text{mm}^4 \qquad \textit{Resposta}$$



(a)



(b)



(c)

Figura A.18

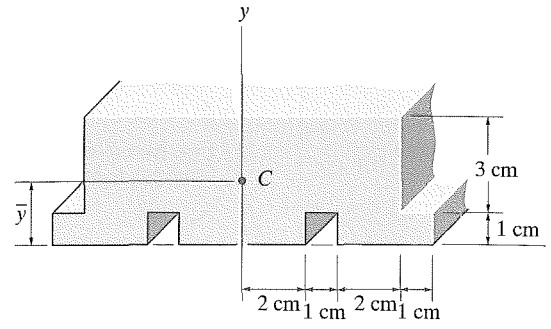
Como mostra a Figura A.18c, o ângulo $2\theta_{p1}$ é medido no próprio círculo, *em sentido anti-horário* a partir de CA, na direção do eixo I positivo. Por consequência,

$$2\theta_{p_1} = 180° - \text{tg}^{-1}\left(\frac{|BA|}{|BC|}\right) = 180° - \text{tg}^{-1}\left(\frac{3,00}{1,35}\right) = 114,2°$$

Portanto, o eixo maior principal [para $I_{máx} = 7,54(10^9)\text{mm}^4$] está orientado a um ângulo $\theta_{p1} = 57,1°$ medido *em sentido anti-horário* a partir do eixo x *positivo*. O eixo menor é perpendicular a este eixo. Os resultados são mostrados na Figura A.18a.

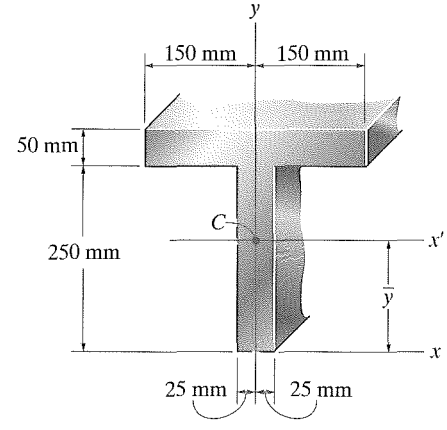
PROBLEMAS

A.1. Determine a localização $\bar{y}$ do centroide C para a área da seção transversal da viga. A viga é simétrica em relação ao eixo y.



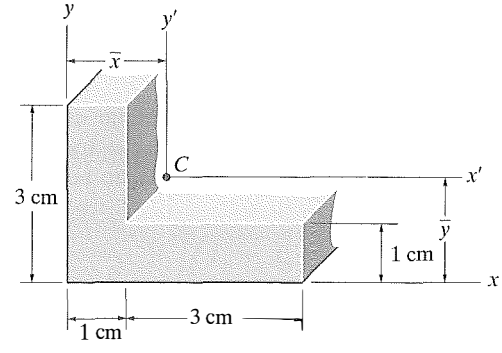
Problema A.1

A.2. Determine $\bar{y}$, que marca a localização do centroide, e a seguir calcule os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$ e $\bar{I}_{y'}$ para a viga T.



Problema A.2

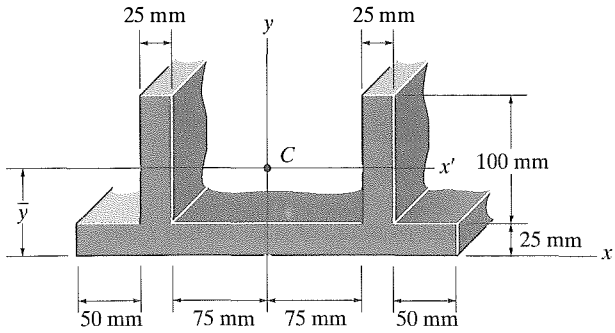
A.3. Determine a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centroide C; a seguir, determine os momentos de inércia $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{x'}$.



Problema A.3

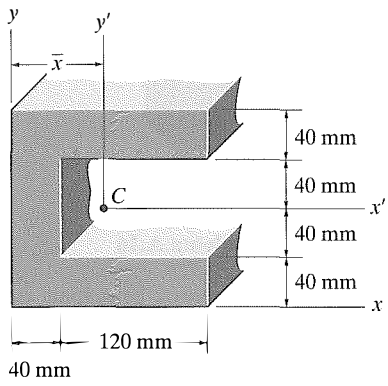
A.4. Determine o centroide $\underline{y}$ para a área da seção transversal da viga; a seguir, calcule $\bar{I}_{x'}$.

A.5. Determine I_y para a viga que tenha a área de seção transversal mostrada.



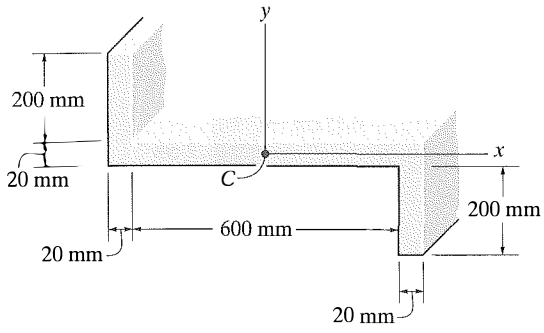
Problemas A.4/5

A.6. Determine $\bar{x}$ que localiza o centroide *C;* a seguir, determine os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ para a área da seção transversal.



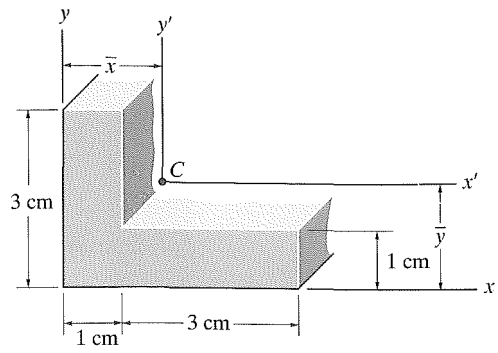
Problema A.6

A.7. Determine os momentos de inércia I_x e I_y da seção *Z*. A origem das coordenadas está no centroide *C*.



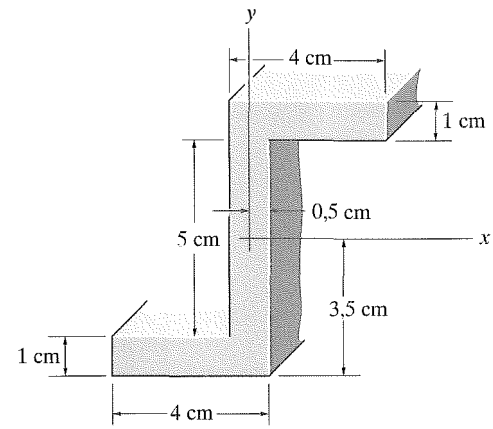
Problema A.7

***A.8.** Determine a localização $(\bar{x}, \bar{y})$ do centroide *C* da área da seção transversal da cantoneira e, então, calcule o produto de inércia em relação aos eixos x' e y'.



Problema A.8

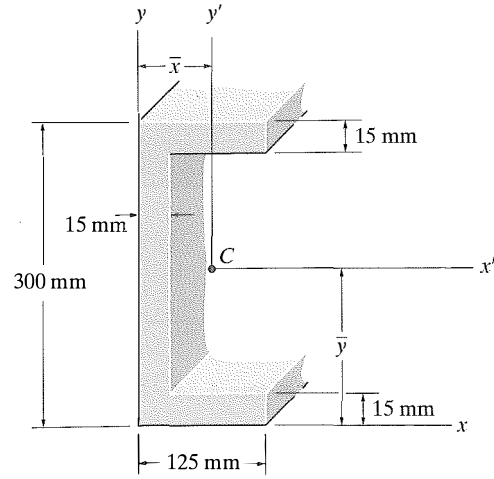
A.9. Determine o produto de inércia da área da seção transversal em relação aos eixos *x* e *y* cuja origem está localizada no centroide *C*.



Problema A.9

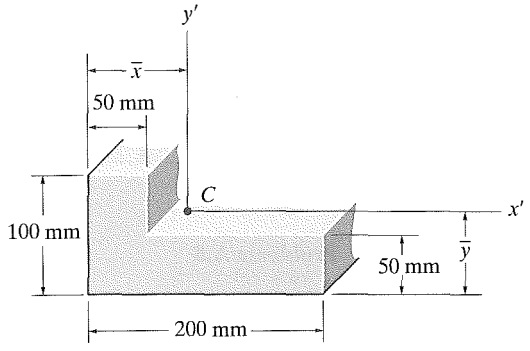
A.10. Localize o centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ da seção da canaleta e, a seguir, calcule os momentos de inércia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$.

A.11. Localize o centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ da seção da canaleta e, a seguir, determine o produto de inércia $\bar{I}_{x'y'}$ em relação aos eixos x' e y'.



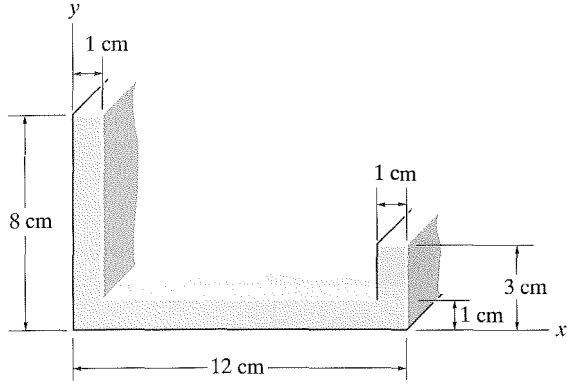
Problemas A.10/11

*A.12. Localize a posição $(\bar{x}, \bar{y})$ do centroide C da área da seção transversal e, a seguir, determine o produto de inércia em relação aos eixos x' e y'.



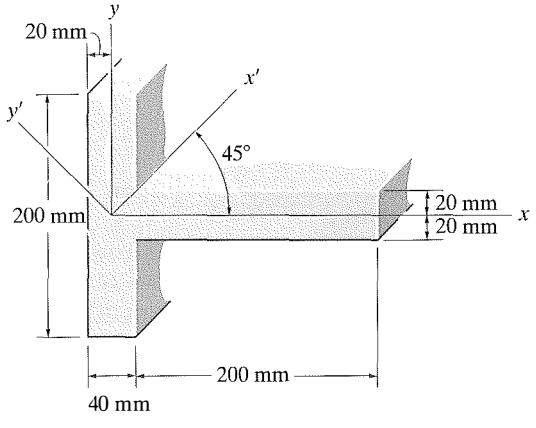
Problema A.12

A.13. Determine o produto de inércia da área em relação aos eixos x e y.



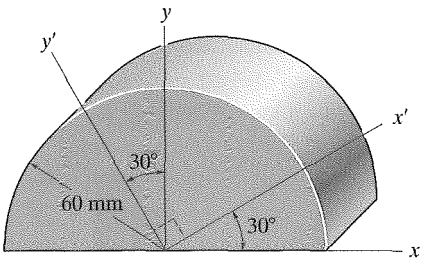
Problema A.13

A.14. Determine os momentos de inércia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ da área sombreada.



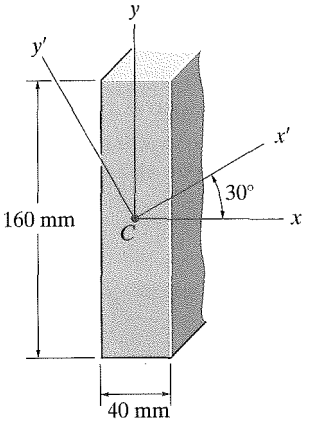
Problema A.14

A.15. Determine os momentos de inércia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ e o produto de inércia $I_{x'y'}$ para a área semicircular.



Problema A.15

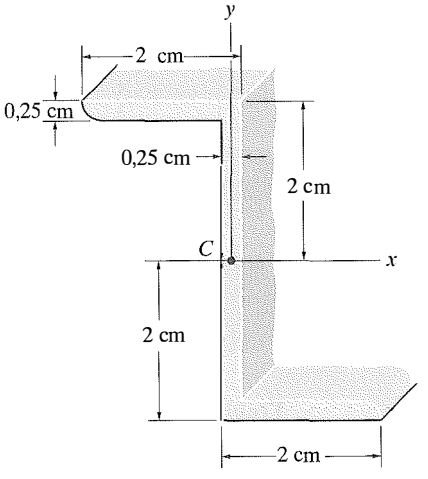
*A.16. Determine os momentos de inércia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ e o produto de inércia $I_{x'y'}$ para a área retangular. Os eixos x' e y' passam pelo centroide C.



Problema A.16

A.17. Determine os momentos principais de inércia da área da seção transversal em torno dos eixos principais cuja origem está localizada no centroide C. Use as equações desenvolvidas na Seção A.4. Para o cálculo, considere que todos os cantos são quadrados.

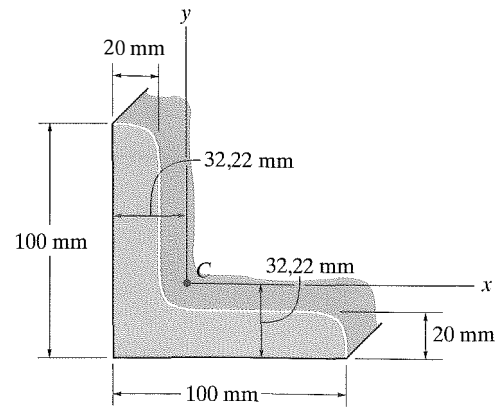
A.18. Resolva o Problema A.17 usando o Círculo de Mohr.



Problemas A.17/18

A.19. Determine os momentos principais de inércia para a área da seção transversal da cantoneira em relação a um conjunto de eixos principais cuja origem está localizada no centroide *C*. Use as equações desenvolvidas na Seção A.4. Para o cálculo, suponha que todos os cantos são quadrados.

*__A.20.__ Resolva o Problema A.19 usando o círculo de Mohr.

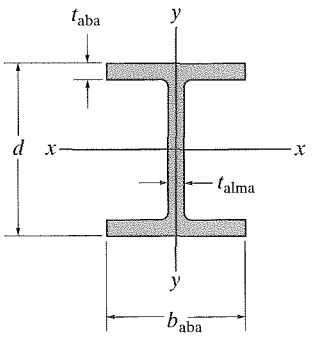


Problemas A.19/20

B Propriedades geométricas de perfis estruturais

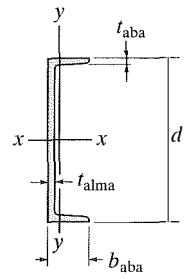
Seções de abas largas ou perfis em W — Unidades SI

Descrição	Área	Altura	Espessura da alma	Aba		eixo x–x			eixo y–y		
				largura	espessura						
	A	d	t_{alma}	b_{aba}	t_{aba}	I	S	r	I	S	r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	$10^6\ mm^4$	$10^3\ mm^3$	mm	$10^6\ mm^4$	$10^3\ mm^3$	mm
W610 × 155	19.800	611	12,70	324,0	19,0	1.290	4.220	255	108	667	73,9
W610 × 140	17.900	617	13,10	230,0	22,2	1.120	3.630	250	45,1	392	50,2
W610 × 125	15.900	612	11,90	229,0	19,6	985	3.220	249	39,3	343	49,7
W610 × 113	14.400	608	11,20	228,0	17,3	875	2.880	247	34,3	301	48,8
W610 × 101	12.900	603	10,50	228,0	14,9	764	2.530	243	29,5	259	47,8
W610 × 92	11.800	603	10,90	179,0	15,0	646	2.140	234	14,4	161	34,9
W610 × 82	10.500	599	10,00	178,0	12,8	560	1.870	231	12,1	136	33,9
W460 × 97	12.300	466	11,40	193,0	19,0	445	1.910	190	22,8	236	43,1
W460 × 89	11.400	463	10,50	192,0	17,7	410	1.770	190	20,9	218	42,8
W460 × 82	10.400	460	9,91	191,0	16,0	370	1.610	189	18,6	195	42,3
W460 × 74	9.460	457	9,02	190,0	14,5	333	1.460	188	16,6	175	41,9
W460 × 68	8.730	459	9,14	154,0	15,4	297	1.290	184	9,41	122	32,8
W460 × 60	7.590	455	8,00	153,0	13,3	255	1.120	183	7,96	104	32,4
W460 × 52	6.640	450	7,62	152,0	10,8	212	942	179	6,34	83,4	30,9
W410 × 85	10.800	417	10,90	181,0	18,2	315	1.510	171	18,0	199	40,8
W410 × 74	9.510	413	9,65	180,0	16,0	275	1.330	170	15,6	173	40,5
W410 × 67	8.560	410	8,76	179,0	14,4	245	1.200	169	13,8	154	40,2
W410 × 53	6.820	403	7,49	177,0	10,9	186	923	165	10,1	114	38,5
W410 × 46	5.890	403	6,99	140,0	11,2	156	774	163	5,14	73,4	29,5
W410 × 39	4.960	399	6,35	140,0	8,8	126	632	159	4,02	57,4	28,5
W360 × 79	10.100	354	9,40	205,0	16,8	227	1.280	150	24,2	236	48,9
W360 × 64	8.150	347	7,75	203,0	13,5	179	1.030	148	18,8	185	48,0
W360 × 57	7.200	358	7,87	172,0	13,1	160	894	149	11,1	129	39,3
W360 × 51	6.450	355	7,24	171,0	11,6	141	794	148	9,68	113	38,7
W360 × 45	5.710	352	6,86	171,0	9,8	121	688	146	8,16	95,4	37,8
W360 × 39	4.960	353	6,48	128,0	10,7	102	578	143	3,75	58,6	27,5
W360 × 33	4.190	349	5,84	127,0	8,5	82,9	475	141	2,91	45,8	26,4
W310 × 129	16.500	318	13,10	308,0	20,6	308	1.940	137	100	649	77,8
W310 × 74	9.480	310	9,40	205,0	16,3	165	1.060	132	23,4	228	49,7
W310 × 67	8.530	306	8,51	204,0	14,6	145	948	130	20,7	203	49,3
W310 × 39	4.930	310	5,84	165,0	9,7	84,8	547	131	7,23	87,6	38,3
W310 × 33	4.180	313	6,60	102,0	10,8	65,0	415	125	1,92	37,6	21,4
W310 × 24	3.040	305	5,59	101,0	6,7	42,8	281	119	1,16	23,0	19,5
W310 × 21	2.680	303	5,08	101,0	5,7	37,0	244	117	0,986	19,5	19,2



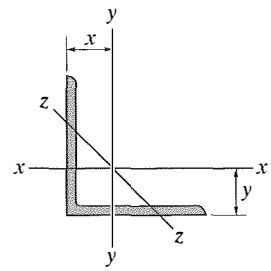
Seções de abas largas ou perfis em W — Unidades SI

Descrição	Área	Altura	Espessura da alma	Aba		eixo x–x			eixo y–y		
				largura	espessura						
	A	d	t_{alma}	t_{aba}	b_{aba}	I	S	r	I	S	r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm
W250 × 149	19.000	282	17,30	263,0	28,4	259	1.840	117	86,2	656	67,4
W250 × 80	10.200	256	9,40	255,0	15,6	126	984	111	43,1	338	65,0
W250 × 67	8.560	257	8,89	204,0	15,7	104	809	110	22,2	218	50,9
W250 × 58	7.400	252	8,00	203,0	13,5	87,3	693	109	18,8	185	50,4
W250 × 45	5.700	266	7,62	148,0	13,0	71,1	535	112	7,03	95	35,1
W250 × 28	3.620	260	6,35	102,0	10,0	39,9	307	105	1,78	34,9	22,2
W250 × 22	2.850	254	5,84	102,0	6,9	28,8	227	101	1,22	23,9	20,7
W250 × 18	2.280	251	4,83	101,0	5,3	22,5	179	99,3	0,919	18,2	20,1
W200 × 100	12.700	229	14,50	210,0	23,7	113	987	94,3	36,6	349	53,7
W200 × 86	11.000	222	13,00	209,0	20,6	94,7	853	92,8	31,4	300	53,4
W200 × 71	9.100	216	10,20	206,0	17,4	76,6	709	91,7	25,4	247	52,8
W200 × 59	7.580	210	9,14	205,0	14,2	61,2	583	89,9	20,4	199	51,9
W200 × 46	5.890	203	7,24	203,0	11,0	45,5	448	87,9	15,3	151	51,0
W200 × 36	4.570	201	6,22	165,0	10,2	34,4	342	86,8	7,64	92,6	40,9
W200 × 22	2.860	206	6,22	102,0	8,0	20,0	194	83,6	1,42	27,8	22,3
W150 × 37	4.730	162	8,13	154,0	11,6	22,2	274	68,5	7,07	91,8	38,7
W150 × 30	3.790	157	6,60	153,0	9,3	17,1	218	67,2	5,54	72,4	38,2
W150 × 22	2.860	152	5,84	152,0	6,6	12,1	159	65,0	3,87	50,9	36,8
W150 × 24	3.060	160	6,60	102,0	10,3	13,4	168	66,2	1,83	35,9	24,5
W150 × 18	2.290	153	5,84	102,0	7,1	9,19	120	63,3	1,26	24,7	23,5
W150 × 14	1.730	150	4,32	100,0	5,5	6,84	91,2	62,9	0,912	18,2	23,0



Canaletas ou perfis em C padrão americano — Unidades SI

Descrição	Área	Altura	Espessura da alma	Aba		eixo *x*–*x*			eixo *y*–*y*		
				largura	espessura						
	A	*d*	t_{alma}	b_{aba}	t_{aba}	*I*	*S*	*r*	*I*	*S*	*r*
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	$10^6\ mm^4$	$10^3\ mm^3$	mm	$10^6\ mm^4$	$10^3\ mm^3$	mm
C380 × 74	9.480	381,0	18,20	94,4	16,50	168	882	133	4,58	61,8	22,0
C380 × 60	7.610	381,0	13,20	89,4	16,50	145	761	138	3,84	55,1	22,5
C380 × 50	6.430	381,0	10,20	86,4	16,50	131	688	143	3,38	50,9	22,9
C310 × 45	5.690	305,0	13,00	80,5	12,70	67,4	442	109	2,14	33,8	19,4
C310 × 37	4.740	305,0	9,83	77,4	12,70	59,9	393	112	1,86	30,9	19,8
C310 × 31	3.930	305,0	7,16	74,7	12,70	53,7	352	117	1,61	28,3	20,2
C250 × 45	5.690	254,0	17,10	77,0	11,10	42,9	338	86,8	1,61	27,1	17,0
C250 × 37	4.740	254,0	13,40	73,3	11,10	38,0	299	89,5	1,40	24,3	17,2
C250 × 30	3.790	254,0	9,63	69.6	11,10	32,8	258	93,0	1,17	21,6	17,6
C250 × 23	2.900	254,0	6,10	66,0	11,10	28,1	221	98,4	0,949	19,0	18,1
C230 × 30	3.790	229,0	11,40	67,3	10,50	25,3	221	81,7	1,01	19,2	16,3
C230 × 22	2.850	229,0	7,24	63,1	10,50	21,2	185	86,2	0,803	16,7	16,8
C230 × 20	2.540	229,0	5,92	61,8	10,50	19,9	174	88,5	0,733	15,8	17,0
C200 × 28	3.550	203,0	12,40	64,2	9,90	18,3	180	71,8	0,824	16,5	15,2
C200 × 20	2.610	203,0	7,70	59,5	9,90	15,0	148	75,8	0,637	14,0	15,6
C200 × 17	2.180	203,0	5,59	57,4	9,90	13,6	134	79,0	0,549	12,8	15,9
C180 × 22	2.790	178,0	10,60	58,4	9,30	11,3	127	63,6	0,574	12,8	14,3
C180 × 18	2.320	178,0	7,98	55,7	9,30	10,1	113	66,0	0,487	11,5	14,5
C180 × 15	1.850	178,0	5,33	53,1	9,30	8,87	99,7	69,2	0,403	10,2	14,8
C150 × 19	2.470	152,0	11,10	54,8	8,70	7,24	95,3	54,1	0,437	10,5	13,3
C150 × 16	1.990	152,0	7,98	51,7	8,70	6,33	83,3	56,4	0,360	9,22	13,5
C150 × 12	1.550	152,0	5,08	48,8	8,70	5,45	71,7	59,3	0,288	8,04	13,6
C130 × 13	1.700	127,0	8,25	47,9	8,10	3,70	58,3	46,7	0,263	7,35	12,4
C130 × 10	1.270	127,0	4,83	44,5	8,10	3,12	49,1	49,6	0,199	6,18	12,5
C100 × 11	1.370	102,0	8,15	43,7	7,50	1,91	37,5	37,3	0,180	5,62	11,5
C100 × 8	1.030	102,0	4,67	40,2	7,50	1,60	31,4	39,4	0,133	4,65	11,4
C75 × 9	1.140	76,2	9,04	40,5	6,90	0,862	22,6	27,5	0,127	4,39	10,6
C75 × 7	948	76,2	6,55	38,0	6,90	0,770	20,2	28,5	0,103	3,83	10,4
C75 × 6	781	76,2	4,32	35,8	6,90	0,691	18,1	29,8	0,082	3,32	10,2

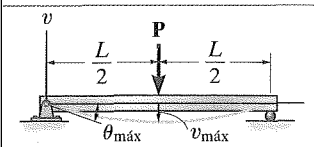
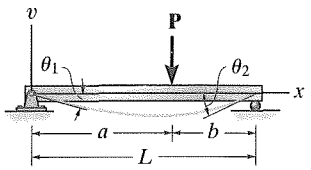
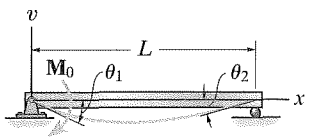
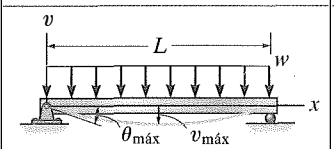
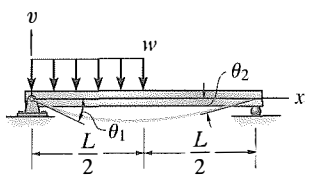
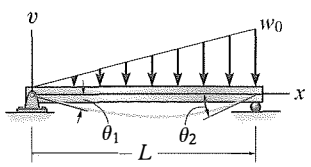


Cantoneiras de abas iguais — Unidades SI

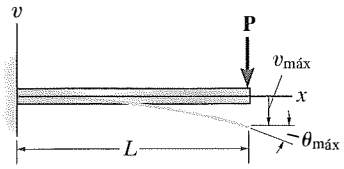
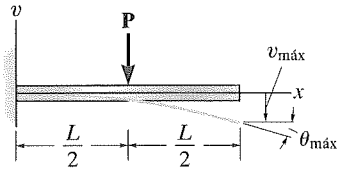
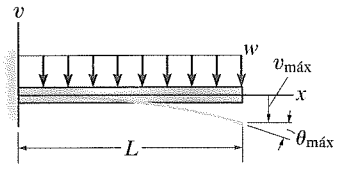
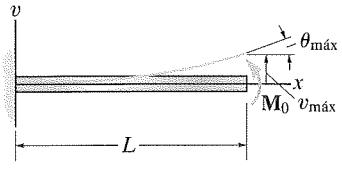
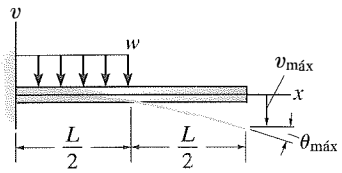
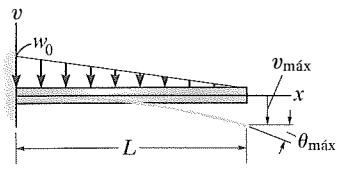
Tamanho e espessura	Peso por metro	Área	eixo *x*–*x*				eixo *y*–*y*				eixo *z*–*z*
			I	*S*	*r*	*y*	*I*	*S*	*r*	*x*	*r*
mm	kg	mm^2	$10^6\ mm^4$	$10^6\ mm^3$	mm	mm	$10^6\ mm^4$	$10^6\ mm^3$	mm	mm	mm
L203 × 203 × 25,4	75,9	9.680	36,9	258	61,7	60,1	36,9	258	61,7	60,1	39,6
L203 × 203 × 19,0	57,9	7.380	28,9	199	62,6	57,8	28,9	199	62,6	57,8	40,1
L203 × 203 × 12,7	39,3	5.000	20,2	137	63,6	55,5	20,2	137	63,6	55,5	40,4
L152 × 152 × 25,4	55,7	7.100	14,6	139	45,3	47,2	14,6	139	45,3	47,2	29,7
L152 × 152 × 19,0	42,7	5.440	11,6	108	46,2	45,0	11,6	108	46,2	45,0	29,7
L152 × 152 × 12,7	29,2	3.710	8,22	75,1	47,1	42.7	8,22	75,1	47,1	42,7	30,0
L152 × 152 × 9,5	22,2	2.810	6,35	57,4	47,5	41,5	6,35	57,4	47,5	41,5	30,2
L127 × 127 × 19,0	35,1	4.480	6,54	73,9	38,2	38,7	6,54	73,9	38,2	38,7	24,8
L127 × 127 × 12,7	24,1	3.060	4,68	51,7	39,1	36,4	4,68	51,7	39,1	36,4	25,0
L127 × 127 × 9,5	18,3	2.330	3,64	39,7	39,5	35,3	3,64	39,7	39,5	35,3	25,1
L102 × 102 × 19,0	27,5	3.510	3,23	46,4	30,3	32,4	3,23	46,4	30,3	32.4	19,8
L102 × 102 × 12,7	19,0	2.420	2,34	32,6	31,1	30,2	2,34	32,6	31,1	30,2	19,9
L102 × 102 × 9,5	14,6	1.840	1,84	25,3	31,6	29,0	1,84	25,3	31,6	29,0	20,0
L102 × 102 × 6,4	9,8	1.250	1,28	17,3	32,0	27,9	1,28	17,3	32,0	27,9	20,2
L89 × 89 × 12,7	16,5	2.100	1,52	24,5	26,9	26,9	1,52	24,5	26,9	26,9	17,3
L89 × 89 × 9,5	12,6	1.600	1,20	19,0	27,4	25,8	1,20	19,0	27,4	25,8	17,4
L89 × 89 × 6,4	8,6	1.090	0,840	13,0	27,8	24,6	0,840	13,0	27,8	24,6	17,6
L76 × 76 × 12,7	14,0	1.770	0,915	17,5	22,7	23,6	0,915	17,5	22,7	23,6	14,8
L76 × 76 × 9,5	10,7	1.360	0,726	13,6	23,1	22,5	0,726	13,6	23,1	22,5	14,9
L76 × 76 × 6,4	7,3	927	0.514	9,39	23,5	21,3	0,514	9,39	23,5	21,3	15,0
L64 × 64 × 12,7	11,5	1.450	0,524	12,1	19,0	20,6	0,524	12,1	19,0	20,6	12,4
L64 × 64 × 9,5	8,8	1.120	0,420	9,46	19,4	19,5	0,420	9,46	19,4	19,5	12,4
L64 × 64 × 6,4	6,1	766	0,300	6,59	19,8	18,2	0,300	6,59	19,8	18,2	12,5
L51 × 51 × 9,5	7,0	877	0,202	5,82	15,2	16,2	0,202	5,82	15,2	16,2	9,88
L51 × 51 × 6,4	4,7	605	0,146	4,09	15,6	15,1	0,146	4,09	15,6	15,1	9,93
L51 × 51 × 3,2	2,5	312	0,080	2,16	16,0	13,9	0,080	2,16	16,0	13,9	10,1

C Inclinações e deflexões de vigas

Inclinações e deslocamentos de vigas simplesmente apoiadas

Viga	Inclinação	Deflexão	Curva da linha elástica
	$\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{16EI}$	$v_{máx} = \frac{-PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \frac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\|_{x=a} = \frac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \frac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \frac{-M_0L}{3EI}$ $\theta_2 = \frac{M_0L}{6EI}$	$v_{máx} = \frac{-M_0L^2}{\sqrt{243}EI}$	$v = \frac{-M_0x}{6EIL}(x^2 - 3Lx + 2L^2)$
	$\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{24EI}$	$v_{máx} = \frac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \frac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\|_{x=L/2} = \frac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{máx} = -0{,}006563\frac{wL^4}{EI}$ em $x = 0{,}4598L$	$v = \frac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \frac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \frac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{máx} = -0{,}00652\frac{w_0L^4}{EI}$ em $x = 0{,}5193L$	$v = \frac{-w_0x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

Inclinações e deflexões de vigas em balanço

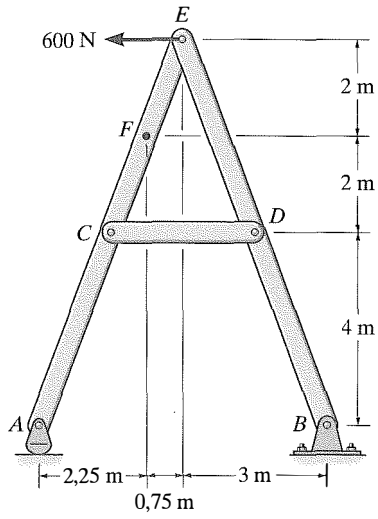
Viga	Inclinação	Deflexão	Curva da linha elástica
	$\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{2EI}$	$v_{máx} = \frac{-PL^3}{3EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{máx} = \frac{-PL^2}{8EI}$	$v_{máx} = \frac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \frac{-Px^2}{6EI}\left(\frac{3}{2}L - x\right) \quad 0 \le x \le L/2$ $v = \frac{-PL^2}{24EI}\left(3x - \frac{1}{2}L\right) \quad L/2 \le x \le L$
	$\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{6EI}$	$v_{máx} = \frac{-wL^4}{8EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{máx} = \frac{M_0 L}{EI}$	$v_{máx} = \frac{M_0 L^2}{2EI}$	$v = \frac{M_0 x^2}{2EI}$
	$\theta_{máx} = \frac{-wL^3}{48EI}$	$v_{máx} = \frac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \frac{-wx^2}{24EI}\left(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2\right)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \frac{-wL^3}{192EI}(4x - L/2)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{máx} = \frac{-w_0 L^3}{24EI}$	$v_{máx} = \frac{-w_0 L^4}{30EI}$	$v = \frac{-w_0 x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

D Revisão de fundamentos de engenharia

Antes de resolver qualquer um dos problemas, você deve revisar as seções indicadas em cada capítulo de modo a familiarizar-se com as definições e procedimentos (em negrito) usadas para resolver vários tipos de problema. Revise também os exemplos apresentados nessas seções. Os problemas a seguir acompanham a mesma sequência dos tópicos de cada capítulo. Soluções parciais para *todos os problemas* são dadas no final deste apêndice.

Capítulo 1 – Revisão de todas as seções

D.1. Determine o momento interno resultante do elemento estrutural no ponto *F*.

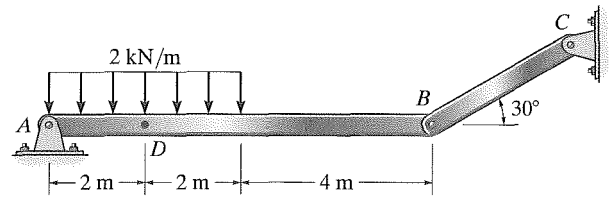


Problema D.1

D.2. A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo *BC*. Determine o cisalhamento interno resultante no ponto *D* da viga.

D.3. A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo *BC*. Determine a tensão de cisalhamento média no pino em *B*, se ele tiver um diâmetro de 20 mm e estiver em cisalhamento duplo.

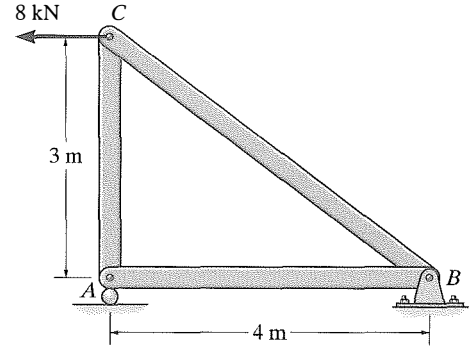
D.4. A viga é apoiada por um pino em *A* e um elo *BC*. Determine a tensão de cisalhamento média no pino em *A*, se ele tiver um diâmetro de 20 mm e estiver em cisalhamento simples.



Problemas D.2/3/4

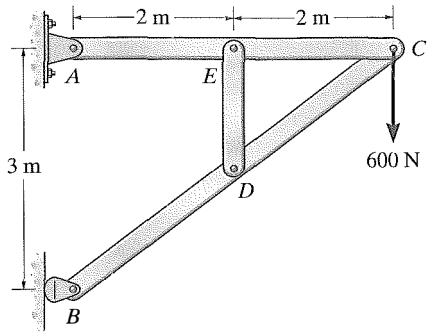
D.5. Quantas componentes de tensão indepedentes há em três dimensões?

D.6. A área da seção transversal de cada uma das barras da treliça é 1.250 mm^2. Determine a tensão normal média no elemento *CB*.



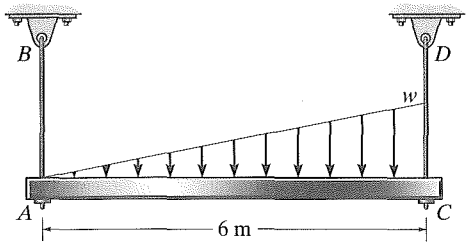
Problema D.6

D.7. A estrutura suporta a carga mostrada. O pino em *A* tem diâmetro de 5 mm. Se estiver sujeito a cisalhamento duplo, determine a tensão de cisalhamento média no pino.



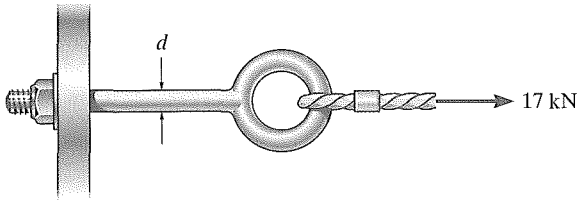
Problema D.7

D.8. A viga uniforme é sustentada por duas hastes AB e CD cujas áreas de seção transversal são 10 mm² e 15 mm², respectivamente. Determine a intensidade w da carga distribuída, de modo que a tensão normal média em cada haste não ultrapasse 300 kPa.



Problema D.8

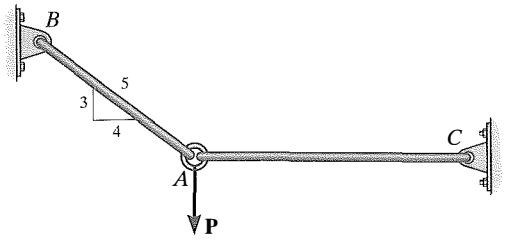
D.9. O parafuso é usado para suportar a carga de 17 kN. Determine seu diâmetro d com aproximação de mm. A tensão normal admissível para o parafuso é $\sigma_{adm} = 170$ MPa.



Problema D.9

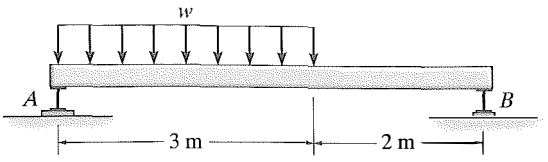
D.10. As duas hastes suportam a força vertical $P = 30$ kN. Determine o diâmetro da haste AB, se a tensão de tração admissível para o material for $\sigma_{adm} = 150$ MPa.

D.11. Os diâmetros das hastes AB e AC são 15 mm e 12 mm, respectivamente. Determine a maior força vertical P que pode ser aplicada. A tensão de tração admissível para as hastes é $\sigma_{adm} = 150$ MPa.



Problemas D.10/11

D.12. A tensão admissível para o material sob os apoios A e B é $\sigma_{adm} = 3{,}5$ MPa. Determine a carga distribuída uniforme máxima w que pode ser aplicada à viga. As chapas do apoio em A e B têm seções quadradas de 75 mm × 75 mm e 50 mm × 50 mm, respectivamente.

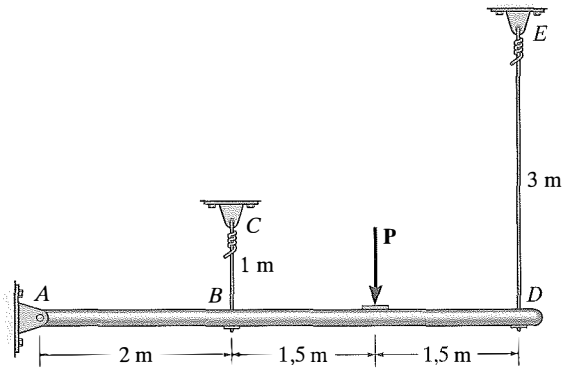


Problema D.12

Capítulo 2 — Revisão de todas as seções

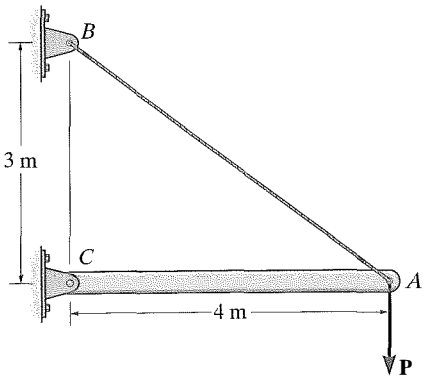
D.13. O comprimento de uma tira elástica não esticada é 180 mm. Se ela for esticada ao redor de um poste de 60 mm de diâmetro, determine a deformação normal média na tira.

D.14. A haste rígida é sustentada por um pino em A e por cabos em BC e DE. Se a deformação normal máxima admissível em cada cabo for $\epsilon_{adm} = 0{,}003$, determine o deslocamento vertical máximo da carga P.



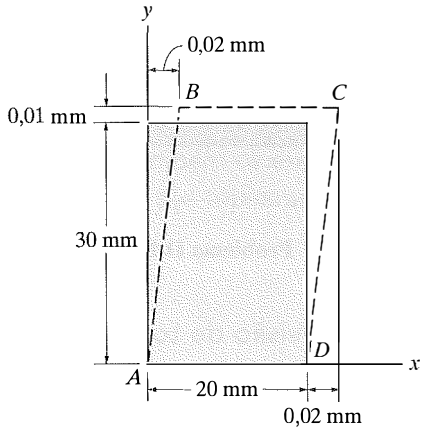
Problema D.14

D.15. A carga P provoca uma deformação normal de 0,0045 mm/mm no cabo AB. Determine o ângulo de rotação da viga rígida devido ao carregamento se, antes do carregamento, a forma original da viga é horizontal.



Problema D.15

D.16. A peça retangular de material é deformada até a posição marcada pelas linhas tracejadas. Determine a deformação por cisalhamento no canto *C*.

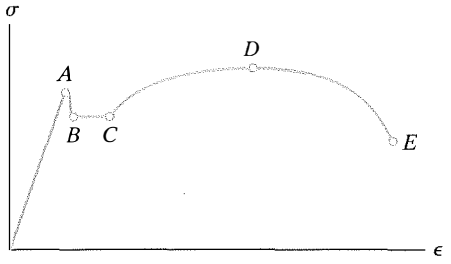


Problema D.16

Capítulo 3 — Revisão das seções 3.1–3.7

D.17. Defina material homogêneo.

D.18. Indique no diagrama tensão–deformação os pontos que representam o limite de proporcionalidade e o limite de resistência.



Problema D.18

D.19. Defina o módulo de elasticidade *E*.

D.20. À temperatura ambiente, o aço doce é um material dútil. Verdadeiro ou falso?

D.21. Em engenharia, tensão e deformação são calculadas usando-se a área da seção transversal e o comprimento *reais* do corpo de prova. Verdadeiro ou falso?

D.22. Se uma haste estiver sujeita a uma carga axial, só há deformação no material na direção da carga. Verdadeiro ou falso?

D.23. Uma haste de 100 mm de comprimento tem diâmetro de 15 mm. Se uma carga de tração axial de 100 kN for aplicada a essa haste, determine a mudança em seu comprimento. $E = 200$ GPa.

D.24. Uma barra tem 200 mm de comprimento e área de seção transversal de 7.500 mm². Determine o módulo de eslaticidade do material se ela for submetida a uma carga de tração axial de 50 kN e alongar-se 0,075 mm. O material tem comportamento linear elástico.

D.25. Uma haste de bronze com 10 mm de diâmetro tem um módulo de elasticidade $E = 100$ GPa. Se tiver 4 m de comprimento e for submetida a uma carga de tração axial de 6 kN, determine seu alongamento.

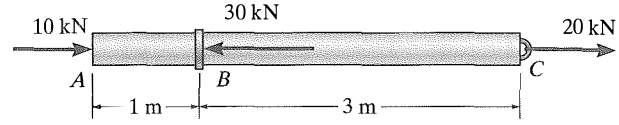
D.26. Uma haste tem 100 mm de comprimento e diâmetro de 15 mm. Se uma carga de tração axial de 10 kN for aplicada a ela, determine a mudança no diâmetro. $E = 70$ GPa, $\nu = 0{,}35$.

Capítulo 4 — Revisão das seções 4.1–4.6

D.27. O que é o princípio de Saint-Venant?

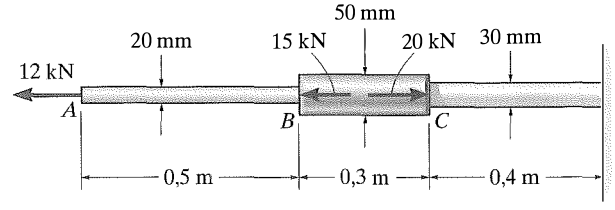
D.28. Quais são as duas condições para as quais o princípio da superposição é válido?

D.29. Determine o deslocamento da extremidade *A* em relação à extremidade *C* do eixo. A área da seção transversal é 300 mm² e $E = 210(10^3)$ MPa.



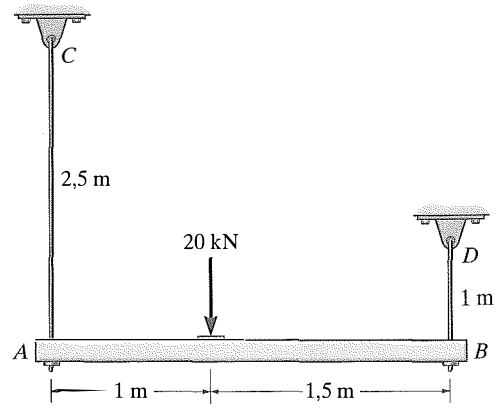
Problema D.29

D.30. Determine o deslocamento da extremidade *A* em relação à extremidade *C* do eixo. Os diâmetros de cada segmento estão indicados na figura. $E = 200$ GPa.



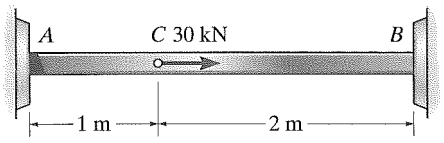
Problema D.30

D.31. Determine o ângulo de inclinação da viga rígida quando submetida à carga de 20 kN. Antes da aplicação da carga, a viga está na horizontal. Cada haste tem diâmetro de 20 mm e $E = 210(10^3)$ MPa.



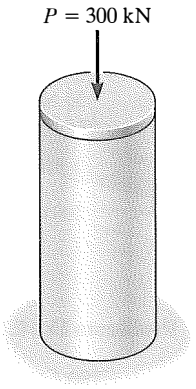
Problema D.31

D.32. A barra uniforme está sujeita à carga de 30 kN. Determine as reações horizontais nos apoios A e B.



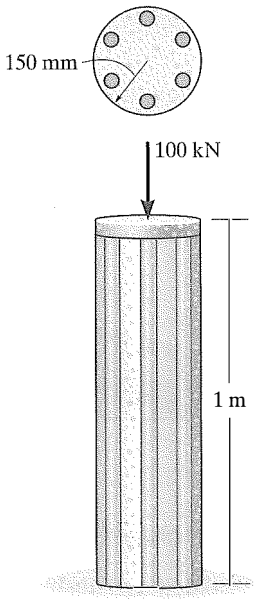
Problema D.32

D.33. O cilindro é feito de aço e tem núcleo de alumínio. Se suas extremidades estiverem sujeitas à força axial de 300 kN, determine a tensão normal média no aço. O cilindro tem diâmetro externo de 100 mm e diâmetro interno de 80 mm. $E_{aço} = 200$ GPa, $E_{al} = 73{,}1$ GPa.



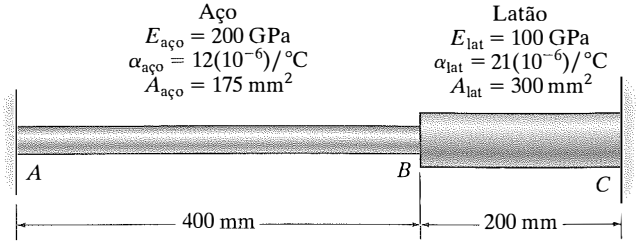
Problema D.33

D.34. A coluna é de concreto reforçado com seis hastes de aço. Se ela for submetida a uma força axial de 100 kN, determine a força suportada pelo concreto. Cada haste tem diâmetro de 20 mm. $E_{conc} = 30(10^3)$ MPa, $E_{aço} = 210(10^3)$ MPa.



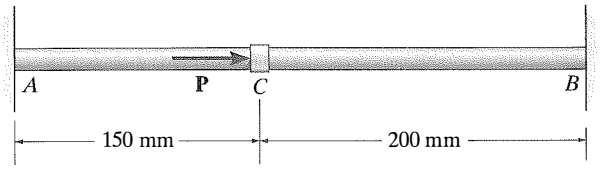
Problema D.34

D.35. Duas barras, cada uma feita de um material diferente, estão acopladas e foram colocadas entre duas paredes quando a temperatura era $T_1 = 15°C$. Determine a força exercida sobre os apoios (rígidos), quando a temperatura alcançar $T_2 = 25°C$. As propriedades do material e a área da seção transversal de cada barra são dadas na figura.



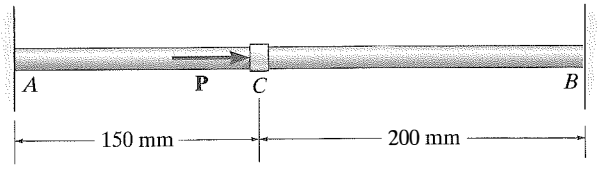
Problema D.35

D.36. A haste de alumínio tem diâmetro de 10 mm e foi acoplada aos apoios rígidos em A e B quando $T_1 = 80°C$. Se a temperatura alcançar $T_2 = 100°C$, e uma força axial $P = 6.000$ N for aplicada ao colar rígido como mostra a figura, determine as reações em A e B. $\alpha_{al} = 20(10^{-6})/°C$, $E_{al} = 75(10^3)$ MPa.



Problema D.36

D.37. A haste de alumínio tem diâmetro de 10 mm e foi acoplada aos apoios rígidos em A e B, quando $T_1 = 80°C$. Determine a força P que deve ser aplicada ao colar rígido de modo que, quando $T_2 = 50°C$, a reação em B *seja nula*, $\alpha_{al} = 20(10^{-6})/°C$, $E_{al} = 75(10^3)$MPa.

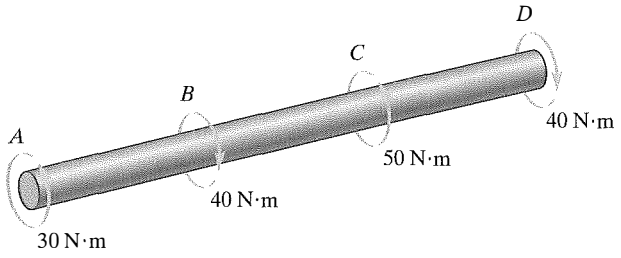


Problema D.37

Capítulo 5 — Revisão das seções 5.1–5.5

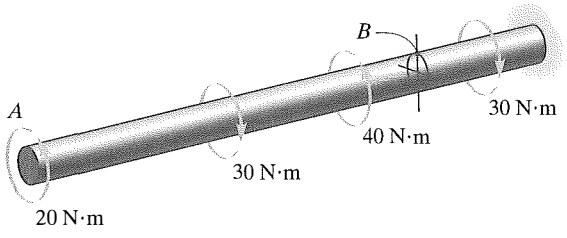
D.38. A fórmula da torção, $\tau = Tc/J$, pode ser usada para uma seção transversal não circular?

D.39. O eixo maciço de 20 mm de diâmetro é usado para transmitir os torques mostrados. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta desenvolvida no eixo.



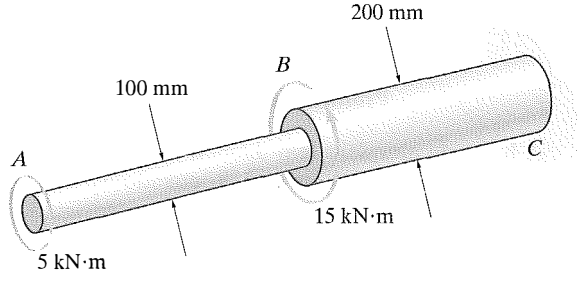
Problema D.39

D.40. O eixo maciço de 40 mm de diâmetro é usado para transmitir os torques mostrados. Determine a tensão de cisalhamento desenvolvida no eixo no ponto B.



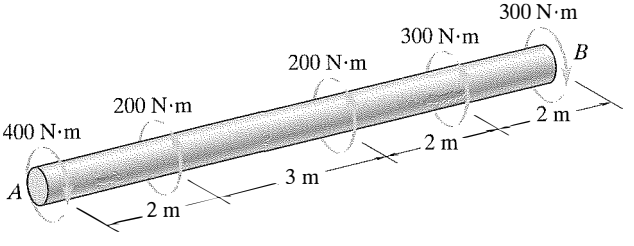
Problema D.40

D.41. O eixo maciço é usado para transmnitir os torques mostrados. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta desenvolvida no eixo.



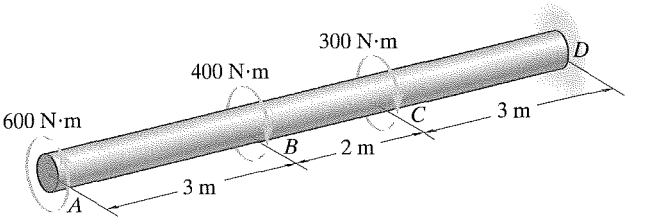
Problema D.41

D.42. O eixo está sujeito aos torques mostrados. Determine o ângulo de torção na extremidade A em relação à extremidade B. O eixo tem diâmetro de 40 mm. $G = 80(10^3)$ MPa.



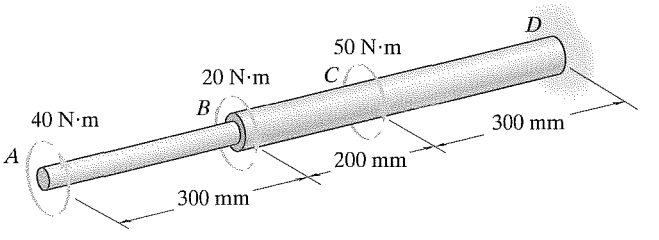
Problema D.42

D.43. Determine o ângulo de torção do eixo de 20 mm de diâmetro na extremidade A quando submetido à carga de torção mostrada. $G = 80(10^3)$MPa.



Problema D.43

D.44. O eixo consiste em uma seção maciça AB com 30 mm de diâmetro e um tubo BD com diâmetro interno de 25 mm e diâmetro externo de 50 mm. Determine o ângulo de torção em sua extremidade A, quando submetido à carga de torção mostrada. $G = 75$ GPa.

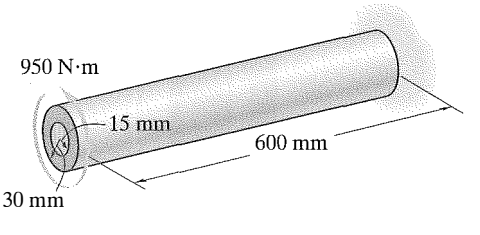


Problema D.44

D.45. Um motor transmite 150 kW a um eixo tubular de aço com diâmetro externo de 40 mm. Se estiver girando a 150 rad/s, determine seu maior diâmetro interno com aproximação de mm, se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 145$ MPa.

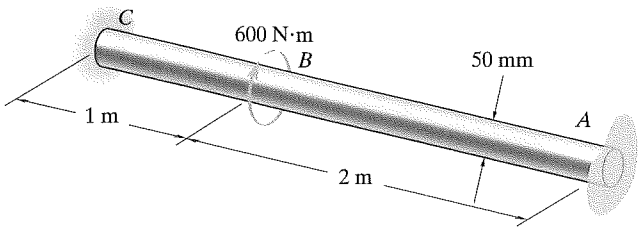
D.46. Um motor transmite 250 kW a um eixo tubular de aço com diâmetro interno de 50 mm e diâmetro externo de 40 mm. Determine a menor velocidade angular de giro, se a tensão de cisalhamento admissível para o material for $\tau_{adm} = 145$ MPa.

D.47. O eixo é feito de um tubo de aço com núcleo de latão. Se estiver preso a um apoio rígido, determine o ângulo de torção que ocorre em sua extremidade. $G_{aço} = 75$ GPa e $G_{lat} = 37$ GPa.



Problema D.47

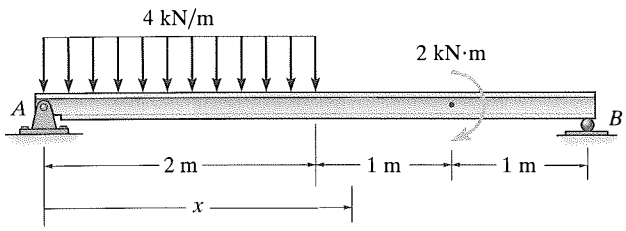
D.48. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo. JG é constante.



Problema D.48

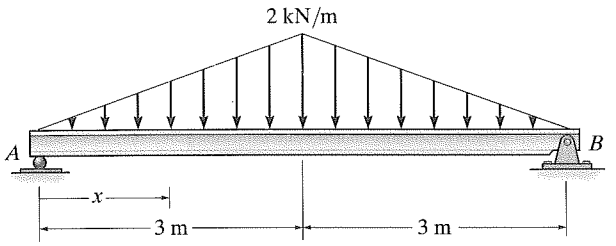
Capítulo 6 — Revisão das seções 6.1–6.5

D.49. Determine o momento interno na viga em função de x, onde $2\text{ m} \leq x < 3\text{ m}$.



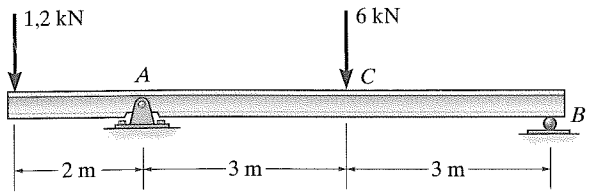
Problema D.49

D.50. Determine o momento interno na viga em função de x, onde $0 \leq x \leq 3\text{ m}$.



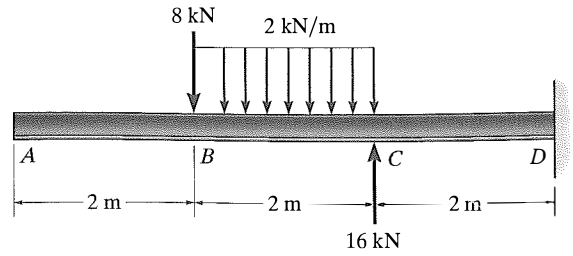
Problema D.50

D.51. Determine o momento máximo na viga.



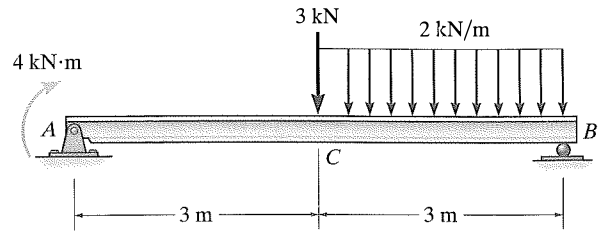
Problema D.51

D.52. Determine o momento fletor máximo absoluto na viga.



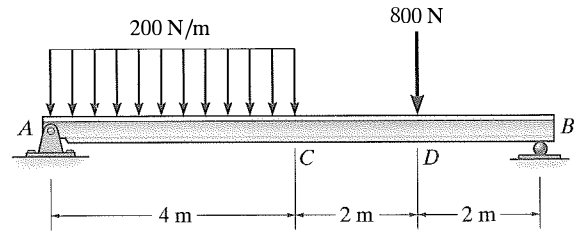
Problema D.52

D.53. Determine o momento máximo na viga.



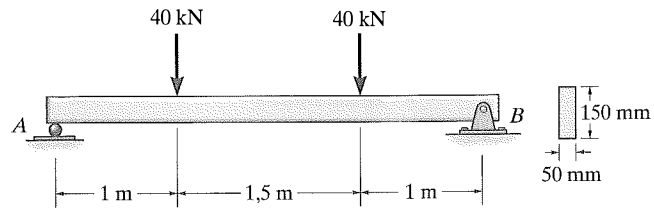
Problema D.53

D.54. Determine o momento máximo na viga.



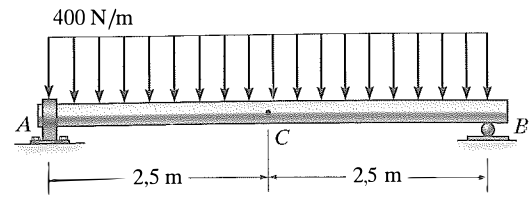
Problema D.54

D.55. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga.



Problema D.55

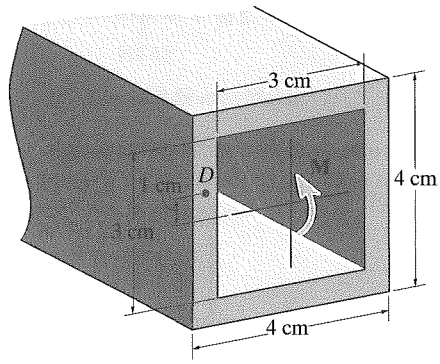
D.56. Determine a tensão de flexão máxima em C na haste de 50 mm diâmetro. Há um mancal em A.



Problema D.56

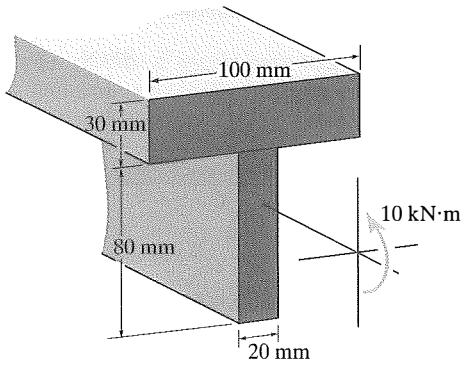
D.57. Qual é deformação em uma viga no eixo neutro?

D.58. Determine o momento M que deve ser aplicado à viga de modo a criar uma tensão de compressão de 10 N/mm² no ponto D.



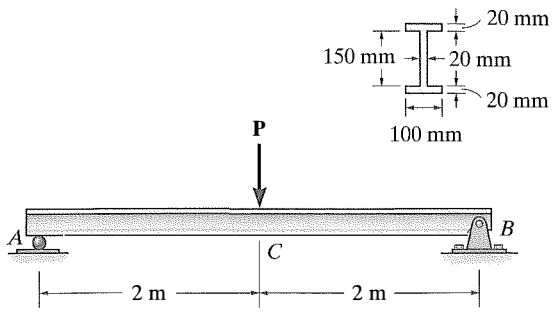
Problema D.58

D.59. Determine a tensão de flexão máxima na viga.



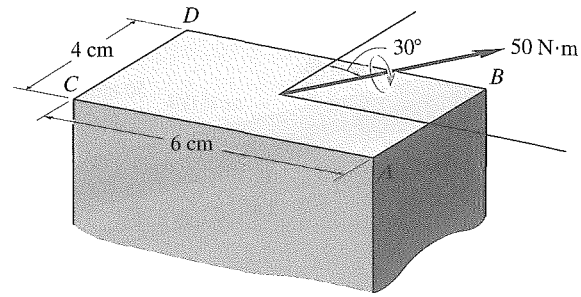
Problema D.59

D.60. Determine a carga máxima P que pode ser aplicada à viga feita de um material cuja tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 12$ MPa.



Problema D.60

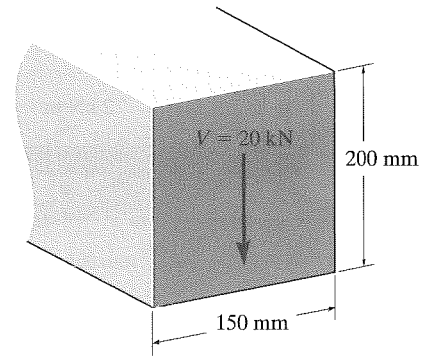
D.61. Determine a tensão máxima na seção transversal da viga.



Problema D.61

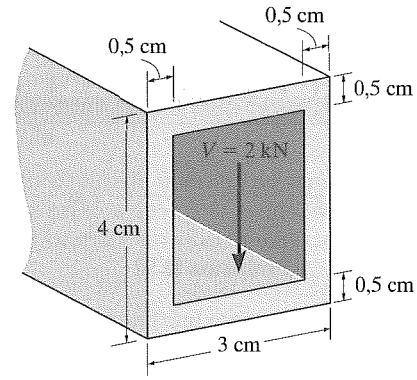
Capítulo 7 — Revisão das seções 7.1–7.4

D.62. Determine a tensão de cisalhamento máxima na viga.



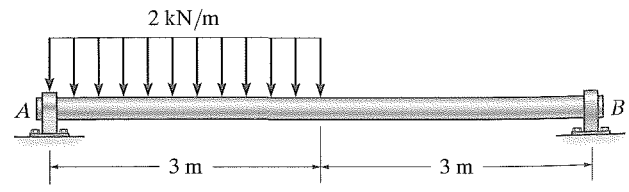
Problema D.62

D.63. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita ao cisalhamento $V = 2$ kN. Determine a tensão de cisalhamento máxima na viga.



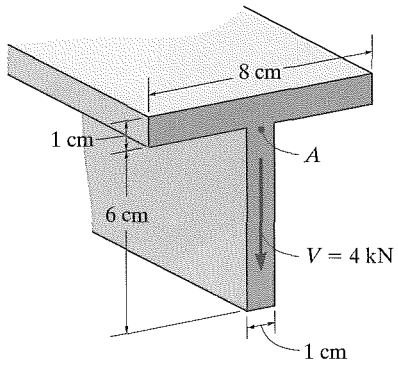
Problema D.63

D.64. Determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta no eixo de 60 mm de diâmetro. Os apoios em A e B são mancais.



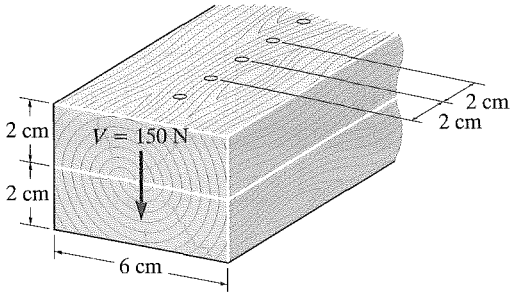
Problema D.64

D.65. Determine a tensão de cisalhamento na viga no ponto A localizado no topo da alma.



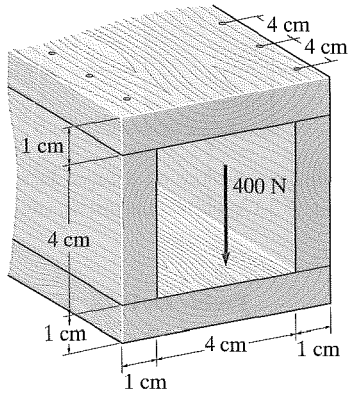
Problema D.65

D.66. A viga é feita de duas pranchas de madeira pregadas a espaços de 2 cm. Se uma força de cisalhamento interna $V = 150$ N for aplicada às pranchas, determine a força de cisalhamento que cada prego suportará.



Problema D.66

D.67. A viga é feita de quatro pranchas de madeira interligadas na parte superior e inferior com duas fileiras de pregos a espaços de 4 cm. Se uma força de cisalhamento $V = 400$ N for aplicada às pranchas, determine a força de cisalhamento à qual cada prego resistirá.



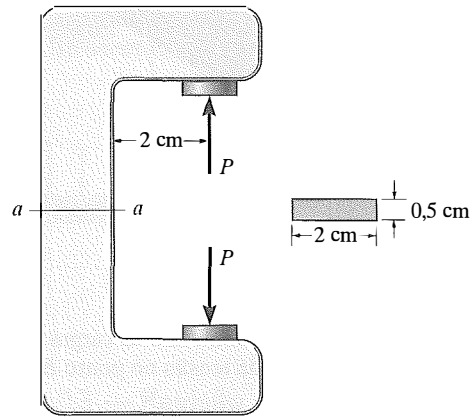
Problema D.67

Capítulo 8 — Revisão de todas as seções

D.68. Um tanque cilíndrico está sujeito a uma pressão interna de 80 N/cm². Se o diâmetro interno do tanque for 30 cm, e a espessura da parede 0,3 cm, determine a tensão normal máxima no material.

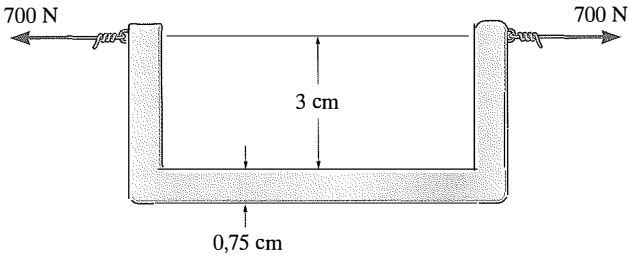
D.69. Um vaso de pressão esférico deve ser feito de aço com espesura de 0,25 cm. Se o tanque for submetido a uma pressão interna $p = 150$ N/cm², determine seu diâmetro interno, se a tensão normal máxima não deve ultrapasar $10(10^3)$N/cm².

D.70. Determine o valor da carga P que provocará uma tensão normal máxima $\sigma_{máx} = 30$ N/cm² no elo ao longo da seção a–a.



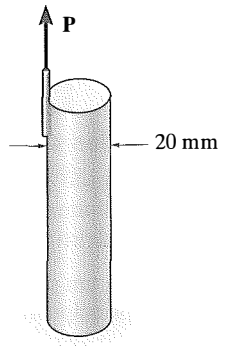
Problema D.70

D.71. Determine a tensão normal máxima na porção horizontal do suporte com espessura de 1 cm e largura de 0,75 cm.



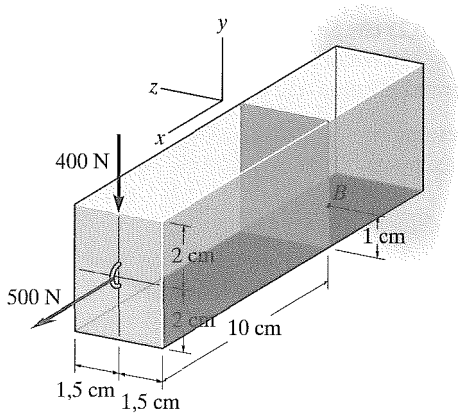
Problema D.71

D.72. Determine a carga máxima P que pode ser aplicada à haste de modo que a tensão normal na haste não ultrapasse $\sigma_{máx} = 30$ MPa.



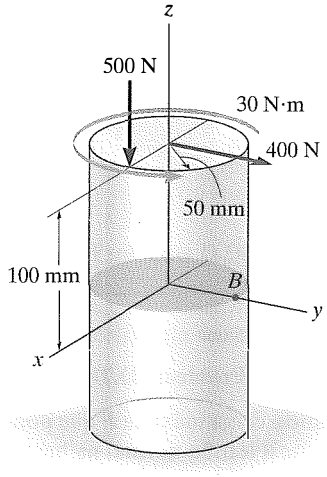
Problema D.72

D.73. A viga tem seção transversal retangular e está sujeita às cargas mostradas. Determine as componentes da tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} no ponto B.



Problema D.73

D.74. O cilindro maciço é submetido às cargas mostradas. Determine as componentes da tensão no ponto B.

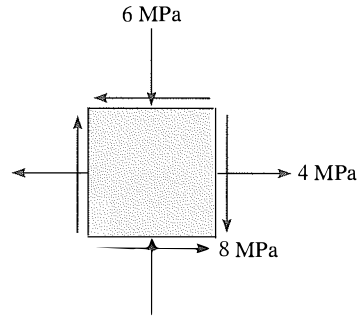


Problema D.74

Capítulo 9 — Revisão das seções 9.1–9.3

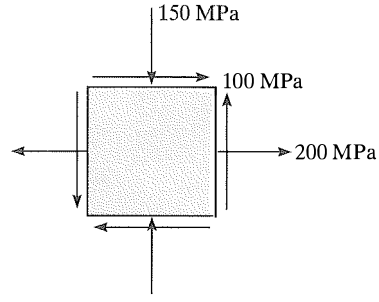
D.75. Quando o estado de tensão em um ponto é representado pela tensão principal, nenhuma tensão de cisalhamento agirá sobre o elemento. Verdadeiro ou falso?

D.76. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determine a tensão principal máxima.



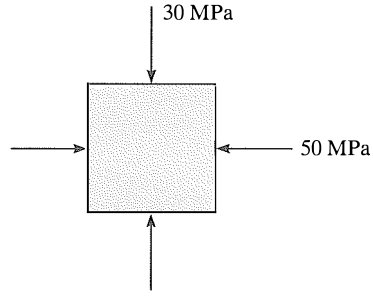
Problema D.76

D.77. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determine a tensão de cisalhamento máxima no plano.



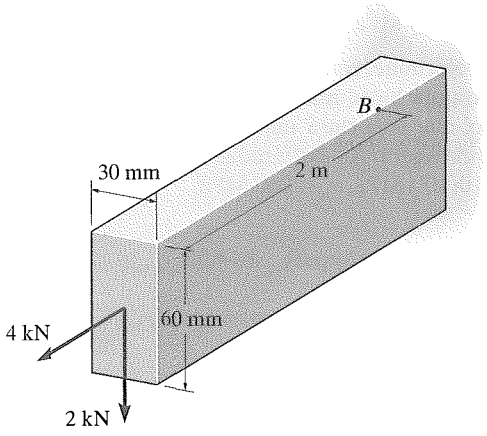
Problema D.77

D.78. O estado de tensão em um ponto é mostrado no elemento. Determine a tensão de cisalhamento máxima no plano.



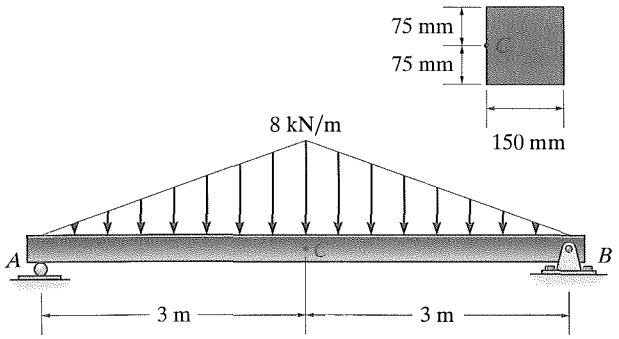
Problema D.78

D.79. A viga está sujeita às cargas em sua extremidade. Determine a tensão principal máxima no ponto B.



Problema D.79

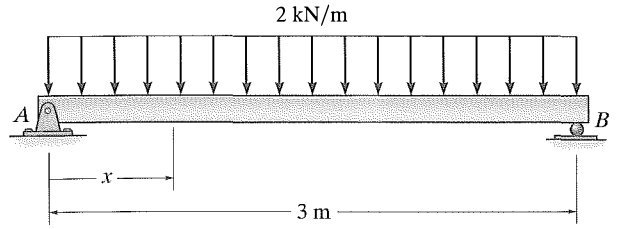
D.80. A viga está sujeita ao carregamento mostrado. Determine a tensão principal no ponto *C*.



Problema D.80

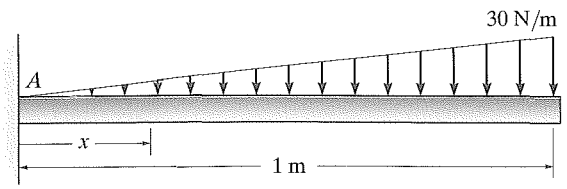
Capítulo 12 — Revisão das seções 12.1–12.2, 12.5

D.81. A viga está sujeita ao carregamento mostrado. Determine a equação da linha elástica. *EI* é constante.



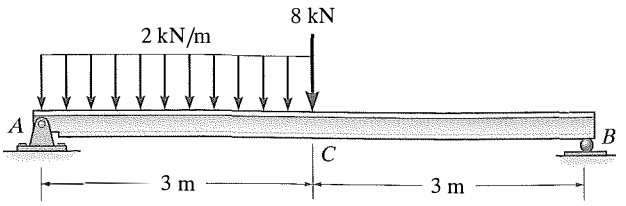
Problema D.81

D.82. A viga está sujeita ao carregamento mostrado. Determine a equação da linha elástica. *EI* é constante.



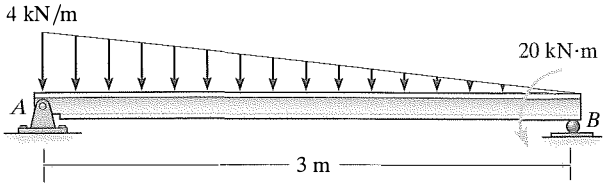
Problema D.82

D.83. Determine o deslocamento no ponto *C* da viga mostrada na figura. Use o método da superposição. *EI* é constante.



Problema D.83

D.84. Determine a inclinação no ponto *A* da viga mostrada na figura. Use o método da superposição. *EI* é constante.



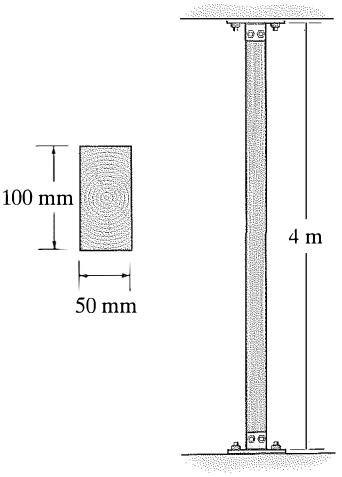
Problema D.84

Capítulo 13 — Revisão das seções 13.1–13.3

D. 85. A carga crítica é a carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está prestes a flambar. Essa carga representa um caso de equilíbrio neutro. Verdadeiro ou falso?

D. 86. Uma haste de 50 polegadas de comprimento é feita de uma barra de aço de 25 mm de diâmetro. Determine a carga crítica de flambagem, se as extremidades estiverem presas a apoios. $E = 210(10^3)$ MPa, $\sigma_e = 260$ MPa.

D. 87. Uma coluna retangular de madeira de 4 m tem as dimensões mostradas na figura. Determine a carga crítica, considerando que as extremidades estejam presas por pinos. $E = 11 \times 10^3$ MPa. Não ocorre escoamento.



Problema D.87

D.88. Um tubo de aço está engastado em suas duas extremidades. Se tiver 5 m de comprimento, diâmetro externo de 50 mm e espessura de 10 mm, determine a carga axial máxima que ele pode suportar sem sofrer flambagem. $E_{aço} = 200$ GPa, $\sigma_e = 250$ MPa.

D.89. Um tubo de aço está preso por pinos em suas extremidades. Se tiver 2 m de comprimento e diâmetro externo de 50 mm, determine sua menor espessura de modo que possa suportar uma carga axial $P = 180$ kN sem sofrer flambagem. $E_{aço} = 210(10^3)$ MPa, $\sigma_e = 260$ MPa.

D.90. Determine, com aproximação de mm, o menor diâmetro de uma haste maciça de aço de 1.000 mm de comprimento, que suportará uma carga axial $P = 15$ kN sem sofrer flambagem. As extremidades estão presas por pinos. $E_{aço} = 210(10^3)$ MPa, $\sigma_e = 260$ MPa.

Soluções parciais e respostas

D–1. Para toda a estrutura:
$\Sigma M_B = 0; A_y = 800$ N
CD é um elemento estrutural de duas forças
Elemento estrutural AE:
$\Sigma M_E = 0; F_{CD} = 600$ N
Segmento ACF:
$\Sigma M_F = 0; M_F = 600$ N·m ***Resposta***

D–2. BC é um elemento estrutural de duas forças.
Viga AB:
$\Sigma M_B = 0; A_y = 6$ kN
Segmento AD:
$\Sigma F_y = 0; V = 2$ kN ***Resposta***

D–3. BC é um elemento estrutural de duas forças.
Viga AB:
$\Sigma M_A = 0;\ T_{BC} = 4$ kN
Pino B:

$$\tau_B = \frac{T_{BC}/2}{A} = \frac{4/2}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} = 6{,}37 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D–4. BC é um elemento estrutural de duas forças.
Viga AB:
$\Sigma M_A = 0;\ T_{BC} = 4$ kN
$\Sigma F_x = 0;\ A_x = 3{,}464$ kN
$\Sigma F_y = 0;\ A_y = 6$ kN

$$F_A = \sqrt{(3{,}464)^2 + (6)^2} = 6{,}928 \text{ kN}$$

$$\tau_A = \frac{F_A}{A} = \frac{6{,}928}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2} = 22{,}1 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D–5. 6: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ***Resposta***

D–6. Articulação C:
$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\ T_{CB} = 10$ kN

$$\sigma = \frac{T_{CB}}{A} = \frac{10 \times 10^3}{1250} = 8 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D–7. Em toda a estrutura
$\Sigma F_y = 0;\ A_y = 600$ N
$\Sigma M_B = 0;\ A_x = 800$ N

$$F_A = \sqrt{(600)^2 + (800)^2} = 1000 \text{ N}$$

$$\tau_A = \frac{F_A/2}{A} = \frac{1000/2}{\frac{\pi}{4}(5)^2} = 1{,}019 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D–8. Viga:
$\Sigma M_A = 0;\ T_{CD} = 2w$
$\Sigma F_y = 0;\ T_{AB} = w$
Haste AB:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 300(10^3) = \frac{w}{10};$$

$w = 3$ N/m

Haste CD:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 300(10^3) = \frac{2w}{15};$$

$w = 2{,}25$ N/m ***Resposta***

D–9. $\sigma = \dfrac{P}{A};\ 170 = \dfrac{17 \times 10^3}{\frac{\pi}{4}d^2}$

$d = 11{,}3$ mm
use $d = 12$ mm ***Resposta***

D–10. Articulação A:
$\Sigma F_y = 0;\ F_{AB} = 50$ kN

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 150(10^6) = \frac{50(10^3)}{\frac{\pi}{4}d^2};$$

$d = 20{,}6$ mm ***Resposta***

D–11. Articulação A:
$\Sigma F_y = 0;\ F_{AB} = 1{,}667P$
$\Sigma F_x = 0;\ F_{AC} = 1{,}333P$
Haste AB:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 150(10^6) = \frac{1{,}667P}{\frac{\pi}{4}(0{,}015)^2};$$

$P = 15{,}9$ kN
Haste AC:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 150(10^6) = \frac{1{,}333P}{\frac{\pi}{4}(0{,}012)^2};$$

$P = 12{,}7$ kN ***Resposta***

D–12. Viga:
$\Sigma M_A = 0;\ B_y = 0{,}9w$
$\Sigma F_y = 0;\ A_y = 2{,}1w$
Em A:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 3{,}5 = \frac{2{,}1w}{(75)(75)}$$

$w = 9{,}375$ kN/m ***Resposta***
Em B:

$$\sigma = \frac{P}{A};\ 3{,}5 = \frac{0{,}9w}{(50)(50)}$$

$w = 9{,}72$ kN/m

D–13. $\epsilon = \dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{\pi(60) \times 180}{180}$

$= 0{,}0472$ mm/mm ***Resposta***

D–14. $(\delta_{DE})_{máx} = \epsilon_{máx} l_{DE} = 0{,}003(3) = 0{,}009$ m
Por proporção com A,
$\delta_{BC} = 0{,}009\left(\frac{2}{5}\right) = 0{,}0036$ m

$(\delta_{BC})_{máx} = \epsilon_{máx} l_{BC} = 0{,}003(1)$
$= 0{,}003\,\text{m} < 0{,}0036\,\text{m}$

Use $\delta_{BC} = 0{,}003$ m Por proporção com A.

$$\delta_P = 0{,}003\left(\frac{3{,}5}{2}\right) = 0{,}00525\,\text{m} = 5{,}25\,\text{mm}$$ ***Resposta***

D–15. $l_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$ m

$l'_{AB} = 5 + 5(0{,}0045) = 5{,}0225$ m

O ângulo BCA era originalmente $\theta = 90°$. Usando a lei do cosseno, o novo ângulo BCA (θ') é

$5{,}0225 = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 - 2(3)(4)\cos\theta}$

$\theta = 90{,}538°$

Assim,

$\Delta\theta' = 90{,}538° - 90° = 0{,}538°$ ***Resposta***

D–16. $\angle BCD = \angle BAD = \text{tg}^{-1}\dfrac{30{,}01}{0{,}02} = 89{,}962°$

$$\gamma_{xy} = (90° - 89{,}962°)\frac{\pi}{180°}$$
$= 0{,}666(10^{-3})$ rad ***Resposta***

D–17. Material tem propriedades uniformes em toda a sua extensão. ***Resposta***

D–18. Limite de proporcionalidade é A. ***Resposta***
Limite de resistência é D. ***Resposta***

D–19. A inclinação inicial do diagrama σ–E. ***Resposta***

D–20. Verdadeiro. ***Resposta***

D–21. Falso. Use a seção transversal e o comprimento originais. ***Resposta***

D–22. Falso. Existe também deformação nas direções perpendiculares devido ao efeito de Poisson. ***Resposta***

D–23. $\epsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \epsilon\dfrac{P}{AE}$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE} = \frac{100(10^3)(0{,}100)}{\frac{\pi}{4}(0{,}015)^2\,200(10^9)}$$
$= 0{,}283$ mm ***Resposta***

D–24. $\epsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{P}{AE}$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE};$$

$$0{,}075 = \frac{50 \times 10^3 \times (200)}{7.500E}$$

$E = 17{,}78(10^3)$ MPa ***Resposta***

D–25. $\epsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{P}{AE}$

$$\delta = \epsilon L = \frac{PL}{AE} = \frac{6(10^3)4}{\frac{\pi}{4}(0{,}01)^2 100(10^9)}$$
$= 3{,}06$ mm ***Resposta***

D–26. $\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{10(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0{,}015)^2} = 56{,}59$ MPa

$$\epsilon_{long} = \frac{\sigma}{E} = \frac{56{,}59(10^6)}{70(10^9)} = 0{,}808(10^{-3})$$

$\epsilon_{lat} = -\nu\epsilon_{long} = -0{,}35[0{,}808(10^{-3})]$
$= -0{,}283(10^{-3})$

$\delta d = [-0{,}283(10^{-3})](15\,\text{mm})$
$= -4{,}24(10^{-3})$ mm ***Resposta***

D–27. Distribuições de tensão tendem a abrandar-se em seções mais afastadas da carga. ***Resposta***

D–28. 1) Material elástico linear.
2) Não há grandes deformações. ***Resposta***

D–29. $\delta_{A/C} = \sum\dfrac{PL}{AE} = \dfrac{-10 \times 10^3 \times 10^3}{300(210)(10^3)} + \dfrac{20 \times 10^3 \times 3 \times 10^3}{300(210)(10^3)}$
$= 0{,}794$ mm ***Resposta***

D–30. $\delta_{A/C} = \sum\dfrac{PL}{AE} = \dfrac{12(10^3)(0{,}5)}{\frac{\pi}{4}(0{,}02)^2 200(10^3)}$

$$+ \frac{27(10^3)(0{,}3)}{\frac{\pi}{4}(0{,}05)^2 200(10^9)} = 0{,}116\,\text{mm}$$ ***Resposta***

D–31. Viga AB:

$\Sigma M_A = 0$; $F_{BD} = 8$ kN

$\Sigma F_y = 0$; $F_{AC} = 12$ kN

$$\delta_A = \frac{PL}{AE} = \frac{12 \times 10^3 \times (2{,}5 \times 10)^3}{\frac{\pi}{4}(20)^2(210)(10^3)} = 0{,}4547\,\text{mm}\downarrow$$

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{8 \times 10^3 \times (1 \times 10^3)}{\frac{\pi}{4}(20)^2(210)(10^3)} = 0{,}1213\,\text{mm}\downarrow$$

$$\theta = \frac{\Delta\delta}{l_{AB}} = \frac{\delta_A - \delta_B}{l_{AB}} = \frac{0{,}4547 - 0{,}1213}{2{,}5(1000)}$$
$= 0{,}00013336$ rad $= 0{,}00764°$ ***Resposta***

D–32. Equilíbrio:

$F_A + F_B = 30$

Compatibilidade:

$\delta_{C/A} = \delta_{C/B}$;

$$\frac{F_A(1)}{AE} = \frac{F_B(2)}{AE}$$

$F_A = 20$ kN, $F_B = 10$ kN ***Resposta***

D–33. Equilíbrio:

$P_{aço} + P_{al} = 300(10^3)$

Compatibilidade:

$\delta_{aço} = \delta_{al}$;

$$\frac{P_{aço}\,L}{\left[\frac{\pi}{4}(0{,}1)^2 - \frac{\pi}{4}(0{,}08)^2\right]200(10^9)}$$

$$= \frac{P_{al}L}{\left[\frac{\pi}{4}(0{,}08)^2\right]73{,}1(10^9)}$$

$P_{aço} = 181{,}8$ kN

$P_{al} = 118$ kN

$$\sigma_{aço} = \frac{P_{aço}}{A} = \frac{181{,}8}{\left[\frac{\pi}{4}(0{,}1)^2 - \frac{\pi}{4}(0{,}08)^2\right]} = 64{,}3 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D–34. Equilíbrio:

$P_{conc} + P_{aço} = 100$

Compatibilidade:

$\delta_{conc} = \delta_{aço}$;

$$\frac{P_{conc}(1)}{[\pi(150)^2 - 6(\frac{\pi}{4})(20)^2]30(10^3)} = \frac{P_{aço}(1000)}{6(\frac{\pi}{4})(20)^2(210)(10^3)}$$

$P_{conc} = 83{,}91$ kN ***Resposta***

$P_{aço} = 16{,}09$ kN

D–35. $\delta_{temp} = \Sigma\alpha\Delta TL$

$$\delta_{carga} = \Sigma\frac{PL}{AE}$$

Compatibilidade: $\delta_{temp} + \delta_{carga} = 0$

$$12(10^{-6})(25 - 15)(0{,}4) + 21(10^{-6})(25 - 15)(0{,}2) + \frac{-F(0{,}4)}{175(10^{-6})(200(10^9))} - \frac{F(0{,}2)}{300(10^{-6})(100(10^9))} = 0$$

$P = 4{,}97$ kN ***Resposta***

D–36. Equilíbrio:

$F_A + F_B = 6.000$

Compatibilidade:

Remova o apoio em B. Exija

$\delta_B = (\delta_{B/A})_{temp} + (\delta_{B/A})_{carga} = 0$

$$\alpha\,\Delta TL + \sum\frac{PL}{AE} = 0$$

$$20(10^{-6})(100 - 80)(350) + \frac{6.000(150)}{\frac{\pi}{4}(10)^2 75(10^3)} - \frac{F_B(350)}{\frac{\pi}{4}(10)^2 75(10^3)} = 0$$

$F_B = 4{,}93$ kN ***Resposta***

$F_A = 1{,}07$ kN ***Resposta***

D–37. Equilíbrio:

$F_A + F_B = P$

Visto que $F_B = 0$, $F_A = P$

Compatibilidade:

Remova o apoio em B. Exija

$\delta_B = (\delta_{B/A})_{temp} + (\delta_{B/A})_{carga} = 0$

$$\alpha\,\Delta TL + \frac{PL}{AE} = 0$$

$$20(10^{-6})(50 - 80)(350) + \frac{P(150)}{\frac{\pi}{4}(10)^2 75(10^3)} = 0$$

$P = 8{,}25$ kN ***Resposta***

D–38. Não, só é válido para seções transversais circulares. Seções transversais não circulares entortarão. ***Resposta***

D–39. $T_{máx} = T_{CD} = 40$ N·m

$$T_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{40(10 \times 10^3)}{\frac{\pi}{2}(10)^4} = 25{,}46 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D–40. Equilíbrio do segmento AB:

$T_B = 30$ N·m

$$T_B = \frac{Tc}{J} = \frac{30(20 \times 10^3)}{\frac{\pi}{2}(20)^4} = 2{,}387 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

D–41. Segmento AB:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{5(10^3)(0{,}05)}{\frac{\pi}{2}(0{,}05)^4} = 25{,}5 \text{ MPa}$$ ***Resposta***

Segmento BC:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{10(10^3)(0{,}1)}{\frac{\pi}{2}(0{,}1)^4} = 6{,}37 \text{ MPa}$$

D–42.

$$\phi_A = \sum\frac{TL}{JG} = \frac{-400(1.000)(2)(1.000)}{\frac{\pi}{2}(20)^4 80(10^3)} - \frac{200(1.000)(3)(1.000)}{\frac{\pi}{2}(20)^4 80(10^3)} + 0 + \frac{300(1.000)(2)(1.000)}{\frac{\pi}{2}(20)^4 80(10^3)}$$

$= -0{,}0399$ rad $= 0{,}0399$ rad em sentido horário quando visto de A. ***Resposta***

D–43.

$$\phi_A = \sum\frac{TL}{JG} = \frac{600(1.000)(2)(1.000)}{\frac{\pi}{2}(20)^4 80(10^3)} + \frac{200(1.000)(2)(1.000)}{\frac{\pi}{2}(10)^4 80(10^3)} - \frac{100(1.000)(3)(1.000)}{\frac{\pi}{2}(10)^4 80(10^3)}$$

$= 1{,}512$ rad em sentido anti-horário quando visto de A. ***Resposta***

D–44.

$$\phi_A = \sum\frac{TL}{JG} = \frac{40(0{,}3)}{\frac{\pi}{2}(0{,}015)^4 75(10^9)} + \frac{20(0{,}2)}{\frac{\pi}{2}[(0{,}025)^4 - (0{,}0125)^4]75(10^9)} - \frac{30(0{,}3)}{\frac{\pi}{2}[(0{,}025)^4 - (0{,}0125)^4]75(10^9)}$$

$= 1{,}90(10^{-3})$ rad em sentido anti-horário quando visto de A em direção a D. ***Resposta***

D–45. $$T = \frac{P}{\omega} = \frac{150.000}{150} = 1.000\text{N·m} = 10^6\text{N·mm}$$

$$\tau_{adm} = \frac{Tc}{J};\quad 145 = \frac{1\times10^6\times20}{\frac{\pi}{2}[(20)^4 - r_i^4]}$$

$r_i = 16{,}4$ mm

$d_i = 32{,}8$ mm use $d = 33$ mm ***Resposta***

D–46. $T = \frac{P}{\omega} = \frac{250.000}{\omega}$

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J};\quad 145 = \frac{\frac{250.000}{\omega}(10^3)(25)}{\frac{\pi}{2}[(25)^4 - (20)^4]]}$$

$\omega = 119$ rad/s ***Resposta***

D–47. Equilíbrio:

$T_{aço} + T_{lat} = 950$

Compatibilidade: $\phi_{aço} = \phi_{br}$;

$$\frac{T_{aço}(0{,}6)}{\frac{\pi}{2}[(0{,}03)^4 - (0{,}015)^4]75(10^9)} = \frac{T_{br}(0{,}6)}{\frac{\pi}{2}(0{,}015)^4 37(10^9)}$$

$T_{aço} = 30{,}25$ N · m

$T_{aço} = 919{,}8$ N · m

$$\phi = \phi_{lat} = \frac{30{,}25(0{,}6)}{\frac{\pi}{2}(0{,}015)^4 37(10^9)} = 0{,}00617\,\text{rad}$$ ***Resposta***

D–48. Equilíbrio:

$T_A + T_C = 600$

Compatibilidade:

$\phi_{B/C} = \phi_{B/A}$;

$$\frac{T_C(1)}{JG} = \frac{T_A(2)}{JG}$$

$T_A = 200$ N · m

$T_C = 400$ N · m

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} = \frac{400(0{,}025)}{\frac{\pi}{2}(0{,}025)^4} = 16{,}3\,\text{MPa}$$ ***Resposta***

D–49. $A_y = 5{,}5$ kN

Use seção de comprimento x.

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0$;

$-5{,}5x + 4(2)(x - 1) + M = 0$

$M = 8 - 2{,}5x$ ***Resposta***

D–50. $A_y = 3$ kN

Use seção de comprimento x.

Intensidade de $w = \frac{2}{3}x$ em x.

$\circlearrowleft + \Sigma M = 0$;

$$-3x + \left(\frac{1}{3}x\right)\left[\frac{1}{2}(x)\left(\frac{2}{3}x\right)\right] + M = 0$$

$$M = 3x - \frac{x^3}{9}$$ ***Resposta***

D–51. $B_y = 2{,}6$ kN

$A_y = 4{,}6$ kN

Trace o diagrama M

$M_{máx} = 7{,}80$ kN·m (em C) ***Resposta***

D–52. Trace o diagrama M

$M_{máx} = 20$ kN · m (em C) ***Resposta***

D–53. $A_y = 2{,}33$ kN

$B_y = 6{,}667$ kN

Trace o diagrama M

$M_{máx} = 11$ kN · m (em C) ***Resposta***

D–54. $A_y = B_y = 800$ N

Trace o diagrama M

$M_{máx} = 1600$ N · m (no interior de CD) ***Resposta***

D–55. $A_y = B_y = 40$ kN

$M_{máx} = 40(1) = 40$ kN·m

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{40(10^6)(75)}{\frac{1}{12}(50)(150)^3} = 213{,}3\,\text{MPa}$$ ***Resposta***

D–56. $A_y = B_y = 1.000$ N

$M_{máx} = 1.250$ N · m

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{1.250(0{,}025)}{\frac{\pi}{4}(0{,}025)^4} = 102\,\text{MPa}$$ ***Resposta***

D–57. $\epsilon = 0$ ***Resposta***

D–58. $\sigma = \frac{My}{I};\quad 10(10^2) = \frac{M(1)}{[\frac{1}{12}(4)(4)^3 - \frac{1}{12}(3)(3)^3]}$

$M = 14{,}58$ kN·cm $= 145{,}8$ N·m ***Resposta***

D–59. Da parte inferior da seção transversal

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{40(80)(20) + 95(30)(100)}{80(20) + 30(100)} = 75{,}870\,\text{mm}$$

$$I = \frac{1}{12}(20)(80)^3 + 20(80)(75{,}870 - 40)^2 + \frac{1}{12}(100)(30)^3 + 100(30)(95 - 75{,}870)^2$$

$$= 4{,}235(10^{-6})\,\text{m}^4$$

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{10(10^3)(0{,}075870)}{4{,}235(10^{-6})} = 179\,\text{MPa}$$ ***Resposta***

D–60. $A_y = P/2$

$M_{máx} = P/2\,(2) = P$ (em C)

$$I = \frac{1}{12}(0{,}02)(0{,}150)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(0{,}1)(0{,}02)^3 + (0{,}1)(0{,}02)(0{,}085)^2\right]$$

$= 34{,}66(10^{-6})\ \text{m}^4$

$$\sigma = \frac{Mc}{I};\quad 12(10^6) = \frac{P(0{,}095)}{34{,}66(10^{-6})}$$

$P = 4{,}38\ \text{kN}$ ***Resposta***

D–61. Tensão máxima ocorre em D ou A.

$$(\sigma_{\text{máx}})_D = \frac{(5\cos 30°)(10^2)(3)}{\frac{1}{12}(4)(6)^3} + \frac{(5\,\text{sen}\,30°)(10^2)(2)}{\frac{1}{12}(6)(4)^3}$$

$= 4{,}408\ \text{N/cm}^2 = 0{,}044\ \text{MPa}$ ***Resposta***

D–62. Q é superior na metade inferior da seção transversal.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{20(10^3)[(0{,}05)(0{,}1)(0{,}15)]}{\left[\frac{1}{12}(0{,}150)(0{,}2)^3\right](0{,}15)}$$

$= 1\ \text{MPa}$ ***Resposta***

D–63. $I = \frac{1}{12}(3)(4)^3 - \frac{1}{12}(2)(3)^3 = 11{,}5\ \text{cm}^4$

Q é superior na metade inferior da seção transversal.

$$Q = (1)(2)(3) - (0{,}75)(1{,}5)(2) = 3{,}75\ \text{cm}^3$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{2.000(3{,}75)}{11{,}5(1)} = 652\ \text{N/cm}^2$$

$= 6{,}52\ \text{MPa}$ ***Resposta***

D–64. $A_y = 4{,}5\ \text{kN},\quad B_y = 1{,}5\ \text{kN}$

$V_{\text{máx}} = 4{,}5\ \text{kN}$ (em A)

Q é superior metade inferior da seção transversal.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{VQ}{It} = \frac{4{,}5(10^3)\left[\left(\frac{4(0{,}03)}{3\pi}\right)\frac{1}{2}xs\pi(0{,}03)^2\right]}{\left[\frac{1}{4}\pi(0{,}03)^4\right](0{,}06)}$$

$= 2{,}12\ \text{MPa}$ ***Resposta***

D–65. Da parte inferior:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{3(6)(1) + 6{,}5(1)(8)}{6(1) + 1(8)} = 5\ \text{cm}$$

$$I = \frac{1}{12}(1)(6)^3 + 6(1)(5-3)^2 + \frac{1}{12}(8)(1)^3$$

$$+ 8(1)(6{,}5-5)^2 = 60{,}67\ \text{cm}^4$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{4(10^3)[8(1)(6{,}5-5)]}{60{,}67(1)} = 791\ \text{N/cm}^2$$

$= 7{,}91\ \text{MPa}$ ***Resposta***

D–66. $I = \frac{1}{12}(6)(4)^3 = 32\ \text{cm}^4$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{150[(1)(6)(2)]}{32} = 56{,}25\ \text{N/cm}^2$$

$F = qs = (56{,}25\ \text{N/cm})(2\ \text{cm}) = 112{,}5\ \text{N}$ ***Resposta***

D–67. $I = \frac{1}{12}(6)(6)^3 - \frac{1}{12}(4)(4)^3 = 86{,}67\ \text{cm}^4$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{400(2{,}5)(6)(1)}{86{,}67} = 69{,}23\ \text{N/cm}$$

Para um prego

$q = 69{,}23/2 = 34{,}62\ \text{N/cm}$

$F = qs = 34{,}62\ \text{N/cm}\ (4\ \text{cm}) = 138\ \text{N}$ ***Resposta***

D–68. $\sigma = \frac{pr}{t} = \frac{80(15)}{0{,}3} = 4.000\text{N/cm} = 40\ \text{MPa}$

D–69. $\sigma = \frac{pr}{2t};\quad 10(10^3) = \frac{150r}{2(0{,}25)}$

$r = 33{,}3\ \text{cm}$

$d = 66{,}7\ \text{cm}$

D–70. Na seção que passa pelo eixo centroide

$N = P$

$V = 0$

$M = (2 + 1)P = 3P$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$30 = \frac{P}{2(0{,}5)} + \frac{(3P)(1)}{\frac{1}{12}(0{,}5)(2)^3}$$

$P = 3\ \text{N}$ ***Resposta***

D–71. Em uma sessão que passa pelo centro da cantoneira no eixo centroide.

$N = 700\ \text{N}$

$V = 0$

$M = 700(3 + 0{,}375) = 2.362{,}5\ \text{N}\cdot\text{cm}$

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{700}{0{,}75(1)} + \frac{2362{,}5(0{,}375)}{\left[\frac{1}{12}(1)(0{,}75)^3\right]}$$

$= 26{,}1\ \text{N/cm}^2 = 0{,}261\ \text{MPa}$ ***Resposta***

D–72. Em uma seção transversal

$N = P,\ M = P(0{,}01)$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$30(10^6) = \frac{P}{\pi(0{,}01)^2} + \frac{P(0{,}01)(0{,}01)}{\frac{1}{4}\pi(0{,}01)^4}$$

$P = 1{,}88\ k\text{N}$ ***Resposta***

D–73. Na seção que passa por B:

$N = 500\ \text{N},\ V = 400\ \text{N}$

$M = 400(10) = 4.000\ \text{N}\cdot\text{cm}$

Carga axial:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{500}{4(3)} = 41{,}667\ \text{N/cm}^2\ \text{(T)}$$

Carga de cisalhamento:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{400[(1.5)(3)(1)]}{[\frac{1}{12}(3)(4)^3]3} = 37{,}5\ \text{N/cm}^2$$

Momento fletor:

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{4.000(1)}{\frac{1}{12}(3)(4)^3} = 250 \text{ N/cm}^2 \text{ (C)}$$

Assim,

$$\sigma_x = 41{,}667 - 250 = 208 \text{ N/cm}^2$$
$$= 2{,}08 \text{ MPa (C)}$$
$$\sigma_y = 0$$
$$\tau_{xy} = 37{,}5 \text{ N/cm}^2 = 0{,}375 \text{ MPa} \quad \textit{Resposta}$$

D–74. Na seção B:

$N_z = 500$ N, $V_y = 400$ N,

$M_x = 400(0{,}1) = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$

$M_y = 500(0{,}05) = 25 \text{ N} \cdot \text{m}$, $T_z = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$

Carga axial:

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{500}{\pi(0{,}05)^2} = 63{,}66 \text{ kPa (C)}$$

Carga de cisalhamento:

$\tau_{zy} = 0$ visto que em $B, Q = 0$.

Momento em torno do eixo x:

$$\sigma_z = \frac{Mc}{I} = \frac{40(0{,}05)}{\frac{\pi}{4}(0{,}05)^4} = 407{,}4 \text{ kPa (C)}$$

Momento em torno do eixo y:

$\sigma_z = 0$. Visto que B é no eixo neutro.

Torque:

$$\tau_{zx} = \frac{Tc}{J} = \frac{30(0{,}05)}{\frac{\pi}{2}(0{,}05)^4} = 153 \text{ kPa}$$

Assim,

$\sigma_x = 0$

$\sigma_y = 0$

$\sigma_z = -63{,}66 - 407{,}4 = -471$ kPa *Resposta*

$\tau_{xy} = 0$ *Resposta*

$\tau_{zy} = 0$ *Resposta*

$\tau_{zx} = -153$ kPa *Resposta*

D–75. Verdadeiro. *Resposta*

D–76. $\sigma_x = 4$ MPa, $\sigma_y = -6$ MPa, $\tau_{xy} = -8$ MPa

Aplique a Equação 9.5, $\sigma_1 = 8{,}43$ MPa,

$\sigma_2 = -10{,}4$ MPa *Resposta*

D–77. $\sigma_x = 200$ MPa, $\sigma_y = -150$ MPa, $\tau_{xy} = 100$ MPa

Aplique a Equação 9.7, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = 202$ MPa *Resposta*

D–78. $\sigma_x = -50$ MPa, $\sigma_y = -30$ MPa, $\tau_{xy} = 0$

Use Equação 9.7, $\tau_{\substack{\text{máx} \\ \text{no plano}}} = 10$ MPa *Resposta*

D–79. Na seção transversal que passa por B:

$N = 4$ kN, $V = 2$ kN,

$M = 2(2) = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{4(10^3)}{0{,}03(0{,}06)} + \frac{4(10^3)(0{,}03)}{\frac{1}{12}(0{,}03)(0{,}06)^3}$$
$$= 224 \text{ MPa (T)}$$

Note que $\tau_B = 0$ visto que $Q = 0$.

Assim,

$\sigma_1 = 224$ MPa *Resposta*

$\sigma_2 = 0$

D–80. $A_y = B_y = 12$ kN

Segmento AC:

$V_C = 0$, $M_C = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$\tau_C = 0$ (visto que $V_C = 0$)

$\sigma_C = 0$ (visto que C está no eixo neutro)

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ *Resposta*

D–81. $A_y = 3$ kN

Use seção de comprimento x.

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0; \quad -3x + 2x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$M = 3x - x^2$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 3x - x^2$$

Integre duas vezes, use

$v = 0$ em $x = 0$, $v = 0$ em $x = 3$ m

$$v = \frac{1}{EI}\left(-\tfrac{1}{12}x^4 + 0{,}5x^3 - 2{,}25x\right) \quad \textit{Resposta}$$

D–82. $A_y = 15$ kN

$M_A = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$

Use a seção de comprimento x.

Intensidade de $w = 30x$ em x.

$$\circlearrowleft + \Sigma M = 0;$$

$$-15x + 10 + \left(\frac{1}{3}x\right)\left[\frac{1}{2}(30x)(x)\right] + M = 0$$

$$M = 15x - 5x^3 - 10$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 15x - 5x^3 - 10$$

Integrate duas vezes, use

$v = 0$ em $x = 0$,

$dv/dx = 0$ em $x = 0$

$$v = \frac{1}{EI}(2{,}5x^3 - 0{,}25x^3 - 5x^2) \quad \textit{Resposta}$$

D–83. Pelo Apêndice C, considere cargas distribuídas e concentradas reparadamente,

$$\Delta_C = \frac{5wL^4}{768EI} + \frac{PL^3}{48EI}$$
$$= \frac{5(2)(6)^4}{768EI} + \frac{8(6)^3}{48EI} = \frac{52{,}875 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \textit{Resposta}$$

D–84. Pelo Apêndice C, considere carga distribuída e momento conjugado separadamente .

$$\theta_A = \frac{w_O L^3}{45EI} + \frac{ML}{6EI}$$
$$= \frac{4(3)^3}{45EI} + \frac{20(3)}{6EI} = \frac{12{,}4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \circlearrowright \quad \textit{Resposta}$$

D–85. Verdadeiro. ***Resposta***

D–86.
$$P = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2(210\times10^3)(\frac{\pi}{4}(12{,}5)^4)}{[0{,}5(12{,}50)]^2} = 101{,}7\text{ kN}$$ ***Resposta***

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{101{,}7\times10^3}{\pi(12{,}5)^2} = 207{,}2\text{ MPa} < \sigma_e \text{ OK}$$

D–87. $P = \dfrac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \dfrac{\pi^2(11)(10^3)[\frac{1}{12}(100)(50^3)]}{[1(4.000)]^2}$

$= 7{,}07$ kN ***Resposta***

D–88. $A = \pi((0{,}025)^2 - (0{,}015)^2) = 1{,}257(10^{-3})\text{ m}^2$

$I = \frac{1}{4}\pi((0{,}025)^4 - (0{,}015)^4) = 267{,}04(10^{-9})\text{ m}^4$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2(200(10^9))(267{,}04)(10^{-9})}{[0{,}5(5)]^2}$$

$= 84{,}3$ kN ***Resposta***

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{84{,}3(10^3)}{1{,}257(10^{-3})} = 67{,}1\text{ MPa} < 250\text{ MPa OK}$$

D–89. $P = \dfrac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$;

$$180(10^3) = \frac{\pi^2 210(10^3)[\frac{\pi}{4}(25^4 - r_2^4)]}{(1\times2.000)^2}$$

$r_2 = 15{,}08$ mm

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{180(10^3)}{\pi[(25)^2 - (15{,}08)^2]}$$

$= 144{,}1$ MPa < 260 MPa OK

Portanto $t = 25 - 15{,}08 = 9{,}82$ mm ***Resposta***

D–90. $P = \dfrac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$;

$$15(10^3) = \frac{\pi^2 210(10^3)\frac{\pi}{4}r^4}{[1(1.000)]^2}$$

$\therefore\ r_2 = 9{,}8$ mm

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{15(10^3)}{\pi(9{,}8)^2} = 49{,}7\text{ MPa} < 260\text{ MPa OK}$$

$d = 2r = 19{,}6$ mm

Use $d = 20$ mm ***Resposta***

Respostas

Capítulo 1

1.1. **a)** $F_A = 13{,}8$ kN, **b)** $F_A = 34{,}9$ kN

1.2. $T_C = 250\ \text{N}\cdot\text{m}$, $T_D = 150\ \text{N}\cdot\text{m}$

1.3. $T_B = 150$ N·m, $T_C = 500$ N·m

1.5. $N_D = -131$ N, $V_D = -175$ N, $M_D = -8{,}75\ \text{N}\cdot\text{m}$

1.6. $N_D = -15{,}63$ kN, $V_D = 0$ kN, $M_D = 0$ kN·m

1.7. $N_E = -15{,}63$ kN, $V_E = 0$ kN, $M_E = 0$ kN·m

1.8. $N_A = 0$, $V_A = 2{,}17$ kN, $M_A = -1{,}654$ kN·m,
$N_B = 0$, $V_B = 3{,}98$ kN, $M_B = -9{,}034$ kN·m,
$V_C = 0$, $N_C = -5{,}55$ kN, $M_C = -11{,}554$ kN·m

1.9. $V_A = 386{,}37$ N, $N_A = 103{,}53$ kN, $M_A = 1{,}808$ N·m

1.10. $N_C = 0$, $V_C = 3{,}92$ kN, $M_C = 15{,}07$ kN·m

1.11. Pelo ponto E:
$N_E = 0$, $V_E = 2{,}03$ kN, $M_E = -0{,}911$ kN·m
Pelo ponto D:
$N_D = 0$, $V_D = 4{,}18$ kN, $M_D = 14{,}823$ kN·m

1.12. $N_C = -16{,}2$ kN, $V_C = -5{,}4$ kN, $M_C = -12{,}96$ kN·m,
$N_C = -7{,}64$ kN, $V_C = -15{,}27$ kN,
$M_C = -12{,}96$ kN·m

1.13. Na seção a–a: $N_{a-a} = 650$ N, $V_{a-a} = 0$
Na seção b–b: $V_{b-b} = 563$ N, $N_{b-b} = 325$ N

1.14. Na seção b–b: $N_{b-b} = 650\cos\theta$, $V_{b-b} = 650\,\text{sen}\theta$

1.15. $N_B = -2$ kN, $V_B = 4{,}72$ kN, $M_B = -4{,}632$ kN·m

1.16. $N_C = -2$ kN, $V_C = 5{,}26$ kN, $M_C = -9{,}123$ kN·m,
$N_D = 0$ kN, $V_D = 6{,}97$ kN, $M_D = -22{,}932$ kN·m

1.17. $N_B = 0$ kN, $V_B = 1.440$ kN, $M_B = -1.920$ kN·m

1.18. $N_C = 0$, $V_C = 1{,}75$ kN, $M_C = 8{,}50$ kN·m

1.19. $N_D = 0$, $V_D = -1{,}25$ kN, $M_D = 9{,}50\ \text{kN}\cdot\text{m}$

1.20. $V_D = 0$ kN, $N_D = 0$ kN, $M_D = 0$ kN·m,
$V_E = 2{,}67$ kN, $N_E = 6$ kN, $M_E = 2{,}4$ kN·m,
$V_F = 0$ kN, $N_F = 12$ kN, $M_F = 4{,}8$ kN·m

1.21. $V_I = 0{,}722$ kN, $N_I = 1{,}25$ kN, $M_I = 0{,}144$ kN·m

1.22. Pelo ponto J: $V_J = 0$ kN, $N_J = -1{,}443$ kN,
$M_J = 0$ kN·m
Pelo ponto K: $N_K = 3{,}016$ kN, $V_K = 0$ kN,
$M_K = 0$ kN·m

1.23. $(N_B)_x = 0$, $(V_B)_y = 0$, $(V_B)_z = 70{,}6$ N,
$(T_B)_x = 9{,}42\ \text{N}\cdot\text{m}$, $(M_B)_y = 6{,}23\ \text{N}\cdot\text{m}$,
$(M_B)_z = 0$

1.24. $(V_A)_x = 0\,\text{kN}, (N_A)_y = 0\,\text{kN}, (V_A)_z = -167$ kN,
$(M_A)_x = -507\ \text{kN}\cdot\text{m}, (T_A)_y = -2{,}1\ \text{kN}\cdot\text{m}$,
$(M_A)_z = 0\ \text{kN}\cdot\text{m}$

1.25. $(V_B)_x = 750$ N, $(V_B)_y = 0$ N, $(N_B)_z = 0$ N,
$(M_B)_x = 0\ \text{N}\cdot\text{m}, (M_B)_y = 5.625\ \text{N}\cdot\text{m}, (T_B)_z = 375\ \text{N}\cdot\text{m}$

1.26. $(N_D)_x = 0$, $(V_D)_y = 154$ N, $(V_D)_z = -171$ N,
$(T_D)_x = 0$, $(M_D)_y = -94{,}3\ \text{N}\cdot\text{m}$,
$(M_D)_z = -149\ \text{N}\cdot\text{m}$

1.27. $(N_C)_x = 0$, $(V_C)_y = -246$ N, $(V_C)_z = -171$ N,
$(T_C)_x = 0$, $(M_C)_y = -154\ \text{N}\cdot\text{m}$,
$(M_C)_z = -123\ \text{N}\cdot\text{m}$

1.28. $N_F = 0$ N, $V_F = 400$ N, $M_F = 240$ N·m,
$N_G = 83{,}54$ N, $V_G = 360$ N, $M_G = 162$ N·m

1.29. $N_C = 400$ N, $V_C = 0$ N, $M_C = -60$ N·m

1.30. $(V_B)_x = 0$, $(N_B)_y = -600$ N, $(V_B)_z = 921$ N,
$(M_B)_x = 1.606\ \text{N}\cdot\text{m}$, $(T_B)_y = 0$, $(M_B)_z = -800\ \text{N}\cdot\text{m}$

1.31. $N_A = P\cos\theta$, $V_A = P\,\text{sen}\theta$,
$M_A = Pr(1 - \cos\theta)$

1.34. $\sigma = 1{,}82$ MPa

1.35. $\tau_{\text{méd}} = 53{,}05$ MPa

1.36. $\sigma = 3{,}345$ MPa

1.37. $\sigma_B = 151$ kPa, $\sigma_C = 32{,}5$ kPa, $\sigma_D = 25{,}5$ kPa

1.38. $F = 36$ kN, $d = 110$ mm

1.39. $\tau_{\text{méd}} = 29{,}5$ MPa

1.40. $P_{\text{adm}} = 1{,}092$ kN

1.41. $\sigma = 3{,}08$ MPa

1.42. $\sigma_{AB} = 3{,}93$ MPa, $\sigma_{AD} = 5{,}074$ MPa,
$\sigma_{AC} = 6{,}473$ MPa

1.43. $\sigma_{AB} = 3{,}93$ MPa, $\sigma_{AD} = 4{,}001$ MPa,
$\sigma_{AC} = 6{,}252$ MPa

1.44. $\sigma_{AB} = 3{,}93$ MPa, $\sigma_{AD} = 3{,}19$ MPa,
$\sigma_{AC} = 6{,}38$ MPa

1.45. $\sigma_b = 48{,}3$ MPa, $\tau_{\text{méd}} = 18{,}4$ MPa

1.46. $\sigma = 8$ MPa, $\tau_{\text{méd}} = 4{,}62$ MPa

1.47. $\sigma_{BC} = 9{,}38$ MPa

1.48. $\sigma = 0{,}0152$ MPa, $\tau_{\text{méd}} = 0{,}0567$ MPa

1.49. $\sigma = 25$ MPa, $\tau_{\text{méd}} = 14{,}434$ MPa

1.50. $\sigma = 549{,}05$ MPa, $\tau_{\text{méd}} = 428{,}96$ MPa

1.51. $\theta = 45°$, $\tau_{\text{máx}} = \dfrac{P}{2A}$

1.53. $\tau_A = 0$, $\tau_B = 95{,}71$ MPa

1.54. $\sigma = 533{,}33$ Pa, $\tau_{\text{méd}} = 923{,}76$ Pa

1.55. $F_{\text{mín}} = 2{,}63$ N

1.57. $\theta = 63{,}6°$, $\sigma = 316$ MPa

1.58. Treliça A:
$\sigma_{AB} = 85{,}47$ MPa (T), $\sigma_{AE} = 63{,}376$ MPa (C)
Treliça E:
$\sigma_{EB} = 38{,}462$ MPa (T), $\sigma_{ED} = 68{,}376$ MPa (C)
Treliça B:
$\sigma_{BC} = 188{,}034$ MPa (T), $\sigma_{BD} = 149{,}573$ MPa (C)

1.59. $\sigma_{AB} = 2{,}137$ MPa (T), $\sigma_{AE} = 1{,}709$ MPa (C),
$\sigma_{EB} = 0{,}962$ MPa (T), $\sigma_{ED} = 1{,}709$ MPa (C),
$\sigma_{BC} = 4{,}701$ MPa (T), $\sigma_{BD} = 3{,}739$ MPa (C),
$P_{adm} = 29{,}78$ kN

1.61. $\tau_{méd} = 29{,}709$ MPa

1.62. $\tau_{méd} = 12{,}732$ MPa

1.63. $\tau_{méd} = 93{,}901$ MPa

1.65. $\sigma_B = 2{,}08$ MPa, $\sigma_C = 55{,}1$ MPa

1.67. Nos pinos B e C: $\tau_B = \tau_C = 324$ MPa,
No pino A: $\tau_A = 324$ MPa

1.69. $\theta = 75{,}96°$

1.70. $\tau_{pino} = 44{,}762$ MPa, $\sigma_{barra} = 70{,}736$ MPa

1.71. $\sigma = \dfrac{P}{A}\operatorname{sen}^2\theta$, $\tau_{méd} = \dfrac{P}{2A}\operatorname{sen} 2\theta$

1.72. $\sigma_{BC} = \left(\dfrac{2W}{\pi \cdot d_0^2}\right) \cdot \dfrac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(45° + 0{,}5\theta)}$

1.73. $\sigma = (47{,}5 - 20{,}0x)$ MPa

1.74. $\sigma = (32{,}5 - 20{,}0x)$ MPa

1.75. $\sigma = (238 - 22{,}6z)$ kPa

1.77. $r = r_1 e^{\left(\frac{\pi r_1^2 \rho g}{2P}\right)z}$

1.78. $\sigma = 49{,}5$ kPa

1.79. $\sigma = \dfrac{m\omega^2}{8A}(L^2 - 4x^2)$

1.81. $h = 75$ mm

1.82. $d_{AB} = 6{,}02$ mm, $d_{CD} = 5{,}41$ mm

1.83. $d = 5{,}71$ mm

1.84. $a = 7{,}071$ mm

1.85. $P = 113{,}14$ kN

1.86. $d = 15$ mm, $d = 10$ mm

1.87. $d = 12{,}166$ mm, $d = 21{,}913$ mm

1.89. $P = 2{,}40$ kN

1.90. $F_{AB} = 5{,}818$ kN, $W = 1{,}739$ kN

1.91. $F_{AB} = 114{,}478$ kN, $T_{cabo} = 103{,}491$ kN,
$d_0 = 30$ mm

1.93. $d_1 = 44{,}6$ mm, $d_3 = 26{,}4$ mm, $t = 15{,}8$ mm

1.94. $a_A = 80$ mm, $a_B = 120$ mm

1.95. $P_{adm} = 3$ kN

1.96. $A_{BC} = 1.834{,}416$ mm^2, $d_A = 41{,}854$ mm,
$d_B = 29{,}595$ mm

1.97. $d_2 = 35{,}7$ mm, $d_3 = 27{,}6$ mm, $d_1 = 22{,}6$ mm

1.98. $t = 22{,}5$ mm

1.99. $a_A = 90$ mm, $a_B = 110$ mm

1.100. $P_{adm} = 3{,}67$ kN

1.101. Em A: FS = 1,02
Em AB: FS = 1,11

1.102. $w = 6{,}632$ kN/m, $w = 7{,}791$ kN/m

1.103. $P = 31{,}23$ kN, $d = 15{,}29$ mm

1.104. $P = 105{,}00$ kN, $t = 20{,}00$ mm, $w = 62{,}50$ mm

1.105. $d_B = 6{,}11$ mm, $d_m = 15{,}4$ mm

1.106. $x = 0{,}909$ m

1.107. $w = 7{,}18$ kN/m

1.109. $w_1 = 1.066{,}67$ kN/m, $w_2 = 1.600{,}00$ kN/m,
$d = 19{,}073$ mm

1.110. $w_1 = 366{,}52$ kN/m, $w_2 = 549{,}78$ kN/m

1.111. $d = 13{,}8$ mm, $t = 7{,}00$ mm

1.113. $\sigma_{a-a} = 200$ kPa, $\tau_{a-a} = 115$ kPa

1.114. Segmento AD:
$N_D = 6$ kN, $V_D = -3{,}13$ kN, $M_D = -1{,}153$ kN·m
Segmento CE:
$N_D = -10$ kN, $V_D = 0$ kN, $M_D = 0$ kN·m

1.115. $\tau_{méd} = 79{,}6$ MPa

1.117. Segmento BD:
$N_D = -10{,}8$ kN, $V_D = 0$ kN, $M_D = 3{,}24$ kN·m
Segmento FE:
$V_E = 2{,}7$ kN, $N_E = 21{,}60$ kN, $M_E = 30{,}24$ kN·m

1.118. $\sigma_{BD} = 140$ MPa, $\sigma_{AD} = 285$ MPa

1.119. $\sigma_{40} = 3{,}98$ MPa, $\sigma_{30} = 7{,}07$ MPa,
$\tau_{méd} = 5{,}09$ MPa

Capítulo 2

2.1. $\epsilon = 0{,}1667$ mm/mm

2.2. $\epsilon = 0{,}0472$ mm/mm

2.3. $\epsilon_{CE} = 0{,}00250$ mm/mm, $\epsilon_{BD} = 0{,}00107$ mm/mm

2.4. $\epsilon_{CE} = 0{,}00250$ mm/mm, $\epsilon_{BD} = 0{,}00107$ mm/mm

2.5. $(\epsilon_{CE})_{méd} = 1{,}79(10^{-3})$ mm/mm,
$(\epsilon_{BD})_{méd} = 1{,}43(10^{-3})$ mm/mm

2.6. $\Delta_P = 11{,}2$ mm

2.7. $\epsilon_{AC} = \epsilon_{AB} = 0{,}00578$ mm/mm

2.9. $\Delta_D = 4{,}38$ mm

2.10. $\epsilon_{AB} = 0{,}0398$

2.11. $\epsilon_{AB} = \dfrac{0{,}5\ \Delta L}{L}$

2.13. $(\gamma_C)_{xy} = -11{,}6(10^{-3})$ rad, $(\gamma_D)_{xy} = 11{,}6(10^{-3})$ rad

2.14. $\epsilon_{AC} = 1{,}60(10^{-3})$ mm/mm, $\epsilon_{DB} = 12{,}8(10^{-3})$ mm/mm

2.15. $\epsilon_{AB} = 16{,}8(10^{-3})$ m/m

2.16. $(\gamma_{nt})_A = 0{,}05024$ rad, $(\gamma_{nt})_B = 0{,}05024$ rad

2.17. $\epsilon_{AB} = -4{,}686 \times 10^{-3}$ mm/mm, $\epsilon_{AC} = 20{,}000 \times 10^{-3}$ mm/mm, $\epsilon_{DB} = -30{,}000 \times 10^{-3}$ mm/mm,

2.18. $\epsilon_{AB} = 1{,}61(10^{-3})$ mm/mm, $\epsilon_{CD} = 126(10^{-3})$ mm/mm

2.19. $(\gamma_A)_{xy} = -0{,}0262$ rad, $(\gamma_B)_{xy} = -0{,}205$ rad, $(\gamma_C)_{xy} = 0{,}205$ rad, $(\gamma_D)_{xy} = 0{,}0262$ rad

2.21. $\epsilon = 2kx$

2.22. $\gamma_{xy} = -0{,}0200$ rad

2.23. $\gamma_{xy} = 0{,}02$ rad

2.25. $\gamma_{xy} = 0{,}0142$ rad

2.26. $\epsilon_{DB} = -0{,}00680$ mm/mm, $\epsilon_{AD} = 0{,}0281(10^{-3})$ mm/mm

2.27. $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0{,}00319$, $\gamma_{xy} = 0{,}0798$ rad, $\epsilon_{BE} = -0{,}0179$ mm/mm

2.29. $(\gamma_C)_{xy} = -0{,}137$ rad, $(\gamma_D)_{xy} = 0{,}137$ rad

2.30. $\Delta y = 2{,}03$ mm

2.31. $\Delta L = 30{,}00$ mm

2.33. $\Delta L = 42{,}252$ mm

2.34. $\epsilon_{AB} = \dfrac{v_B \operatorname{sen}\theta}{L} - \dfrac{u_A \cos\theta}{L}$

Capítulo 3

3.1. $E_{\text{aprox}} = 26{,}67$ GPa

3.2. $E_{\text{aprox}} = 387{,}3$ GPa, $u_r = 0{,}0697$ MJ/m^3

3.3. $u_t = 0{,}595$ MJ/m^3

3.4. $E_{\text{aprox}} = 260{,}8$ GPa, $\sigma_e = 448$ MPa, $\sigma_{\text{lim}} = 890$ MPa, $\sigma_R = 753{,}8$ MPa

3.5. $E = 290$ GPa, $P_e = 32{,}80$ kN, $P_{\text{máx}} = 62{,}20$ kN

3.6. $E = 290$ GPa, Valor$_{\text{RE}} = 0{,}08621$ mm, Valor$_{\text{ps}} = 3{,}91379$ mm

3.7. $u_r = 0{,}145$ MPa, $u_t = 132$ MPa

3.9. $E = 38{,}5$ GPa, $u_r = 77{,}00$ MPa, $u_t = 134{,}75$ MPa

3.10. $L = 1.250{,}363$ mm

3.11. $L = 254{,}143$ mm

3.13. $\Delta P = 220{,}22$ kN

3.14. $E = 766{,}3$ MPa

3.15. $A_{\text{exig}} = 150$ mm^2, $P = 7{,}5$ kN

3.16. $\delta_{AB} = 10{,}586$ mm

3.17. Satisfaz exigências tanto de tensão quanto de deformação.

3.18. $d_{AB} = 3{,}54$ mm, $d_{AC} = 3{,}23$ mm, $L_{AB} = 750{,}49$ mm

3.19. $P = 65{,}63$ kN

3.20. $A_{BC} = 571{,}43$ mm^2, $A_{AB} = 142{,}86$ mm^2

3.21. $\alpha = 0{,}708°$

3.22. $P = 11{,}3$ kN

3.23. $\delta_{AB} = 3{,}970$ mm

3.24. $w = 3{,}40$ kN/m

3.25. $T = 4{,}50$ kN

3.26. $\delta = 0{,}126$ mm, $\Delta d = -0{,}00377$ mm

3.27. $\epsilon_y = -0{,}01500$ mm/mm, $\gamma_{xy} = -0{,}00524$ rad, $\epsilon_x = 0{,}00540$ mm/mm

3.28. $d' = 38{,}0861$ mm

3.29. $\nu = 0{,}300$

3.30. $L = 50{,}0377$ mm, $d = 12{,}99608$ mm

3.31. $E = 227.500$ MPa, $P = 9{,}896$ kN

3.33. $p = 741$ kPa, $\delta = 7{,}41$ mm

3.34. $\epsilon_x = 0{,}00750$ mm/mm, $\gamma_{xy} = 0{,}01222$ rad, $\epsilon_y = -0{,}00375$ mm/mm

3.35. $G = 31{,}60$ GPa

3.36. $d' = 12{,}4716$ mm

3.37. $\epsilon = 0{,}0010186$ mm/mm, deformação $\epsilon = 0$

3.38. $\delta L_{AB} = 2{,}1171$ mm

3.39. $P = 0{,}885$ kN

3.40. $L = 69{,}806$ mm

3.41. $\epsilon_p = 0{,}00227$ mm/mm, $\epsilon_l = 0{,}000884$ mm/mm

3.42. $E_{\text{aprox}} = 250$ GPa

3.43. $u_t = 118(10^6)\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Capítulo 4

4.1. $\delta_A = -3{,}64(10^{-3})$ mm

4.2. $\delta_{AB} = -1{,}74769$ mm

4.3. $P_1 = 304{,}69$ kN, $P_2 = 609{,}38$ kN

4.4. $(\delta_A)_D = 3{,}8483$ mm

4.5. $\delta_B = 2{,}31$ mm, $\delta_A = 2{,}64$ mm

4.6. $P_1 = 70{,}46$ kN, $P_2 = 152{,}27$ kN
4.7. $p = 21{,}8$ MPa, $\delta_{BC} = 1{,}13$ mm, $\delta_{BA} = 0$
4.8. $\delta_1 = 0{,}736$ mm
4.9. $\alpha_{DC} = 0{,}0039°$, $\beta_{AB} = 0{,}0334°$
4.10. $\delta_A = 2{,}990$ mm
4.11. $\delta_F = 0{,}34$ mm
4.12. $\alpha_{AC} = 0{,}00143°$
4.13. $\delta_{tot} = 33{,}87$ mm
4.14. $W = 9{,}69$ kN
4.15. $\delta_F = 2{,}23$ mm
4.16. $\delta_B = 12{,}37$ mm
4.17. $P = 50{,}47$ kN
4.19. $\delta_D = 17{,}3$ mm
4.20. $d_{CD} = 12.887$ mm, $d_{AB} = 22.321$ mm
4.21. $w = 13{,}41$ kN/m, $x = 1{,}35$ m
Hastes AB e CD falham simultaneamente.
4.22. $F = 12{,}0$ kN, $\delta_{A/B} = -0{,}864$ mm
4.23. $F = 17{,}0$ kN, $\delta_{A/B} = -1{,}03$ mm
4.25. $\delta = \dfrac{PL}{\pi E r_2 r_1} + \dfrac{\gamma L^2(r_2 + r_1)}{6E(r_2 - r_1)} - \dfrac{\gamma L^2 r_1^2}{3Er_2(r_2 - r_1)}$
4.26. $\delta = \dfrac{0{,}511P}{\pi r_0 E}$
4.27. $\delta = \dfrac{2{,}63P}{\pi r E}$
4.29. $\delta = \dfrac{\gamma L^2}{6E}$
4.30. $\delta = 0{,}1804$ mm
4.31. $\sigma_{aço} = 24{,}323$ MPa, $\sigma_{conc} = 3{,}527$ MPa
4.32. $d_{aço} = 44{,}95$ mm
4.33. $\sigma_{al} = 27{,}5$ MPa, $\sigma_{aço} = 79{,}9$ MPa
4.34. $\sigma_{aço} = 65{,}9$ MPa, $\sigma_{conc} = 8{,}24$ MPa
4.35. $d = 33{,}9$ mm
4.37. $\sigma_{aço} = 5{,}335$ MPa, $\sigma_{lat} = 2{,}792$ MPa,
4.38. $d_{aço} = 58{,}88$ mm
4.39. $T_{AC} = 1{,}249$ kN, $T_{AB} = 6{,}251$ kN
4.40. $A_{AB} = 3{,}60911$ mm^2
4.41. $P = F_{lat} = 198$ kN
4.42. $T_{AB} = 1{,}469$ kN, $T_{A'B'} = 1{,}781$ kN
4.43. $P_b = 14{,}4$ kN
4.45. $w = 45{,}9$ kN/m
4.46. $\sigma_D = 13{,}4$ MPa, $\sigma_{BC} = 9{,}55$ MPa
4.47. $\theta = 63{,}7(10^{-6})$ rad
4.49. $d_{AC} = 1{,}79$ mm
4.50. $\sigma_{AB} = \dfrac{7P}{12A}$, $\sigma_{CD} = \dfrac{P}{3A}$, $\sigma_{EF} = \dfrac{P}{12A}$
4.51. $P = 1{,}16$ kN
4.53. $\sigma_{aço} = 102$ MPa, $\sigma_{lat} = 50{,}9$ MPa
4.54. $P = 126$ kN
4.55. $T_{AB} = T_{CD} = 16{,}7$ kN, $T_{EF} = 33{,}3$ kN
4.56. $\delta_B = 0{,}073522$ mm
4.57. $F_{EF} = 6{,}316$ kN, $F_{CD} = 1.053$ kN
4.58. $F_1 = \left(\dfrac{A_1E_1}{2A_1E_1 + A_2E_2}\right)P$,
$F_2 = \left(\dfrac{A_2E_2}{2A_1E_1 + A_2E_2}\right)P$
4.59. $A_1' = \left(\dfrac{E_1}{E_2}\right)A_1$
4.61. $F_B = 0{,}2712$ kN, $F_C = 0{,}8136$ kN, $F_D = 1{,}8983$ kN
4.62. $\delta_D = 0{,}003867$ mm
4.63. $F_A = F_B = 25{,}6$ kN
4.65. $F_{AB} = 12{,}0$ kN (T), $F_{AC} = F_{AD} = 6{,}00$ kN (C)
4.66. $F_B = 16{,}9$ kN, $F_A = 16{,}9$ kN
4.67. $\delta_{esp} = 0{,}0390$ mm
4.68. $T_{BC} = 45{,}2804$ kN, $T_{DC} = 135{,}8411$ kN
4.69. $\Delta\theta = 0{,}180°$
4.70. $s = 0{,}7425$ mm
4.71. $L' = 139{,}056$ m
4.72. $\sigma_{al} = 15{,}05$ MPa, $\sigma_{lat} = 33{,}85$ MPa,
$\sigma_{aço} = 135{,}41$ MPa
4.73. $T_1 = 55{,}45°$C, $\sigma = 1{,}45$ MPa
4.74. $F = 489{,}03$ kN
4.75. $F = 477{,}29$ kN
4.76. $\Delta_{folga} = 8{,}640$ mm, $F = 76{,}80$ kN
4.77. $T' = 45{,}77°$C, $F = 61{,}958$ kN, $\sigma = 87{,}65$ MPa
4.78. $\sigma = 185{,}58$ MPa, $L_{al}' = 200{,}117793$ mm
4.79. $F = 6{,}99$ kN
4.81. $F_{AB} = F_{EF} = 1{,}85$ kN
4.82. $\sigma = 134{,}40$ MPa
4.83. $F = 18{,}566$ kN
4.84. $\sigma_{aço} = 24{,}68$ MPa, $\sigma_{lat} = 30{,}64$ MPa
4.85. $F = \dfrac{\alpha AE}{2}(T_B - T_A)$
4.86. $F = 2{,}442$ kN
4.87. $\sigma_{máx} = 190$ MPa
4.89. $P = 44{,}1$ kN
4.90. $P = 5{,}4$ kN

4.91. $\sigma_{máx} = 217{,}78$ MPa
4.93. $P = 19$ kN, $K = 1{,}26$
4.94. $P = 72{,}00$ kN, $\sigma_{méd} = 45{,}00$ MPa, $K = 1{,}60$
4.95. $P = 77{,}1$ kN, $\delta = 0{,}429$ mm
4.96. $\sigma_{aço} = 250$ MPa, $\sigma_{al} = 171{,}31$ MPa
4.97. $P = 126$ kN
4.98. **a)** $F_{aço} = 444$ N, $F_{al} = 156$ N;
b) $F_{aço} = 480$ N, $F_{al} = 240$ N
4.99. $\Delta\sigma_{AB} = 60$ MPa (T), $\Delta\sigma_{BC} = 60$ MPa (T)
4.100. $\delta_{Total} = 18{,}286$ mm
4.101. $w = 21{,}9$ kN/m, $\delta_G = 4{,}24$ mm
4.102. **a)** $w = 18{,}7$ kN/m, **b)** $w = 21{,}9$ kN/m
4.103. **a)** $P = 92{,}8$ kN, **b)** $P = 181$ kN
4.105. $w = 2{,}00$ kN/m, $\delta = 1{,}500$ mm
4.106. $\delta = \dfrac{\gamma^2 L^3}{3c^2}$
4.107. $\delta = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{\gamma}{c}\right)^{\frac{2}{3}} L^{\frac{5}{3}}$
4.108. $P = 549{,}78$ kN, $\Delta\delta = 0{,}180$ mm ←
4.109. $P = 549{,}78$ kN, $\delta'_C = 0{,}300$ mm
4.110. $F = 64{,}189$ kN. Sim, porque conforme o rebite esfria, as chapas e as cabeças do rebite também se deformarão. A força F_T no rebite não será tão grande.
4.111. $P = 22{,}5$ kN
4.112. $F_C = 0{,}974$ kN, $F_B = 0{,}433$ kN
4.114. $F_B = 8{,}526$ kN, $F_A = 8{,}606$ kN
4.115. $P = 19{,}776$ kN
4.116. $\sigma_{aço} = 13{,}23$ MPa, $\sigma_c = 1{,}92$ MPa, $\delta = 0{,}15881$ mm
4.117. $A_{aço} = 11{,}397{,}38$ mm^2, $\delta = 0{,}15793$ mm
4.118. $\delta_D = 1{,}17$ mm
4.119. $\delta_{A/B} = 0{,}491$ mm

Capítulo 5

5.1. **a)** $T = 0{,}87$ kN·m **b)** $T' = 0{,}87$ kN·m
5.2. $r' = 0{,}841r$
5.3. $r' = 0{,}707r$
5.5. $\tau_{máx}_{abs} = 75{,}5$ MPa
5.6. $\tau_C = 28{,}75$ MPa, $\tau_D = -11{,}66$ MPa
5.7. $\tau_{máx} = 45{,}82$ MPa
5.8. $\tau_{máx} = 45{,}82$ MPa, $\tau_p = 35{,}80$ MPa
5.9. $\tau_{AB} = 62{,}55$ MPa, $\tau_{BC} = 18{,}89$ MPa
5.10. $\tau_{máx} = 14{,}5$ MPa
5.11. $\tau_{máx} = 11{,}9$ MPa
5.13. $d_i = 60$ mm
5.14. $T_1 = 215$ N·m, $(\tau_{máx})_{CD} = 4{,}00$ MPa, $(\tau_{máx})_{DE} = 2{,}58$ MPa
5.15. $\tau_{máx}_{abs} = 5{,}38$ MPa
5.17. $(\tau_{EA})_{máx} = 5{,}66$ MPa, $(\tau_{CD})_{máx} = 8{,}91$ MPa
5.18. $\tau_A = 13{,}79$ MPa, $\tau_B = 24{,}14$ MPa
5.19. $\tau_C = 28{,}73$ MPa
5.21. $\tau_{mín}_{abs} = 0$ ocorre em $x = 0{,}700$ m.
$\tau_{máx}_{abs} = 33{,}0$ MPa ocorre em $x = 0$. Entretanto, por conta do princípio de Saint-Venant, a $\tau_{máx}_{abs}$ obtida ***não é válida***.
5.22. $d = 34{,}4$ mm. Entretanto, a análise ***não é válida*** por conta do pincípio de Saint Venant.
5.23. $\tau_{méd} = 1{,}17$ MPa
5.24. $\tau_A = 159{,}15$ MPa
5.25. $\tau_B = 159{,}15$ MPa
5.27. $t_0 = 133$ N·m/m, $\tau_A = 0{,}255$ MPa, $\tau_B = 0{,}141$ MPa
5.29. $T_0 = 670$ N·m, $\tau_{máx}_{abs} = 6{,}66$ MPa
5.30. $\tau_{máx} = \dfrac{2TL^3}{\pi[r_A(L - x) + r_B x]^3}$
5.31. $T_B = \dfrac{2T_A + t_A L}{2}$; $\tau_{máx} = \dfrac{(2T_A + t_A L)r_o}{\pi\left(r_o^4 - r_i^4\right)}$
5.32. $t = 5{,}17$ mm
5.33. $t = 2{,}998$ mm
5.34. $\tau_{máx} = 9{,}382$ MPa
5.35. $d = 15$ mm
5.36. $t = 3{,}427$ mm
5.37. $\tau_{máx} = 46{,}055$ MPa
5.38. $d = 20$ mm
5.39. $(\tau_{AB})_{máx} = 1{,}04$ MPa, $(\tau_{BC})_{máx} = 3{,}11$ MPa
5.40. $\tau_{máx} = 48{,}634$ MPa
5.41. $d_A = 12{,}4$ mm, $d_B = 16{,}8$ mm
5.42. $\omega = 3.135{,}714$ rpm
5.43. $d = 35$ mm
5.45. Aumento percentual na tensão de torção = % aumento em $\phi = 6{,}67\%$
5.46. $d_i = 201$ mm, $\phi = 3{,}30°$
5.47. $\phi_{A/D} = 0{,}879°$
5.49. $\tau_{máx} = 20{,}797$ MPa, $\phi = 4{,}766°$
5.50. $\phi_{C/D} = 0{,}243°$
5.51. $\phi_B = 5{,}74°$

5.53. $\tau_{máx} = 9{,}12$ MPa, $\phi_{E/B} = 0{,}585°$
5.54. $\tau_{máx} = 14{,}6$ MPa, $\phi_{E/B} = 1{,}11°$
5.55. $d = 30$ mm
5.56. $\tau_{máx} = 24{,}59$ MPa, $\phi_{CD} = 0{,}075152°$
5.57. $\phi_{F/E} = 0{,}999(10)^{-3}$ rad, $\phi_{F/D} = 0{,}999(10)^{-3}$ rad, $\tau_{máx} = 3{,}12$ MPa
5.58. $\phi_B = 1{,}793°$
5.59. $\phi_A = 2{,}092°$
5.61. $\phi_B = 0{,}648°$, $\phi_C = 0{,}486°$
5.62. $\phi_A = 0{,}432°$
5.63. $T_B = \dfrac{t_0 L + 2T_A}{2}$, $\phi = \dfrac{2L(t_0 L + 3T_A)}{3\pi\left(r_o^4 - r_i^4\right)G}$
5.65. $\tau_{BC} = 81{,}49$ MPa, $\tau_{BA} = 14{,}9$ MPa, $\phi_C = 3{,}125°$
5.66. $T_C = 240{,}02$ N·m
5.67. $\phi = \dfrac{t_0 L^2}{\pi c^4 G}$
5.69. $k = 12{,}28(10^3)$,
5.70. $\phi = \dfrac{T}{2a\pi G}\left(1 - e^{-4aL}\right)$
5.71. $\tau_{\text{máx}} = 10{,}2$ MPa
5.73. $(\tau_{AC})_{máx} = 8{,}15$ MPa, $(\tau_{CB})_{máx} = 4{,}07$ MPa
5.74. $F = 120{,}00$ N
5.75. $\tau_{máx} = 3{,}21$ MPa
5.76. $\tau_{máx} = 232{,}30$ MPa
5.77. $(\tau_{AC})_{máx} = 9{,}55$ MPa, $(\tau_{CB})_{máx} = 6{,}37$ MPa
5.78. $\phi_{C/D} = 0{,}317°$
5.79. $\phi_C = 0{,}361°$, $\tau_{lat} = 1{,}03$ MPa, $\tau_{aço} = 4{,}11$ MPa, $\gamma_{lat} = 25{,}67 \times 10^{-6}$ rad, $\gamma_{aço} = 51{,}34 \times 10^{-6}$ rad
5.80. $\tau_{AC} = 33{,}95$ MPa, $\tau_{BD} = 67{,}91$ MPa
5.81. $T_B = 222$ N·m, $T_A = 55{,}6$ N·m
5.82. $\phi_E = 1{,}66°$
5.83. $\tau_{máx} = 68{,}75$ MPa
5.85. $T_A = 878{,}26$ N·m, $T_C = 21{,}74$ N·m
5.86. $\phi_B = 3{,}208°$, $\tau_{máx} = 165{,}66$ MPa
5.87. $T_B = \dfrac{7t_0 L}{12}$, $T_A = \dfrac{3t_0 L}{4}$
5.88. $(\tau_C)_{máx} = 4{,}23$ MPa, $\phi_C = 0{,}0689°$, $(\tau_S)_{máx} = 5{,}74$ MPa, $\phi_S = 0{,}0778°$
5.89. $\tau_{BC} = 0{,}955$ MPa, $\tau_{AC} = 1{,}592$ MPa, $\phi_{B/A} = -0{,}2073°$
5.90. $\tau_{BC} = 0{,}955$ MPa, $\tau_{AC} = 1{,}592$ MPa, $\phi_{B/C} = -0{,}0643°$
5.91. $F = 454{,}78$ N
5.92. $\tau_{máx} = 18{,}47$ MPa, $\delta_F = 0{,}872$ mm
5.93. $\tau_A = 2{,}86$ MPa, $\phi = 0{,}899°$
5.94. $(\tau_{máx})_A = 308$ MPa
5.95. $T = 0{,}0820$ N·m, $\phi = 25{,}5$ rad
5.97. $T_B = 40$ N·m, $T_A = 50$ N·m, $\phi_C = 0{,}0723°$
5.98. $T = 3{,}36$ kN·m, $\phi = 11{,}6°$
5.99. $\tau_{méd} = 1{,}19$ MPa
5.100. $t = 2{,}98$ mm
5.101. $T = 2.520$ N·m
5.102. $(\tau_A)_{méd} = 3{,}94$ MPa, $(\tau_B)_{méd} = 2{,}36$ MPa
5.103. $\tau_A = \tau_B = 50$ kPa
5.104. $b = 20{,}65$ mm
5.105. $(\tau_{méd})_A = (\tau_{méd})_B = 9{,}62$ MPa
5.106. $b = 21{,}46$ mm
5.107. $(\tau_{méd})_A = (\tau_{méd})_B = 357$ kPa
5.109. $\alpha = 2{,}85$
5.110. $\alpha = 1{,}66$
5.111. $T = 20{,}1$ N·m
5.112. $\tau_{máx} = 47{,}48$ MPa
5.113. $(\tau_{CD})_{máx} = 47{,}2$ MPa
5.114. Não, não é possível.
5.115. $P = 101$ kW
5.118. $T = 3{,}551$ kN·m, $T_P = 3{,}665$ kN·m
5.119. $T_p = 0{,}565$ N·m
5.121. $\rho_e = 13{,}0$ mm
5.122. $\rho_e = 27{,}12$ mm
5.123. $T_p = 1{,}47$ kN·m, $\phi = 7{,}16°$
5.125. $T_p = 71{,}8$ kN·m, $\phi_r = 7{,}47°$
5.126. $T = 434{,}27$ N·m
5.127. $T_p = 6{,}98$ kN·m, $\phi_r = 9{,}11°$
5.129. $T_P = 1{,}173$ kN·m, $\tau_{máx} = 47{,}79$ MPa
5.130. $(\tau_r)_{\rho=c} = 9{,}15$ MPa, $(\tau_r)_{\rho=0{,}0187\,\text{m}} = -1{,}22$ MPa
5.131. $\rho_e = 16{,}77$ mm, $\phi = 5{,}1248°$
5.133. $T = 2{,}43$ kN·m, $\phi_r = 7{,}61°$
5.134. $\tau_{máx} = \dfrac{T}{2\,tA_m}$
5.135. $t = 1{,}60$ mm
5.137. $\tau_{máx} = 1{,}75$ MPa
5.138. $\phi_A = 1{,}59°$

5.139. $d = 75$ mm

5.140. $d = 70$ mm

5.141. $T_{cir} = 0{,}282A^{\frac{3}{2}}\tau_e$. A forma circular resistirá ao maior torque.
Forma quadrangular: % = 73,7%
Forma triângular: % = 62,2%

5.142. Usando a Equação 5.7: $\tau = 88{,}27$ MPa
Usando a Equação 5.15: $\phi = 4{,}495°$
Usando a Equação 5.18: $\tau = 88{,}42$ MPa
Usando a Equação 5.20: $\phi = 4{,}503°$

5.143. $(\tau_{méd})_{máx} = 2{,}03$ MPa, $\phi = 0{,}258°$

Capítulo 6

6.2. $T_1 = 1{,}25$ kN, $T_2 = 1{,}00$ kN

6.6. $V = 15{,}6$ N, $M = (15{,}6x + 100)$ N · m

6.7. Para $0 < x < 3$ ft: $V = 170$ lb, $M = \{170x\}$ lb · ft
Para 3 ft $< x <$ 5 ft: $V = -630$ lb,
$M = \{-630x + 2400\}$ lb · ft
Para 5 ft $< x \leq$ 6 ft: $V = 500$ lb,
$M = \{500x - 3250\}$ lb · ft

6.17. $M_{máx} = 281$ lb · ft

6.21. $V = 1.050 - 150x$, $M = -75x^2 + 1.050x - 3.200$

6.27. $a = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$

6.32. $w = 600$ N/m

6.34. Para $0 \leq x <$ 4 ft: $V = -250$ lb,
$M = \{-250x\}$ lb · ft
Para 4 ft $< x <$ 10 ft: $V = \{1050 - 150x\}$ lb,
$M = \{-75x^2 + 1.050x - 4.000\}$ lb · ft
Para 10 ft $< x \leq$ 14 ft: $V = 250$ lb,
$M = \{250x - 3.500\}$ lb · ft

6.35. $w_0 = 1{,}2$ kN/m

6.39. Para $0 \leq x <$ 3 m: $V = 200$ N, $M = \{200x\}$ N · m
Para 3 m $< x \leq$ 6 m: $V = \left\{500 - \frac{100}{3}x^2\right\}$ N,
$M = \left\{-\frac{100}{9}x^3 + 500x - 600\right\}$ N · m

6.42. $a = 0{,}207L$

6.43. No eixo z–z: $\sigma_{máx} = 13{,}89$ MPa,
no eixo y–y: $\sigma_{máx} = 27{,}78$ MPa,

6.44. $\sigma_A = 381{,}97$ MPa, $\sigma_B = 270{,}09$ MPa

6.45. 84,6%

6.46. $M = 36{,}5$ kN · m, $\sigma_{máx} = 40{,}0$ MPa

6.47. **a)** $\sigma_{máx} = 0{,}081$ MPa, **b)** $\sigma_{máx} = 2{,}025$ MPa (quebra)

6.48. $t = 27$ mm

6.49. **a)** $M_z = 14{,}15$ kN·m
b) $M_y = 4{,}08$ kN·m

6.50. Em (a): $\sigma_{máx} = 114.3$ MPa
Em (b): $\sigma_{máx} = 74{,}7$ MPa
A seção (b) terá a menor quantidade de tensão de flexão. Porcentagem de maior eficácia = 53,0%

6.51. $\sigma_B = 3{,}61$ MPa, $\sigma_C = 1{,}55$ MPa

6.53. $F_{R_A} = 0$, $F_{R_B} = 1{,}50$ kN

6.54. $\sigma_A = 49{,}4$ MPa (C), $\sigma_B = 4{,}49$ MPa (T)

6.55. $\sigma_{máx} = 49{,}4$ MPa

6.56. $\sigma_{máx} = 0{,}776$ MPa

6.57. $F = 4{,}795$ kN

6.58. $\sigma_{máx} = 138{,}89$ MPa

6.59. $\sigma_{máx} = 129$ MPa

6.60. $\sigma_A = 0{,}918$ MPa, $\sigma_B = 0{,}551$ MPa

6.61. $|\sigma_{máx}| = 61{,}12$ MPa

6.62. $\sigma_{máx} = 23{,}8$ MPa

6.63. $\sigma_{máx} = 9{,}05$ MPa

6.65. $\sigma_{máx} = 103{,}7$ MPa

6.66. Use $h_0 = 75$ mm

6.67. $|\sigma_{máx}| = 192$ MPa

6.68. $\sigma_{máx} = 259{,}2$ MPa

6.69. $\sigma_{máx} = 108$ MPa

6.70. $\sigma_{máx} = 331$ kPa

6.71. $M = 41{,}9$ kN · m

6.73. $d = 31{,}3$ mm

6.74. $|\sigma_{máx}| = 89{,}52$ MPa

6.75. $d_0 = 33{,}68$ mm

6.76. $\sigma_A = 77{,}65$ MPa, $\sigma_B = 89{,}6$ MPa

6.77. $P = 558{,}6$ N

6.78. $\sigma_{máx} = 76{,}95$ MPa

6.79. $|\sigma_{máx}| = 173{,}84$ MPa

6.80. $\sigma_{máx} = 40{,}49$ MPa

6.81. $a = 0$, $\sigma_{máx} = \dfrac{3}{2}\dfrac{PL}{bd^2}$

6.82. $|\sigma_{máx}| = 131{,}87$ MPa

6.83. $|\sigma_{máx}| = 169{,}77$ MPa

6.85. $\sigma_{máx} = 249$ kPa

6.86. $\sigma_{máx} = 49{,}74$ MPa

6.87. $\sigma_{máx} = 60{,}04$ MPa

6.88. $w_0 = 13{,}47$ kN/m

6.89. $\sigma_{máx} = 111{,}38$ MPa

6.90. $P = 1{,}67$ kN
6.91. $\sigma_{máx} = 9{,}00$ MPa
6.92. $\sigma_{máx} = 105{,}11$ MPa
6.93. $a = 159{,}88$ mm
6.94. $\sigma_{máx} = 160{,}45$ MPa
6.95. $\sigma_{máx} = 166{,}7$ MPa
6.96. $\sigma_{máx} = 142{,}2$ MPa
6.97. $a = 156{,}2$ mm
6.98. $b = 89{,}3$ mm
6.99. $b = 53{,}1$ mm
6.101. $c = \dfrac{h\sqrt{E_c}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}}$, $(\sigma_{máx})_c = \dfrac{3M}{bh^2}\left(\dfrac{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}}{\sqrt{E_t}}\right)$
6.102. $\sigma_B = -77{,}5$ MPa (C), $\sigma_D = 77{,}5$ MPa (T), $\alpha = -36{,}87°$
6.103. $|M| = 32{,}24$ kN·m
6.105. $\sigma_A = 21{,}97$ MPa (T), $\alpha = 63{,}91°$
6.106. $\sigma_A = 1{,}30$ MPa (C), $\sigma_B = 0{,}587$ MPa (T), $\alpha = -3{,}74°$
6.107. $\sigma_A = 1{,}30$ MPa (C), $\alpha = -3{,}74°$
6.109. $d = 28{,}9$ mm
6.110. $\sigma_A = 7{,}40$ MPa (T), $\sigma'_A = 6{,}40$ MPa (T), $\alpha = 25{,}25°$
6.111. $a = 0$, $b = -\left(\dfrac{I_y M_z + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\right)$, $c = \dfrac{I_z M_y + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$
6.113. $d = 62{,}9$ mm
6.114. $\sigma_A = 293$ kPa (C)
6.115. $\sigma_A = 293$ kPa (C)
6.117. $\sigma_A = 2{,}60$ MPa (T)
6.118. $\sigma_A = 2{,}60$ MPa (T)
6.119. $h = 41{,}3$ mm, $M = 6{,}60$ kN · m
6.121. $(\sigma_{aço})_{máx} = 3{,}70$ MPa, $(\sigma_m)_{máx} = 0{,}179$ MPa
6.122. $\sigma_{aço} = 62{,}7$ MPa, $\sigma_m = 4{,}1$ MPa
6.123. $\sigma_{aço} = 10{,}37$ MPa, $\sigma_m = 0{,}62$ MPa
6.125. $(\sigma_{máx})_{aço} = 9{,}42$ MPa, $(\sigma_{máx})_{lat} = 6{,}63$ MPa, Na junção: $\sigma_{aço} = 1{,}86$ MPa, $\sigma_{lat} = 0{,}937$ MPa
6.126. $M = 58{,}8$ kN · m
6.127. $M_{adm} = 127{,}98$ kN·m
6.128. $w_0 = 10{,}76$ kN/m
6.129. $M = 6{,}91$ N·m
6.130. $\sigma_A = 9{,}91$ MPa, $\sigma_B = -8{,}52$ MPa
6.131. $P = 55{,}2$ kN
6.133. $\sigma_A = 3{,}82$ MPa (T), $\sigma_B = 9{,}73$ MPa (C)
6.134. $\sigma_C = 2{,}66$ MPa (T)
6.135. $\sigma_A = 792$ kPa (C), $\sigma_B = 1{,}02$ MPa (T)
6.137. $P = 3{,}09$ N
6.138. $(\sigma_t)_{máx} = 4{,}77$ MPa
6.139. $\sigma_A = 1{,}3594$ MPa (T), $\sigma_B = -0{,}9947$ MPa (C), $\sigma_C = -0{,}0531$ MPa (C)
6.141. $\sigma_A = 446$ kPa (T), $\sigma_B = 224$ kPa (C). Não, por conta da concentração de tensão localizada no muro.
6.142. $M = 14{,}0$ kN·m
6.143. $M = 56{,}57$ N·m
6.144. $\sigma_{máx} = 100{,}22$ MPa
6.145. $r = 5{,}00$ mm
6.146. $\sigma_{máx} = 54{,}4$ MPa
6.147. $\sigma_{máx} = 384$ MPa
6.148. $M = 9{,}11$ N·m
6.149. $(\sigma_1)_{máx} = 6{,}77$ MPa, $(\sigma_2)_{máx} = 6{,}66$ MPa
6.150. $L = 950$ mm
6.151. $M = 4{,}46$ kN·m
6.153. $M = 455{,}73$ N·m
6.154. $\sigma_{máx} = 276{,}48$ MPa
6.155. $P = 468{,}75$ N
6.156. $\sigma_{máx} = 266{,}67$ MPa
6.157. $M = 9{,}52$ kN·m
6.158. $\sigma'_{superior} = \sigma'_{inferior} = 67{,}1$ MPa
6.159. $\sigma_{superior} = \sigma_{inferior} = 43{,}5$ MPa
6.161. $M_e = 50{,}7$ kN·m, $M_p = 86{,}25$ kN·m
6.162. $k = 1{,}70$, $Z = \dfrac{4r^3}{3}$
6.163. $M_e = 82{,}83$ kN·m, $M_p = 140{,}63$ kN·m
6.165. $M_e = 50{,}35$ kN·m, $M_p = 85{,}94$ kN·m
6.166. $M_p = 515$ kN·m
6.167. $M_p = 225{,}6$ kN·m
6.169. $Z = 0{,}0976bh^2$, $k = 2{,}34$
6.170. $M_e = 3{,}07$ kN · m, $M_p = 7{,}19$ kN · m
6.171. $k = \dfrac{3h}{2}\left[\dfrac{4bt(h-t) + t(h-2t)^2}{bh^3 - (b-t)(h-2t)^3}\right]$, $Z = bt(h-t) + \dfrac{t}{4}(h-2t)^2$
6.173. $w = 53{,}4$ kN/m
6.174. $w_0 = 212{,}67$ kN/m, $w'_0 = 269{,}79$ kN/m
6.175. $P = 218{,}66$ N
6.176. $M_e = 551{,}25$ kN·m, $M = 78{,}54$ kN·m
6.177. $M = 9{,}03$ kN · m

6.178. $M = 96{,}48$ kN·m

6.179. $M = 46{,}84$ kN·m

6.181. $M = 94{,}7$ N · m

6.182. $F_R = 5{,}88$ kN

6.183. $(\sigma_{máx})_t = 3{,}43$ MPa (T), $(\sigma_{máx})_c = 1{,}62$ MPa (C)

6.184. $V_1(x_1) = (A - w \cdot x_1) \cdot \dfrac{1}{\text{kN}}$

$M_1(x_1) = (-M_A + A \cdot x_1 - 0{,}5w \cdot x_1^2) \cdot \dfrac{1}{\text{kN·m}}$

6.186. $Z = 0{,}963(10^{-3})\ \text{m}^3, k = 1{,}22$

6.188. $\sigma_{máx} = 51{,}51$ MPa

6.189. $F = 354{,}10$ kN

6.190. $\sigma_A = 2{,}08$ MPa (C)

6.191. $\sigma = \dfrac{6M}{a^3}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta), \theta = 45°, \alpha = -45°$

Capítulo 7

7.1. $\tau_A = 1{,}99$ MPa, $\tau_B = 1{,}65$ MPa

7.2. $\tau_{máx} = 4{,}62$ MPa

7.3. $V_w = 27{,}1$ kN

7.4. $\tau_{máx} = 19{,}87$ MPa

7.5. $V_W = 115{,}04$ kN

7.6. $a = 42{,}26$ mm

7.7. $\tau_{máx} = 0{,}320$ MPa

7.9. $V = 190$ kN

7.10. $\tau_{máx} = 3{,}16$ MPa, $(\tau_A)_{alma} = 1{,}87$ MPa, $(\tau_A)_{aba} = 1{,}24$ MPa

7.11. $\tau_{máx} = 43{,}17$ MPa

7.13. $\tau_{máx} = 11{,}79$ MPa

7.14. $\tau_{máx} = 3{,}993$ MPa, $\tau_{aba/AB} = 1{,}327$ MPa, $\tau_{alma/AB} = 3{,}982$ MPa

7.15. $V_{aba} = 19{,}08$ kN

7.17. $P = 373{,}42$ kN

7.18. $\tau_{máx} = 0{,}750$ MPa

7.19. $\dfrac{4}{3}$

7.21. $\tau_{máx} = 5$ MPa

7.22. $\tau_{máx} = \dfrac{3wL}{8bd}$

7.23. $d = 62{,}5$ mm

7.24. $\tau_A = 0{,}747$ MPa, $\tau_B = 0{,}747$ MPa

7.25. $\tau_A = 2{,}24$ MPa, $\tau_B = 2{,}24$ MPa

7.26. $V_{aba} = 2{,}36$ kN

7.27. $\tau_B = 0{,}572$ MPa, $\tau_C = 0{,}572$ MPa

7.28. $\tau_{máx} = 1{,}467$ MPa

7.29. $\tau_A = 0{,}225$ MPa, $\tau_B = 0{,}225$ MPa

7.30. $V_{aba} = 0{,}30$ kN

7.31. Para $0 \le y < r_i$:

$$\tau = \frac{4V}{3\pi}\left[\frac{\left(r_o^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(r_i^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(r_o^4 - r_i^4\right)\left[\left(r_o^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(r_i^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}\right]$$

Para $r_i < y \le r_o$: $\tau = \dfrac{4V}{3\pi}\left(\dfrac{r_o^2 - y^2}{r_o^4 - r_i^4}\right)$

Então, $\tau_{máx} = \dfrac{4V}{3\pi}\left[\dfrac{r_o^2 + r_o r_i + r_i^2}{\left(r_o^4 - r_i^4\right)}\right]$

7.36. $V_{máx} = 2{,}222$ kN

7.37. $F = 3{,}37$ kN

7.38. $F = 5{,}31$ kN

7.39. $s = 733$ mm

7.41. $s_n = 138{,}0$ mm

7.42. $V = 172{,}5$ kN

7.43. $s_n = 303{,}2$ mm

7.44. $P = 30{,}32$ kN

7.45. $P = 238$ N

7.46. $s_n = 216{,}6$ mm, $s'_n = 30{,}7$ mm

7.47. $s_n = 137{,}6$ mm

7.50. $w = 7{,}06$ kN/m

7.51. $q = 21{,}24$ kN/m

7.53. $P = 6{,}60$ kN

7.54. $w_0 = 9{,}73$ kN/m

7.55. $\tau_{máx} = 21{,}58$ MPa

7.57. $q_C = 38{,}6$ kN/m

7.58. $q_A = 215$ kN/m

7.59. $q_{máx} = 232$ kN/m

7.60. $V_{AB} = 7{,}43$ kN

7.61. $q_A = 1{,}39$ kN/m, $q_B = 1{,}25$ kN/m

7.62. $q_{máx} = 1{,}63$ kN/m

7.63. $q_{máx} = 84{,}85$ kN/m

7.64. $q_A = 65{,}09$ kN/m, $q_B = 43{,}63$ kN/m

7.65. $q_{máx} = 82{,}88$ kN/m

7.66. $d = 72{,}5$ mm

7.67. $q_A = 0{,}00$ kN/m, $q_B = 83{,}48$ kN/m

7.69. $e = \dfrac{3b^2}{2(d + 3b)}$

7.70. $e = \dfrac{b\left(6h_1h^2 + 3h^2b - 8h_1^3\right)}{2h^3 + 6bh^2 - (h - 2h_1)^3}$

7.71. $e = 0$

7.73. $e = \dfrac{b\left(6h_1h^2 + 3bh^2 - 8h_1^3\right)}{(h + 2h_1)^3 + 6bh^2}$

7.74. $e = 43{,}30$ mm

7.75. $e = 70$ mm

7.77. $e = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

7.78. $q_A = 0$, $q_{máx} = 375$ N/m

7.79. $q_{máx} = 84{,}85$ kN/m

7.81. $h = 171$ mm

7.82. $e = \dfrac{4r(\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha)}{2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}$

7.83. $e = 2r$

7.84. $F_C = 0{,}987$ kN, $F_D = 6{,}906$ kN

7.85. $V_{máx} = 20{,}37$ kN

7.86. $V_{máx} = 3{,}731$ kN

7.87. $q_A = 0$, $q_B = 1{,}21$ kN/m, $q_C = 3{,}78$ kN/m

7.89. $q_A = 145$ kN/m, $q_B = 50{,}4$ kN/m, $\tau_{máx} = 17{,}2$ MPa

7.90. $\tau_A = 1{,}335$ MPa, $\tau_C = 0$ MPa

7.91. $\tau_B = 1{,}781$ MPa

7.93. $V_{AB} = 49{,}78$ kN

Capítulo 8

8.1. $t = 18{,}8$ mm

8.2. $r_o = 18{,}875$ m

8.3. Caso (a): $\sigma_1 = 16{,}67$ MPa, $\sigma_2 = 0$
Caso (b): $\sigma_1 = 16{,}67$ MPa, $\sigma_2 = 8{,}33$ MPa

8.4. $\sigma_1 = 28{,}88$ MPa, $\sigma_2 = 14{,}44$ MPa

8.5. $p = 36{,}0$ MPa

8.6. $\sigma_1 = 4{,}2$ MPa, $\sigma_2 = 0$

8.7. $\sigma_1 = 4{,}2$ MPa, $\sigma_2 = 2{,}1$ MPa

8.8. $\sigma_1 = 13{,}33$ MPa, $\delta = 0{,}0422$ mm, $p = 0{,}199$ MPa

8.9. $\sigma_c = 19{,}69$ MPa

8.10. $s = 400$ mm

8.11. $s = 833{,}33$ mm

8.13. $\delta r_i = \dfrac{pr_i^2}{E(r_o - r_i)}$

8.14. $\theta = 54{,}7°$

8.15. $P = 1{,}756$ kN

8.16. $\sigma_{máx} = 239{,}2$ MPa

8.17. $\sigma_{sup} = 17{,}36$ MPa (T), $\sigma_{inf} = -8{,}10$ MPa (C)

8.18. $\sigma_A = 4{,}63$ MPa (T), $\sigma_B = -8{,}10$ MPa (C), $\tau_A = 5{,}21$ MPa, $\tau_B = 0$ MPa

8.19. $\sigma_A = 123$ MPa, $\sigma_B = 62{,}5$ MPa

8.21. $\sigma_{máx} = 53{,}3$ MPa (C), $\sigma_{mín} = 40{,}0$ MPa (T)

8.22. $d = 100$ mm

8.24. $\sigma_{AB} = 5{,}19$ MPa (T), $\sigma_{DC} = 312{,}73$ MPa (T)

8.25. $(\sigma_C)_{máx} = 11{,}0$ MPa, $(\sigma_C)_{mín} = 0$

8.26. $\sigma_A = 0{,}318$ MPa, $\tau_A = 0{,}735$ MPa

8.27. $\sigma_B = -21{,}7$ MPa, $\tau_B = 0$

8.28. $T = 9{,}331$ kN

8.29. $T = 9{,}343$ kN

8.30. $\sigma_A = -0{,}200$ MPa (C), $\sigma_B = -0{,}600$ MPa (C)

8.31. $\sigma_A = -0{,}200$ MPa (C), $\sigma_B = -0{,}600$ MPa (C), $\sigma_C = -0{,}200$ MPa (C), $\sigma_D = 0{,}200$ MPa (T)

8.33. $\theta = 0{,}215°$

8.34. $R_1 = 15{,}63$ kN, $R_2 = 14{,}38$ kN, $\sigma_A = -70{,}98$ MPa, $\sigma_B = 20{,}4$ MPa, $\tau_A = 0{,}00$ MPa, $\tau_B = 7{,}265$ MPa

8.35. $\sigma_A = 359$ MPa (T), $\sigma_B = 71{,}7$ MPa (T), $\tau_A = 4{,}48$ MPa, $\tau_B = 5{,}92$ MPa

8.37. $\sigma_E = 1{,}01$ MPa (C), $\sigma_F = 27{,}7$ MPa (C) $\tau_E = 1{,}96$ MPa, $\tau_F = 0$

8.38. $a = 61{,}9$ mm, $\sigma = 15{,}5$ MPa

8.39. $\sigma_A = 0{,}444$ MPa (T), $\tau_A = 0{,}217$ MPa

8.41. $\sigma_A = -23{,}78$ MPa (C), $\tau_A = 0{,}00$ MPa

8.42. $\sigma_B = 51{,}84$ MPa (T), $\tau_B = 0{,}00$ MPa

8.43. $\sigma_C = 113{,}9$ MPa (T), $\sigma_D = 868{,}5$ MPa (T), $(\tau_C)_{xy} = -360{,}8$ MPa, $(\tau_D)_{xz} = 434{,}3$ MPa, $(\tau_C)_{xz} = 0$, $(\tau_D)_{xy} = 0$, $(\tau_C)_{yz} = 0$, $(\tau_D)_{yz} = 0$

8.44. $\sigma_F = -125{,}7$ MPa (C), $\sigma_E = -868{,}5$ MPa (C), $(\tau_F)_{xy} = 467{,}2$ MPa, $(\tau_E)_{xz} = -434{,}3$ MPa, $(\tau_F)_{xz} = 0$, $(\tau_E)_{xy} = 0$, $(\tau_F)_{yz} = 0$, $(\tau_E)_{yz} = 0$

8.45. $\sigma_A = 11{,}9$ MPa (T), $(\tau_{xy})_A = -0{,}318$ MPa, $(\tau_{xz})_A = 0$

8.46. $\sigma_B = 7{,}16$ MPa (C), $(\tau_{xz})_B = 0{,}531$ MPa, $(\tau_{xy})_B = 0$

8.47. $\sigma_C = 52{,}1$ MPa (C), $\tau_C = 0$

8.49. $\sigma_A = 107$ MPa, $\tau_A = 15{,}3$ MPa, $\sigma_B = 0$, $\tau_B = 14{,}8$ MPa

8.50. $\sigma_C = 107$ MPa (C), $\tau_C = 15{,}3$ MPa, $\sigma_D = 0$, $\tau_D = 15{,}8$ MPa

8.51. $\sigma_A = -262{,}0$ MPa (C), $\tau_A = 0{,}00$

8.52. $\sigma_A = 0{,}0$ MPa, $\tau_B = 3{,}14$ MPa

8.53. $\sigma_A = 17{,}7$ MPa (T), $(\tau_{xz})_A = 4{,}72$ MPa, $(\tau_{xy})_A = 0$

8.54. $\sigma_B = 81{,}3$ MPa (C), $(\tau_{xz})_B = 2{,}36$ MPa, $(\tau_{xy})_B = 0$

8.55. $\sigma_C = 103$ MPa (C), $(\tau_{xy})_C = 3{,}54$ MPa, $(\tau_{xz})_C = 0$

8.56. $\sigma_A = 52{,}9$ MPa (T), $(\tau_A)_{xz} = -11{,}14$ MPa, $(\tau_A)_{xy} = 0$

8.57. $\sigma_B = -46{,}1$ MPa (C), $(\tau_B)_{xy} = -10{,}86$ MPa, $(\tau_A)_{xz} = 0$

8.58. $\sigma_A = 83{,}34$ MPa (T), $\tau_A = 0$ MPa, $\sigma_B = -83{,}95$ MPa (C), $\tau_B = 0$ MPa

8.59. $y = 0{,}75 - 1{,}5x$

8.61. $\sigma_A = 218{,}31$ MPa (T), $\tau_A = 0$ MPa, $\sigma_B = 2{,}31$ MPa (T), $\tau_B = 6{,}00$ MPa

8.62. $6e_y + 18e_z < 5a$

8.63. $(\sigma_t)_{máx} = 103$ MPa, $(\sigma_c)_{máx} = 117$ MPa

8.64. $\sigma_A = -0{,}1703$ MPa (C), $\sigma_B = -0{,}0977$ MPa (C)

8.66. $P = 13{,}2$ kN

8.67. $\sigma_1 = 7{,}07$ MPa, $\sigma_2 = 0$

8.69. $\sigma_{máx} = 397{,}4$ MPa (T)

8.70. $\sigma_C = 79{,}67$ MPa (T), $\tau_C = 0$, $\sigma_D = -159{,}33$ MPa (C), $\tau_D = 0$

8.71. $\sigma_{máx} = \dfrac{1{,}33P}{a^2}$ (C), $\sigma_{mín} = \dfrac{P}{3a^2}$ (T)

8.73. $p = 3{,}60$ MPa, $n = 113$ parafusos

8.74. $\sigma_1 = 50{,}0$ MPa, $\sigma_2 = 25{,}0$ MPa, $F_b = 133$ kN

8.75. $\sigma_D = 5{,}21$ MPa (T), $\sigma_E = 0{,}00$ MPa, $\tau_E = 0{,}0834$ MPa, $\tau_D = 0$

8.76. $\sigma_{máx} = 397{,}4$ MPa (T), $\sigma_{mín} = -374{,}2$ MPa (C)

8.77. $\sigma_F = 6{,}40$ MPa (C), $\tau_F = 0$

8.78. $\sigma_t = 425{,}3$ MPa (T), $\sigma_c = -354{,}4$ MPa (C)

8.79. $\sigma_t = 250{,}2$ MPa (T), $\sigma_c = -208{,}4$ MPa (C)

Capítulo 9

9.2. $\sigma_{x'} = -4{,}052$ MPa, $\tau_{x'y'} = -0{,}404$ MPa

9.3. $\sigma_{x'} = 0{,}123$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}271$ MPa

9.4. $\sigma_{x'} = -0{,}387$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}455$ MPa

9.6. $\sigma_{x'} = 49{,}7$ MPa, $\tau_{x'} = -34{,}8$ MPa

9.7. $\sigma_{x'} = -4{,}05$ MPa, $\tau_{x'y'} = -0{,}404$ MPa

9.8. $\sigma_{x'} = -0{,}387$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}455$ MPa

9.9. $\sigma_{x'} = 49{,}7$ MPa, $\tau_{x'} = -34{,}8$ MPa

9.10. $\sigma_{x'} = 0{,}748$ MPa, $\sigma_{y'} = -1{,}048$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}345$ MPa

9.11. $\sigma_{x'} = -0{,}0289$ MPa, $\sigma_{y'} = 0{,}329$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}0699$ MPa

9.13. **a)** $\sigma_1 = 53{,}0$ MPa, $\sigma_2 = -68{,}0$ MPa, $\theta_{p1} = 14{,}9°$, $\theta_{p2} = -75{,}1°$ **b)** $\tau_{máx}$ $= 60{,}5$ MPa, $\sigma_{méd} = -7{,}50$ MPa, $\theta_s = -30{,}1°, 59{,}9°$

9.14. **a)** $\sigma_1 = 265$ MPa, $\sigma_2 = -84{,}9$ MPa, $\theta_{p1} = 60{,}5°$, $\theta_{p2} = -29{,}5°$ **b)** $\tau_{máx}$ $= 175$ MPa, $\sigma_{méd} = 90{,}0$ MPa, $\theta_s = 15{,}5°, -74{,}5°$

9.15. **a)** $\sigma_1 = 4{,}21$ MPa, $\sigma_2 = -34{,}21$ MPa, $\theta_{p_1} = 19{,}33°$, $\theta_{p_2} = -70{,}67°$ **b)** $\tau_{máx} = 19{,}21$ MPa, $\sigma_{méd} = -15{,}00$ MPa, $\theta_s = -25{,}67°$, $\theta'_s = 64{,}33°$

9.17. $\sigma_x = -193$ MPa, $\sigma_y = -357$ MPa, $\tau_{xy} = 102$ MPa

9.18. $\sigma_1 = 0{,}333$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}333$ MPa

9.19. $\tau_{máx}$ $= 0{,}500$ MPa, $\sigma_{méd} = 3{,}50$ MPa

9.20. $\sigma_y = 48{,}04$ MPa, $\tau_a = -1{,}96$ MPa, $\sigma_1 = 80{,}06$ MPa, $\sigma_2 = 19{,}94$ MPa

9.21. $\tau_a = 7{,}464$ MPa, $\sigma_1 = 8{,}29$ MPa, $\sigma_2 = 2{,}64$ MPa

9.22. No ponto A: $\sigma_1 = \sigma_x = 0$, $\sigma_2 = \sigma_y = -192$ MPa, No ponto B: $\sigma_1 = 24{,}0$, $\sigma_2 = -24{,}0$ MPa, $\theta_{p1} = -45{,}0°$, $\theta_{p2} = 45{,}0°$

9.23. No ponto C: $\sigma_1 = \sigma_y = 256$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_x = 0$, No ponto D: $\sigma_1 = 0{,}680$ MPa, $\sigma_2 = -154$ MPa, $\theta_{p1} = 3{,}80°$, $\theta_{p2} = -86{,}2°$

9.25. $\sigma_y = -5{,}767$ MPa

9.26. For point A: $\sigma_1 = \sigma_x = 152$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_y = 0$, For point B: $\sigma_1 = 0{,}229$ MPa, $\sigma_2 = -196$ MPa, $\theta_{p1} = 88{,}0°$, $\theta_{p2} = 1{,}96°$

9.27. No ponto A: $\sigma_1 = \sigma_y = 0$, $\sigma_2 = \sigma_x = -87{,}1$ MPa, No ponto B: $\sigma_1 = \sigma_x = 93{,}9$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_y = 0$, No ponto A: $\tau_{máx}$ $= 43{,}6$ MPa, No ponto B: $\tau_{máx}$ $= 47{,}0$ MPa, $\theta_s = 45{,}0°$ and $-45{,}0°$

9.29. $\sigma_{A_1} = 0$ MPa, $\sigma_{A_2} = -0{,}942$ MPa, $\sigma_{B_1} = 0{,}764$ MPa, $\sigma_{B_2} = 0$ MPa, $(\sigma_{méd})_A = -0{,}471$ MPa, $(\sigma_{méd})_B = 0{,}382$ MPa, $(\tau_{máx})_A = 0{,}471$ MPa, $(\tau_{máx})_B = 0{,}382$ MPa, $(\theta_s)_A = 45°$, $(\theta'_s)_A = -45°$, $(\theta_s)_B = -45°$, $(\theta'_s)_B = 45°$

9.30. No ponto A: $\sigma_1 = 150$ MPa, $\sigma_2 = -1{,}52$ MPa, No ponto B: $\sigma_1 = 1{,}60$ MPa, $\sigma_2 = -143$ MPa

9.31. $$\sigma_1 = \frac{2}{\pi d^2}\left(-F + \sqrt{F^2 + \frac{64T_0^2}{d^2}}\right),$$

$$\sigma_2 = -\frac{2}{\pi d^2}\left(F + \sqrt{F^2 + \frac{64T_0^2}{d^2}}\right),$$

$$\tau_{máx} = \frac{2}{\pi d^2}\sqrt{F^2 + \frac{64T_0^2}{d^2}}$$

9.33. $\sigma_n = 82{,}3$ kPa

9.34. $\sigma_1 = \sigma_x = \dfrac{4}{\pi d^2}\left(\dfrac{2PL}{d} - F\right)$, $\sigma_2 = \sigma_y = 0$,
$\tau_{máx} = \dfrac{2}{\pi d^2}\left(\dfrac{2PL}{d} - F\right)$

9.35. **a)** $\sigma_1 = 24{,}51$ MPa, $\sigma_2 = -33{,}96$ MPa,
b) $\tau_{máx} = 29{,}24$ MPa

9.37. $\sigma_1 = \sigma_x = 44{,}1$ MPa, $\sigma_2 = \sigma_y = 0$, $\tau_{máx} = 22{,}1$ MPa

9.38. $\sigma_1 = 54{,}6$ MPa, $\sigma_2 = -59{,}8$ MPa, $\tau_{máx} = 57{,}2$ MPa

9.39. $\sigma_1 = 198$ MPa, $\sigma_2 = -1{,}37$ MPa

9.41. $\sigma_1 = 441{,}63$ MPa, $\sigma_2 = -229{,}42$ MPa, $\theta_{p_1} = 35{,}78°$,
$\theta_{p_2} = -54{,}22°$

9.42. $\sigma_1 = 314{,}07$ MPa, $\sigma_2 = -314{,}07$ MPa, $\theta_{p_1} = 45°$,
$\theta_{p_2} = -45°$

9.43. No ponto A: $\sigma_1 = \sigma_y = 0$, $\sigma_2 = \sigma_x = -30{,}5$ MPa,
No ponto B: $\sigma_1 = 0{,}541$ MPa, $\sigma_2 = -1{,}04$ MPa,
$\theta_{p_1} = -54{,}2°$, $\theta_{p_2} = 35{,}8°$

9.45. $\tau_{máx} = 23{,}2$ MPa

9.46. $\sigma_1 = 0{,}863$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}863$ MPa

9.47. $\sigma_2 = 2{,}385$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}523$ MPa

9.49. A: $\sigma_1 = 0{,}494$ MPa, $\sigma_2 = 0{,}000$ MPa
B: $\sigma_1 = 0{,}000$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}370$ MPa

9.50. $\sigma_x = 70{,}00$ MPa, $\tau_{xy} = 98{,}99$ MPa, $M = 1{,}484$ N·m,
$T = 4{,}199$ N·m

9.51. $\sigma_1 = \sigma_y = 0$, $\sigma_2 = \sigma_x = -20$ kPa, $\tau_{máx} = 10$ kPa

9.53. $\sigma_1 = 74{,}6$ kPa, $\sigma_2 = -27{,}1$ kPa,
$\tau_{máx} = 50{,}9$ kPa

9.56. $\sigma_{x'} = -0{,}387$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}455$ MPa

9.57. $\tau_{x'y'} = -4{,}052$ MPa, $\tau_{x'y'} = -0{,}404$ MPa

9.58. $\sigma_{x'} = 0{,}123$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}271$ MPa

9.59. $\sigma_{x'} = 0{,}748$ MPa, $\sigma_{y'} = -1{,}048$ MPa,
$\tau_{x'y'} = 0{,}345$ MPa

9.61. $\sigma_{x'} = -0{,}0289$ MPa, $\sigma_{y'} = 0{,}329$ MPa,
$\tau_{x'y'} = 0{,}0699$ MPa

9.62. $\sigma_1 = 53{,}0$ MPa, $\sigma_2 = -68{,}0$ MPa, $\theta_{p1} = 14{,}9°$
anti-horário, $\tau_{máx} = 60{,}5$ MPa,
$\sigma_{méd} = -7{,}50$ MPa, $\theta_{s1} = 30{,}1°$ horário

9.63. $\sigma_1 = 265$ MPa, $\sigma_2 = -84{,}9$ MPa, $\theta_p = 29{,}5°$
horário, $\tau_{máx} = 175$ MPa, $\sigma_{méd} = 90$ MPa,
$\theta_s = 15{,}5°$ anti-horário

9.65. $\sigma_1 = 4{,}21$ MPa, $\sigma_2 = -34{,}21$ MPa,
$\tau_{máx} = 19{,}21$ MPa, $\sigma_{méd} = -15$ MPa, $\theta_{p_2} = 19{,}330°$,
$\theta_{s_2} = 64{,}330°$

9.66. $\sigma_{x'} = 4{,}986$ MPa, $\sigma_{y'} = -3{,}986$ MPa,
$\tau_{x'y'} = -1{,}457$ MPa

9.67. $\sigma_{x'} = -0{,}0228$ MPa, $\sigma_{y'} = -0{,}0272$ MPa,
$\tau_{x'y'} = -0{,}896$ MPa

9.69. $\sigma_{x'} = -5{,}240$ MPa, $\sigma_{y'} = 20{,}240$ MPa,
$\tau_{x'y'} = 7{,}933$ MPa

9.70. **a)** $\sigma_1 = 646$ MPa, $\sigma_2 = -496$ MPa,
$\theta_{p_1} = 30{,}6°$ (anti-horário)
b) $\sigma_{méd} = 75{,}0$ MPa, $\tau_{máx} = 571$ MPa,
$\theta_s = 14{,}4°$ (horário)

9.71. **a)** $\sigma_1 = 114$ MPa, $\sigma_2 = -24{,}5$ MPa,
$\theta_{p_1} = 60{,}1°$ (horário)
b) $\sigma_{méd} = 45{,}0$ MPa, $\tau_{máx} = -69{,}5$ MPa,
$\theta_s = 15{,}1°$ (horário)

9.73. $\sigma_1 = -5{,}53$ MPa, $\sigma_2 = -14{,}47$ MPa,
$\tau_{máx} = 4{,}47$ MPa, $\sigma_{méd} = -10$ MPa

9.74. **a)** $\sigma_1 = 88{,}1$ MPa, $\sigma_2 = -13{,}1$ MPa,
$\theta_p = -40{,}7°$ **b)** $\tau_{máx} = 50{,}6$ MPa,
$\sigma_{méd} = 37{,}5$ MPa, $\theta_s = 4{,}27°$

9.75. $\sigma_1 = 0{,}267$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}267$ MPa

9.76. $\sigma_1 = 115{,}60$ MPa, $\theta_s = 28{,}155°$
$\tau_{máx} = -63{,}10$ MPa, $\sigma_2 = -10{,}60$ MPa

9.77. $\sigma_c = 0$ MPa, $R = 30$ MPa

9.78. **a)** $\sigma_c = 0{,}1$ MPa, $R = 0{,}7$ MPa
b) $\sigma_c = -1$ MPa, $R = 1$ MPa
c) $\sigma_c = 0$ MPa, $R = 20$ MPa

9.79. $\sigma_{x'} = 74{,}38$ kPa, $\sigma_{y'} = -42{,}38$ kPa,
$\tau_{x'y'} = 22{,}70$ kPa

9.81. $\sigma_1 = 10{,}52$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}165$ MPa

9.82. $\sigma_1 = 0{,}560$ MPa, $\sigma_2 = -4{,}491$ MPa

9.83. $\sigma_1 = 3{,}125$ MPa, $\sigma_2 = -9{,}375$ MPa

9.84. $\sigma_1 = 40{,}224$ MPa, $\sigma_2 = -0{,}224$ MPa

9.85. $\sigma_{x'} = 11{,}0$ kPa, $\tau_{x'y'} = -22{,}6$ kPa

9.86. $\sigma_{x'} = -12{,}5$ kPa, $\tau_{x'y'} = 21{,}7$ kPa

9.87. No ponto A: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -87{,}1$ MPa,
$\tau_{máx} = 43{,}6$ MPa, $\theta_s = 45{,}0°$ (anti-horário),
No ponto B: $\sigma_1 = 93{,}9$ MPa, $\sigma_2 = 0$,
$\tau_{máx} = 47{,}0$ MPa, $\theta_s = 45{,}0°$ (horário)

9.88. **a)** $\sigma_{máx} = 6$ MPa, $\sigma_{mín} = 0$, $\sigma_{int} = 0$
c) $\sigma_{máx} = 600$ kPa, $\sigma_{mín} = 100$ kPa,
$\sigma_{int} = 200$ kPa
d) $\sigma_{máx} = 0$, $\sigma_{mín} = -9$ MPa, $\sigma_{int} = -7$ MPa

9.89. **a)** $\sigma_1 = 15$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -15$ MPa,
$\tau_{máx} = 15$ MPa

9.90. $\sigma_{máx} = 98{,}94$ MPa, $\sigma_{int} = -88{,}94$ MPa,
$\sigma_{mín} = -100{,}00$ MPa, $\tau_{máx} = 99{,}47$ MPa

9.91 $\sigma_{máx} = 7$ MPa, $\sigma_{int} = 5$ MPa, $\sigma_{mín} = -5$ MPa, $\tau_{máx} = 6$ MPa

9.93. Para o plano x–y: $\sigma_{méd} = 0$, $\tau_{máx} = 40{,}0$ MPa
Para o plano y–z: $\sigma_{méd} = -40{,}0$ MPa, $\tau_{máx} = 0$
Para o plano x–z: $\sigma_{méd} = 0$, $\tau_{máx} = 40{,}0$ MPa

9.95. No ponto A: $\sigma_{máx} = 5{,}50$ MPa, $\sigma_{int} = 0$, $\sigma_{mín} = -0{,}611$ MPa, $\tau_{abs\ máx} = 3{,}06$ MPa,
No ponto B: $\sigma_{máx} = 1{,}29$ MPa, $\sigma_{int} = 0$, $\sigma_{mín} = -1{,}29$ MPa, $\tau_{abs\ máx} = 1{,}29$ MPa

9.96. $\sigma_{máx} = 441{,}63$ MPa, $\sigma_{int} = 0{,}00$ MPa, $\sigma_{mín} = -229{,}42$ MPa, $\tau_{máx} = 335{,}53$ MPa

9.97. $\sigma_{máx} = 314{,}07$ MPa, $\sigma_{int} = 0{,}00$ MPa, $\sigma_{mín} = -314{,}07$ MPa, $\tau_{máx} = 314{,}07$ MPa

9.98. $\sigma_{máx} = 75{,}44$ MPa, $\sigma_{int} = -95{,}44$ MPa, $\sigma_{mín} = -120{,}00$ MPa, $\tau_{máx} = 97{,}72$ MPa

9.99. $\sigma_{x'} = 187{,}5$ MPa, $\tau_{x'y'} = -62{,}5$ MPa

9.100. $\sigma_{x'} = -0{,}611$ MPa, $\sigma_{y'} = -3{,}389$ MPa, $\tau_{x'y'} = 7{,}878$ MPa

9.101. $\tau_{máx} = 4{,}03$ MPa

9.102. $\tau_{máx} = 3{,}41$ MPa

9.103. $\sigma_{x'} = -0{,}898$ MPa, $\sigma_{y'} = 0{,}598$ MPa, $\tau_{x'y'} = 0{,}605$ MPa

Capítulo 10

10.2. $\epsilon_{x'} = 77{,}4(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 1{,}279(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 383(10^{-6})$

10.3. $\epsilon_{x'} = 55{,}1(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 133(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 325(10^{-6})$

10.5. $\epsilon_{x'} = 649(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -85{,}1(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 201(10^{-6})$

10.6. **a)** $\epsilon_1 = 138(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -198(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 13{,}3°$, $\theta_{p_2} = -76{,}7°$, **b)** $\gamma_{máx\ pl} = 335(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = -30{,}0(10^{-6})$, $\theta_s = -31{,}7°$ e $58{,}3°$

10.7. **a)** $\epsilon_1 = 1039(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 291(10^{-6})$, $\theta_{p1} = 30{,}2°$, $\theta_{p2} = 120°$, **b)** $\gamma_{máx\ pl} = 748(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = 665(10^{-6})$, $\theta_s = -14{,}8°$ e $75{,}2°$

10.9. **a)** $\epsilon_1 = 441(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -641(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = -24{,}8°$, $\theta_{p_2} = 65{,}2°$, **b)** $\gamma_{máx\ pl} = 1{,}08(10^{-3})$, $\theta_s = 20{,}2°$ e $-69{,}8°$, $\epsilon_{méd} = -100(10^{-6})$

10.10. **a)** $\epsilon_1 = 283(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -133(10^{-6})$, $\theta_{p1} = 84{,}8°$, $\theta_{p2} = -5{,}18°$, **b)** $\gamma_{máx\ pl} = 417(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = 75{,}0(10^{-6})$, $\theta_s = 20{,}2°$ e $\theta_s = 110°$

10.11. **a)** $\epsilon_1 = 441(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -641(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = -24{,}8°$, $\theta_{p_2} = 65{,}2°$, **b)** $\gamma_{máx\ pl} = 1.082(10^{-6})$, $\theta_s = 20{,}2°$ e $-69{,}8°$, $\epsilon_{méd} = -100(10^{-6})$

10.13. **a)** $\epsilon_1 = 713(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 36{,}6(10^{-6})$, $\theta_p = 42{,}9°$, **b)** $(\gamma_{x'y'})_{máx} = 677(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = 375(10^{-6})$, $\theta_s = -2{,}12°$

10.15. $\epsilon_{x'} = 77{,}4(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 1.279(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 383(10^{-6})$

10.17. $\epsilon_{x'} = 55{,}1(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 133(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 325(10^{-6})$

10.18. $\epsilon_{x'} = 649(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -85{,}1(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 201(10^{-6})$

10.19. **a)** $\epsilon_1 = 138(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -198(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 13{,}3°$, $\theta_{p_2} = -76{,}7°$, **b)** $\gamma_{máx\ pl} = 335(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = -30{,}0(10^{-6})$, $\theta_s = -31{,}7°$ e $58{,}3°$

10.21. $\epsilon_1 = 1039(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 291(10^{-6})$, $\theta_p = 30{,}2°$ $\gamma_{máx\ pl} = 748(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = 665(10^{-6})$, $\theta_s = -14{,}8°$

10.22. $\epsilon_1 = 441(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -641(10^{-6})$, $\theta_p = -24{,}8°$ $\gamma_{máx\ pl} = 1{,}08(10^{-3})$, $\epsilon_{méd} = -100(10^{-6})$, $\theta_s = 20{,}2°$

10.23. **a)** $\epsilon_1 = 773(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 76{,}8(10^{-6})$, **b)** $\gamma_{máx\ pl} = 696(10^{-6})$, **c)** $\gamma_{abs\ máx} = 773(10^{-6})$

10.25. $\gamma_{máx\ pl} = -985(10^{-6})$, $\epsilon_{máx} = 437(10^{-6})$, $\epsilon_{int} = 0$, $\epsilon_{mín} = -547(10^{-6})$, $\gamma_{abs\ máx} = 985(10^{-6})$

10.26. **a)** $\epsilon_1 = 192(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -152(10^{-6})$, **b e c)** $\gamma_{abs\ máx} = \gamma_{máx\ pl} = 344(10^{-6})$

10.27. $\gamma_{máx} = 2{,}7083 \times 10^{-5}$

10.29. **a)** $\epsilon_1 = 862(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -782(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 88{,}0°$ (horário), **b)** $\epsilon_{méd} = 40{,}0(10^{-6})$, $\gamma_{máx\ pl} = -1644(10^{-6})$, $\theta_s = 43{,}0°$ (horário)

10.30. **a)** $\epsilon_1 = 889(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -539(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 59{,}4°$ (anti-horário), **b)** $\epsilon_{méd} = 175(10^{-6})$, $\gamma_{máx\ pl} = 1428(10^{-6})$, $\theta_s = 14{,}4°$ (anti-horário)

10.31. **a)** $\epsilon_1 = 502(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -355(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = 69{,}8°$ (horário), **b)** $\epsilon_{méd} = 73{,}3(10^{-6})$, $\gamma_{máx}_{pl} = -857(10^{-6})$, $\theta_s = 24{,}8°$ (horário)

10.36. $E_{cobre} = 106{,}38$ GPa, $\epsilon_{cobre} = 2{,}820 \times 10^{-4}$

10.37. $E = 212{,}77$ GPa, $\nu = 0{,}295$

10.38. $\kappa = 11{,}90$ GPa

10.39. $\sigma_1 = 71{,}64$ MPa, $\sigma_2 = 51{,}64$ MPa

10.41. $\epsilon_{máx} = 30{,}5(10^{-6})$, $\epsilon_{int} = \epsilon_{mín} = -10{,}7(10^{-6})$

10.42. $E = 17{,}4$ GPa, $\Delta d = -12{,}6(10^{-6})$ mm

10.43. $\sigma_1 = 58{,}56$ MPa, $\sigma_2 = 43{,}83$ MPa

10.44. $a' = 50{,}09$ mm, $b' = 50{,}17$ mm, $t' = 5{,}99$ mm

10.45. $\epsilon_{máx} = 0{,}0243$, $\epsilon_{int} = -0{,}0142$, $\epsilon_{mín} = -0{,}0311$

10.46. $\epsilon_{x'} = \epsilon_{y'} = 2{,}52(10^{-3})$

10.47. $\Delta L_{AB} = \dfrac{3\nu M}{2Ebh}$, $\Delta L_{CD} = \dfrac{6\nu M}{Eh^2}$

10.49. $E = 17{,}4$ GPa, $\delta d = 12{,}65(10^{-6})$ mm

10.50. $P = 0{,}438$ kN

10.51. $\epsilon_{máx} = 288{,}7 \times 10^{-6}$, $\epsilon_{int} = 0$, $\epsilon_{mín} = -288{,}7 \times 10^{-6}$

10.53. $\epsilon_x = 2{,}353 \times 10^{-3}$, $\epsilon_y = -9{,}720 \times 10^{-4}$, $\epsilon_z = -2{,}435 \times 10^{-3}$

10.55. $t_h = 4{,}94$ mm

10.57. $\sigma_x = -487{,}2$ MPa, $\sigma_y = -487{,}2$ MPa, $\sigma_z = -385{,}2$ MPa

10.58. $\epsilon_z = 0, \epsilon_y = 0, \epsilon_z = 5{,}48 \times 10^{-3}$

10.59. $\epsilon_{cir} = \dfrac{pr}{2Et}(2 - \nu)$, $\epsilon_{long} = \dfrac{pr}{2Et}(1 - 2\nu)$, $\Delta d = 3{,}19$ mm, $\Delta L = 2{,}25$ mm

10.61. $k = 1{,}35$

10.63. $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_e^2$

10.65. $|\sigma_1 - \sigma_2| = 256{,}12$ MPa $> \sigma_e$
O material escoa de acordo com a teoria da tensão de cisalhamento máxima.

10.66. $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 49.825 < \sigma_e^2 = 62.500$
O material não escoa, de acordo com a teoria da energia de distorção máxima.

10.67. $\sigma_1 = 71{,}33$ MPa

10.68. $\sigma_1 = 80{,}88$ MPa

10.69. $\tau = 202{,}1$ MPa

10.70. $\tau = 175{,}0$ MPa

10.71. $\sigma_2 = 23{,}9$ MPa

10.73. $\sigma_x = 175{,}0$ MPa

10.74. $\sigma_1 = 193{,}55$ MPa

10.75. $d_0 = 21{,}89$ mm

10.76. $d_0 = 20{,}87$ mm

10.77. $d_0 = 55{,}23$ mm

10.78. $a = 47{,}50$ mm

10.79. $a = 47{,}50$ mm

10.81. FS = 5,38

10.82. $\sigma_e = 137{,}9$ MPa

10.83. $\sigma_1 = 178$ MPa

10.85. $d_0 = 41{,}67$ mm

10.86. $\sigma_e = 660{,}4$ MPa

10.87. $\sigma_e = 636{,}8$ MPa

10.89. $T_e = \sqrt{\dfrac{4}{3}M^2 + T^2}$

10.90. $d_0 = 24{,}49$ mm

10.91. $M_e = \sqrt{M^2 + \dfrac{3}{4}T^2}$

10.92. $d_0 = 39{,}35$ mm

10.93. **a)** $F_{segurança} = 2{,}05$, **b)** $F_{segurança} = 2{,}35$

10.94. $\sigma_e = 212{,}9$ MPa

10.95. $\sigma_e = 224{,}1$ MPa

10.98. **a)** $P = \dfrac{t}{r}\sigma_e$, **b)** $P = \dfrac{2t}{\sqrt{3}r}\sigma_e$

10.99. $\epsilon = \dfrac{pr}{2Et}(1 - \nu)$

10.101. **a)** $\epsilon_1 = 996(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 374(10^{-6})$, $\theta_{p_1} = -15{,}8°$, $\theta_{p_2} = 74{,}2°$, **b)** $\gamma_{máx}_{pl} = 622(10^{-6})$, $\epsilon_{méd} = 685(10^{-6})$, $\theta_s = 29{,}2°$ e $\theta_s = 119°$

10.102. Não.

10.103. Não.

10.105. Superior: $\Delta_v = 0{,}03429$ mm
Inferior: $\Delta_v = -0{,}03429$ mm

Capítulo 11

11.1. $b = 211$ mm, $h = 264$ mm

11.2. $a = 130$ mm

11.3. $P = 2{,}49$ kN

11.4. W310 × 24

11.5. $b = 424{,}3$ mm

11.6. $h = 160$ mm

11.7. $h = 125$ mm

11.8. $w = 21{,}39$ kN/m

11.9. Falha por conta do critério da tensão de flexão.

11.10. W310 × 33
11.11. W310 × 39
11.12. 130 mm
11.13. W410 × 53
11.14. W310 × 39
11.15. W250 × 58
11.16. $b = 10{,}40$ mm
11.17. $P = 2{,}90$ kN
11.18. Falha por conta do critério de tensão de flexão.
11.19. W360 × 33
11.20. Segmento AB: W250 × 18
Segmento BC: W150 × 14
11.21. $P = 9{,}52$ kN
11.22. $h = 210$ mm, $P = 14{,}70$ kN
11.23. $b = 208{,}9$ mm
11.24. $W = 76{,}96$ kN
11.25. $w = 3{,}02$ kN/m. Para $0 \leq x < 2$ m e $4\text{ m} < x \leq 6$ m: $s = 16{,}7$ mm, para $2\text{ m} < x < 4$ m: $s = 50{,}2$ mm
11.26. Região AB: $s = 17{,}76$ mm
Região BC: $s' = 14{,}21$ mm
Região CD: $s'' = 71{,}03$ mm
11.27. $s = 55$ mm, $s' = 30$ mm, $s'' = 55$ mm
11.28. $d = 35$ mm
11.29. $d = 30$ mm
11.30. $P = 777{,}8$ N, $s_{máx} = 342{,}9$ mm
11.31. $\sigma_{máx} = \dfrac{3PL}{8bh_0^2}$
11.33. $d = d_0\sqrt{\dfrac{x}{L}}$
11.34. $x = 450$ mm, $\sigma_{máx} = 0{,}3018$ MPa
11.35. $x = \dfrac{b_1}{b_2 - b_1}L$, $\sigma_{máx} = \dfrac{3PL}{2wb_1(b_2 - b_1)}$
11.37. $\sigma_{máx} = \dfrac{8PL}{27\pi r_0^3}$
11.38. $d = 46$ mm
11.39. $d = 41$ mm
11.41. $d = 34{,}3$ mm
11.42. $d_0 = 39$ mm
11.43. $d_0 = 41$ mm
11.45. $d = 21$ mm
11.46. $d_0 = 28$ mm
11.47. $d_0 = 31$ mm
11.49. $d = 33$ mm
11.50. $d = 21$ mm
11.51. $y = \left[\dfrac{4P}{\pi\sigma_{adm}}x\right]^{\frac{1}{3}}$
11.53. Tensão máxima de flexão ocorre em $x = 0$
$\sigma_{máx} = 4{,}527$ MPa
11.54. W250 × 18
11.55. $d = 44$ mm
11.57. W460 × 74

Capítulo 12

12.1. $\sigma = 20$ MPa
12.2. $\sigma = 582$ MPa
12.3. $\theta_A = -\dfrac{PL^2}{16EI}$, $v = \dfrac{Px}{48EI}(4x^2 - 3L^2)$,
$v_{máx} = -\dfrac{PL^3}{48EI}$
12.5. $v_1 = \dfrac{P}{6EI}[3(L-a)^2x_1 - 3a(L-a)^2 - 2(L-a)^3]$,
$v_2 = \dfrac{P}{6EI}\left[x_2^3 - 3(L-a)x_2^2\right]$
12.6. $v_1 = \dfrac{Px_1}{12EI}\left(-x_1^2 + L^2\right)$,
$v_3 = \dfrac{P}{12EI}\left(2x_3^3 - 9Lx_3^2 + 10L^2x_3 - 3L^3\right)$,
$v_{máx} = \dfrac{PL^3}{8EI}$
12.7. $\theta_A = \dfrac{Pa(a-L)}{2EI}$, $v_1 = \dfrac{Px_1}{6EI}\left[x_1^2 + 3a(a-L)\right]$,
$v_2 = \dfrac{Pa}{6EI}[3x(x-L) + a^2]$,
$v_{máx} = \dfrac{Pa}{24EI}(4a^2 - 3L^2)$
12.9. $v_{máx} = \dfrac{P}{3EI_{AB}}\left\{\left(1 - \dfrac{I_{AB}}{I_{BC}}\right)l^3 - L^3\right\}$
12.10. $\theta_C = \dfrac{-P}{2E}\left[\dfrac{1}{I_{AB}}(L^2 - l^2) + \dfrac{l^2}{I_{BC}}\right]$
12.11. $\dfrac{dv_1}{dx_1} = -\dfrac{3}{8}\dfrac{PL^2}{EI}$, $v_C = \dfrac{-PL^3}{6EI}$
12.13. $\sigma_{máx} = 11{,}25$ MPa
12.14. $\theta_A = -\dfrac{M_0L}{3EI}$, $v = \dfrac{M_0}{6EIL}(3Lx^2 - x^3 - 2L^2x)$,
$v_{máx} = \dfrac{-0{,}0642M_0L^2}{EI}$

12.15. $\theta_B = \dfrac{M_0 L}{6EI}$, $v|_{x=\frac{L}{2}} = \dfrac{-M_0 L^2}{16EI}$

12.16. $P = 200\ \text{N}, s = 9{,}11\ \text{mm}$

12.17. $v_1 = \dfrac{1}{EI}\left(150x_1^2 - 85{,}0x_1 + 9{,}375\right)\text{N}\cdot\text{m}^3$,

$v_2 = \dfrac{1}{EI}\left(125x_2^3 - 20{,}0x_2\right)\text{N}\cdot\text{m}^3$

12.18. $\theta_C = \dfrac{4M_0 L}{3EI}$, $v_1 = \dfrac{M_0}{6EIL}\left[-x_1^3 + L^2 x_1\right]$,

$v_2 = \dfrac{M_0}{6EIL}\left[-3Lx_2^3 + 8L^2 x_2 - 5L^3\right]$,

$v_C = -\dfrac{5M_0 L^2}{6EI}$

12.19. $v_1 = \dfrac{M_0}{6EIL}\left[-x_1^3 + L^2 x_1\right]$,

$v_2 = \dfrac{M_0}{6EIL}\left[-3Lx_2^3 + 8L^2 x_2 - 5L^3\right]$, $\theta_A = \dfrac{M_0 L}{6EI}$

12.21. $\theta_B = \dfrac{wa^3}{6EI}$, $v_1 = \dfrac{wx_1^2}{24EI}\left[-x_1^2 + 4ax_1 - 6a^2\right]$,

$v_3 = \dfrac{wa^3}{24EI}[4x_3 + a - 4L]$,

$v_B = \dfrac{wa^3}{24EI}(a - 4L)$

12.22. $\theta_{\text{máx}} = \dfrac{M_0 L}{3EI}$, $v_{\text{máx}} = -\dfrac{\sqrt{3}M_0 L^2}{27EI}$

12.23. $F = 1.375\ \text{N}$

12.24. $T_{\text{cabo}} = 58.78\ \text{kN}$

12.25. $\theta_C = -\dfrac{wa^3}{EI}$, $v_1 = \dfrac{wax_1}{12EI}\left(2x_1^2 - 9ax_1\right)$,

$v_2 = \dfrac{w}{24EI}\left(-x_2^4 + 28a^3 x_2 - 41a^4\right)$,

$v_B = -\dfrac{41wa^4}{24EI}$

12.26. $\theta_B = -\dfrac{7wa^3}{6EI}$, $v_1 = \dfrac{wax_1}{12EI}\left(2x_1^2 - 9ax_1\right)$, $v_C = -\dfrac{7wa^4}{12EI}$,

$v_3 = \dfrac{w}{24EI}\left(-x_3^4 + 8ax_3^3 - 24a^2 x_3^2 + 4a^3 x_3 - a^4\right)$

12.27. $\theta_A = \dfrac{5w_0 L^3}{192EI}$, $v = \dfrac{w_0 x}{960EIL}[40L^2 x^2 - 16x^4 - 25L^4]$,

$v_{\text{máx}} = \dfrac{w_0 L^4}{120EI}$

12.29. $\theta_A = \dfrac{2\gamma L^3}{3t^2 E}$, $v_A = -\dfrac{\gamma L^4}{2t^2 E}$

12.30. $\theta_A = \dfrac{2\gamma L^3}{h^2 E}$, $v_A|_{x=0} = -\dfrac{\gamma L^4}{h^2 E}$

12.31. $\sigma_{\text{máx}} = \dfrac{3PL}{2nbt^2}$

12.33. $x = 3\ \text{m}, M_{\text{máx}} = 11{,}25\ \text{N}\cdot\text{m}$

12.34. $v = \dfrac{P}{12EI}\{-x^3 - 2\langle x - a\rangle^3$

$+ 7\langle x - 2a\rangle^3 + 5a^2 x\}$

12.35. $\theta_A = -\dfrac{3wa^3}{16EI}$, $\theta_B = \dfrac{7wa^3}{48EI}$,

$v = \dfrac{w}{48EI}\{6ax^3 - 2x^4 + 2\langle x - a\rangle^4 - 9a^3 x\}$

12.37. $a_0 = -8{,}33\ \text{N}, a_1 = -33{,}33\ \text{N}, a_2 = 91{,}67\ \text{N}$,
$a_3 = 12{,}50\ \text{N}\cdot\text{m}^2$

$v = \dfrac{1}{E\cdot I}\ (a_0 \cdot \Phi(x-0)^3 + a_1 \cdot \Phi(x-a)^3$
$+ a_2 \cdot \Phi(x-2a)^3 + a_3 \cdot x)\text{m}$

12.39. $\theta_A = -\dfrac{279\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$, $v|_{x=7\ \text{m}} = -\dfrac{835\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$

12.40. $a_0 = 2{,}08\ \text{N}, a_1 = -1{,}67\ \text{kN}, a_2 = -3{,}33\ \text{kN}$,
$a_3 = -76{,}00\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$

$v = \dfrac{1}{E\cdot I}\ [a_0 \cdot \Phi(x-0)^3 + a_1 \cdot \Phi(x-a)^3$
$+ a_2 \cdot \Phi(x-2a)^3 + a_3 \cdot x]\text{m}$

12.41. $v = \dfrac{1}{EI}\{-0{,}25x^4 + 0{,}25\langle x - 1{,}5\rangle^4$

$+ 0{,}208\langle x - 1{,}5\rangle^3 + 4{,}625\langle x - 4{,}5\rangle^3$

$+ 25{,}1x - 36{,}4\}\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

12.42. $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{EI}[2{,}25x^2 - 0{,}5x^3 + 5{,}25\langle x - 5\rangle^2$
$+ 0{,}5\langle x - 5\rangle^3 - 3{,}125]\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$,

$v = \dfrac{1}{EI}[0{,}75x^3 - 0{,}125x^4 + 1{,}75\langle x - 5\rangle^3$
$+ 0{,}125\langle x - 5\rangle^4 - 3{,}125x]\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

12.43. $\theta_A = -\dfrac{3wa^3}{16EI}$,

$v = \dfrac{w}{48EI}\{6ax^3 - 2x^4 + 2\langle x - a\rangle^4 - 9a^3 x\}$,

$v_C = -\dfrac{5wa^4}{48EI}$

12.45. $v = \dfrac{1}{EI}\left[-\dfrac{10}{3}x^3 + \dfrac{10}{3}\langle x - 1{,}5\rangle^3 + \dfrac{10}{3}\langle x - 4{,}5\rangle^3\right.$

$\left. + 67{,}5x - 90\right]\text{kN}\cdot\text{m}^3$

12.46. $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\{0{,}100x^2 - 0{,}333x^3 + 0{,}333\langle x-5\rangle^3 + 8{,}90\langle x-5\rangle^2 + 9{,}58\}\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$,
$v = \frac{1}{EI}\{0{,}0333x^3 - 0{,}0833x^4 + 0{,}0833\langle x-5\rangle^4 + 2.97\langle x-5\rangle^3 + 9.58x\}\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

12.47. $\theta_A = \frac{9{,}58\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$, $v_C = -\frac{161\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$

12.48. $a_0 = -6{,}25\ \text{kN/m}$, $a_1 = 0{,}42\ \text{kN/m}^2$, $a_2 = 91{,}67\ \text{kN}$, $a_3 = 410{,}00\ \text{kN}\cdot\text{m}^2$, $a_4 = -720{,}00\ \text{kN}\cdot\text{m}^3$

$v = \frac{1}{E\cdot I}\ (a_0\cdot\Phi(x-0)^4 + a_1\cdot\Phi(x-L_1)^5 + a_2\cdot\Phi(x-L_1)^3 + a_3\cdot x + a_4)\text{m}$

12.49. $v_C = \frac{-720\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$, $E\cdot I\cdot\theta_A = \frac{210\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$

12.50. $v = \frac{1}{EI}\left[-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{4}\langle x-L\rangle^3 + \frac{w}{24}\langle x-L\rangle^4 + \frac{wL^3}{3}x - \frac{7wL^4}{24}\right]$, $\theta_A = \frac{wL^3}{6EI}$

12.51. $v = \frac{1}{EI}\left[-\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{4}\langle x-L\rangle^3 + \frac{w}{24}\langle x-L\rangle^4 + \frac{wL^3}{3}x - \frac{7wL^4}{24}\right]$, $v_C = -\frac{7wL^4}{24EI}$

12.53. $v_{\text{máx}} = -3{,}64\ \text{mm}$

12.54. $\theta'_C = \frac{1.400}{EI}$, $\Delta'_C = \frac{4.800}{EI}$

12.55. $\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$, $\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$

12.57. $\theta_B = \frac{3Pa^2}{EI}$, $\Delta_C = \frac{4Pa^3}{3EI}$

12.58. $\theta_C = \frac{5Pa^2}{2EI}$, $\Delta_B = \frac{25Pa^3}{6EI}$

12.59. $\Delta_{\text{máx}} = 5{,}84\ \text{mm}$

12.60. $\theta'_A = \frac{0.008}{EI}$, $\theta'_B = \frac{0.008}{EI}$

12.61. $\theta_A = \frac{5Pa^2}{2EI}$, $\Delta_C = \frac{19Pa^3}{6EI}\downarrow$

12.62. $\theta_{\text{máx}} = \frac{5PL^2}{16EI}$, $\Delta_{\text{máx}} = \frac{3PL^3}{16EI}$

12.63. $\Delta_C = \frac{5M_0L^2}{6EI}$, $\theta_C = \frac{4M_0L}{3EI}$

12.65. $\theta_C = \frac{M_0a}{6EI}$

12.66. $\Delta_C = \frac{84}{EI}$, $\theta_A = \frac{8}{EI}$, $\theta_B = \frac{16}{EI}$, $\theta_C = \frac{40}{EI}$

12.67. $\theta_A = \frac{5Pa^2}{2EI}$, $\Delta_A = \frac{7Pa^3}{3EI}\downarrow$

12.68. $\sigma_{\text{máx}} = 330{,}17\ \text{MPa}$, $\Delta_{\text{máx}} = 65{,}74\ \text{mm}$

12.69. $a = \frac{L}{3}$

12.70. $E = \frac{Pa}{24\Delta I}(3L^2 - 4a^2)$

12.71. $\Delta_{\text{máx}} = \frac{11Pa^3}{48EI}$

12.73. $a = 0{,}152L$

12.74. $\theta_A = 0{,}0105\ \text{rad}$, $\theta_B = 0{,}00968\ \text{rad}$

12.75. $\Delta_{\text{máx}} = 8{,}16\ \text{mm}\downarrow$

12.77. $\Delta_D = 4{,}98\ \text{mm}\downarrow$

12.78. $\theta_B = \frac{M_0(b^3 + 3ab^2 - 2a^3)}{6EI(a+b)^2}$, $\Delta_C = \frac{M_0ab(b-a)}{3EI(a+b)}$

12.79. $\theta_B = \frac{3Pa^2}{4EI}$, $\Delta_C = \frac{13Pa^3}{12EI}\downarrow$

12.81. $\Delta_{\text{máx}} = 1.78\ \text{mm}$

12.82. $\Delta'_{\text{máx}} = 1.597{,}50/EI$

12.83. Use W310 × 21. Para a viga de aço A-36: $\Delta_{\text{máx}} = 24{,}15\ \text{mm}$, para a viga de plástico reforçado com fibras: $\Delta_{\text{máx}} = 22{,}93\ \text{mm}$.

12.85. $\theta_A = 0{,}175°$

12.86. $\theta_B = \frac{7wa^3}{12EI}$, $\Delta_C = \frac{25wa^4}{48EI}$

12.87. $\theta_A = \frac{Pa^2}{12EI}$, $\Delta_D = \frac{3Pa^3}{4EI}$

12.88. $\theta_B = 0{,}00243\ \text{rad}$, $\Delta_{\text{máx}} = 1{,}56\ \text{mm}$

12.89. $\Delta_A = 16{,}13\ \text{mm}\downarrow$

12.90. $\theta_A = 0{,}00498\ \text{rad}$, $\Delta_C = 5{,}08\ \text{mm}\downarrow$

12.91. $\Delta_C = 10{,}84\ \text{mm}\downarrow$

12.92. $\theta_A = 0{,}285°$, $\theta_B = 0{,}435°$

12.93. $M_0 = \frac{Pa}{6}$

12.94. W410 × 74

12.95. W360 × 51

12.96. $\Delta_A = 10{,}54\ \text{mm}\downarrow$

12.97. $\Delta_D = 93{,}91\ \text{mm}\downarrow$

12.98. $\Delta = PL^2\left(\frac{1}{k} + \frac{L}{3EI}\right)$

12.99. $F = 0{,}349\ \text{N}$, $a = 0{,}800\ \text{mm}$

12.100. $\theta_A = \frac{0{,}00329}{EI}$, $\Delta_A = \frac{0{,}313}{EI}$

12.101. $(\Delta_A)_y = 1{,}875$ mm ↓, $(\Delta_A)_x = 6{,}250$ mm

12.102. $\Delta_G = 169{,}04$ mm ↓

12.103. $A_x = 0$, $A_y = \frac{3M_0}{2L}$, $B_y = \frac{3M_0}{2L}$, $M_B = \frac{M_0}{2}$

12.105. $A_x = 0, C_y = \frac{5}{16}P$, $B_y = \frac{11}{8}P$, $A_y = \frac{5}{16}P$

12.106. $A_x = 0$, $M_A = \frac{PL}{2}$, $A_y = \frac{3P}{2}$, $B_y = \frac{5P}{2}$

12.107. $M' = Pa\left(\frac{L-a}{L}\right)$

12.109. $A_x = 0, C_y = \frac{w_0 L}{10}$, $B_y = \frac{4w_0 L}{5}$, $A_y = \frac{w_0 L}{10}$

12.110. $T_{AC} = \frac{3A_2E_2wL_1{}^4}{8\left(A_2E_2L_1^3 + 3E_1I_1L_2\right)}$

12.111. $M_A = \frac{wL^2}{12}$, $M_B = \frac{wL^2}{12}$

12.113. $A_x = 0$, $B_y = \frac{3M_0}{2L}$, $A_y = \frac{3M_0}{2L}$, $M_A = \frac{M_0}{2}$

12.114. $M_A = \frac{M_0}{3}$, $B_y = 0$, $M_B = \frac{M_0}{3}$

12.115. $A_x = 0$, $B_y = \frac{2P}{3}$, $A_y = \frac{4P}{3}$, $M_A = Pa$

12.116. $A_y = 10{,}80$ kN, $B_y = 28{,}40$ kN, $C_y = 10{,}80$ kN

12.117. $B_x = 0$, $B_y = \frac{11P}{16}$, $C_y = \frac{13P}{32}$, $A_y = \frac{3P}{32}$

12.118. $A_x = 0$, $B_y = \frac{M_0}{6a}$, $A_y = \frac{M_0}{6a}$, $M_A = \frac{M_0}{2}$

12.119. $a = 0{,}414L$

12.121. $A_x = 0$, $B_y = \frac{w_0 L}{10}$, $A_y = \frac{2w_0 L}{5}$, $M_A = \frac{w_0 L^2}{15}$

12.122. $B_y = 550$ N, $A_y = 125$ N, $C_y = 125$ N

12.123. $d_0 = 19{,}16$ mm

12.124. $A = 11{,}88$ kN, $B = 166{,}24$ kN, $C = 81{,}88$ kN

12.125. $C_x = 0$, $C_y = \frac{P}{3}$

12.126. $M_A = \frac{PL}{8}$, $M_B = \frac{3PL}{8}$, $B_x = 0$, $B_y = P$

12.127. $A_x = 0$, $B_y = \frac{7wL}{128}$, $A_y = \frac{57wL}{128}$, $M_A = \frac{9wL^2}{128}$

12.128. $P = 1{,}33$ kN

12.129. $A_x = 0$, $B_y = \frac{5wL}{4}$, $C_y = A_y = \frac{3wL}{8}$

12.130. $F_m = \frac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$

12.131. $F_c = 31{,}07$ kN

12.133. $a = L - \left(\frac{72\,\Delta EI}{w_0}\right)^{\frac{1}{4}}$

12.134. $M_B = \frac{wL^2}{12}$

12.135. $\theta_A = \frac{w_0 L^3}{24EI}$, $v = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 5L^4x - 4L^5)$,
$v_A = -\frac{w_0 L^4}{30EI}$

12.137. $(v_2)_{\text{máx}} = \frac{wL^4}{18\sqrt{3}EI}$

12.138. $\theta_B = \frac{Pa^2}{4EI}$, $\Delta_C = \frac{Pa^3}{4EI}$ ↑

12.139. $\Delta_C = 51{,}80$ mm ↓

12.140. $C_0 = 11{,}11$ N, $C_1 = -4{,}00$ N·m², $C_3 = 4{,}00$ N·m²
$v_1 = \frac{1}{EI}(C_0 \cdot x_1{}^3 + C_1 \cdot x_1)$,
$v_2 = \frac{1}{EI}(-C_0 \cdot x_2{}^3 + C_3 \cdot x_2)$

12.141. $\theta = \frac{2L^3\gamma}{3Et^2}$, $v = \frac{L^4\gamma}{2Et^2}$

12.142. $M_B = \frac{w_0 L^2}{30}$, $M_A = \frac{w_0 L^2}{20}$

12.143. $M_0 = \frac{5wa^2}{48}$

Capítulo 13

13.1. $P_{\text{cr}} = \frac{KL}{4}$

13.2. $P_{\text{cr}} = kL$

13.3. $P_{\text{cr}} = 22{,}7$ kN

13.5. $a = 43{,}59$ mm

13.6. $d_0 = 15{,}94$ mm

13.7. $P_{\text{cr}} = 151{,}4$ kN

13.9. $P_{\text{cr}} = 1.561{,}7$ kN

13.10. $P_{\text{cr}} = 2.116{,}7$ kN. $F_{\text{segurança}} = 4{,}23$

13.11. $P_{\text{cr}} = 8.466{,}8$ kN. Não, não pode.

13.12. $P = 64{,}6$ kN

13.13. $d = 209{,}76$ mm, $P_{\text{cr}} = 1.052{,}8$ kN

13.14. $P_{\text{cr}} = 2.621{,}2$ kN

13.15. $P_{\text{cr}} = 321{,}1$ kN

13.17. $P_{\text{cr}} = 325$ kN

13.18. $P_{cr} = 118{,}8$ kN
13.19. $P_{cr} = 242{,}4$ kN
13.20. $P_{cr} = 13{,}7$ kN
13.21. $P_{cr} = 28$ kN
13.22. $P = 454{,}19$ kN
13.23. $P = 232{,}55$ kN
13.24. $P = 32{,}30$ kN
13.25. $d_0 = 45$ mm
13.26. $P = 64{,}97$ kN
13.27. $d_{AB} = 50$ mm, $d_{BC} = 45$ mm
13.28. $P = 1{,}16$ kN
13.29. $P = 18{,}37$ kN
13.30. $d_i = 40$ mm
13.31. $d_{AB} = 40$ mm, $d_{BC} = 40$ mm
13–32. $P = 0.718$ kN
13.33. F.S. = 2,38
13.34. $P = 42{,}8$ kN
13.35. $P = 29{,}9$ kN
13.36. $P = 14{,}8$ kN
13.37. A estrutura não pode suportar a carga com o FS exigido.
13.38. $P = 28{,}39$ kN
13.39. $P = 14{,}53$ kN
13.40. w = 9,46 kN/m
13.41. $\Delta T = 303°C$

13.44. $$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

13.45. $$v_{máx} = \frac{F}{2P}\left[\sqrt{\frac{EI}{P}}\,\text{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - \frac{L}{2}\right],$$
$$M_{máx} = -\frac{F}{2}\sqrt{\frac{EI}{P}}\,\text{tg}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

13.46. $$v_{máx} = \frac{wEI}{P^2}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - \frac{PL^2}{8EI} - 1\right],$$
$$M_{máx} = -\frac{wEI}{P}\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right]$$

13.47. $P = 121{,}66$ kN
13.48. $P = 7{,}50$ kN
13.49. $P = 14{,}71$ kN
13.50. $P = 31{,}4$ kN
13.51. $F_{segurança} = 1{,}42$
13.52. A coluna não falha por escoamento.
13.53. $L = 1{,}71$ m
13.54. $P = 174$ kN, $v_{máx} = 16{,}5$ mm
13.55. $P' = 1.199{,}03$ kN, $P_{máx} = 509{,}74$ kN
13.56. $P' = 1.353{,}26$ kN, $P_{máx} = 624{,}10$ kN
13.57. $P' = 84{,}58$ kN, $P_{máx} = 84{,}58$ kN
13.58. $P_{máx} = 320{,}08$ kN
13.59. $P_{máx} = 334{,}13$ kN
13.60. $P_{adm} = 15{,}2$ kN
13.61. $P_{máx} = 171{,}25$ kN
13.62. $P_{máx} = 42{,}81$ kN
13.63. $P_{máx} = 87{,}37$ kN
13.64. $P_{máx} = 1.551{,}14$ kN
13.65. $P_{máx} = 83{,}07$ kN
13.66. $\sigma_{máx} = 120{,}32$ MPa, $v_{máx} = 34{,}85$ mm
13.67. $P_{máx} = 394{,}78$ kN
13.68. $L = 8{,}35$ m
13.69. $P = 3{,}20$ MN, $v_{máx} = 70{,}5$ mm
13.70. $\sigma_{máx} = 199$ MPa, $v_{máx} = 24{,}3$ mm
13.72. $E_t = 102{,}13$ GPa
13.76. $L = 3{,}56$ m
13.77. $L = 5{,}206$ m
13.78. $L = 3{,}222$ m
13.79. $L = 6{,}444$ m
13.80. A coluna é adequada.
13.81. W150 × 24
13.82. W150 × 14
13.83. W150 × 18
13.84. W250 × 80
13.85. $L = 10{,}20$ m
13.86. $L = 2{,}126$ m
13.87. $b = 18{,}20$ mm
13.88. $b = 12{,}87$ mm
13.89. $L = 1{,}703$ m
13.90. $L = 3{,}406$ m
13.91. $P_{adm} = 540{,}5$ kN
13.92. $P_{adm} = 597{,}9$ kN
13.93. $P_{adm} = 454{,}4$ kN
13.94. $b = 20{,}89$ mm
13.95. $d_0 = 36{,}72$ mm
13.97. $d_0 = 25{,}97$ mm
13.98. $a = 200$ mm
13.99. $a = 190$ mm
13.100. $d_{mín} = 275{,}42$ mm
13.101. $P_{máx} = 165{,}2$ kN

13.102. $P_{máx} = 293{,}4$ kN
13.103. $L = 1{,}078$ m
13.104. $P_{máx} = 8{,}07$ kN
13.105. $P = 26{,}90$ kN
13.106. Não adequado.
13.107. $P = 126{,}67$ kN
13.108. $P = 4{,}52$ kN
13.109. $P = 4{,}42$ kN
13.111. $P = 2{,}64$ kN
13.112. Não adequado.
13.113. Não adequado.
13.114. $P = 59{,}31$ kN
13.115. $P = 114{,}21$ kN
13.116. Não adequado.
13.117. $P = 1{,}47$ kN
13.118. $P = 5{,}08$ kN
13.119. Seguro.
13.120. $P = 434{,}43$ kN
13.121. $P = 586{,}87$ kN
13.122. $\sigma_{máx} = 0{,}795$ MPa
13.123. $P = 7{,}44$ kN
13.124. $P = 15{,}18$ kN
13.125. $a = 103$ mm
13.126. $a = 63{,}8$ mm
13.127. $P_{adm} = 238{,}5$ kN
13.128. $d_{AB} = 68{,}8$ mm, $d_{CD} = 40{,}2$ mm
13.129. $t = 5{,}92$ mm
13.130. $M = 44{,}2$ kN · m
13.132. $P = 107{,}1$ kN
13.133. Se $P_{cr} < 1{,}5\ F_{AB} = 7{,}50$ kN, o elemento AB sofrerá flambagem.

Capítulo 14

14.1. $\dfrac{U_i}{V} = \dfrac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y\right) + \dfrac{\tau_{xy}^2}{2G}$
14.3. $U_i = 0{,}372$ J
14.5. $U_i = 26{,}2$ J
14.6. $U_i = \dfrac{P^2L^3}{96EI}$
14.7. **a)** e **b)** $U_i = 800$ J
14.9. $U_i = 74{,}48$ J
14.10. $U_i = \dfrac{M_0L}{2EI}$
14.11. **a)** e **b)** $U_i = 2.821$ kJ
14.13. **a)** e **b)** $U_i = \dfrac{w^2L^5}{240EI}$
14.14. $U_i = \dfrac{w^2L^3}{20GA}$
14.15. $U_i = 222{,}51$ J
14.17. $U_i = \dfrac{w_0^2L^5}{504EI}$
14.18. $U_i = \dfrac{3P^2L^3}{hb^3E}$.
A energia de deformação na viga é 1,5 vezes maior que na viga com uma seção transversal.
14.19. $(U_i)_a = 0{,}477(10^{-3})$ J, $(U_i)_b = 0{,}0171$ J
14.21. $U_i = 0{,}469$ J
14.22. $a = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}r$
14.25. $(\Delta_A)_h = 0{,}442$ mm
14.26. $(\Delta_D)_v = \dfrac{3{,}50PL}{AE}$
14.27. $\theta_B = 1(10^{-3})$ rad
14.28. $\Delta_B = 62{,}18$ mm
14.29. $\Delta_B = \dfrac{PL}{15}\left(\dfrac{15\cos^2\theta}{AE} + \dfrac{5L^2\,\text{sen}^2\,\theta}{EI} + \dfrac{18\,\text{sen}^2\,\theta}{GA}\right)$
14.30. $\theta_B = \dfrac{M_0a}{3EI}$
14.31. $\theta_A = \dfrac{4M_0a}{3EI}$
14.32. $\Delta_B = 76{,}06$ mm
14.33. $\Delta_E = 158{,}41$ mm
14.34. $\Delta = \dfrac{3PL}{10bhG}$
14.35. $\theta_E = 3{,}15°$
14.36. $\Delta_B = 15{,}29$ mm
14–37. $\Delta_A = \dfrac{\pi Pr^3}{2EI}$
14.38. $\sigma_{máx} = \dfrac{16PR}{\pi d^3}[\text{sen}\,\theta + 1]$
14.39. $\Delta = \dfrac{64nPR^3}{d^4G}$
14.41. $\Delta_C = \dfrac{40{,}95}{EI}$ · m ←

14.42. **a)** $\sigma_{máx} = 366{,}4$ MPa, **b)** $\sigma_{máx} = 2{,}210$ MPa
c) $\sigma_{máx} = 4{,}421$ MPa

14.43. $h = 394{,}8$ mm

14.45. $v = 0{,}499$ m/s

14.46. $\sigma_{máx} = 359$ MPa

14.47. $h = 69{,}6$ mm

14.48. $\sigma_{máx} = 80{,}2$ MPa

14.49. $\sigma_{máx} = 107{,}6$ MPa

14.50. $\sigma_{máx} = 24{,}4$ MPa

14.51. $L = 850$ mm

14.52. $> \sigma_{adm} = 175$ MPa (excedeu!)

14.53. $h = 5{,}29$ mm

14.54. **a)** $\sigma_{máx} = 158$ MPa, **b)** $\sigma_{máx} = 0{,}312$ MPa,
c) $\sigma_{máx} = 0{,}156$ MPa

14.55. Se $\sigma_{máx} < \sigma_e = 924$ MPa, o peso pode ser solto da posição de repouso em qualquer ponto da barra sem causar dano permanente a ela.

14.56. $\sigma_{máx} = 27{,}3$ MPa

14.57. $h = \dfrac{\sigma_{máx} L^2}{3Ec}\left[\dfrac{\sigma_{máx} I}{WLc} - 2\right]$

14.58. $\eta = 110{,}44$, $\sigma_{máx} = 129{,}1$ MPa

14.59. $h = 3{,}197$ m

14.60. $\sigma_{máx} = 233{,}2$ MPa

14.61. $h = 0{,}171$ m

14.62. $(\Delta'_B)_{máx} = 17{,}21$ mm

14.63. $\sigma_{máx} = 237$ MPa, $\Delta_{máx} = 3{,}95$ mm

14.64. $(\Delta_A)_{máx} = 410{,}8$ mm

14.65. $\sigma_{máx} = 50{,}82$ MPa

14.66. $\sigma_{máx} = 17{,}99$ MPa, $(\Delta_D)_{máx} = 9{,}638$ mm

14.67. $\sigma_{máx} = 17{,}99$ MPa

14.68. $h = 1{,}129$ m

14.69. $\sigma_{máx} = 249{,}60$ MPa

14.70. $\Delta_{máx} = 23{,}3$ mm, $\sigma_{máx} = 4{,}89$ MPa

14.71. $(\Delta_B)_h = 0{,}0554$ mm $\rightarrow$

14.72. $(\Delta_B)_h = -8{,}00 \times 10^{-3}$ mm $\leftarrow$

14.73. $(\Delta_B)_v = 36{,}58 \times 10^{-3}$ mm $\downarrow$

14.74. $(\Delta_B)_h = 20{,}27 \times 10^{-3}$ mm $\rightarrow$

14.75. $(\Delta_B)_v = 2{,}70 \times 10^{-3}$ mm $\downarrow$

14.77. $(\Delta_D)_v = 1{,}16$ mm $\downarrow$

14.78. $(\Delta_B)_v = 0{,}3616$ mm $\downarrow$

14.79. $(\Delta_B)_v = 0{,}2813$ mm $\downarrow$

14.81. $(\Delta_E)_h = 0{,}889$ mm $\rightarrow$

14–82. $\Delta_{B_h} = 0{,}367$ mm

14–83. $\Delta_{C_v} = 0{,}0375$ mm

14–85. $(\Delta_C)_v = 5{,}266$ mm $\downarrow$

14–86. $(\Delta_H)_v = 5{,}052$ mm $\downarrow$

14–87. $\Delta_C = \dfrac{PL^3}{48EI}\downarrow$, $\theta_B = \dfrac{PL^2}{16EI}$

14–89. $\theta_C = \dfrac{5Pa^2}{6EI}$

14–90. $\theta_A = \dfrac{Pa^2}{6EI}$

14–91. $\Delta_C = 10{,}71$ mm $\downarrow$

14–92. $\theta_B = 0{,}409°$ (horário)

14–93. $\Delta_C = -3{,}31$ mm $\uparrow$

14–94. $\theta_A = -0{,}253°$ (anti-horário)

14–95. $\Delta_B = 45{,}63$ mm $\downarrow$

14–96. $\theta_A = 3{,}153°$ (horário)

14–97. $\Delta_B = 47{,}8$ mm

14–98. Flexão e deformação:

$$\Delta = \left(\frac{w}{G}\right)\left(\frac{L}{a}\right)^2\left[\left(\frac{20}{384}\right)\left(\frac{L}{a}\right)^2 + \frac{3}{20}\right],$$

Flexão apenas: $\Delta = \dfrac{5w}{96G}\left(\dfrac{L}{a}\right)^4$

14.99. $\Delta_C = \dfrac{5M_0a^2}{6EI}$

14.101. $\Delta_D = 3{,}24$ mm

14.102. $\theta_A = 0{,}289°$

14.103. $\theta_B = 0{,}124°$

14.105. $\Delta_C = \dfrac{wL^4}{4EI}$

14.106. $\theta_B = \dfrac{wL^3}{8EI}$

14.107. $\Delta_A = 27{,}4$ m $\downarrow$, $\theta_A = 5{,}75(10^{-3})$ rad

14.109. $\theta_C = \dfrac{2wa^3}{3EI}$, $\Delta_C = \dfrac{5wa^4}{8EI}$

14.110. $\Delta_C = 17{,}9$ mm $\downarrow$

14.111. $\theta_A = 0{,}991(10^{-3})$ rad

14.113. $\Delta_{C_h} = \dfrac{5wL^4}{8EI}$

14.114. $\Delta_{B_v} = \dfrac{wL^4}{4EI}$

14.115. $\Delta_C = \dfrac{40{,}95}{EI}\cdot$ m $\leftarrow$

14.117. $(\Delta_B)_h = 0{,}0554$ mm $\rightarrow$

14.118. $(\Delta_B)_v = 36{,}58 \times 10^{-3}$ mm ↓
14.119. $(\Delta_B)_h = 20{,}27 \times 10^{-3}$ mm →
14.120. $(\Delta_B)_h = -8{,}00 \times 10^{-3}$ mm ←
14.121. $(\Delta_B)_v = 2{,}70 \times 10^{-3}$ mm ↓
14.122. $\Delta_{C_h} = 0{,}234$ mm ←
14.123. $(\Delta_D)_v = 1{,}16$ mm ↓
14.125. $(\Delta_B)_v = 0{,}3616$ mm ↓
14.126. $(\Delta_E)_v = 0{,}2813$ mm ↓
14.127. $(\Delta_E)_h = 0{,}889$ mm →
14.129. $\Delta_{B_h} = 0{,}367$ mm
14.130. $\Delta_{C_v} = 0{,}0375$ mm
14.131. $(\Delta_C)_v = 5{,}266$ mm ↓
14.132. $(\Delta_C)_v = 5{,}052$ mm ↓
14.133. $\Delta_C = \dfrac{PL^3}{48EI}\downarrow, \theta_B = \dfrac{PL^2}{16EI}$
14.134. $\theta_C = \dfrac{5Pa^2}{6EI}$
14.135. $\theta_A = \dfrac{Pa^2}{6EI}$
14.137. $\Delta_C = 10{,}71$ mm ↓
14.138. $\Delta_C = -3{,}31$ mm ↑
14.139. $\theta_A = -0{,}253°$ (anti-horário)
14.140. $\theta_B = 0{,}409°$ (horário)
14.141. $\Delta_B = 45{,}62$ mm ↓
14.142. $\Delta_B = 47{,}8$ mm
14.143. $\Delta_C = \dfrac{5M_0a^2}{6EI}$
14.144. $\theta_A = 3{,}153°$ (horário)
14.145. $\Delta_D = 3{,}24$ mm
14.146. $\theta_A = 0{,}289°$
14.147. $\theta_B = 0{,}00216$ rad
14.149. $\Delta_C = \dfrac{wL^4}{4EI}$
14.150. $\theta_B = \dfrac{wL^3}{8EI}$
14.151. $\Delta_A = 27{,}4$ m ↓, $\theta_A = 5{,}75(10^{-3})$ rad
14.153. $\theta_C = \dfrac{2wa^3}{3EI}, \Delta_C = \dfrac{5wa^4}{8EI}$
14.154. $\Delta_C = \dfrac{5wL^4}{8EI}$
14.155. $\Delta_B = \dfrac{wL^4}{4EI}$
14.157. $\Delta_B = \dfrac{Pr^3}{4\pi EI}(\pi^2 - 8)$
14.158. $\Delta_C = \dfrac{40{,}95}{EI} \cdot \text{m} \leftarrow$
14.159. $U_i = \dfrac{5P^2a^3}{6EI}$
14.160. $(U_a)_i = 0{,}0624$ J, $(U_b)_i = 22{,}05$ J
14.161. $\theta_B = \dfrac{M_0L}{EI}$
14.162. $\theta_B = \dfrac{M_0L}{EI}$
14.163. $\Delta_B = \dfrac{M_0L^2}{2EI}$
14.165. $\Delta_A = 0{,}536$ mm
14.166. $\Delta_B = 98{,}85$ mm
14.167. $\sigma_{\text{máx}} = 76{,}7$ MPa
14.169. $\Delta_{B_v} = 3{,}38$ mm
14.170. $\Delta_{E_v} = 2{,}95$ mm
14.171. $\Delta_{E_v} = 2{,}95$ mm

Índice remissivo

A

Acoplamentos simples, projeto de, 33-35
Análise de pequenas deformações,49
Anel diferencial, 128, 167
Ângulo de torção (ϕ), 125, 139-142, 159, 178
  área de seção transversal para, 139-141
  convenção de sinal para, 141
  deformação por torção e, 125
  fórmula para, 139-140, 178
  procedimento de análise para, 142
  seções transversais fechadas de tubos de parede fina, 159
  torque constante e, 140-141
Apoios de pino, colunas ideais com, 478-482

B

Barras prismáticas, 15-20

C

Carga concêntrica de colunas, 502-506
Carga crítica, 477-478, 478-482, 483-484, 516
  coluna com apoios de pinos, 478-482
  colunas com vários tipos de apoio, 483-484
  colunas ideais, 478-482, 516
  equilíbrio e, 477-478
  equilíbrio neutro e, 478, 480
  flambagem e, 477-478, 516
  forças de mola e, 477
  fórmula de Euler para, 480-482, 484, 516
  menor momento de inércia e, 481
  ponto de bifurcação, 478, 480
Carga de impacto, 535-540
Carga excêntrica de colunas, 510-512
Carga linear distribuída, 1
Carga plástica, 114
Carga axial, 15-20, 35, 85-124, 522
  área de seção transversal, 15, 35, 86-87, 111, 114, 121, 122
  concentrações de tensão em, 111-113, 122
  convenção de sinal para, 87, 122
  deformação de, 85, 86-87, 114
  deformação elástica de, 86-88, 122
  deformação inelástica, 114-115, 122
  deslocamento relativo(δ) de, 86-87, 88
  energia de deformação elástica de, 522
  estaticamente indeterminada, 96-97, 122
  força axial interna, 522
  método de análise de força para, 100
  princípio de Saint Venant, 85-86, 88, 122
  prismáticas, 15-220
  procedimentos para análise de, 88, 97, 101
  propriedades materiais de, 15-16
  relação carga e deslocamento, 96, 100, 122
  superposição, princípio da, 95, 121
  tensão admissível de, 145
  tensão normal (σ) em, 15-20
  tensão residual em, 117, 122
  tensão térmica e, 107, 122
Cargas combinadas, 300-320
  direção circunferencial ou do aro, 300, 318
  direção longitudinal ou axial, 300, 318
  estado de tensão provocado por, 304
  pressão manométrica, 300
  procedimento de análise para, 304-305
  tensão biaxial, 301
  tensão em eixos provocada por carga axial e torção, 345
  tensão radial, 301
  vasos cilíndricos, 300-301
  vasos de pressão de parede fina, 30-301
  vasos esféricos, 301
Cargas distribuídas, 188-189, 435-436
  funções de descontinuidade para, 435-436
  funções de Macauly para, 435
  funções de singularidade para, 436
  regiões de, em diagramas de força cortante e momento fletor, 188-189
Cargas triangulares, 435
Cargas uniformes, 435
Cargas, 2, 15-20, 32-33, 35, 87, 114, 188-189, 435-436, 502-506, 510-512. *Veja também* Cargas axiais; Cargas combinadas; Carga crítica
  admissíveis, 32-33
  axiais, 15-20, 35
  concêntricas, projeto de colunas para, 502-506
  constantes, 87
  diagramas de força cortante e momento para, 188-189
  distribuídas, 188-189, 435-436
  excêntricas, projeto de colunas para, 510-512
  externas, 2
  fator de segurança (FS), 32-33
  funções de Macauly para, 435
  funções de singularidade para, 436
  lineares distribuídas, 2
  plásticas, 114
  resultantes internas, 3-5
  triangulares, 435
  uniformes, 435
Carregamentos internos resultantes, 3-5
Centro de cisalhamento, 289-290, 297
  eixo de simetria para, 290
  elementos de parede fina, 289-290, 297
  procedimento de análise para, 290
  seções transversais abertas, 289-290, 297
Centro de flexão. *Veja* Centro de cisalhamento
Chapas de assento para, 401
Círculo de Mohr, 338-344, 359, 368-371, 398
  deformação plana e, 368-371, 398
  procedimento de análise para, 340-340, 367-368
  tensão no plano e, 338-344, 359
Cisalhamento duplo, 21
Cisalhamento simples ou direto, 21
Cisalhamento transversal, 432-299, 525-526
  centro de cisalhamento para seções transversais abertas, 289-291, 297
  distribuição de tensão de cisalhamento, 262-263, 266-268
  elementos de parede fina, 285-288
  energia de deformação elástica e, 525-526
  estruturas compostas por vários elementos, 277-278, 297
  fator de forma para, 525
  fluxo de cisalhamento (q), 277-278, 285-288, 297
  fórmula do cisalhamento para, 263-265, 297
  seções transversais entortadas e, 262-263
  tensões de cisalhamento (τ), 264-268, 297
  vigas e, 262- 299
  vigas retas, 201-203, 262-263
Coeficiente linear de expansão térmica, 107
Colunas de aço, projeto de, 503
Colunas de alumínio, projeto de, 503
Colunas de madeira, projeto de, 503
Colunas ideais, 478-482, 516
  carga crítica de, 478-482, 516

fórmula de Euler para, 480-482, 516
gráficos para tensão em, 482
índice de esbeltez para, 481-482
menor momento de inércia em, 481
raio de giração para, 481
seção transversal de, 481-482
solução trivial para, 480
Colunas, 477-518
carga concêntrica, projeto de, para, 502-506
carga crítica de, 477-478, 478-482
carga excêntrica, projeto de, para, 510-512
com apoios de pinos, 478-482
comprimento efetivo de, 484
de aço, 503
de alumínio, 504
de madeira, 504
deflexão máxima de, 493-494
equação de Engesser para, 498, 516
flambagem de, 477-518
flambagem inelástica, 497-498
fórmula da secante para, 492-495, 516
fórmula de Euler para, 480-482, 484, 497, 516
gráficos para, 482, 493-494, 497-498
ideais, 478-482, 516
índice de esbeltez específico para, 484
índice de esbeltez para, 481-482
menor momento de inércia em, 481
procedimento de análise para, 504
projeto de, 502-504, 510-511
raio de giração de, 481
seções transversais de, 481-482, 492
vários apoios e, 478-482, 483-484
Componentes cartesianas da deformação, 49-50
Comprimento de referência, 57
Comprimento efetivo, 484
Concentrações de tensão, 111-113, 122, 165-166, 178, 236-238, 259
áreas de seção transversal de, 111, 236-238, 259
cargas de torção e, 165-166, 178
descontinuidades em seções transversais e, 236-238, 259
elementos com cargas axiais, 111-113, 122
fator de concentração de tensão (K), 111, 122, 165, 237
flexão e, 236-238
gráficos para, 112-113, 165-166, 236-237
vigas, 236-238, 259
Condição cinemática de elementos estaticamente indeterminados, 96
Condições de continuidade, 425-426, 474
Condições de contorno, 425, 428, 474
curva elástica e, 425, 428, 474
funções de descontinuidade e, 435, 474
integração e, 425, 474
Conservação de energia, 531-533, 566
Convenções de sinal, 87, 121, 128, 141-141,181, 324-324, 362, 424, 436. *Veja também* Regra da mão direita
ângulo de torção (ϕ), 141, 141
cargas axiais, 87, 121
curvas elásticas, método da integração, 436
funções de descontinuidade, 436
método da integração,436
torque interno (T), 128
transformação de deformação no plano, 362
transformações de tensão no plano, 324-324
vigas, 181
Critério de falha de Mohr, 392-393
Curva elástica, 421-423, 423-430, 435-440, 474
convenção de sinal para, 424
curvatura para, 422-423, 423
deslocamento da, 421, 423-430
diagrama de deflexão de, 421-423
diagrama de momento fletor para, 421
elástica para, 423
funções de descontinuidade, 435-440, 474
inclinação da, 421, 423
integração, método da, para, 423-430, 474
momentos internos e, 422
ponto de inflexão, 421
procedimentos de análise para, 426, 438
raio de curvatura (ρ), 422
relação momento-curvatura, 422-423
Curvatura, 422-423. *Veja também* Curva elástica

D

Deflexão, 402, 421-476, 426-427
convenção de sinal para, 424
curva elástica para, 421-423, 423-430, 435-440, 474
deslocamento, 421, 423-430, 443-447
eixos e vigas estaticamente indeterminados, 457-471, 474
funções de descontinuidade, 435-436, 474
inclinação, 421, 423-430, 443-447, 474
integração, método da, para, 423-426, 458, 474
máxima em colunas, 492-493
método dos momentos de áreas, para, 443-447, 462-465
procedimentos de análise para, 426, 438, 444, 468
projeto de vigas para, 402
superposição, método da, para, 452-455, 466-471, 474
Deformação elástica, 86-88, 121. *Veja também* Módulo de compressibilidade; Módulo de elasticidade
áreas de seção transversal de, 86-87, 121
cargas constantes e, 87, 121
convenção de sinal para, 87, 121
deslocamento relativo(δ) de, 86-87, 88, 121
elementos com cargas axiais e, 86-88, 121
procedimento de análise para, 88
Deformação elástica,114
Deformação inelástica, 114, 122
área da seção transversal de, 114, 122
carga plástica e, 114
elementos com cargas axiais, 114, 122
Deformação localizada, 85
Deformação normal (ε), 47, 203, 204, 231, 244, 362-363
determinação de, 47
flexão inelástica, distribuição linear de, em, 244
maneira hiperbólica de, 231
transformação da deformação plana e, 362-363
variações lineares de, 203, 204
Deformação permanente de material, 63
Deformação plana, 361-362, 362-365, 367-371, 373-376, 398
círculo de Mohr para, 367-371, 398
convenção de sinal para, 362
deformação normal (ε) e, 362-363
deformações principais e, 364, 375
determinação de, 362-362, 398
equações para, 362-365
tensão de deformação (γ) e,362-363
tensão de deformação máxima absoluta e, 373-376
tensão de deformação máxima no plano e, 365
transformação, 361-362, 362-364
Deformação plástica, 59
Deformação por cisalhamento (γ), 48, 125-126, 127, 362-363, 364, 373-375, 398
componentes da deformação no plano,375
deformação por torção e, 125-126
determinação de, 48
máxima absoluta,374-375
máxima no plano, 364
transformação da deformação no plano, 362-363
variação linear em, 127

Deformação por cisalhamento
máxima absoluta e, 373-375, 399
componentes da deformação plana, 374
deformações principais e, 374, 375
determinação da, 373-375, 399
Deformação uniforme, 15-16
Deformação, 15-16, 47, 59, 86-88, 114, 125-126, 201-203
ângulo de torção (ϕ), 125
dimensões da seção transversal e, 201-203
eixos circulares, 125-126
elástica, 86-88
elementos com cargas axiais, 85, 86-88, 114
flexão, 201-203
inelástica, 114
localizada, 85
mudanças devido a, 47
plástica, 59
tensão de cisalhamento (τ), 125-126
torção e, 125-126
torque (T), 125
uniforme, 15-16
vigas, 201-203
Deformação, 47-56, 58-59, 114, 125-126, 203, 231, 244, 365. *Veja também* Deformação normal (ε); Tensão de deformação (γ); Diagramas tensão-deformação; Transformação por deformação
análise de pequenas deformações, 50
cisalhamento, 48, 125-126
cisalhamento máximo no plano, 365
componentes cartesianas da, 49-50
comportamento elástico e, 59
deformação e tensão de, 47, 125-126
elástica, 114
endurecimento, 59
engenharia, 58
estado de, 49-50
flexão e, 203, 204, 231, 244
nominal, , 58
normal (ε), 47, 203, 204, 231, 244
principal,365
unidades de, 48
Deformações principais, 365, 374-375
Densidade de energia de deformação (u), 64, 389-390
Descontinuidades em seções transversais, 236-237, 259
Deslizamento, 388
Deslocamento estático, 537
Deslocamento relativo (δ), 86-87, 88, 121
Deslocamento, 421, 423-430, 443-447, 474, 531, 537
curva elástica e, 421, 423-430
estático, 537
integração, método da, para, 423-430, 474
método dos momentos de áreas, para, 443-447, 474
resistência de momentos e, 421
trabalho externo (força) e, 519, 531
Diagrama de força normal , 18
Diagrama de torque, 128, 141, 413-414
Diagramas de corpo livre, 2-5
carregamentos internos resultantes para, 3-5
força de cisalhamento V, 4-5
força normal N, 3
forças coplanares , 5
método das seções para, 3
momento de torção ou torque T, 4
momento fletor *M*, 3
regra da mão direita, 4
seção transversal, 3
três dimensões em, 4
Diagramas de força cortante e momento fletor,181-187, 188-195, 257
cargas distribuídas, regiões de, 188-189
flexão e, 181-187, 188-195
força concentrada e momento, regiões de, 189-190
funções de,181, 182
funções descontínuas de, 181
inclinação de, 188, 190, 257
método gráfico para construção de, 188-195, 257
procedimentos de análise para, 182, 191
regiões de, 181, 188-190
vigas e, 181-187
Diagramas de momento, 414, 421, 462-463. *Veja também* Diagramas de força cortante e momento fletor
curvas elásticas e, 421
fletor, para projeto de eixos, 414
método dos momentos de áreas, para, 462-463
superposição, construída pelo método de, 462-463
Diagramas tensão-deformação por cisalhamento, 74, 82
Diagramas tensão-deformação verdadeira, 59-60
Diagramas tensão-deformação, 58-62, 63-63, 75, 80-82, 497-498
cisalhamento, 74, 82
comportamento elástico e, 59
convencionais, 58, 80-81
endurecimento por deformação e, 59
escoamento e, 59
estricção e, 59
flambagem inelástica de colunas, 497-498
histerese mecânica e, 63
lei de Hooke e, 63
limite de proporcionalidade, 59
limite elástico, 59
materiais dúcteis e, 60-61
materiais frágeis e, 61-62
ponto de escoamento , 59
reais, 59-60, 80
tensão de fratura, 58
tensão total, 59
Dilatação, 381-382, 399
Direção circunferencial, 233, 301, 318
Direção longitudinal, 301, 318
Distância excêntrica, 492-493
Distribuição de tensão de cisalhamento, 262-263
Distribuição linear de deformação normal,244

E

Eixo centroide, 204
Eixo de simetria, 290
Eixo longitudinal, 202
Eixo neutro, 202, 204-205, 218, 244, 258
deformação por flexão e, 202
flexão assimétrica e, 216
força resultante e localização de,244
fórmula da flexão e, 204-205, 258
orientação do, 218
seção transversal de vigas, 204-205, 258
tensão zero sobre, 204, 205
Eixos circulares, 125-126, 128, 178
Eixos não circulares, 161-156, 178
Eixos principais de inércia, 414
Eixos tubulares, 128, 135
Eixos, 125-126, 127-129, 132-133, 139-142, 150-151, 155-156, 165-166, 172-173, 177-178, 345, 414-415, 419, 421-476. *Veja também* Deflexão
anel diferencial para, 128
ângulo de torção (ϕ), 125, 139-142, 177
circulares, 125-126, 128, 178
concentração de tensão de, 165-166, 179
deflexão de, 421-476
deformação por torção de, 125-126
diagramas de momento de flexão, 413
diagramas de torque para, 128, 141, 413-414
eixo principal de inércia para, 414
estaticamente indeterminados, 150-151, 177, 457-471, 474
fórmula da torção para, 127-129
integração, método da, para, 457-459, 474
maciços, 128, 135, 155-156
método da superposição para, 466-471, 474
método dos momentos de área para, 462-464, 474

momento polar de inércia de, 127, 128
momento resultante de, 414
não circulares, 161-156, 178
projeto de, 132, 414-415, 418
seções transversais para, 128, 139-141, 155-156
tensão de torção máxima absoluta, 128
tensão plana de, 414
tensão provocada por carga axial e torção em, 345
tensão residual de, 172-173, 179
transmissão de potência, projeto para, 132-134
tubulares, 128, 135
Elástica, 423
Elementos de parede fina, 285-288, 289-291, 297
centro de cisalhamento de, 289-291, 297
eixo de simetria e, 290
fluxo de cisalhamento (q) e, 285-288, 297
Elementos estaticamente indeterminados, 96-97, 116, 121, 150-151, 177, 457-458, 462
carregados por torque, 150-151, 177
condição cinemática de, 96
condições de compatibilidade para, 458, 466
deflexão de, 457-471, 474
eixos, 150-151, 177, 457-459, 461-463, 466-471, 474
equação de compatibilidade para, 96, 150
grau de indeterminação, 457
integração, método da, para, 458-459, 474
método da superposição para, 466-471, 474
método do momento de área para, 461-465, 474
procedimentos de análise para, 97, 151
redundantes,457-458
relação carga-deslocamento, 96, 121
tensão residual de, 116
vigas, 457-459, 461-465, 466-471, 474
Elementos retos. *Veja também* Vigas
Endurecimento por deformação, 59, 63, 80, 81
deformação permanente, 64
diagrama tensão-deformação para, 58-60
histerese mecânica, 64
lei de Hooke e, 63
Energia de deformação elástica, 522-528
cargas axiais e, 522
cisalhamento transversal e, 526
momentos de torção e, 526-528
momentos fletores e, 523-525
Energia de deformação, 64-65, 81, 520-521, 522-528
elástica, , 522-528
módulo de resiliência, 64-65, 81
módulo de tenacidade, 65, 81
tensão de cisalhamento (τ) como, 520-521
tensão multiaxial como, 521
tensão normal (σ) como, 520, 523
Energia de distorção, 389-390
Ensaio de torção para materiais frágeis, 392
Ensaio de tração, 57, 80, 391
Equação da compatibilidade, 96
Equação de Engesser, 498, 516
Equilíbrio estável, 477
Equilíbrio instável, 477
Equilíbrio neutro, 478
Equilíbrio, 1-13, 16-17, 22, 477-478, 480
carga crítica e, 477-478, 480
cargas externas e, 1-2
carregamentos internos resultantes e, 3-5
equações de, 2
estável, 477
forças dc corpo e, 2
forças de superfície e, 1-2
instável, 477
neutro, 478, 480
reações nos apoios e, 2
tensão de cisalhamento (τ) e, 22
tensão normal (σ) e, 16-17
Erros de fabricação, método das forças virtuais e, 547
Escoamento, 59, 388-390
Estado de deformação, 49-50
Estado de tensão14, 304, 321-322
cargas combinadas, provocadas por, 304
determinação de, 14
no plano, 321-322
procedimentos de análise para,304, 322
Estricção, 59
Estruturas compostas por vários elementos, 277-278, 297, 403, 419
fluxo de cisalhamento (q) e, 277-278, 297
seções para projeto de vigas, 403, 419
vigas de lâminas coladas, 403
vigas mestras de chapas, 403
Extensômetro de resistência elétrica, 57, 376
Extensômetro, 57

F

Fadiga, 77-78, 82, 237
Falha, 76-78, 82, 388-394
critério de escoamento de Tresca, 388
critério de falha de Mohr, 392-393
densidade de energia de deformação (u), 389-390
deslizamento, 388
energia de distorção, 389-390
escoamento, 388-390
fadiga, 77-78, 82
fluência, 75-77, 82
materiais dúcteis, 388-390, 399
materiais frágeis, 392-393, 399
propriedades do material, 76-78
ruptura, 392-393
teoria da energia de distorção máxima, 389-390
teoria da tensão de cisalhamento máxima, 388
teoria da tensão normal máxima, 391
teorias da, 399-394, 399
Fator de impacto, 537
Fator de comprimento efetivo (K), 484
Fator de forma, 247
Fator de forma, 525
Fator de segurança (FS), 32-33
Fator de transformação, 225-227, 229
Flambagem inelástica, 497-498
diagramas tensão-deformação para, 497-498
equação de Engesser para, 498, 516
módulo tangente para, 497-498, 516
teoria de Shanley da, 498
Flambagem, 477-518
carga crítica e, 477-478, 478-482
colunas, 477-518
determinação de, 477-478
equação de Engesser para, 498, 516
fórmula da secante e, 492-495
fórmula de Euler para, 480-482, 484, 516
inelástica, 497-498
menor momento de inércia e, 481
módulo tangente para, 497-498, 516
ponto de bifurcação, 478, 480
Flexão assimétrica, 216-221, 258
determinação de, 216-221, 258
eixo neutro, orientação do, 219
eixos de inércia principais, 217
momento aplicado ao longo do eixo principal, 217
momento aplicado arbitrariamente, 217-218
produto de inércia, 217
Flexão inelástica, 244-250, 259
distribuição linear de deformação normal, 244
fator de forma, 247
força resultante igual a zero para, 244
momento elástico máximo de, 245
momento plástico de, 246-247, 259

momento resistente de, 247-248
momento resultante de, 244
Flexão, 181-261. *Veja também* Momentos (M)
assimétrica, 216-221, 258
concentrações de tensão por, 236-237, 259
convenção de sinal para, 182
deformação por, 201-203
diagramas de força cortante e momento fletor para, 181-187
elementos retos, de, 201-203
fórmula da flexão para, 203-208
inelástica, 244-250, 259
procedimentos de análise para, 182, 191, 205, 234
tensão residual por, 251-252, 259
vigas compostas, 225-229, 258
vigas curvas, 231-236
vigas de concreto armado, 229-230
vigas, 181-261
Fluência, 76-77, 82
Fluxo de cisalhamento (q), 157-158, 179, 277-278, 285-288, 296-297
cisalhamento transversal e, 276-278, 285-288, 296-297
elementos de parede fina e, 285-288
estruturas compostas por vários elementos e277-278
linear, 285
parabólico, 287
paralelo, 285
torção e, 157-158, 178
tubos de parede fina com seções transversais fechadas, 157-158, 178
Força axial interna, 522
Força concentrada, 1, 189-190, 436
Força de cisalhamento (V), 3, 182
Força de mola,477
Força de reação, 437
Força de restauração da mola , 477
Força normal (N), 4
Força perturbadora, 477
Força redundante, 100
Força resultante, 1, 244, 414
Forças (F), 1-2, 2-4, 33-35, 189-190, 244, 436-437, 477, 519. *Veja também* Carga crítica; Cargas; Tensão
carga crítica e, 477
cisalhamento V, 4, 33
concentradas, 2, 189-190, 436
coplanares, 2, 5
de corpo, 2
de mola, 477
de reação, 437
de restauração da mola, 477
de superfície, 1, 2
diagramas de corpo livre para, 2-4
diagramas de força cortante e momento fletor, regiões de, para, 189-190
equilíbrio de, 2
equilíbrio e, 1-2
funções de singularidade e, 436-437
normais N, 4, 33
perturbadoras, 477
peso, 2
reações no apoio, 2
redundantes, 100
resultantes, 1, 244
tensão admissível de, 33-35
tensão, distribuição de, para, 14, 44
trabalho de, 519
Forcas coplanares, 2, 5
Forças de corpo, 2
Forças de superfície, 1
Fórmula da flexão, 203-208, 258
flexão e, 203-208, 258
momento de inércia, 205
procedimento de análise para, 205
variações lineares em tensão normal e deformação normal, 203
vigas, aplicações para, 203-208, 258
Fórmula da secante, 492-495, 516
deflexão máxima e, 492-493
determinação de cargas sobre colunas pela, 492-495, 516
distância excêntrica de, 492, 494-495
índice de excentricidade, 494-495
projeto de colunas utilizando, 495
Fórmula da torção, 127-129, 177
diagrama de torque para, 128
eixo maciço, aplicação de, para, 127
eixo tubular, aplicação de, para, 128
lei de Hooke e, 127
momento polar de inércia, 127, 128
procedimento de análise para, 129
tensão absoluta máxima e, 128
variações lineares em tensão e deformação, 127
Fórmula de Euler, 480-482, 484, 497, 516
carga crítica e, 480-482, 484, 516
colunas apoiadas por pinos, 480-482
colunas com vários tipos de apoio, 484
colunas ideais, 480-482, 516
comprimento efetivo na, 484
fator de comprimento efetivo (K), 484
flambagem inelástica e, 497, 516
módulo tangente e, 497, 516
Fórmula do cisalhamento, 263-264, 266-268, 297
determinação da, 263-264, 297
distribuição de tensão de cisalhamento, 262-263, 267-268
limitações ao uso da, 266-267
procedimento para análise pela, 268
Funções de descontinuidade, 435-440, 474
cargas triangulares, 435
cargas uniformes, 435
carregamentos distribuídos, 435
condições de contorno e, 435, 474
convenção de sinal para, 436
curvas elásticas e, 435-440, 474
forças concentradas, 436
forças de reação, 437
funções de Macauly, 435
funções de singularidade, 436-437
procedimento de análise para, 438
Funções de Macauly, 435
Funções de singularidade, 436
Furos como descontinuidades em seções transversais, 236-237, 259

G

Gráficos para concentrações de tensão, 112-113, 165-166, 236-237
Grau de indeterminação, 457

H

Histerese mecânica, 63

I

Inclinação, 188, 190, 421-421, 423-430, 443-447, 474
curva elástica e, 421, 423-430
diagramas de força cortante e momento fletor e, 188, 190
integração, método da, para, 423-430, 474
método dos momentos de áreas para, 443-447, 474
resistência da força e, 421
Índice de esbeltez efetivo, 484
Índice de esbeltez, 481, 482
Índice de excentricidade, 494-495
Índice de Poisson (ν), 73, 82, 382
Inércia, 127, 128, 205, 217, 481
eixos principais de, 217
menor momento de, 481
momento de, 205
momento polar de, 127, 128
produto de, 217
Integração, 423-430, 458-459, 473
condições de continuidade para, 425
condições de contorno para, 425
convenção de sinal para, 424
curva elásticase,423-430, 458, 474
deslocamento por, 423-430, 474
eixos e vigas estaticamente indeterminados,458-459, 474
elástica, 423
inclinação por, 423-430, 474
procedimento de análise para, 426
Intensidade média da força, 519
Intensidade variável, 559

J

Juntas sobrepostas, 21

L

Lei de Hooke, 63, 80, 127, 204, 258, 380, 399
  deformação, 127
  diagramas tensão-deformação e, 63
  endurecimento por deformação e, 63
  fórmula da flexão e, 204, 258
  fórmula da torção e, 127
  módulo de elasticidade, 63
  relações entre as propriedades dos materiais e, 380
  transformação de deformação e, 380-381, 399
Limite de proporcionalidade, 59
Limite elástico, 59, 259
Linhas de Lüder, 388

M

Magnitude, Intensidade, 17, 519, 559
Maneira hiperbólica da deformação normal em vigas curvas, 231
Materiais coesivos, 14
Materiais contínuos, 14
Materiais dúcteis, 60-61, 63, 80, 388-390, 399
  critério de escoamento de Tresca, 388
  diagrama tensão-deformação para, 61
  endurecimento por deformação (encruamento) de, 63
  falha (escoamento) de, 388-390, 399
  linhas de Lüder, 388
  método da deformação residual para, 60
  porcentagem de alongamento, 60, 80
  redução percentual da área, 60, 80
  teoria da energia de distorção máxima, 389-390
  teoria da tensão de cisalhamento máxima, 388
Materiais elastoplásticos, 114
Materiais frágeis, 61-62, 81, 237, 392-393, 399
  concentração de tensão e, 237
  critério de falha de Mohr, 392-393
  diagrama tensão-deformação para, 62, 81
  ensaio de torção para, 392
  ensaio de tração para, 392
  falha (ruptura) de, 392-393, 399
  teoria da tensão normal máxima, 392
Materiais perfeitamente plásticos, 59
Materiais plásticos perfeitamente elásticos, 114
Material anisotrópico propriedades, 15-16
Menor momento de inércia em colunas ideais, 481
Método da deformação residual para ductilidade, 61
Método da seção transformada para vigas, 225-227
Método das forças virtuais, 545, 546-547, 553, 552-555
  erros de fabricação e, 546-547
  mudança na temperatura e, 547
  procedimentos de análise para, 547, 553
  treliças, aplicado a, 546-547
  vigas, aplicado a, 552-555
Método das seções, 3
Método de análise de força, 100-1011. *Veja também* Superposição
  força redundante e, 100
  procedimento para, 101
  relação carga-deslocamento, 100
Método dos momentos de áreas, 442-447, 461-463, 474
  deslocamento por, 442-447
  diagramas de momento para, 461-463
  eixos e vigas estaticamente indeterminados, 462-463, 474
  inclinação por, 442-447
  procedimento de análise para, 444
  teorema 1, 442-443
  teorema 2, 443
Métodos de energia, 519-567
  carga de impacto, 535-540
  conservação de energia, 531-533, 566
  energia de deformação elástica, 522-528, 566
  energia de deformação, 520-521, 522-528
  método das forças virtuais, 545, 546-547, 552-555
  procedimentos de análise para, 547, 553, 559-560
  teorema de Castigliano, 558-561, 561-565
  trabalho externo, 519-521, 531, 566
  trabalho interno, 520-521, 531
  trabalho virtual, 544-546, 546-549, 552-555, 566
Módulo de compressibilidade, 382, 399
Módulo de elasticidade (E), 63, 381
Módulo de elasticidade de cisalhamento, 75-76
Módulo de resiliência, 64, 81
Módulo de rigidez, 75
Módulo de ruptura, 173, 252
Módulo de seção, 402
Módulo de tenacidade, 65, 81
Módulo de Young, 63
Módulo tangente, 497-498, 516
Momento conjugado, trabalho de um, 520, 545
Momento de inércia, 205
Momento de torção. *Veja* Torque (T)
Momento elástico máximo, flexão inelástica e, 245
Momento elástico, 245, 251, 259
  flexão em vigas e, 245, 251, 259
  flexão inelástica e, 245
  máximo, 245
  tensão residual e, 251, 259
Momento fletor (M), 3, 181, 244-247, 258-259
  diagramas de força cortante e momento fletor e, 181, 258
  energia de deformação elástica de, 523-525
  equilíbrio e, 4
  flexão inelástica e, 244-247, 259
Momento plástico, 246-247, 251, 259
  flexão inelástica e, 246-247, 259
  tensão residual e, 252, 259
  vigas e, 246-247, 251-252, 259
Momento polar de inércia, 127, 128
Momento resistente, flexão inelástica e, 247-248, 259
Momentos (M), 2, 4, 182, 189-190, 244-248, 251, 258-259. *Veja também* Momentos fletores; Diagramas de força cortante e momento fletor
  elásticos máximos, 245
  equilíbrio de, , 2
  fletores, 4, 182, 247, 258-259
  flexão inelástica e, 244-248, 251
  plásticos, 246-247, 251, 259
  regiões concentradas em diagramas de força cortante e momento fletor, 189-190, 257
  resistentes, 247-248, 259
  resultantes, 244
Momentos internos, 422-423
Mudança de temperatura, método das forças virtuais e, 547

P

Percentual de alongamento , 60
Peso, força como, 2
Ponto de bifurcação, 478, 480
Ponto de escoamento, 59
Princípio de Saint-Venant, 85-86, 88, 122
Projeto, 33-35, 132-134, 401-420, 495, 502-504, 510-511
  acoplamentos simples, 33-35
  carga concêntrica de colunas, 502-504
  carga excêntrica de colunas, 510-511
  colunas de aço, 503
  colunas de alumínio, 504
  colunas de madeira, 504

colunas, 495, 502-504, 510-511
eixos, 133, 414-415, 419
fórmula da secante e, 495
transmissão de potência e, 133-134
vigas, 401-413, 418
Propriedades de materiais homogêneos, 15
Propriedades de materiais isotrópicos, 15
Propriedades dos materiais, 14, 15-16, 57-84, 380-384, 399. *Veja também* Falha
anisotrópicos, 15-16
cargas axiais, avaliação de, para, 15-16
coesivos, 14
comportamento elástico, 59, 80
contínuos, 14
diagrama tensão-deformação para, 58-62
diagrama tensão-deformação por cisalhamento para, 75, 82
dilatação (e),381-382, 399
dúcteis, 60-61, 63, 80
endurecimento por deformação, 59, 63, 80, 81
energia de deformação, 64-65, 81
ensaio de tração para, 57-57, 80
escoamento, 59, 80
estricção, 59, 80
fadiga, 77-78, 80
falha de, 76-78
fluência, 76-77, 80
frágeis, 62, 81
homogêneos, 15
índice de Poisson (ν), 73, 82, 381
isotrópicos, 15
lei de Hooke para,63, 80, 380, 399
mecânicas, 57-84
módulo de cisalhamento (G), 381
módulo de compressibilidade, 382
módulo de elasticidade (E), 63, 381
módulo de resiliência, 64, 81
módulo de rigidez, 75
módulo de tenacidade, 65, 81
transformação por deformação e relações de, 380-383, 399

R

Raio de curvatura (ρ),421-423
Raio de giro, colunas ideais, 481
Ranhuras como descontinuidades em seções transversais, 236-237, 259
Reações nos apoios, 2
Redução percentual da área, 60
Redundantes, 457-458
Regiões de força e momento concentrados, 189-190
Regra da mão direita, 4, 127, 128, 141
Relação carga-deslocamento, 96, 100, 121
Relação momento-curvatura para curvas elásticas, 422-423
Resistência dos materiais, 1
Rosetas de deformação, 376
Ruptura, 59, 392-393

S

Seções de aço de vigas, 402
Seções de madeira de vigas, 402
Seções transversais abertas (em U, canal)
centro de cisalhamento de, 289-291
Seções transversais entortadas, 155-156, 262-263
Seções transversais entortadas, 155-156
Seções transversais fechadas, 157-159
Seções transversais parabólicas, 265
Seções transversais, 3, 15, 34-35, 86-87, 111, 114, 139-141, 155-156, 157-159, 201-203, 225-227, 236-237, 262-263, 265-266, 289-290, 481-482, 492
abertas (em U, canal), 289-291
ação da força de flexão sobre, 203-205
acoplamento submetido a cisalhamento de uma, 33-34
ângulo de torção (ϕ) para, 139-141, 159
anel diferencial, 128
cargas axiais, 15, 35, 87, 111
cargas de torção, 139-141, 155-156, 157-159
centro de cisalhamento de, 289-291
colunas, 481
concentrações de tensão e, 111-112, 236-238, 259
deformação elástica, 86-87
deformação inelástica, 114
deformação por flexão e, 201-203
descontinuidades em, 236-237, 259
diagramas de corpo livre, 3
distância excêntrica de, 492
eixo centroide para vigas, 204
eixo de simetria para, 290
eixo neutro para vigas, 204-205, 258
elemento de tensão de, 34
entortadas, 155-156
entortadas, 155-156, 262-263
fechadas, 157-159
índice de esbeltez de, 481-482
menor momento de inércia em, 481
método da seção transformada para vigas, 225-227
método das seções e, 3
parabólicas, 265
raio de giração de, 481
retangulares, 265-266
tensão admissível, para determinação de, 144-145
tensão normal média, para determinação de, 15
tensões de cisalhamento e, 265-266
torque constante e, 140-141
vigas, 201-203, 204-205, 225-227, 258
Seções transversais, tensões de cisalhamento em, 265-266, 297
Solução trivial, 479
Superfície neutra, 201-202
Superposição,95, 121, 304, 319, 452-454, 461-463, 466-471, 474
diagramas de momento construídos pelo método da, 461-463
eixos e vigas estaticamente indeterminados, 466-471, 474
estado de tensão e, 304, 318
método da força, como, 466
método da, 452, 466-471, 474
princípio da, 95, 121
procedimento de análise para, 468
viga primária para, 466

T

Tensão admissível, 32-33, 33-35
acoplamentos simples, projeto de, baseado em, 33-35
áreas de seção transversal para determinação de, 33-35
carga admissível e, 32-33
carga axial e, 35
determinação de, 32
elemento de tensão e, 34
fator de segurança (FS), 32-33, 44
procedimento de análise para, 35
tensão de cisalhamento uniforme e, 34, 35
tensão no apoio e, 34
Tensão biaxial, 301
Tensão de aro ou circunferencial, 305, 318
Tensão de cisalhamento (τ), 14, 21-25, 44, 127, 264-266, 324-326, 352-354, 359, 520-521 *Veja também* Cisalhamento transversal
componentes de tensão no plano, 324-326
determinação de, 14, 44
duplo, 21
energia de deformação e, 520-521
equilíbrio, 22
fórmula do cisalhamento e, 266-268
máxima absoluta, 351-354, 359
média, 20-25, 44
procedimentos de análise de, 22, 268
propriedade complementar de, 22
seções transversais retangulares, 265-266
simples ou direto, 21
simples, 21
variação linear em, 127
vigas de abas largas, 266

vigas, 265-268
Tensão de cisalhamento absoluta
máxima e, 351-354, 359
determinação da, 352, 359
tensão no plano e, 353-354, 359
tensão triaxial e, 352
Tensão de cisalhamento média, 20, 158-159, 178
Tensão de compressão, 14, 346
Tensão de deformação máxima no plano, 364
Tensão de engenharia, 58
Tensão de escoamento, 59
Tensão de torção absoluta máxima, 236
Tensão de tração, 14, 347
Tensão elástica, 114
Tensão multiaxial, 521
Tensão no apoio, 34
Tensão no plano, 321-324, 324-326, 338-344, 353-354, 358, 414. *Veja também* Tensão no plano
círculo de Mohr para, 338-344, 359
componentes da tensão de cisalhamento (τ), 324-326
componentes da tensão normal (σ), 324-326
convenção de sinal para, 324
equações de, 324, 358
estado de, 321-322
procedimentos de análise para, 322, 324, 340-340
projeto de eixos e, 414
tensão de cisalhamento máxima absoluta e, 353-354, 359
transformação, 321-324, 324-327
Tensão no plano, 327-328, 329, 358
cisalhamento máxima, 328, 358
principal, 327-328, 358
Tensão nominal, 58
Tensão normal (σ), 14, 15-20, 44, 324-326, 520, 523
área de seção transversal para, 15
barra com carga axial, em uma, 15-20
barras prismáticas e, 15-20
componentes de tensão no plano,324-326
constante, 16
determinação de, 14, 44
energia de deformação e, 520, 523
equilíbrio de, 16-17
intensidade, magnitude e, 17
média máxima, 17
média, 15-20, 44
média, distribuição da, 16
procedimento de análise para, 18
propriedades de materiais, premissas para, 15-16
Tensão normal média, 15
Tensão radial, 233, 301
Tensão residual, 116, 122, 172-173, 179, 251-252, 259
cargas axiais, 116, 122
elementos estaticamente indeterminados, 116
flexão e, 251-252
módulo de ruptura, 173, 252
momento plástico e, 251-252, 259
torque plástico e, 172-173, 179
vigas, 251-252, 259
Tensão resistente, 59
Tensão térmica, 106, 122
Tensão triaxial, 352, 353
Tensão uniaxial, 17
Tensão zero, 204, 205
Tensão, 1-45, 59, 106, 114, 117, 127, 128, 172-173, 233, 251-252, 300-301, 327-328. *Veja também* Tensão normal (σ); Tensões principais; Tensão de cisalhamento (τ); Diagramas tensão-deformação; Transformação de tensão; Cisalhamento transversal
acoplamentos simples, projeto de, 33-38
admissível, 32-33, 33-35, 44
aro, 301
axial, 300
biaxial, 301
cargas combinadas e, 300-301
cargas externas, 1-2
carregamentos resultantes internos, 3-4, 44
circunferencial, 233, 301
de cisalhamento (τ), 14, 20-25, 44, 127, 520-521
de cisalhamento absoluta máxima, 352-354
de compressão, 14, 346
de torção absoluta máxima, 128
de tração, 14, 346
elástica, 114
em apoios, 34
energia de deformação e,520-521
equilíbrio de, 1-13, 16-17, 22
escoamento, 59
estado de, 14
estricção, 59
flexão e, 300, 251-252
força, como distribuição de, 14, 44
fratura, 59
longitudinal, 301
multiaxial, 521
normal (σ), 14, 15-20, 44, 520
principal, 327-328, 346
radial, 231, 301
residual, 117, 172-173, 251-252
resistência dos materiais e, 1
térmica, 106
torção e, 172-173
total, 59
trajetórias, 346
triaxial, 351-353
uniaxial, 17
unidades de, 14
vigas prismáticas e, 346
Tensões principais, 327-331, 346, 358-359
de cisalhamento máxima no plano, 329, 358
no plano,327-328, 358
planos de, 328, 358-359
vigas prismáticas, transformação de tensão para,346
Teorema de Castigliano, 558-559, 559-561, 562-565, 566
dedução do, 558-559
procedimento de análise para, 559-560, 562
requisitos de compatibilidade do, 559
treliças, aplicado a, 559-561
vigas, aplicado a, 562
Teoria da tensão normal máxima,392
Teoria de Shanley da flambagem ineslástica, 498
Torção inelástica, 167-170, 178
anel diferencial para, 167
torque elástico máximo e, 168, 178
torque elástico-plástico e, 168, 178
torque máximo e, 169-170
torque plástico e, 169-178
Torção, 3, 125-180, 345
ângulo de torção (ϕ), 125, 139-142, 159, 178
concentração de tensão e, 165-166
convenções de sinal para, 128, 141-142
deformação, 125-126
eixos, 125-126, 128, 128, 132, 155-156, 178-179, 345
elementos estaticamente indeterminados e, 150-151, 177
fórmula para, 127-129
inelástica, 167- 170, 179
procedimentos de análise para, 129, 142, 151
seções transversais para, 128, 139-141, 155-156, 157-159
tensão em eixos provocada por carga axial e, 345
tensão residual e, 172-173, 179
torque (T), 4, 125-126, 127-129, 140, 168-170, 178
transmissão de potência e, 133-134, 178
tubos com seções transversais fechadas, 157-159
Torcedura, *veja* Torção
Torque (T), 3, 126, 127-129, 140, 167-170, 177- 179, 526-528
constante, 140
diagramas de corpo livre para, 3
elástico máximo, 168, 179
elástico-plástico, 168-169

energia de deformação elástica e, 526-528
externo, 125
fórmula da torção para, 127-129, 177
interno, 127-129
lei de Hooke, 127
momento de torção, como, 1
plástico, 169, 172-173, 179
regra da mão direita para, 127, 128
tensão residual e, 172-173, 179
torção inelástica e, 167-170
total, 169-170
Torque constante, 140
Torque elástico, 168, 178
Torque elástico-plástico, 168
Torque plástico, 169, 172-173, 179
torção inelástica e, 169, 179
tensão residual e, 172-173, 179
Torque resistente, 169-170
Trabalho externo, 519-520, 531-532, 566
conservação de energia e, 531-532
deslocamento e, 519, 531
energia de deformação, 520-521
força, 519-520, 531
momentos conjugados, 520, 532
Trabalho virtual interno, 545-546
Trabalho virtual, 544-546, 546-550, 552-555, 566
condições de compatibilidade para, 544
condições de equilíbrio para, 544
equação, 545
interno, 545, 546
método das forças virtuais, 545, 546-547, 552-555
método dos deslocamentos virtuais, 545
momento conjugado, 545
princípio do, 544-546
treliças, aplicado a, 546-547
vigas, aplicado a, 552-555
Trabalho, 519-521, 531, 566. *Veja também* Energia de deformação; Trabalho virtual
externo, 519-520, 531, 566
interno, 520-521, 531
momento conjugado, de um, 520
Transformação de deformação, 361-400
círculo de Mohr, 367-371, 398
deformação plana, 361-362, 362-364, 367-371, 375, 398
dilatação e, 381-382, 399
extensômetro de resistência elétrica para, 376
falha, teorias da, 388-394, 399
lei de Hooke para, 380-380, 399
módulo de cisalhamento (G) para, 380-381, 399
módulo de compressibilidade e, 382, 399
procedimento de análise para, 367-368
relações entre o material e suas propriedades, 380-384
rosetas de deformação, 376
tensão de deformação máxima absoluta, 373-375, 398
Transformação de tensão, 321-360
carga axial e torção, provocada por, 345
círculo de Mohr para, 338-344, 359
deformação por cisalhamento máxima absoluta e, 351-354, 359
eixos, 345
equações para, 324-326, 358
procedimentos de análise para, 322, 326, 340
tensão de cisalhamento no plano, 327-331, 358
tensão no plano, 321-324, 324-326, 338-344, 353-354, 358
tensão triaxial, 351-353
tensões principais, 327-331, 358
vigas prismáticas, 346
Transmissão de potência, 132-133, 177
Treliças, 546-547, 558-561
método das forças virtuais aplicado a, 546-547
teorema de Castigliano aplicado a, 559-561
Tubos, parede fina, 157-159
ângulo de torção (ϕ) for, 159-160
fluxo de cisalhamento (q) em, 157-158
seções transversais fechadas, com, 157-159
tensão de cisalhamento média e, 158-159
torção e, 157-159

U

Unidades, 14,48, 133
deformação, 48
tensão, 14
transmissão de potência, 133

V

Variações lineares em tensão normal e tensão de deformação, 204
Vasos de pressão de parede fina, 300-301, 318
cargas combinadas para, 300-301
cilíndricos, 300- 301, 318
esféricos, 301, 318
Vaso de pressão esférico, 301
Vaso de pressão cilíndricos, 300-301
Viga primária, 466
Vigas apoiadas com uma extremidade em balanço,181
Vigas compostas, 225-229, 258
Vigas curvas, 231-236, 259
análise de flexão de, 231-236, 259
direção circunferencial de, 233
fórmula para, 233
maneira hiperbólica da deformação normal em, 231
procedimento de análise para, 234
tensão radial de, 233
Vigas de abas largas, tensões de cisalhamento em, 267
Vigas de concreto armado, 229-230
Vigas de lâminas coladas , 403
Vigas em balanço, 181
Vigas fabricadas, 402-403
seções compostas, 403
seções de aço, 402
seções de madeira, 402
Vigas não prismáticas, 411, 418
Vigas prismáticas, 201-203, 203-209, 346, 402-410, 418
deformações por flexão de, 201-203
fabricadas, 402-403
fórmula da flexão para, 204-209, 402
módulo de seção, 402
procedimento de análise para, 404
projeto de, 402-410, 418
seções compostas de, 403, 410
scções de aço de, 402
seções de madeira de, 402
variações de tensão em, 346
Viga simplesmente apoiada, 181
Vigas totalmente solicitadas, 411-413, 418
Vigas, 181-261, 262-299, 346, 401-413, 419, 421-476, 552-555, 562. *Veja também* Deflexão
abas largas, 266
apoiadas com uma extremidade em balanço, 181
centro de cisalhamento para seções transversais abertas de, 289-291
chapas de assento para, 401
cisalhamento transversal em, 262-299
compostas, 225-229, 258
concentração de tensões em, 236-237, 259
concreto armado, 229-230
convenções de sinal para, 182
curvas, 231-236
deflexão de, 402, 421-476
deformação normal de, 203
deformação por flexão, 201-203
diagramas de força cortante e momento fletor para, 181-187, 188-195
elementos de parede fina de, 285-288
elementos retos, 201-203, 262-263
em balanço, 181
estaticamente indeterminadas, 457-459, 462-463, 466-468, 474

estruturas compostas por vários elementos, 277-278, 297, 403, 419
fabricadas, 402-403
fator de forma para, 247
fator de transformação, 225-226
flexão assimétrica de, 216-221, 258
flexão e, 181-261
flexão inelástica de, 244-250, 259
fluxo de cisalhamento (q) em, 277-278, 285-288, 297
fórmula da flexão para, 204-209, 258
fórmula do cisalhamento para, 263-264
integração, método da, para, 457-459, 474
método da seção transformada aplicado a, 224-226
método da superposição para, 466-471, 474
método das forças virtuais aplicado a, 552-555
método do momento de área para, 462-464, 474
não prismáticas, 411-413, 419
primárias, 466
prismáticas, 201-203, 204-209, 346, 402-404, 419
procedimentos de análise para, 182, 191, 403
projeto de, 401-413, 419
seção transversal de, 201-203, 204-205, 225-227, 236-237, 258-259
seções transversais planas de, 202
seções transversais retangulares, 265-266
simplesmente apoiadas, 181
superfície neutra de, 201-202
tensão residual de, 251-252
tensões de cisalhamento (τ) em, 265-268
teorema de Castigliano aplicado a, 563
totalmente solicitadas, 411-413, 419
variações lineares da deformação normal longitudinal, 203
Vigas-mestras de chapa, 403

Equações fundamentais da resistência dos materiais

Carga axial

Tensão normal

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Deslocamento

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$

$$\delta = \Sigma \frac{PL}{AE}$$

$$\delta_T = \alpha \Delta T L$$

Torção

Tensão de cisalhamento em eixo circular

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

onde

$J = \frac{\pi}{2}c^4$ seção transversal maciça

$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4)$ seção transversal tubular

Potência

$$P = T\omega = 2\pi fT$$

Ângulo de torção

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$$

$$\phi = \Sigma \frac{TL}{JG}$$

Tensão de cisalhamento média em um tubo de parede fina

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{T}{2tA_m}$$

Fluxo de cisalhamento

$$q = \tau_{\text{méd}} t = \frac{T}{2A_m}$$

Flexão

Tensão normal

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Flexão assimétrica

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}, \qquad \text{tg } \alpha = \frac{I_z}{I_y} \text{ tg } \theta$$

Cisalhamento

Tensão de cisalhamento direto média

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{V}{A}$$

Tensão de cisalhamento transversal

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Fluxo de cisalhamento

$$q = \tau t = \frac{VQ}{I}$$

Tensão em vaso de pressão de parede fina

Cilindro

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Esfera

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Equações de transformação de tensão

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{ sen } 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{ sen } 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Tensão principal

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensão de cisalhamento máxima no plano

$$\text{tg } 2\theta_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Tensão de cisalhamento máxima absoluta

$$\tau_{\substack{\text{abs} \\ \text{máx}}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

$$\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} + \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

Relações entre materiais e suas propriedades

Coeficiente de Poisson

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}}$$

Lei de Hooke generalizada

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

onde

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Relações entre *w, V, M*

$$\frac{dV}{dx} = -w(x), \qquad \frac{dM}{dx} = V$$

Linha elástica

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -w(x)$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

Flambagem

Carga axial crítica

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

Tensão crítica

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}, r = \sqrt{I/A}$$

Fórmula da secante

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

Métodos de energia

Conservação de energia

$$U_e = U_i$$

Energia de deformação

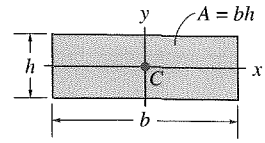
$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} \quad \textit{carga axial constante}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{EI} \quad \textit{momento fletor}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{f_s V^2 dx}{2GA} \quad \textit{cisalhamento transversal}$$

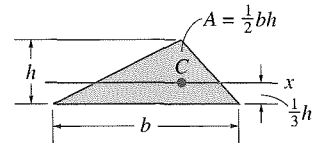
$$U_i = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2GJ} \quad \textit{momento de torção}$$

Propriedades geométricas de elementos de área



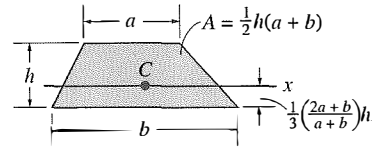
Área retangular

$I_x = \frac{1}{12}bh^3$
$I_y = \frac{1}{12}hb^3$

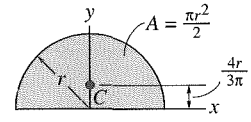


Área triangular

$I_x = \frac{1}{36}bh^3$

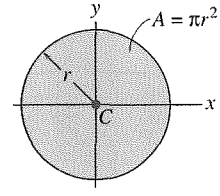


Área trapezoidal



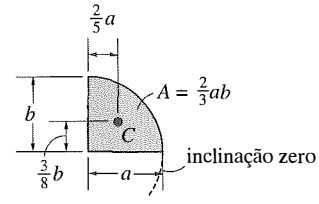
Área semicircular

$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$
$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$

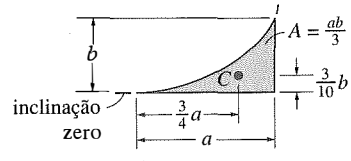


Área circular

$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$
$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$



Área semiparabólica



Área exparabólica

Propriedades mecânicas médias de materiais típicos de engenharia [a]
(Unidades Americanas Usuais)

Materiais	Peso específico γ (Densidade) (lb/pol^3)	Módulo de Elasticidade E (10^3) ksi	Módulo de elasticidade transversal (módulo de rigidez) G (10^3) ksi	Tensão de escoamento (ksi) σ_e Tração	Compr.[b]	Cisalh.	Limite de resistência (ksi) σ_l Tração	Compr.[b]	Cisalh.	% de alongamento em corpo de prova de 50 mm	Coeficiente de Poisson ν	Coeficiente de dilatação térmica α (10^{-6})/°F
Metálicos												
Ligas de alumínio forjadas — 2014-T6	0,101	10,6	3,9	60	60	25	68	68	42	10	0,35	12,8
Ligas de alumínio forjadas — 6061-T6	0,098	10,0	3,7	37	37	19	42	42	27	12	0,35	13,1
Ligas de ferro fundido — Cinzento ASTM 2	0,260	10,0	3,9	–	–	–	26	97	–	0,6	0,28	6,70
Ligas de ferro fundido — Maleável ASTM A-197	0,263	25,0	9,8	–	–	–	40	83	–	5	0,28	6,60
Ligas de cobre — Latão vermelho C83400	0,316	14,6	5,4	11,4	11,4		35	35		35	0,35	9,80
Ligas de cobre — Bronze C86100	0,319	15,0	5,6	50	50		95	95		20	0,34	9,60
Liga de magnésio [Am 1.004-T61]	0,066	6,48	2,5	22	22	–	40	40	22	1	0,30	14,3
Ligas de aço — Estrutural A36	0,284	29,0	11,0		36	–	58	58	–	30	0,32	6,60
Ligas de aço — Inoxidável 304	0,284	28,0	11,0		30	–	75	75	–	40	0,27	9,60
Ligas de aço — Ferramenta L2	0,295	29,0	11,0		102	–	116	116	–	22	0,32	6,50
Liga de titânio [T1-6A1-4V]	0,160	17,4	6,4	134	134	–	145	145	–	16	0,36	5,20
Não metálicos												
Concreto — Baixa resistência	0,086	3,20	–	–	–	1,8	–	–	–	–	0,15	6,0
Concreto — Alta resistência	0,086	4,20	–	–	–	5,5	–	–	–	–	0,15	6,0
Plástico reforçado — Kevlar 49	0,0524	19,0	–	–	–	–	104	70	10,2	2,8	0,34	–
Plástico reforçado — Vidro 30%	0,0524	10,5	–	–	–	–	13	19			0,34	–
Madeira selecionada de grau estrutural — Abeto Douglas	0,017	1,90	–	–	–	–	0,30[c]	3,78[d]	0,90[d]	–	0,29[e]	–
Madeira selecionada de grau estrutural — Espruce branco	0.130	1,40	–	–	–	–	0,36[c]	5,18[d]	0,97[d]	–	0,31[e]	–

[a] Valores específicos podem variar para um determinado material devido a composição da liga ou composição mineral, processamento mecânico do corpo de prova ou tratamento térmico. Para obter valores mais exatos, consulte livros de referência para o material.

[b] A tensão de escoamento e o limite de resistência para materiais dúteis podem ser considerados iguais para tração e compressão.

[c] Medida perpendicularmente ao grão.

[d] Medida paralelamente ao grão.

[e] Deformação medida perpendicularmente ao grão, quando a carga é aplicada ao longo do grão.

Propriedades mecânicas médias de materiais típicos de engenharia [a]
(Unidades SI)

Materiais	Peso específico ρ (Densidade) (Mg/m^3)	Módulo de Elasticidade E (GPa)	Módulo de elasticidade transversal (módulo de rigidez) G (GPa)	Tensão de escoamento (MPa) σ_e Tração	Compr.[b]	Cisalh.	Limite de resistência (MPa) σ_l Tração	Compr.[b]	Cisalh.	% de alongamento em corpo de prova de 50 mm	Coeficiente de Poisson ν	Coeficiente de dilatação térmica α $(10^{-6})/°C$
Metálicos												
Ligas de alumínio forjadas — 2014-T6	2,79	73,1	27	414	414	172	469	469	290		0,35	23
Ligas de alumínio forjadas — 6061-T6	2,71	68,9	26	255	255	131	290	290	186		0,35	24
Ligas de ferro fundido — Cinzento ASTM 2	7,19	67,0	27	–	–	–	179	669	–	0,6	0,28	12
Ligas de ferro fundido — Maleável ASTM A-197	7,28	172	68	–	–	–	276	572	–	5	0,28	12
Ligas de cobre — Latão vermelho C83400	8,74	101	37	70,0	70,0	–	241	241	–	35	0,35	18
Ligas de cobre — Bronze C86100	8,83	103	38	345	345	–	655	655	–	20	0,34	17
Liga de magnésio [Am 1004-T61]	1,83	44,7	18	152	152	–	276	276		1	0,30	26
Ligas de aço — Estrutural A36	7,85	200	75	250	250	–	400	400	–	30	0,32	12
Ligas de aço — Inoxidável 304	7,86	193	75	207	207	–	517	517	–	40	0,27	17
Ligas de aço — Ferramenta L2	8,16	200	75	703	703	–	800	800	–	22	0,32	12
Liga de titânio [T1-6A1-4V]	4,43	120	44	924	924	–	1.000	1.000	–	16	0,36	9,4
Não metálicos												
Concreto — Baixa resistência	2,38	22,1	–	–	–	12	–	–	–	–	0,15	11
Concreto — Alta resistência	2,38	29,0	–	–	–	38	–	–	–	–	0,15	11
Plástico reforçado — Kevlar 49	1,45	131	–	–	–	–	717	483	20,3	2,8	0,34	–
Plástico reforçado — Vidro 30%	1,45	72,4	–	–	–	–	90	131	–		0,34	–
Madeira selecionada de grau estrutural — Abeto Douglas	0,47	13,1	–	–	–	–	2,1[c]	26[d]	6,2[d]	–	0,29[e]	–
Madeira selecionada de grau estrutural — Espruce branco	3,60	9,65	–	–	–	–	2,5[c]	36[d]	6,7[d]	–	0,31[e]	–

[a] Valores específicos podem variar para um determinado material devido a composição da liga ou composição mineral, processamento mecânico do corpo de prova ou tratamento térmico. Para obter valores mais exatos, consulte livros de referência para o material.

[b] A tensão de escoamento e o limite de resistência para materiais dúteis podem ser considerados iguais para tração e compressão.

[c] Medida perpendicularmente ao grão.

[d] Medida paralelamente ao grão.

[e] Deformação medida perpendicularmente ao grão, quando a carga é aplicada ao longo do grão.

R. C. Hibbeler

Engenharia

Resistência dos materiais

7ª edição

Abordando a teoria e os princípios fundamentais da resistência dos materiais de maneira clara, esta sétima edição — que utiliza exclusivamente o Sistema Internacional de Unidades (SI) — confirma a obra de Hibbeler como referência da área.

Além de trazerem problemas na forma de exemplos ilustrativos, figuras tridimensionais e exercícios, os capítulos apresentam problemas propostos em diferentes níveis de dificuldade. Para completar, situações reais são usadas para estimular o interesse do estudante pelo assunto, bem como seções que orientam a solução de problemas diversos.

Indicado para estudantes de engenharia mecânica, civil, metalúrgica, química e elétrica, este livro traz todos os recursos didáticos necessários para auxiliar o leitor a visualizar conceitos complexos.

CW

www.prenhall.com/hibbeler_br

Manual de soluções (em inglês) e apresentações em PowerPoint para professores.

Prentice Hall
é um selo da
PEARSON

www.pearson.com.br

ISBN 978-85-7605-373-6